Física General

Tema 2 – Cinemática de la partícula

- Introducción
- Movimiento en una dimensión:
  - posición, velocidad, aceleración
  - movimiento uniformemente acelerado
- Generalización a tres dimensiones:
  - vectores posición, velocidad, aceleración
  - movimiento de proyectiles
  - aceleración tangencial y normal al plano
- Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

Introducción

Movimiento: cambio de posición (en función de ?)

Introducción

- Mecánica estudia el *movimiento* de objetos/cuerpos
- Objetos/cuerpos: de partículas subatómicas a galaxias
  - Modelo mínimo: partícula puntual
- Cinemática: estudio del movimiento, i.e. variaciones en el espacio, en función del *tiempo*

$$\text{posición } \vec{r}, \quad \text{velocidad } \vec{v}, \quad \text{aceleración } \vec{a}$$

- Dinámica: causas de cambios en el movimiento

$$\text{fuerzas } \vec{F}, \quad \text{masa } m$$

[N.B. Fuerzas $\rightarrow$ interacciones, masa $\rightarrow$ propiedades del objeto]

- Mecánica *clásica*: velocidades $\ll c$, acciones $\gg h$

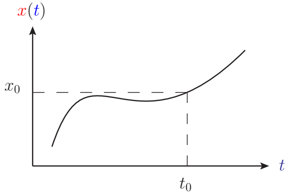
$$\text{si (velocidades } \sim c), \quad \text{es necesaria la mecánica relativista}$$

$$\text{si (acciones } \sim h), \quad \text{es necesaria la mecánica cuántica}$$

Movimiento en una dimensión: posición

- Conocer el movimiento de una partícula puntual:

  determinar la función posición $x(t)$ para todo t

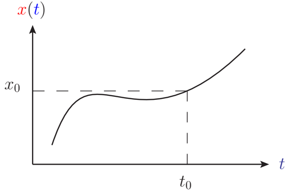


  - el tiempo t es la variable independiente
  - la posición x es la variable dependiente
  - Importancia de la elección coordenadas: eje y origen x, t
- Dimensiones: $[x] = L$; unidades S.I. m

Movimiento en una dimensión: posición

- Conocer el movimiento de una partícula puntual:

determinar la función posición $x(t)$ para todo t



- Ejemplo: la posición de un cuerpo está dada por

$$x(t) = \alpha t^2 + \beta \cos(\omega t)$$

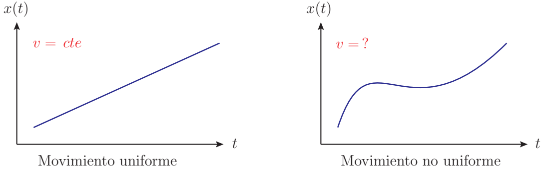
con $\alpha = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\beta = 2\,\mathrm{m}$, $\omega = \pi\,\mathrm{s^{-1}}$.

  - Calcula la posición para $t_1 = 1\,\mathrm{s}$, $t_2 = 2\,\mathrm{s}$.
  - Calcula el desplazamiento (cambio de posición) entre t_1 y t_2.

Movimiento en una dimensión: velocidad

- Velocidad (instantánea): variación de la posición con el tiempo

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad \text{[Atención al signo]}$$



- Dimensiones: $[v] = LT^{-1}$; unidades S.I. $\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Velocidad media: para un desplazamiento $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (t_2 \to t_1 \ \Rightarrow \overline{v} \to v(t_1))$$

- Movimiento uniforme: $\overline{v} = v$

Movimiento en una dimensión: aceleración

- Aceleración (instantánea): variación de la velocidad con el tiempo

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \qquad \text{[Atención al signo]}$$

- Dimensiones: $[a] = LT^{-2}$; unidades S.I. $\mathrm{m\,s^{-2}}$
- Aceleración media: para un cambio de velocidad $\Delta v = v(t_2) - v(t_1)$ en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (t_2 \to t_1 \ \Rightarrow \overline{a} \to a(t_1))$$

- Movimiento uniforme: $\overline{a} = a = 0$
- Cuidado con “lenguaje común”
  - $v_1 < v_2 < 0$: “v_1 más rápido que v_2” ($|v_1| > |v_2|$)
  - $v < 0$ y $\frac{dv}{dt} < 0$ pero “acelera” ($\frac{d|v|}{dt} > 0$)

Movimiento en una dimensión: ejemplos

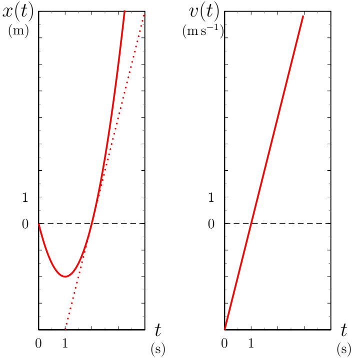
Ejemplo: una partícula se mueve desplazándose por un plano inclinado de acuerdo con la expresión

$$x(t) = -4t + 2t^2, \quad x \text{ en metros, } t \text{ en segundos}$$

- Representa gráficamente la posición y la velocidad.
- Calcula la velocidad y la aceleración en $t = 2$ s.
- Calcula la velocidad media entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 2$ s.

Movimiento en una dimensión: ejemplos

- $v(t) = -4 + 4t$,
  $v(2\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $a(t) = 4$, $a(2\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- $x(0) = 0$, $x(2\,\mathrm{s}) = 0 \Rightarrow \overline{v} = 0$
  [N.B. ha recorrido 4 m]



Movimiento en una dimensión: ejemplos

Ejemplo:
la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es

$$v(t) = 40 - 5t^2, \quad v \text{ en m s}^{-1}, \text{ tiempo } t \text{ en segundos}$$

- Representa gráficamente la velocidad.
- Determina y representa gráficamente la aceleración.
- Calcula la aceleración en $t = 2$ s.
- Calcula la aceleración media entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 2$ s.

Movimiento en una dimensión: ejemplos

Ejemplo:
la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x es

$$v(t) = 40 - 5t^2, \quad v \text{ en } \mathrm{m\,s^{-1}}, \text{ tiempo } t \text{ en segundos}$$

- Representación gráfica.
- Aceleración

$$a(t) = -10t, \quad a \text{ en } \mathrm{m\,s^{-2}}, \text{ tiempo } t \text{ en segundos}$$

- Aceleración en $t = 2$ s, $a(2\,\mathrm{s}) = -20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
- Aceleración media entre $t_1 = 0$ y $t_2 = 2$ s:

$$v_1 = v(0) = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v_2 = v(2\,\mathrm{s}) = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Movimiento en una dimensión

En general,

- conocida $x(t)$,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \ a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{completamente determinadas}$$

- conocida $a(t)$,

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} dt' a(t'), \ x(t) = \int_{t_0}^{t} dt' v(t') \quad \text{no completamente determinadas}$$

Constantes de integración

$$x_1(t), \qquad x_2(t) = x_1(t) + \alpha, \qquad x_3(t) = x_1(t) + \alpha + \beta t,$$

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}, \quad v_2(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = v_1(t), \quad v_3(t) = \frac{dx_3(t)}{dt} = v_1(t) + \beta,$$

$$a_1(t) = \frac{dv_1(t)}{dt}, \quad a_2(t) = \frac{dv_2(t)}{dt} = a_1(t), \quad a_3(t) = \frac{dv_3(t)}{dt} = a_1(t)$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

- Caso particular de interés:

  movimiento uniformemente acelerado $a = \text{cte}$

- Aceleración, velocidad, posición:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= a_0 \\
v(t) &= v_0 + a_0 t \\
x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2
\end{aligned}
$$

- Ejemplo: una persona conduce un vehículo por una carretera (recta), observa un coche parado y frena hasta detenerse con una deceleración constante de $5\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
  - ¿Cuál es la distancia de frenado si su velocidad inicial es (i) $25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, (ii) $50\ \mathrm{m\,s^{-1}}$?

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo: una persona conduce un vehículo por una carretera (recta), observa un coche parado y frena hasta detenerse con una deceleración constante de 5 $\mathrm{m\,s^{-2}}$. ¿Cuál es la distancia de frenado si su velocidad inicial es (i) 25 $\mathrm{m\,s^{-1}}$, (ii) 50 $\mathrm{m\,s^{-1}}$?

- Análisis dimensional, cantidades relevantes: deceleración a_0, velocidad inicial v_0
  - Tiempo $\propto \frac{v_0}{a_0}$ (factor 2 entre ambos casos),
  - Distancia $\propto \frac{v_0^2}{a_0}$ (factor 4 entre ambos casos)
- Ecuaciones de movimiento

$$a(t) = -a_0, \quad v(t) = v_0 - a_0 t, \quad x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

con $a_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v_0 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ o $50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

- Ecuaciones de movimiento

$$a(t) = -a_0 \quad v(t) = v_0 - a_0 t \quad x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a_0 t^2$$

con $a_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $v_0 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ o $50\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

- Tiempo de frenado, t_f tal que $v(t_f) = 0$,

$$v(t_f) = 0 \;\Leftrightarrow\; t_f = \frac{v_0}{a_0}$$

- Distancia recorrida $x(t_f)$

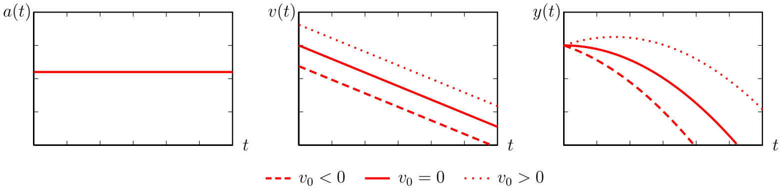
$$x(t_f) = v_0 \frac{v_0}{a_0} - \frac{1}{2} a_0 \frac{v_0^2}{a_0^2} = \frac{v_0^2}{2a_0}$$

- Para $v_0 = 25\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t_f = 5\,\mathrm{s}$, $x(t_f) = 62.5\,\mathrm{m}$
- Para $v_0 = 50\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t_f = 10\,\mathrm{s}$, $x(t_f) = 250\,\mathrm{m}$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

- Caída libre: movimiento con aceleración de la gravedad $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ constante
  (N.B. superficie terrestre, despreciando resistencia del aire)
- Eje y orientado "hacia arriba"
- Aceleración, velocidad, posición

$$a(t) = -g \qquad v(t) = v_0 - gt \qquad y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$



Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo:
Desde lo alto de un edificio de 50 m de altura se lanza hacia arriba una piedra con velocidad inicial 20 $\mathrm{m\,s^{-1}}$. (Durante el trayecto descendente la piedra pasa "justo al lado del edificio")
Determina

- la altura máxima alcanzada por encima del tejado,
- el tiempo que tarda en volver a pasar a la altura del tejado; ¿con qué velocidad lo hace?
- El tiempo que tarda en llegar al suelo y su velocidad al hacerlo.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo:

- Trayectoria

$$a(t) = -g, \qquad v(t) = v_0 - gt, \qquad y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

con $v_0 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $y_0 = 50$ m.

- Altura máxima: tiempo t tal que $v(t) = 0$

$$v(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0}{g} = 2.04\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow\; y\left(\frac{v_0}{g}\right) = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 70.4\,\mathrm{m}$$

- Tiempo t tal que $y(t) = y(0) = y_0$

$$y(t) = y_0 \;\Leftrightarrow\; t\left(v_0 - \frac{1}{2} g t\right) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v_0}{g} = 4.08\,\mathrm{s}$$

Velocidad

$$v\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo:

- Alcanza el suelo: tiempo t tal que $y(t) = 0$,

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4y_0\frac{g}{2}}}{-g} = \frac{v_0}{g}\left(1 \mp \sqrt{1 + 2\frac{y_0 g}{v_0^2}}\right)$$

$$\rightarrow \; t_{y=0} = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{y_0 g}{v_0^2}}\right) = 5.83\,\mathrm{s}$$

Velocidad

$$v(t_{y=0}) = v_0 - g t_{y=0} = -v_0\sqrt{1 + 2\frac{y_0 g}{v_0^2}} = -37.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

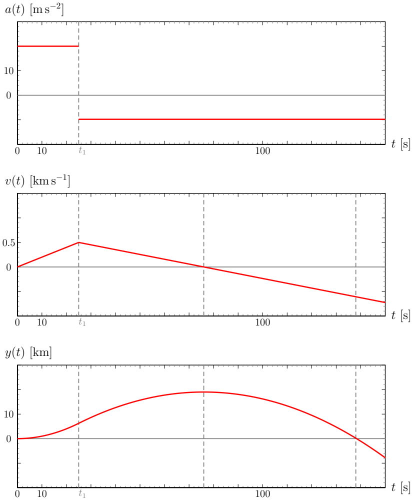
Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (aceleración uniforme a tramos):
Un cohete se lanza verticalmente hacia arriba con una aceleración de 20 m s^{-2}. Al cabo de 25 segundos, se agota el combustible y el cohete continúa moviéndose como una partícula libre hasta que alcanza el suelo. Supondremos que no hay rozamiento con el aire.

- Representa en general $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$ en tres gráficas que compartan el eje de tiempos.
- Escribe las expresiones de la posición, velocidad y aceleración que rigen en cada tramo.
- Calcula el punto más alto alcanzado por el cohete.
- Calcula el tiempo total que el cohete está en el aire.
- La velocidad del cohete justo antes de chocar contra el suelo.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (aceleración uniforme a tramos):



Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (aceleración uniforme a tramos):

- Tramo $0 \leq t < t_1 = 25$ s

$$a(t) = a_0, \qquad v(t) = a_0 t, \qquad y(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

con $a_0 = 20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

- Tramo $t_1 \leq t$

$$a(t) = -g, \quad v(t) = v_1 - g(t - t_1), \quad y(t) = y_1 + v_1(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2$$

con $v_1 = a_0 t_1 = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $y_1 = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = 6.25\,\mathrm{km}$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (aceleración uniforme a tramos):

- Punto más alto: $t - t_1 > 0$ tal que $v(t) = 0$,

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_1 = g(t - t_1) \Rightarrow t_{y_{\max}} = t_1 + \frac{v_1}{g} = t_1 \left(1 + \frac{a_0}{g}\right) = 76\,\mathrm{s}$$

$y_{\max}$ (con $t_{y_{\max}} - t_1 = \frac{v_1}{g}$)

$$y_{\max} = y\left(t_{y_{\max}}\right) = y_1 + v_1 \frac{v_1}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_1^2}{g^2} = y_1 + \frac{v_1^2}{2g} =$$
$$\frac{1}{2} a_0 t_1^2 + \frac{(a_0 t_1)^2}{2g} = \frac{1}{2} a_0 t_1^2 \left(1 + \frac{a_0}{g}\right) = 19.9\,\mathrm{km}$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (aceleración uniforme a tramos):

- Tiempo total, $t - t_1 > 0$ tal que $y(t) = 0$,

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow t - t_1 = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2y_1 g}}{-g} = \frac{v_1}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2y_1 g}{v_1^2}}\right)$$

$$\rightarrow \; t_{y=0} = t_1 + \frac{v_1}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2y_1 g}{v_1^2}}\right) = 138\,\mathrm{s}$$

- Velocidad del cohete al chocar con el suelo,

$$v(t_{y=0}) = v_1 - g t_{y=0} = -v_1\sqrt{1 + \frac{2y_1 g}{v_1^2}} = -610\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):
Un coche lleva una velocidad de 25 m s^{-1} en una zona escolar. Un coche de policía que está parado, arranca cuando el infractor le adelanta y acelera a razón de 5 m s^{-2}.

- ¿Cuánto tarda el coche de policía en alcanzar al infractor?
- ¿Cuál es la velocidad del coche de policía cuando lo alcanza?
- ¿Cuál es la velocidad del coche de policía cuando se encuentra 25 m por detrás del infractor?

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):

- Ecuaciones de movimiento [N.B. Adelantamiento en $t = 0$]

$$x_c(t) = v_c t, \qquad x_p(t) = \frac{1}{2} a_p t^2$$

- Coche alcanzado por policía, tiempo t tal que $x_c(t) = x_p(t)$

$$x_c(t) = x_p(t) \;\Leftrightarrow\; v_c t = \frac{1}{2} a_p t^2 \;\Rightarrow\; t = \frac{2v_c}{a_p} = 10\,\mathrm{s}$$

  Han recorrido 250 m.

- Velocidad de la policía $v_p(t) = a_p t$,

$$v_p\left(\frac{2v_c}{a_p}\right) = 2v_c = 50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):

- Tiempo t tal que $x_c(t) = x_p(t) + D$, $D = 25\,\mathrm{m}$:

$$v_c t = \frac{1}{2} a_p t^2 + D \;\Rightarrow\; t_\pm = \frac{v_c \pm \sqrt{v_c^2 - 2Da_p}}{a_p} = \frac{v_c}{a_p}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2Da_p}{v_c^2}}\right)$$

$$t_- = 1.13\,\mathrm{s}, \quad t_+ = 8.87\,\mathrm{s}$$

$$x_c(t_-) = 28.2\,\mathrm{m} \qquad x_p(t_-) = 3.2\,\mathrm{m}$$
$$x_c(t_+) = 221.8\,\mathrm{m} \qquad x_p(t_+) = 196.8\,\mathrm{m}$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):

- Pregunta adicional: ¿en qué instante de la persecución $t_{D_{\max}}$ es mayor la distancia entre ambos coches?
  Si $D(t) = x_c(t) - x_p(t)$, obtendremos la respuesta buscando el máximo de $D(t)$; para ello, lo primero será resolver $\frac{dD(t)}{dt} = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(x_c(t) - x_p(t)\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; v_c - a_p t = 0 \;\Rightarrow\; t_{D_{\max}} = \frac{v_c}{a_p} = 5\,\mathrm{s}.$$

Para $t = t_{D_{\max}}$,

$$x_c(t_{D_{\max}}) = \frac{v_c^2}{a_p} = 125\,\mathrm{m}, \quad x_p(t_{D_{\max}}) = \frac{1}{2} a_p \frac{v_c^2}{a_p^2} = \frac{v_c^2}{2a_p} = 62.5\,\mathrm{m}.$$

y la separación entre ambos es

$$x_c(t_{D_{\max}}) - x_p(t_{D_{\max}}) = \frac{v_c^2}{2a_p} = 62.5\,\mathrm{m}.$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):

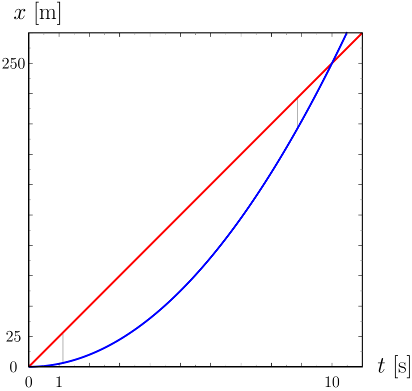
- Físicamente, podíamos adelantar que la distancia máxima se da cuando las velocidades de ambos son iguales: para tiempos anteriores, la policía tendrá una velocidad inferior a la del coche (por tanto la separación entre ambos aumenta), mientras para tiempos posteriores la policía tendrá una velocidad superior a la del coche (por tanto la separación entre ambos disminuye). Al requerir $\frac{dD(t)}{dt} = 0$, tenemos de hecho

$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{dx_c(t)}{dt} - \frac{dx_p(t)}{dt} = 0,$$

confirmando lo mencionado.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo (2 cuerpos):



$$x_c(t) = v_c t \qquad x_p(t) = \frac{1}{2} a_p t^2$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejemplo:
Una persona en un ascensor ve que un tornillo se suelta del techo. La altura del ascensor es 3 m. ¿Cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo si el ascensor asciende con una aceleración constante de 4.0 m s^{-2}?

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejempo (2 cuerpos):

- Coordenadas: eje vertical y con origen en la posición del suelo en el momento en que se suelta el tornillo, origen de tiempos ($t = 0$) en ese instante
- Aceleraciones de tornillo y ascensor, para $t > 0$

$$a_T(t) = -g = -9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,, \qquad a_A(t) = a_0 = 4.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

- Velocidades

$$v_T(t) = v_0 - gt\,, \qquad v_A(t) = v_0 + a_0 t$$

con v_0 la velocidad del ascensor en el momento en que el tornillo se suelta

- Posiciones

$$y_T(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\,, \qquad y_A(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

con h la altura del ascensor

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejempo (2 cuerpos):

- "Tornillo choca contra el suelo" $\Leftrightarrow y_T(t) = y_A(t)$ $(t > 0)$

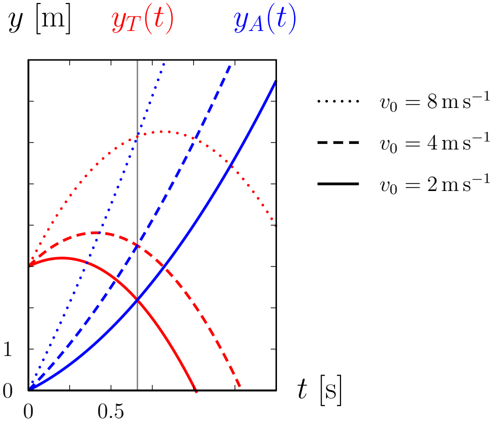
$$y_T(t) = y_A(t) \;\Leftrightarrow\; h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\Leftrightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{a_0 + g}} = 0.66\,\mathrm{s}$$

- ¿Por qué no depende de v_0?

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejempo (2 cuerpos):



Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Ejercicio: siendo

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \,, \quad v(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

con y_0, v_0, a_0, conocidas, verifica que para todo $t_1 \neq t_2$

$$a_0 y(t_2) - a_0 y(t_1) = \frac{1}{2} \left(v(t_2)\right)^2 - \frac{1}{2} \left(v(t_1)\right)^2$$

[N.B. Anticipando conservación de energía]

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Tenemos

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \,, \quad v(t) = v_0 + a_0 t$$

de modo que por una parte

$$\begin{aligned} a_0\left(y(t_2) - y(t_1)\right) &= a_0\left(v_0(t_2 - t_1) + \frac{a_0}{2}(t_2^2 - t_1^2)\right) \\ &= a_0(t_2 - t_1)\left(v_0 + \frac{a_0}{2}(t_2 + t_1)\right) \end{aligned}$$

y por la otra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(v(t_2)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(v(t_1)\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(v(t_2) - v(t_1)\right)\left(v(t_2) + v(t_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a_0(t_2 - t_1)\right)\left(2v_0 + a_0(t_1 + t_2)\right) \\ &= a_0(t_2 - t_1)\left(v_0 + \frac{a_0}{2}(t_2 + t_1)\right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Otra perspectiva:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \,, \quad v(t) = v_0 + a_0 t$$

El enunciado a verificar es equivalente a decir que la siguiente cantidad,

$$Q(t) \equiv \frac{1}{2} \left(v(t)\right)^2 - a_0 y(t)$$

es constante,

$$Q(t_1) = Q(t_2) = c \quad \text{para todo } t_1,\, t_2,$$

y por tanto $\frac{d}{dt} Q(t) = 0$. Verificamos

$$\frac{d}{dt} Q(t) = v(t) \frac{dv(t)}{dt} - a_0 \frac{dy(t)}{dt} = v(t) a_0 - a_0 v(t) = 0 \quad \checkmark$$

Generalización a 3D: posición, velocidad, aceleración

- Elección de sistema de coordenadas (origen y base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$)
- Vector posición (trayectoria)

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Variables dependientes x, y, z, variable independiente t

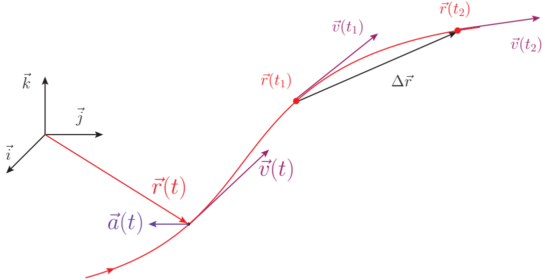
- Vector velocidad (vector tangente a la trayectoria en $\vec{r}(t)$)

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = v_x(t)\,\vec{i} + v_y(t)\,\vec{j} + v_z(t)\,\vec{k}$$

- Vector aceleración

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\,\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\,\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} = a_x(t)\,\vec{i} + a_y(t)\,\vec{j} + a_z(t)\,\vec{k}$$

Generalización a 3D: posición, velocidad, aceleración



Entre los instantes t_1 y t_2, $\Delta t = t_2 - t_1$

- desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_2)$
- velocidad media $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$
- aceleración media $\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2)-\vec{v}(t_1)}{\Delta t}$

Generalización a 3D: posición, velocidad, aceleración

Movimiento uniformemente acelerado

- Posición, velocidad, aceleración

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\, t$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{a}_0$$

- Movimiento tiene lugar en un plano dado por $\vec{v}_0$, $\vec{a}_0$, que pasa por $\vec{r}_0$ (i.e. movimiento en 2D)
- Si $\vec{v}_0 \propto \vec{a}_0$ (i.e. $\vec{v}_0 \times \vec{a}_0 = \vec{0}$), movimiento en 1D

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Movimiento de proyectiles (tiro parabólico)

- 2 dimensiones, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ($\vec{i} : \rightarrow$, $\vec{j} : \uparrow$)
- movimiento uniformemente acelerado: $\vec{a} = -g\vec{j} = (0, -g)$
  (campo gravitatorio, superficie terrestre)
- condiciones iniciales

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta_0, v_0 \sin\theta_0)$$

- Ecuaciones de movimento $\int dt\, \vec{a} \rightarrow \int dt\, \vec{v} \rightarrow \vec{r}(t)$

$$a_x(t) = 0, \quad v_x(t) = v_0 \cos\theta_0, \quad x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta_0\, t$$

$$a_y(t) = -g, \quad v_y(t) = v_0 \sin\theta_0 - gt, \quad y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

- Composición de dos movimientos
  - caída libre en la dirección $\vec{j}$ (vertical)
  - movimiento uniforme en la dirección $\vec{i}$ (horizontal)

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

- Trayectoria $y(x)$

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0} \;\Rightarrow\; y = y_0 + \tan\theta_0 \,(x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}(x - x_0)^2$$

$\rightarrow$ parábola

- Altura máxima $y_{\max}$ (asumiendo $v_0 \sin\theta_0 > 0$)

$$\frac{dy}{dt} = v_y = 0 \;\Rightarrow\; t_{y_{\max}} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \;\Rightarrow\; y_{\max} = y(t_{y_{\max}}) = y_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$

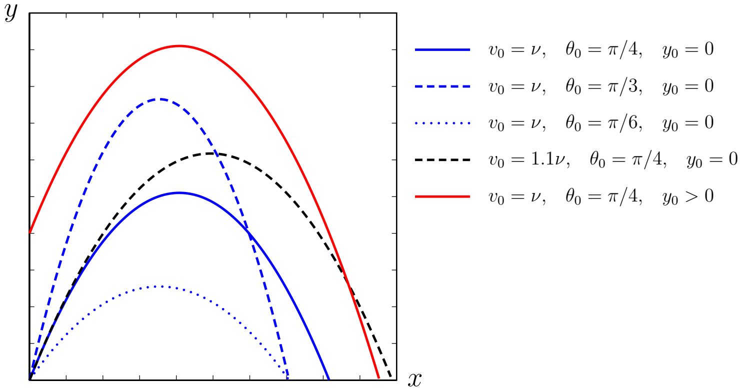
- Alcance horizontal $x_{\max}$ (asumiendo altura inicial = altura final)

$$y(x_{\max}) = y_0 \;\Rightarrow\; x_{\max} = x_0 + \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0\cos\theta_0 = x_0 + \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$

para v_0 fija, $x_{\max}$ máximo para $\theta_0 = \pi/4$
Importante: si altura inicial $\neq$ altura final, la situación cambia!

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplos



Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo: Un helicóptero deja caer un paquete con suministros a las víctimas de una inundación que se hallan en una balsa. Cuando el paquete se lanza, el helicóptero se encuentra 100 m encima de la balsa, volando a $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ con un ángulo de $36.9°$ sobre la horizontal.

- ¿Durante cuánto tiempo estará el paquete en el aire?
- ¿A qué distancia de la balsa caerá el paquete?
- Si el helicóptero continúa a velocidad constante, ¿cuál será su posición en el momento en el que el paquete aterriza?

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo helicóptero-paquete-balsa

- Coordenadas: x horizontal, y vertical, origen: posición del helicóptero, suelta el paquete en $t = 0$
- Trayectorias

$$\vec{r}_H(t) = (\cos\theta_0 \vec{i} + \sin\theta_0 \vec{j}) v_0 t$$
$$\vec{r}_P(t) = (\cos\theta_0 \vec{i} + \sin\theta_0 \vec{j}) v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{j}$$

- Aterrizaje cuando $y_P(t) = -h = 100\,\mathrm{m}$

$$-h = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \;\Rightarrow\; t_\pm = \frac{v_0 \sin\theta_0 \pm \sqrt{(v_0 \sin\theta_0)^2 + 2gh}}{g}$$
$$t_\pm = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin\theta_0)^2}} \right) \Rightarrow t_+ = 6.30\,\mathrm{s}$$

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo helicóptero-paquete-balsa

- Distancia paquete-balsa, $D = |\vec{r}_P(t_+) - \vec{r}_B|$, con $\vec{r}_B = -h\vec{j}$,

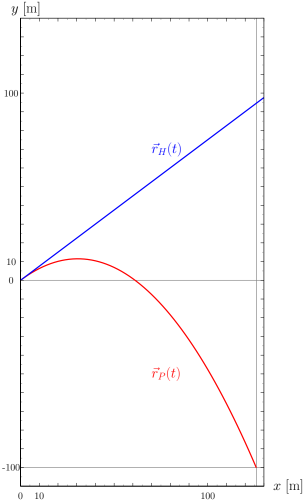
$$D = |v_0 t_+ \cos\theta_0| = \frac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin\theta_0)^2}}\right) = 126\,\mathrm{m}$$

- Posición del helicóptero $\vec{r}_H(t_+)$

$$\begin{aligned}
\vec{r}_H(t_+) &= (\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})v_0 t_+ \\
&= (\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})\frac{v_0^2 \sin\theta_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{(v_0 \sin\theta_0)^2}}\right) \\
&= D\vec{i} + D\tan\theta_0\vec{j} = (126\vec{i} + 95.5\vec{j})\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

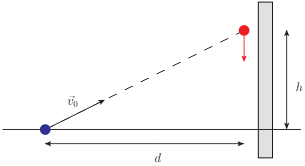
Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo helicóptero-paquete-balsa



Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

- Ejemplo: Un guardabosques con una cerbatana pretende disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una rama. El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica. Sin embargo, viendo salir el dardo de la cerbatana, el mono se suelta de la rama esperando evitar el dardo.



  - ¿Cuál es la velocidad mínima para que el alcance del dardo sea d?
  - Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cuál sea la velocidad inicial del dardo.

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo guardabosques-dardo-mono

- Velocidad mínima: $|\vec{v}_0| = v_0$ tal que el alcance sea d con θ_0 dado $(\tan\theta_0 = \frac{h}{d})$

$$\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 = d \;\Rightarrow\; v_{0\,\mathrm{min}} = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{gd}{2}\left(\frac{h}{d}+\frac{d}{h}\right)}$$

- Ecuaciones de movimiento

$$\text{Dardo: } \left\{\begin{array}{c} x_D(t) = v_0\cos\theta_0\ t \\ y_D(t) = v_0\sin\theta_0\ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\}, \quad \text{Mono: } \left\{\begin{array}{c} x_M(t) = d \\ y_M(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\}$$

con x horizontal en sentido guardabosques $\rightarrow$ árbol, y vertical hacia arriba, origen en el punto de lanzamiento del dardo,

- El dardo alcanza al mono si existe solución $t > 0$ de

$$\left\{\begin{array}{c} x_D(t) = x_M(t) \\ y_D(t) = y_M(t) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} v_0\cos\theta_0\ t = d, \\ v_0\sin\theta_0\ t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sol.: } t = \frac{d}{v_0\cos\theta_0}$$

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo guardabosques-dardo-mono

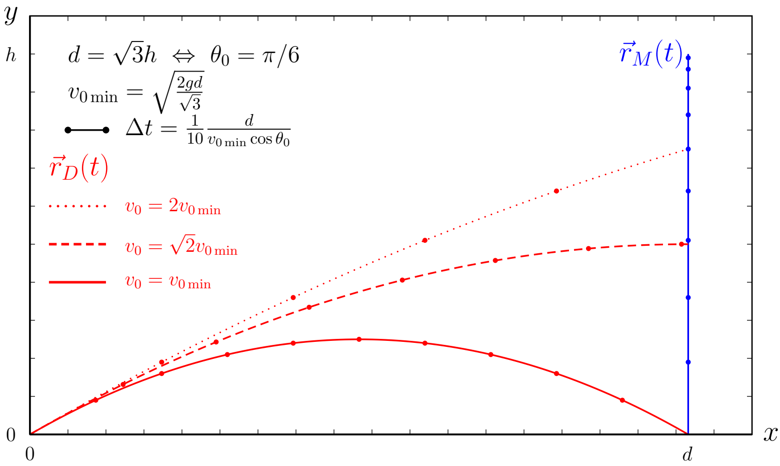
- El dardo alcanza al mono si existe solución $t > 0$ de

$$\begin{Bmatrix} x_D(t) = x_M(t) \\ y_D(t) = y_M(t) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} v_0 \cos\theta_0 \ t = d, \\ v_0 \sin\theta_0 \ t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{sol.: } t = \frac{d}{v_0 \cos\theta_0}$$

- Con independencia de v_0, la solución siempre existe [N.B. aunque el tiempo de vuelo y la altura a la que coinciden dardo y mono dependan de v_0]
- A reflexionar: solución trivial para $g \to 0$, extensión a $g \neq 0$
  - Si "apagáramos la gravedad", es decir tomáramos $g \to 0$, el dardo alcanzaría al mono siguiendo una trayectoria rectilínea a velocidad constante (al soltarse de la rama, el mono "flotaría" en la misma posición), cualquiera fuera esta velocidad.
  - Recuperando $g \neq 0$, es importante señalar que, con respecto al caso $g = 0$, la modificación en las posiciones tanto de dardo como de mono se obtiene añadiendo un término $-\frac{1}{2}gt^2\vec{j}$, con lo que, si hay alcance para $g = 0$, podríamos haber adelantado que el dardo siempre alcanzaría al mono, con independencia de v_0.

Generalización a 3D: movimiento de proyectiles

Ejemplo guardabosques-dardo-mono



Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Trayectoria $\vec{r}(t)$
- Velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, tangente a la trayectoria
- Aceleración $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, variación de la velocidad
- Descomposición de $\vec{a}$ según $\vec{v}$

Aceleración tangencial $\quad \vec{a}_{\parallel} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}, \qquad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\parallel} = \vec{v}\cdot\vec{a}$

Aceleración normal $\quad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \quad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\perp} = 0$

$\vec{a}_{\parallel}$ (o $\vec{v}$) y $\vec{a}_{\perp}$ definen un plano (en cada punto de la trayectoria)

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Descomposición de $\vec{a}$ según $\vec{v}$

$$\text{Aceleración tangencial} \qquad \vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}, \qquad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\parallel} = \vec{v}\cdot\vec{a}$$

$$\text{Aceleración normal} \qquad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \quad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\perp} = 0$$

- Variación de $|\vec{v}|$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{2|\vec{v}|}\frac{d|\vec{v}|^2}{dt} = \frac{1}{2|\vec{v}|}\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\vec{a} = \vec{a}_{\parallel}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

La aceleración tangencial controla la variación de $|\vec{v}|$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \vec{a}_{\parallel}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm|\vec{a}_{\parallel}|$$

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Descomposición de $\vec{a}$ según $\vec{v}$

$$\text{Aceleración tangencial} \qquad \vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}, \qquad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\parallel} = \vec{v}\cdot\vec{a}$$

$$\text{Aceleración normal} \qquad \vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel}, \qquad \vec{v}\cdot\vec{a}_{\perp} = 0$$

- Variación de $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ (dirección de $\vec{v}$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}\frac{1}{|\vec{v}|^2}\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{1}{|\vec{v}|}\left(\vec{a} - \vec{v}\,\frac{\vec{a}_{\parallel}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right) = \frac{\vec{a}_{\perp}}{|\vec{v}|}$$

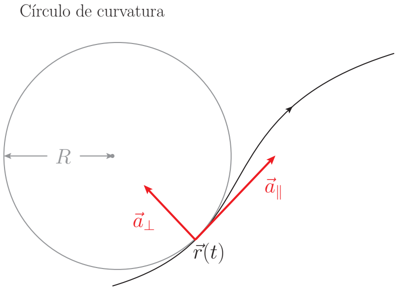
La aceleración normal controla la variación de la dirección de $\vec{v}$

- A mayor $|\vec{a}_{\perp}|$, más se *curva* la trayectoria

$$\text{curvatura } \rho = \frac{|\vec{a}_{\perp}|}{|\vec{v}|^2}, \qquad \text{radio de curvatura } R = \rho^{-1}$$

[N.B. Si el plano dado por $\vec{a}_{\parallel}$ y $\vec{a}_{\perp}$ cambia con t, hay *torsión*]

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal



Círculo que pasa por $\vec{r}(t)$, tiene la misma curvatura y la misma (dirección) tangente

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: movimiento circular uniforme, frecuencia angular $\omega_0 > 0$, $\frac{d\omega_0}{dt} = 0$, radio $R_0 > 0$:

- Posición

$$\vec{r}(t) = R_0 \left(\cos(\omega_0 t)\vec{i} + \sin(\omega_0 t)\vec{j} \right)$$

- Velocidad

$$\vec{v}(t) = R_0\omega_0 \left(-\sin(\omega_0 t)\vec{i} + \cos(\omega_0 t)\vec{j} \right)$$

$$|\vec{r}(t)| = R_0, \quad |\vec{v}(t)| = R_0\omega_0, \quad \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: movimiento circular uniforme:

- Posición

$$\vec{r}(t) = R_0 \left(\cos(\omega_0 t)\vec{i} + \sin(\omega_0 t)\vec{j} \right)$$

- Aceleración

$$\vec{a}(t) = -R_0\omega_0^2 \left(\cos(\omega_0 t)\vec{i} + \sin(\omega_0 t)\vec{j} \right)$$

  - aceleración tangencial $\vec{a}_{\parallel} = \vec{0}, \Rightarrow \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$
  - aceleración normal $\vec{a}_{\perp} = \vec{a}(t)$
  - radio de curvatura $R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_{\perp}|} = \frac{(R_0\omega_0)^2}{R_0\omega_0^2} = R_0$
  - $\vec{a}(t) = -\omega_0^2\vec{r}(t)$

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: movimiento circular **no** uniforme, ejemplo ($R_0 > 0$)

- Posición

$$\vec{r}(t) = R_0 \left(\cos(\omega(t)t)\vec{i} + \sin(\omega(t)t)\vec{j} \right)$$

con

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t$$

- Velocidad

$$\vec{v}(t) = R_0(\omega_0 + \alpha t) \left(-\sin(\omega(t)t)\vec{i} + \cos(\omega(t)t)\vec{j} \right)$$

$$|\vec{r}(t)| = R_0, \quad |\vec{v}(t)| = R_0|\omega_0 + \alpha t|, \quad \vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: movimiento circular **no** uniforme, ejemplo $(R_0 > 0)$

- Velocidad

$$\vec{v}(t) = R_0(\omega_0 + \alpha t)\left(-\sin(\omega(t)t)\vec{i} + \cos(\omega(t)t)\vec{j}\right)$$

- Aceleración

$$\vec{a}(t) = -R_0(\omega_0 + \alpha t)^2\left(\cos(\omega(t)t)\vec{i} + \sin(\omega(t)t)\vec{j}\right) + \alpha R_0\left(-\sin(\omega(t)t)\vec{i} + \cos(\omega(t)t)\vec{j}\right)$$

  - aceleración tangencial $\vec{a}_{\parallel} = \alpha R_0\left(-\sin(\omega(t)t)\vec{i} + \cos(\omega(t)t)\vec{j}\right)$,
    $\Rightarrow \frac{d|\vec{v}|}{dt} = R_0\alpha$
  - aceleración normal
    $\vec{a}_{\perp}(t) = -R_0(\omega_0 + \alpha t)^2\left(\cos(\omega(t)t)\vec{i} + \sin(\omega(t)t)\vec{j}\right)$
  - radio de curvatura $R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_{\perp}|} = \frac{(R_0(\omega_0+\alpha t))^2}{R_0(\omega_0+\alpha t)^2} = R_0$

(**) Generalización a 3D: triedro de Frenet-Serret

[$\to$ geometría diferencial de curvas]

- En lugar de "posición" $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, curva $C = \{\vec{r}(s)\}$ parametrizada en términos de la longitud de arco s

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}, \qquad |\vec{T}| = 1 \text{ (unitario) y tangente a } C \text{ en } \vec{r}(s)$$

$$\vec{N} \propto \frac{d\vec{T}}{ds}, \qquad |\vec{N}| = 1 \text{ (unitario), normal principal}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}, \qquad |\vec{B}| = 1 \text{ (unitario), binormal}$$

- Triedro $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ortonormal directo en $\vec{r}(s)$
- Ecuaciones de Frenet-Serret

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa\vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - \kappa\vec{T}, \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

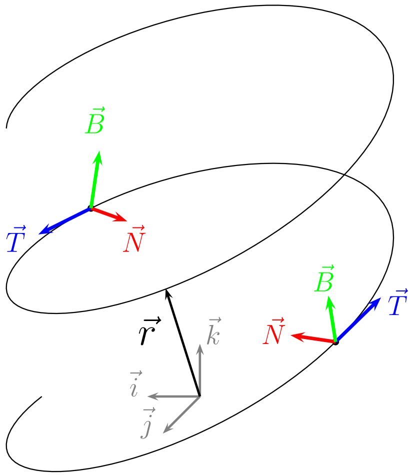
κ: curvatura, $\frac{1}{\kappa}$: radio de curvatura
τ: torsión, $\frac{1}{\tau}$: radio de torsión

(**) Generalización a 3D: triedro de Frenet-Serret

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\vec{T}}{ds}$$

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$



Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Ejemplo: una partícula sometida a la aceleración de la gravedad terrestre es lanzada horizontalmente con una velocidad de 5 m/s desde una altura de 20 m; calcula la aceleración tangencial y normal transcurrido un tiempo $t = 2$ s.
- Ejemplo: un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra, cerca de la superficie. Si su aceleración es g (dirigida hacia el centro de la Tierra), determina su velocidad y el periodo de revolución.
- Ejemplo: Se quiere diseñar una centrifugadora para operar a 15000 rpm.
  - ¿Qué aceleración centrípeta soportará una muestra colocada a 15 cm del eje de rotación?
  - Para alcanzar la velocidad máxima de rotación, la centrifugadora acelera durante 1 min y 15 s. Calcula el módulo de la aceleración tangencial suponiendo que es constante durante la aceleración.

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Ejemplo: una partícula sometida a la aceleración de la gravedad terrestre es lanzada horizontalmente con una velocidad de 5 m/s desde una altura de 20 m; calcula la aceleración tangencial y normal transcurrido un tiempo $t = 2$ s.
  - Trayectoria

$$\vec{r}(t) = v_0 t\,\vec{i} + (y_0 - \frac{1}{2} g t^2)\vec{j}, \quad v_0 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ y_0 = 20\,\mathrm{m},\ g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

  - Velocidad, aceleración

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{i} - g t\,\vec{j}, \qquad \vec{a}(t) = -g\vec{j}$$

  - Aceleración tangencial

$$\vec{a}_{\parallel} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v} = \frac{g^2 t}{v_0^2 + g^2 t^2}(v_0\,\vec{i} - g t\,\vec{j})$$

  - Aceleración normal

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = -g\vec{j} - \frac{g^2 t}{v_0^2 + g^2 t^2}(v_0\,\vec{i} - g t\,\vec{j})$$

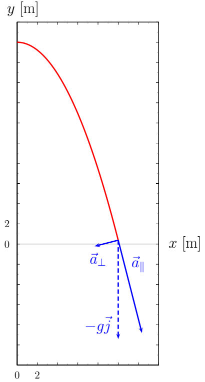
Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Ejemplo: una partícula sometida a la aceleración de la gravedad terrestre es lanzada horizontalmente con una velocidad de 5 m/s desde una altura de 20 m; calcula la aceleración tangencial y normal transcurrido un tiempo $t = 2$ s.
- Aplicación numérica, $t = 2$ s

$$\vec{a}_{\parallel} = (2.35\vec{i} - 9.21\vec{j})\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$\vec{a}_{\perp} = (-2.35\vec{i} - 0.60\vec{j})\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

- Verificar $\vec{a}_{\perp}$, $\vec{a}_{\parallel}$, en casos sencillos:
  - $t = 0 \to \vec{a} = \vec{a}_{\perp}$
  - $t \to \infty \to \vec{a} = \vec{a}_{\parallel}$



Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

- Ejemplo: un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra, cerca de la superficie. Si su aceleración es g (dirigida hacia el centro de la Tierra), determina su velocidad y el periodo de revolución.
  - Órbita circular de radio $\simeq R_T$
  - $|\vec{v}|$ constante $\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\perp = -g\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R_T} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{g\,R_T}$$

  - Periodo $T = \frac{2\pi R_T}{|\vec{v}|} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T}{g}}$
  - Aplicación numérica $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R_T = 6.4 \times 10^6$ m,

$$|\vec{v}| = 7.92 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad T = 5.07 \times 10^3\,\mathrm{s}$$

  - Busca datos de la Estación Espacial Internacional y compara

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: centrifugadora

- Régimen de movimiento circular uniforme. Dimensionalmente, aceleración centrípeta $|\vec{a}_\perp|$ depende únicamente de la frecuencia angular ω y del radio R,

$$[\omega] = T^{-1},\ [R] = L,\ [|\vec{a}_\perp|] = LT^{-2} \ \Rightarrow\ |\vec{a}_\perp| \propto R\omega^2$$

  - La frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi \times 15000/60 = 500\pi\,(\mathrm{rad})\,\mathrm{s}^{-1}\,(\simeq 1571\,(\mathrm{rad})\,\mathrm{s}^{-1})$$

  - El radio de curvatura es $R = 15$ cm, y la velocidad $|\vec{v}| = \omega R = 75\pi = 236\,\mathrm{m\,s}^{-1}$, de modo que

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = R\omega^2 = 3.7 \times 10^5\,\mathrm{m\,s}^{-2}$$

Generalización a 3D: aceleración tangencial y normal

Ejemplo: centrifugadora

- Aceleración tangencial $|\vec{a}_{\|}|$ constante: ver ejemplo de movimiento circular no uniforme; con $\omega_0 = 0$ y con α todavía por determinar, la aceleración tangencial es $|\vec{a}_{\|}| = R\alpha$. Determinamos α tal que, con $t = 75$ s,

$$|\vec{v}| = \omega R = R\alpha\, t \;\Rightarrow\; \alpha = \omega/t = \frac{20\pi}{3} = 20.9\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$$

por tanto

$$|\vec{a}_{\|}| = R\alpha = \pi\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Generalización a 3D

Ejercicio: en un ejercicio sobre el movimiento uniformemente acelerado en una dimensión,

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \,,$$

demostramos que

$$\frac{d}{dt} Q(t) = 0$$

siendo

$$Q(t) \equiv \frac{1}{2} [v(t)]^2 - a_0 x(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{dx(t)}{dt} \right]^2 - x(t) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \,.$$

Generaliza al caso 3D:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \, t + \frac{1}{2} \vec{a}_0 \, t^2$$

Generalización a 3D

Ejercicio:

$$\text{en 1D} \ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}[v(t)]^2 - a_0 x(t)\right) = 0 \quad \text{para} \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$$

En 3D:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}_0\, t^2$$

Para generalizar a 3D, notamos que la misma propiedad se cumple para cada una de las componentes, de modo que acudimos naturalmente a productos escalares para definir ahora

$$Q(t) = \frac{1}{2}\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t) - \vec{r}(t)\cdot\vec{a}(t) = \frac{1}{2}|\vec{v}(t)|^2 - \vec{r}(t)\cdot\vec{a}(t)$$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) - \vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t) - \vec{r}(t)\cdot\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = -\vec{r}(t)\cdot\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = 0$$

Movimiento relativo. Principio de relatividad de Galileo

- En este tema nos hemos ocupado de *cinemática*, analizando
  - aspectos generales (e.g. aceleración tangencial, aceleración normal),
  - casos particulares sencillos (e.g. movimiento uniformemente acelerado)
- . . . y lo hemos hecho sin hipótesis *dinámicas*
- Elección de ejes de coordenadas sencilla o implícita, y sin consecuencias más allá de la simplicidad de los cálculos
- ¿cómo cambia la cinemática al adoptar otras elecciones de coordenadas (no necesariamente fijas)?
  - Ejemplo: movimiento uniformemente acelerado “visto” desde un sistema de coordenadas que se mueve
- ⇒ posibilidad de complicaciones sin límite
- ¿Qué papel juegan las causas de los cambios en el estado de movimiento para decidir qué parte de esa libertad es relevante?
- ⇒ dejamos la discusión del *Principio de relatividad de Galileo* para el siguiente tema, en que abordamos la *dinámica*