Problemas propuestos

Problema 1.1. Si X,Y,Z son operadores, demostrad las propiedades siguientes utilizando la notación de bras y kets.

a) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ y más generalmente $(XY\cdots Z)^\dagger = Z^\dagger \cdots Y^\dagger Z^\dagger$

b) $\mathrm{Tr}\{XY\} = \mathrm{Tr}\{YX\}$ y más generalmente $\mathrm{Tr}\{XY\cdots Z\} = \mathrm{Tr}\{ZXY\cdots\}$

c) $\mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\phi|\} = \langle\phi|\psi\rangle$

Problema 1.2. Hemos estudiado que el conjunto de operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert $\mathscr{H}$ forman, a su vez, otro espacio vectorial y que si $\{|a\rangle\}$ es una base de $\mathscr{H}$, entonces los operadores $|a'\rangle\langle a|$ forman una base de los operadores, y que $\forall X$, $X = \sum_{a'a} X_{a'a} |a'\rangle\langle a|$ con $X_{a'a} = \langle a'|X|a\rangle$. Pero no hemos definido un producto escalar de operadores. Comprobad que si definimos el producto escalar de dos operadores como

$$\langle X,Y\rangle \equiv \mathrm{Tr}\left\{X^\dagger Y\right\},$$

se satisfacen los axiomas generales del producto escalar

$$\langle X,Y\rangle = \langle Y,X\rangle^*$$

$$\langle X,X\rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle X,X\rangle = 0 \quad \text{sii} \quad X=0\,.$$

Además la base $|a'\rangle\langle a|$ es ortonormal, en el sentido de que

$$\mathrm{Tr}\left\{\left(|b'\rangle\langle b|\right)^\dagger |a'\rangle\langle a|\right\} = \delta_{ab}\delta_{a'b'}$$

y $X_{a'a} = \mathrm{Tr}\left\{(|a'\rangle\langle a|)^\dagger X\right\}$

Problema 1.3. Utilizando el teorema espectral, dad una expresión para $\exp(i\lambda A)$, siendo λ una constante real y A un operador hermítico con valores propios conocidos. Si en una base dada $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ la representación matricial de A, es $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = A_{21} = 1$, calculad $\exp(i\lambda A)$ en la misma base. Dad el resultado en forma matricial y en términos de los bras y kets de la base.

Problema 1.4. El Hamiltoniano de un sistema de dos estados viene dado por

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

siendo a una constante con dimensiones de energía. Encontrad los autovalores de H y los vectores propios correspondientes como combinaciones lineales de la base ortonormal formada por $|1\rangle$y $|2\rangle$.

Problema 1.5. El operador A viene caracterizado por su actuación sobre la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, de forma que

$$A|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\;, \quad A|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle \quad , A|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\,.$$

¿Cuál es la representación matricial de A en esta base? ¿Es hermítico?

Encontrad los autovalores y sus correspondientes autovectores normalizados. ¿Hay degeneración?

1.1 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$

a) $\langle \alpha | (XY) | \beta \rangle \overset{\text{prop. asociativa de la composición de operadores}}{=} \langle \alpha | X (Y | \beta\rangle) = \langle (X^+\alpha) | Y\beta \rangle = \langle Y^+(X^+\alpha) | \beta \rangle$

$\overset{\text{asoc.}}{=} \langle (Y^+X^+)\alpha | \beta \rangle$

Comparando:

Por otro lado $\langle \alpha | (XY) | \beta \rangle = \langle (XY)^+ \alpha | \beta \rangle$

$(XY)^+ = Y^+X^+$ // → Por inducción, para n+1 (*) (ver abajo)

b) Base ortonormal $\{|i\rangle\}$

Inserto relación de clausura

$Tr\{XY\} = \sum_i (XY)_{ii} = \sum_i \langle i | (XY) | i \rangle = \sum_i \langle i | X \left(\sum_j |j\rangle\langle j|\right) Y | i \rangle$

$\overset{\text{linealidad}}{=} \sum_{i,j} \langle i | X | j \rangle \cdot \langle j | Y | i \rangle = \sum_{i,j} \langle j | Y | i \rangle \langle i | X | j \rangle \overset{\text{linealidad, separo sumatorio en } i}{=}$

complejos conmutan

$= \sum_j \langle j | Y \underbrace{\sum_i (|i\rangle\langle i|)}_{=I} | X | j \rangle = \sum_j \langle j | YX | j \rangle = \sum_j (YX)_{jj}$

$= Tr\{YX\}$ //

Por inducción, para n operadores $\{O_i\}_{i=1}^n$

(Supongo cierto: $Tr\{O_1 O_2 \dots O_n\} = Tr\{O_n O_1 O_2 \dots\}$ (propiedad cíclica))

No hace falta si lo has demostrado para n = 2

Demuestro para n+1:

$Tr\{O_1 \dots O_n O_{n+1}\} \overset{\text{asociativa}}{=} Tr\{\underbrace{(O_1 \dots O_n)}_{=\tilde{O}} O_{n+1}\} = Tr\{\tilde{O} O_{n+1}\}$

$\overset{\text{ver } Tr\{XY\}}{=} Tr\{O_{n+1} \tilde{O}\} = Tr\{O_{n+1} O_1 \dots O_n\}$ //

c) $Tr\{\underbrace{|\psi\rangle\langle\phi|}_{\text{operador } A}\} = \sum_i A_{ii} = \sum_i \langle i | A | i \rangle = \sum_i \langle i | \psi \rangle \langle \phi | i \rangle$

$\overset{\mathbb{C} \text{ conmuta}}{=} \sum_i \langle \phi | i \rangle \langle i | \psi \rangle \overset{\text{linealidad, separo } \Sigma}{=} \langle \phi \underbrace{\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)}_{=I} | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ //

*a) Supongo cierto para n: $(O_1 O_2 \dots O_n)^+ = O_n^+ \dots O_2^+ O_1^+$

Para n+1:

$(O_1 \dots O_n O_{n+1})^+ = ((\underbrace{O_1 \dots O_n}_{X}) \underbrace{O_{n+1}}_{Y})^+ = (XY)^+ \overset{\text{demostrado ya}}{=} Y^+X^+ = O_{n+1}^+ \cdot (O_1 \dots O_n)^+$

$\overset{\text{utilizo que es cierto para n}}{=} O_{n+1}^+ O_n^+ \dots O_2^+ O_1^+$ //

1.2

$$\langle X, Y\rangle \equiv \mathrm{Tr}\{X^{+}Y\}$$

a)

$$\langle X, Y\rangle \equiv \mathrm{Tr}\{X^{+}Y\} = \sum_a \langle a|X^{+}Y|a\rangle = \sum_a \langle Xa|Ya\rangle \overset{\text{invertir bra-ket} \to \text{conjugado}}{=} \sum_a \langle Ya|Xa\rangle^{*}$$

$$= \left(\sum_a \langle a|Y^{+}X|a\rangle\right)^{*} = \mathrm{Tr}\{Y^{+}X\}^{*} = \langle Y, X\rangle^{*} \;//$$

b)

$$\langle X, X\rangle \overset{\text{utilizo a) con } Y = X}{=} \langle X, X\rangle^{*} = z \to \begin{array}{l} z = \mathrm{Re}\{z\} + i\,\mathrm{Im}\{z\} \in \mathbb{C} \\ z^{*} = \mathrm{Re}\{z\} - i\,\mathrm{Im}\{z\} \end{array} \Big\} \; z = z^{*} \to \mathrm{Im}\{z\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle X, X\rangle \in \mathbb{R}$$

$$\langle X, X\rangle = \mathrm{Tr}\{X^{+}X\} = \sum_a \langle a|X^{+}\overset{\text{inserto relac. de clausura}}{X}|a\rangle = \sum_{a,a'} \langle a|X^{+}|a'\rangle \underbrace{\langle a'|X|a\rangle}_{X_{a'a} = X^{T}_{aa'} = X^{+*}_{aa'}}$$

Invierto 2º complejo,

$$= \sum_{a,a'} \langle a|X^{+}|a'\rangle \langle a|X^{+}|a'\rangle^{*} = \sum_{a,a'} \underset{z}{X^{+}_{aa'}} \cdot (X^{+}_{aa'})^{*} \to z \cdot z^{*} = \underset{\in \mathbb{R}^{+}}{\mathrm{Re}^{2}\{z\}} + \underset{\in \mathbb{R}^{+}}{\mathrm{Im}^{2}\{z\}}$$

$$= \sum_{a,a'} |X^{+}_{a,a'}|^{2} \geq 0 \;//$$

(módulo de un complejo con norma ≥ 0)

$\Leftarrow$ Si $X = 0 \to \langle X, X\rangle = \langle 0, 0\rangle = \mathrm{Tr}\{0 \cdot 0\} = 0$

$\Rightarrow$ Si $\langle X, X\rangle = 0 \to \sum_{a,a'} |X^{+}_{a,a'}|^{2} \to$ Por reducción al absurdo, supongamos que existe algún $X_{a,a'} \neq 0 \,/\, X \neq 0$

Entonces $\langle X, X\rangle = |X_{a,a'}|^{2} > 0$ en contra de la hipótesis inicial //

c)

$$\mathrm{Tr}\{(\underbrace{|b'\rangle\langle b|}_{X})^{+} \cdot \underbrace{|a'\rangle\langle a|}_{Y}\} = \langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}\{X^{+}Y\} = \mathrm{Tr}\{\underbrace{X^{+}|a'\rangle}_{\equiv|\psi\rangle \in \mathcal{H}} \underbrace{\langle a|}_{\equiv \langle\phi| \in \mathcal{H}^{*}}\}$$

$$= \mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\phi|\} \overset{\text{ver 1.1 c)}}{=} \langle\phi|\psi\rangle = \langle a|X^{+}|a'\rangle = X^{+}_{aa'} = X_{a'a}^{*}$$

$$= \langle a'|X|a\rangle = \langle a'|b'\rangle\langle b|a\rangle = \delta_{a'b'}\delta_{ab} \;//$$

Camino alternativo:

$$(|b'\rangle\langle b|)^{+} = |b\rangle\langle b'|$$

$$\to \mathrm{Tr}\{(|b'\rangle\langle b|)^{+}|a'\rangle\langle a|\} = \mathrm{Tr}\{|b\rangle \overbrace{\langle b'|a'\rangle}^{\delta_{b'a'}} \langle a|\} = \mathrm{Tr}\{|b\rangle\langle a|\}\delta_{b'a'}$$

$$= \langle a|b\rangle \delta_{b'a'} = \delta_{ab}\,\delta_{a'b'} \;//$$

d)

$$X_{a'a} = \langle a'|X|a\rangle = (X^{+}_{aa'})^{*} = \langle a|X^{+}|a'\rangle^{*} = \overbrace{\langle a|}^{\langle\phi|}(\overbrace{X^{+}|a'\rangle}^{|\psi\rangle})^{*} \overset{\text{Ver 1.1 c)}}{=} \mathrm{Tr}\{|\psi\rangle\langle\phi|\}^{*}$$

$$= \mathrm{Tr}\{X^{+}\overset{\text{asociativa}}{(|a'\rangle\langle a|)}\}^{*} = \langle X, (|a'\rangle\langle a|)\rangle^{*} \overset{\text{Ver 1.2 a)}}{=} \langle(|a'\rangle\langle a|), X\rangle = \mathrm{Tr}\{(|a'\rangle\langle a|)^{+}X\} \;//$$

ó $X_{a'a} = \langle a'|X|a\rangle \overset{\text{R. clausura}}{=} \sum_i \langle a'|X|i\rangle\langle i|a\rangle \overset{\text{conmutar}}{=} \sum_i \langle i|a\rangle\langle a'|X|i\rangle = \mathrm{Tr}\{|a\rangle\langle a'|X\} = \mathrm{Tr}\{(|a'\rangle\langle a|)^{+}X\} \;//$

(1.3) Tma. espectral

$a, |a\rangle$ valores y vectores propios de A

$$A = \sum_a a \cdot \lambda_a = \sum_a a\, |a\rangle\langle a|$$

$\exp(i\lambda A) = f(A) \to$ función de un operador

$$f(A) \equiv \sum_a f(a)\, |a\rangle\langle a|$$

$$\exp(i\lambda A) = \sum_a \exp(i\lambda a)\, |a\rangle\langle a|$$

$\{|1\rangle, |2\rangle\}_B \to A$ no diagonal en esa base

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \to \begin{matrix} \lambda_1 = 1 & (+) \\ \lambda_2 = -1 & (-) \end{matrix}$$

↳ Valores propios

$(+)$: $-x + y = 0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle$

$(-)$ $x + y = 0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-\rangle$

} Vectores propios → Base $V = \{|+\rangle; |-\rangle\}$

$$A_B = \sum_a a\,|a\rangle\langle a| = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1\ 1) - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}(1\ -1)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_B \checkmark$$ se cumple tma. espectral

$$A_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U \equiv \exp(i\lambda a) = \exp(i\lambda \cdot 1)\,|+\rangle\langle +| + \exp(i\lambda(-1))\,|-\rangle\langle -|$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}_{\text{Base } V} = e^{i\lambda} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_B + e^{-i\lambda}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_B$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} & e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} \\ e^{i\lambda} - e^{-i\lambda} & e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \cos\lambda & i\,\mathrm{sen}\lambda \\ i\,\mathrm{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}_B$$ // → NO es hermítica pero sí unitaria

$$= \cos\lambda\,(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + i\,\mathrm{sen}\lambda\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$ //

$$U^+ = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -i\,\mathrm{sen}\lambda \\ -i\,\mathrm{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \to UU^+ = \begin{pmatrix} \cos\lambda & i\,\mathrm{sen}\lambda \\ i\,\mathrm{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\lambda & -i\,\mathrm{sen}\lambda \\ -i\,\mathrm{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} = U^+U$$ // → unitaria

↳ ó $e^{i\lambda A} \cdot e^{-i\lambda A} = e^{i\lambda(A-A)} = e^{i\lambda \cdot 0} = I$ //

propiedad $[A, A] = 0$

↳ ó $\begin{pmatrix} e^{i\lambda} & \\ & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}_V \begin{pmatrix} e^{-i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{i\lambda} \end{pmatrix}_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{V,B}$

Alternativamente:

a partir de $A^2 = I$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$e^{i\lambda A} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(i\lambda A)^K}{K!} \quad ; \quad A^{K\text{par}} = A^{2n} = (A^2)^n = I^n = I \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$A^{K\text{impar}} = A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = I \cdot A = A$$ // → Taylor sin, cos

$$\text{↳ } e^{i\lambda A} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(i\lambda)^{2n} I}{(2n)!} + \frac{(i\lambda)^{2n+1} A}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} I\,\frac{(-1)^n \cdot \lambda^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, \lambda^{2n+1} A}{(2n+1)!} = \cos\lambda\, I + i\,\mathrm{sen}\lambda \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\lambda & i\,\mathrm{sen}\lambda \\ i\,\mathrm{sen}\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \checkmark$$

(1.4)

$$H = a\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \right) \;, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{hermítica} ✓$$

$$|H - a\lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 1 = 0 = \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$$

$$(+) \rightarrow (1-\sqrt{2})x + y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+(\sqrt{2}-1)^2)^{1/2}} = |+\rangle$$

$$(-) \rightarrow (1+\sqrt{2})x + y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+(\sqrt{2}+1)^2)^{1/2}} = |-\rangle$$

Autovalores de H: $< \begin{matrix} +a\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2} \end{matrix}$ //

con autovectores:

$$|+\rangle = \left(|1\rangle + (\sqrt{2}-1)|2\rangle\right) \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}$$

$$|-\rangle = \left(|1\rangle - (\sqrt{2}+1)|2\rangle\right) \frac{1}{(4+2\sqrt{2})^{1/2}}$$ //

(1.5)

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle \qquad i, j = 1, 2, 3$$

$\langle 1|A|1\rangle = 0$; $\langle 2|A|1\rangle = 1/\sqrt{2}$; $\langle 3|A|1\rangle = 0$

$\langle 1|A|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\langle 2|A|2\rangle = 0$; $\langle 3|A|2\rangle = 1/\sqrt{2}$

$\langle 1|A|3\rangle = 0$; $\langle 2|A|3\rangle = 1/\sqrt{2}$ $\langle 3|A|3\rangle = 0$

fila columna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \text{es hermítico} \quad A^\dagger = A ✓ \quad A^T = A \quad A^* = A$$

$$\left|A - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} I\right| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 - 2) = 0$$

$$\lambda_0 = 0$$
$$\lambda_\pm = \pm\sqrt{2}$$

Autovalores Λ de A: $\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda = < \begin{matrix} 0 \\ \pm 1 \end{matrix}$ //

↓

Todos distintos

↓

NO hay degeneración //

0): $y = 0$, $x + z = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = |0\rangle$

+): $-\sqrt{2}x + y = 0$, $y - \sqrt{2}z = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle$

(−): $\sqrt{2}x + y = 0$, $y + \sqrt{2}z = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle$

Autovectores de A //

Problemas propuestos

Problema 2.1. Supongamos que una matriz 2×2, X (que no es necesariamente ni hermítica ni unitaria) se escribe como

$$X = a_0 I_2 + \vec{\sigma}\cdot\vec{a}$$

donde a_0 y a_i $(i = 1,2,3)$ son constantes, I_2 es la matriz identidad 2×2 y $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli.

a) ¿Cómo se relacionan las constantes a_0, a_i con $tr(X)$ y $tr(\sigma_k X)$?.

b) Obtened estas constantes en términos de los elementos de matriz X_{ij}.

Problema 2.2. Construid $\left|\vec{S}.\vec{n};+\right\rangle$ tal que

$$\vec{S}.\vec{n}\left|\vec{S}.\vec{n};+\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left|\vec{S}.\vec{n};+\right\rangle$$

donde $\vec{n} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$. Expresad el resultado como una combinación lineal de $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Comprobad que el resultado se puede escribir como:

$$\left|\vec{S}.\vec{n};+\right\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\,|+\rangle + \sin(\frac{\theta}{2})e^{i\phi}\,|-\rangle$$

Problema 2.3. Un sistema cuántico posee únicamente 3 grados de libertad. Sea $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal del espacio de Hilbert asociado al sistema. En esa base, el hamiltoniano es (en las unidades apropiadas)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, están definidos los observables dados por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál de los conjuntos de observables $\{H\}$, $\{H,A\}$, $\{H,A,B\}$, $\{A,B\}$, $\{H,B\}$ es un CCOC (conjunto completo de observables compatibles)? En los casos en que sea completo, calculad y clasificad la base.

Problema 2.4. Utilizando

$$\left[\vec{X}, U(\vec{\ell})\right] = \vec{\ell}U(\vec{\ell})$$

donde $U(\vec{\ell})$ es el operador de traslaciones, estudiad cómo cambia el valor esperado de $\vec{X}$ en un estado arbitrario bajo esta traslación. Es decir, hallad la relación entre $\langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle$ y ${}_{\ell}\langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle_{\ell}$, con $|\psi\rangle_{\ell} = U(\vec{\ell})\,|\psi\rangle$.

Problema 2.5. Un oscilador cuántico se halla en el estado $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$, siendo $|n\rangle$ los estados propios del Hamiltoniano, $H|n\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})\,|n\rangle$.

Calculad el valor esperado de P y de X, y el producto de indeterminaciones $\Delta x\Delta p$. Comprobad que se satisface la relación de indeterminación.

Problemes proposats

Problema 2.1. Suposem que una matriu 2×2, X (que no és necessàriament ni hermítica ni unitària) s'escriu com

$$X = a_0 I_2 + \overrightarrow{\sigma} \cdot \overrightarrow{a}$$

on a_0 i a_i ($i = 1,2,3$) són constants, I_2 és la matriu identitat 2×2 i $\vec{\sigma}$ són les matrius de Pauli.

a) Com es relacionen les constants a_0, a_i amb $tr(X)$ i $tr(\sigma_k X)$?.

b) Obteniu aquestes constants en termes dels elements de matriu X_{ij}.

Problema 2.2. Construïu $|\vec{n};+\rangle$ tal que

$$\vec{S} \cdot \vec{n}\, |\vec{n};+\rangle = \frac{\hbar}{2}\, |\vec{n};+\rangle$$

on $\vec{n} = (\sin(\theta)\cos(\phi), \sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta))$. Expresseu el resultat com una combinació lineal de $|+\rangle$ i $|-\rangle$ ($|\pm\rangle \equiv |\hat{z};\pm\rangle$ amb $\hat{z} = (0,0,1)$). Comproveu que el resultat es pot escriure com:

$$|\vec{n};+\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\,|+\rangle + \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi}\,|-\rangle$$

Problema 2.3. Un sistema quàntic posseeix únicament 3 graus de llibertat. Siga $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ una base ortonormal de l'espai de Hilbert associat al sistema. En eixa base, el hamiltonià és (en les unitats apropiades)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A més, estan definits els observables donats per les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quin dels conjunts d'observables $\{H\}$, $\{H,A\}$, $\{H,A,B\}$, $\{A,B\}$, $\{H,B\}$ és un CCOC (conjunt complet d'observables compatibles)? En els casos en que siga complet, calculeu i classifiqueu la base.

Problema 2.4. Usant

$$\left[\vec{X}, U(\vec{\ell})\right] = \vec{\ell}\, U(\vec{\ell})$$

on $U(\vec{\ell})$ és l'operador de translacions, vegeu com canvia el valor esperat de $\vec{X}$ en un estat arbitrari sota aquesta translació. És a dir, trobeu la relació entre $\langle\psi|\vec{X}\,|\psi\rangle$ i ${}_{\ell}\langle\psi|\vec{X}\,|\psi\rangle_{\ell}$, amb $|\psi\rangle_{\ell} = U(\vec{\ell})\,|\psi\rangle$.

Problema 2.5. Un oscil·lador quàntic es troba a l'estat $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{i}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{2}\,|2\rangle$, amb $|n\rangle$ estats propis del hamiltonià, $H\,|n\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|n\rangle$.

Calculeu el valor esperat de P i de X i el producte d'incerteses $\Delta x \Delta p$. Comproveu que se satisfà la relació d'incertesa.

2.1

$$X = [\ ]_{2\times 2} = a_0 \overset{\sigma_0}{\overset{\shortparallel}{I_2}} + \vec{\sigma}\cdot\vec{a} = a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]\cdot(a_1,a_2,a_3)$$

$$= a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&a_1\\a_1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-a_2 i\\ia_2&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_3&0\\0&-a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_0+a_3 & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & a_0-a_3\end{pmatrix}$$

a) $tr(X) = 2a_0$

Camino alternativo: $tr(X) = tr(a_0 I_2) + tr(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}) = a_0\, tr(I_2) + tr(\sigma_i\cdot a_i)$

$$= a_0\cdot 2 + \overset{\text{escalar}}{a_i}\, tr(\overset{\text{matriz (de Pauli)} \to \text{traza} = 0}{\sigma_i}) = 2a_0$$

$\{\sigma_i,\sigma_j\} = 2\delta_{ij} I_2 = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i$

$[\sigma_i,\sigma_j] = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$

$$tr(\sigma_j X) = tr(\sigma_j\sigma_i\cdot a_i) + tr(\sigma_j a_0\cdot I) = a_i \sum_K (\sigma_j\sigma_i)_{KK}$$

$$= 2a_0\delta_{j0} + a_i\, tr\{\delta_{ij} I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\} = 2a_0\delta_{j0} + 2a_j + i\epsilon_{ijk} a_i\, \cancel{tr\{\sigma_k\}}^{\,0}$$

$\sigma_0 \equiv I$

$$= 2a_j \Big|_{j=0,1,2,3}$$

b)
$$\begin{cases} X_{11} = a_0 + a_3 \\ X_{12} = a_1 - ia_2 \\ X_{21} = a_1 + ia_2 \\ X_{22} = a_0 - a_3 \end{cases}$$

$\to a_0 = \dfrac{X_{11}+X_{22}}{2}$; $a_3 = \dfrac{X_{11}-X_{22}}{2}$

$\to a_1 = \dfrac{X_{12}+X_{21}}{2}$; $a_2 = \dfrac{X_{12}-X_{21}}{2}\cdot i$

$\{\sigma_i\}_{i=0}^{3} \to$ Base del espacio de matrices 2×2

$\{I, \vec{\sigma}\}$

$X = \sum_{i=0}^{3} a_i\cdot\sigma_i = \vec{a}\cdot\vec{\sigma} \to$ Para que X sea hermítica, $\vec{a}\in\mathbb{R}^4$

2.2

$\vec{S}\cdot\vec{n}\,|\vec{S}\cdot\vec{u},+\rangle = \frac{\hbar}{2}|\vec{S}\cdot\vec{u},+\rangle$ → espacio espín $\frac{1}{2}$

$\vec{n} = \hat{u}_r = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \Rightarrow \vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix}0 & \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\cos\phi & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -i\sin\theta\sin\phi\\ i\sin\theta\sin\phi & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & -\cos\theta\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi)\\ \sin\theta(i\sin\phi+\cos\phi) & -\cos\theta\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\phi}\\ \sin\theta\cdot e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Buscamos vectores propios de $\vec{S}\cdot\vec{n}$ con autovalor $\pm\frac{\hbar}{2}$ y autovector $|\vec{S}\cdot\vec{u},\pm\rangle$

$$\begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & e^{-i\phi}\sin\theta\\ e^{i\phi}\sin\theta & -(\cos\theta+\lambda)\end{vmatrix} = -(\cos\theta-\lambda)(\cos\theta+\lambda) - \sin^2\theta = 0$$

$\hookrightarrow -\cos^2\theta + \lambda^2 = \sin^2\theta \to \lambda_\pm = \pm 1 \to$ Autovalor $\pm\frac{\hbar}{2}$

$\oplus \rightarrow \quad (\cos\theta - 1)x + e^{-i\phi}\sin\theta \, y = 0 \rightarrow y = \frac{(1-\cos\theta)}{(e^{-i\phi}\sin\theta)} x \;;\; x = 1$

$e^{i\phi}\sin\theta \, x - (\cos\theta + 1) y = 0 \rightarrow e^{i\phi}\sin\theta - \frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{e^{-i\phi}\sin\theta} = 0$ (*)

$$|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-\cos\theta)}{e^{-i\phi}\sin\theta} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta \\ (1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\vec{S}\cdot\vec{n}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix}}_{|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle} = \underbrace{\frac{\hbar}{2}}_{\text{autovalor}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cancel{\cos\theta\sin\theta e^{-i\phi}} + e^{-i\phi}\sin\theta - \cancel{e^{-i\phi}\cos\theta} \\ \underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1} - \cos\theta \end{pmatrix}}_{|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle}$$

$\ominus \quad \left.\begin{aligned} (\cos\theta + 1)x + e^{-i\phi}\sin\theta \, y &= 0 \\ e^{i\phi}\sin\theta \, x + (1-\cos\theta) \, y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow |\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{(\cos\theta+1)}{\sin\theta \, e^{-i\phi}} \end{pmatrix}$

$$\propto \begin{pmatrix} \sin\theta \, e^{-i\phi} \\ -(1+\cos\theta) \end{pmatrix}$$ (falta normalizar)

Reescribir como:

$$|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle \propto \begin{pmatrix} \sin\theta \\ e^{i\phi}(1-\cos\theta) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \sin\theta \\ e^{i\phi}\cdot 2\sin^2\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$\propto \begin{pmatrix} 2\sin\theta/2 \cos\theta/2 \\ 2e^{i\phi}\sin^2\theta/2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$ → Ya está normalizado, en base $|\pm\rangle_z$

$\hookrightarrow |\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}|-\rangle$

$$|\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle \propto \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ (1+\cos\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ 2\cos^2\frac{\theta}{2} \, e^{i\phi} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ -\cos\frac{\theta}{2} \, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Además, se cumple la relación de clausura:

$$|\vec{S}\vec{n},+\rangle\langle\vec{S}\cdot\vec{n},+| + |\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\langle\vec{S}\cdot\vec{n},-| = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \, e^{i\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \, e^{-i\phi} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \sin\theta/2 \\ -\cos\theta/2 \, e^{i\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta/2 & -\cos\theta/2 \, e^{-i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta/2 + \sin^2\theta/2 & \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta/2 \, e^{-i\phi} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin\theta/2 \, e^{i\phi}\cos\theta/2 - \cos\theta/2 \sin\theta/2 \, e^{i\phi} & \sin^2\theta/2 + \cos^2\theta/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

(2.3)

$\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ b.o.n $\in \mathcal{H}$

$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

→ H → valor propio 1 para $|v_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

↳ $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$ → $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $+1$; → $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con -1 }

↳ ∃ degeneración en autovalor + 1 → {H} No es CCOC.

→ A → valor propio 1 doble para $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
" " -1 simple para $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ → {A} no es ~~un~~ CCOC

→ B → $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = (1-\lambda)^3 + 3\lambda - 1$

$= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 1 = 3\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(3 - \lambda) = 0$

↳ $\lambda_{12} = 0$ (doble)
$\lambda_3 = 3$ (simple) } {B} no es un CCOC

$v_{12} \rightarrow x + y + z = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ — p. ej. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$
(pueden ser otros, cualquier c. lineal de estos dos)

$v_3 \rightarrow$ $-2x + y + z = 0$
$\cancel{x} - 2y + z = 0$
$x + y - 2z = 0$ } → $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿{H, A}?

{ 1 1 ; 1 1 ; -1 1

Son compatibles si conmutan:

$HA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = AH = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ✓ → Los subespacios propios no son iguales, se intersectan

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cong \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$
c.l 1-2

Hemos visto que H es degenerado, comprobemos si A rompe dicha degeneración

$A|v_1\rangle = A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_a = +1$

$A|v_3\rangle = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_a = -1$

} Al no coincidir ambos subespacios de degeneración, rompemos la misma → Es un CCOC.

Base: $\{|h\,a\rangle\} = \{|1\,1\rangle, |1\,-1\rangle, |-1\;1\rangle\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\{A, B\}$?

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ No son compatibles

↳ No es un CCOC.

$\{H, A, B\} \rightarrow$ No es un CCOC porque $\{A, B\}$ no lo es.

$\{H, B\}$?

$$HB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = BH = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Son compatibles. Veamos si B rompe la degeneración en H

$$B|v_1\rangle = B\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$ $|v_1\rangle$ no es propio de B

Debemos cambiar la elección de base en H y B para el subespacio degenerado para que sean propios en ambos a la vez.

↳ Buscamos que

$B|V_{h=1}\rangle = B\left(\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}\right)$ / los valores propios de B de la c. lineal sean en un caso 0 y en otro 3 (para romper)

degeneración asociada a $h=1$ queremos

$$B\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = (2x+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 0\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow 2x+z=0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = |1\,0\rangle$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = (2x+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \rightarrow 2x+z = 3x = 3z \Rightarrow x = z = 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\,3\rangle$$

Aparte

$$B|v_2\rangle = B\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = |-1\,0\rangle$$

Base $\{|hb\rangle\} = \{|1\,0\rangle; |1\,3\rangle; |-1\,0\rangle\}$

Un procedimiento más formal es el siguiente:

Dados H, A / $[H, A] = 0$ (compatibles), construimos:

$C(x) = H + xA \Rightarrow [C(x), H] = 0$

$|C(x) - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda(x) \rightarrow$ tres valores

si $\exists x_0$ / los tres valores $\lambda_1(x_0), \lambda_2(x_0), \lambda_3(x_0)$ sean distintos entre sí, son no degenerados, ortogonales (forman base) y son propios de H y A

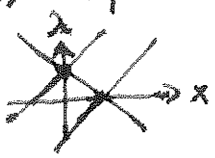
$|C_1(x_0)\rangle, |C_2(x_0)\rangle, |C_3(x_0)\rangle$ ↳ por tanto valores propios distintos.

$$H + xA = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & x-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-x-\lambda \end{vmatrix} = (1-x-\lambda)\cdot((x-\lambda)^2 - 1) = 0$$

↳ $\lambda_1 = 1-x$

$\lambda_2 = x+1$

$\lambda_3 = x-1$



Solución cuando $x \neq 0; 1 \rightarrow$ caso anterior: $x=2$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 1$

$$C(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|u_1\rangle \Rightarrow \begin{matrix} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{matrix} \rightarrow |u_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|u_2\rangle$: $-x + y = 0 \rightarrow$ $|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|u_3\rangle$: $x + y = 0$ $\rightarrow |u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

los índices $|ha\rangle$ se obtienen haciendo actuar H y A sobre estos vectores y viendo sus autovalores.

$\Rightarrow$ es CCOC

2.4

$$[\vec{X}, U(\vec{\ell})] = \vec{\ell}\cdot U(\vec{\ell}) = \vec{X}\cdot U(\vec{\ell}) - U(\vec{\ell})\cdot\vec{X} \rightarrow \vec{X}\,U(\vec{\ell}) = \vec{\ell}\cdot U(\vec{\ell}) + U(\vec{\ell})\cdot\vec{X}$$

$$\langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle_{\ell} = \langle U(\vec{\ell})\psi|\vec{X}|U(\vec{\ell})\psi\rangle = \langle U(\vec{\ell})\psi|\vec{X}\,U(\vec{\ell})|\psi\rangle$$

identidad

$$= \langle U(\vec{\ell})\psi|\left(\vec{\ell}\,I\,U(\vec{\ell}) + U(\vec{\ell})\vec{X}\right)|\psi\rangle$$

Como U es unitario $U^{+}(\vec{\ell})\cdot U(\vec{\ell}) = I$

conmutan

$$= \langle\psi|\left(\vec{\ell}\,I\cdot U^{+}(\vec{\ell})U(\vec{\ell}) + U^{+}(\vec{\ell})U(\vec{\ell})\vec{X}\right)|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\left(\vec{\ell}\cdot I + I\cdot\vec{X}\right)|\psi\rangle = \vec{\ell}\,\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1} + \langle\psi|\vec{X}|\psi\rangle$$

$$= \vec{\ell} + \langle\vec{X}\rangle_{\psi}$$

2.5

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$$

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle$$

$$\langle p\rangle,\ \langle x\rangle,\ \Delta x,\ \Delta p$$

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cdot(a+a^{+})\ ;\quad P = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,i\,(a^{+}-a)\ ;\quad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle,\ \ a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$a|\psi\rangle = \frac{i}{2}\sqrt{1}\cdot|0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,|1\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$

$$a^{+}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1}\,|1\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{2}\,|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle$$

$\langle\psi|(a\psi)\rangle$

$$\langle a\rangle_{\psi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}\langle 2|\right)\left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle a^{+}\rangle_{\psi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}\langle 2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|3\rangle\right)$$

$$= -\frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\hookrightarrow \langle x\rangle_{\psi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\langle a\rangle + \langle a^{+}\rangle\right) = 0$$

$$\langle p\rangle_{\psi} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\langle a^{+}\rangle - \langle a\rangle\right) = 0$$

hermítico $X^{+} = X$

$$\langle x^{2}\rangle_{\psi} = \langle\psi|XX|\psi\rangle = \langle X^{+}\psi|X\psi\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle(a+a^{+})\psi|(a+a^{+})\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(-\frac{i}{2}\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1| - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 2| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 3|\right)\left(\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^{2}\rangle_{\psi} - \underbrace{\langle x\rangle_{\psi}^{2}}_{0}} = \sqrt{\langle x^{2}\rangle_{\psi}} = \sqrt{\frac{7\hbar}{4m\omega}}$$

$$\langle p^2\rangle_\psi = \langle \psi | p p | \psi\rangle = \langle p^+\psi | p\psi\rangle = \langle p\psi | p\psi\rangle$$

$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|} - \frac{i}{\sqrt{2}}\langle 2| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 3| + \frac{i}{2}\langle 0| - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|}\right)\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle - \frac{i}{2}|0\rangle - \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle}\right)$$

$$= \frac{\hbar m\omega}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\hbar m\omega$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle_\psi - \underbrace{\cancel{\langle p\rangle_\psi^2}}_{0}} = \sqrt{\langle p^2\rangle_\psi} = \sqrt{\frac{3\hbar m\omega}{4}}$$

$$\Delta x\,\Delta p = \sqrt{\frac{7}{4}\frac{\hbar}{m\omega}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}\hbar m\omega} = \frac{\hbar}{4}\cdot\sqrt{21} > \frac{\hbar\sqrt{16}}{4} = \hbar > \frac{\hbar}{2}$$

Por tanto se cumple que $\Delta x\,\Delta p > \frac{\hbar}{2}$ (relación de indeterminación)

Problemas propuestos

Problema 3.1. *Sea un sistema físico con 4 grados de libertad . Los observables* $\{A, B\}$ *forman un CCOC, de manera que podemos formar una base* $\{|1,3\rangle, |1,4\rangle, |2,3\rangle, |2,4\rangle\}$*caracterizada por los valores propios:* 1 *y* 2 *de A y* 3 *y* 4 *de B. Considerad un conjunto mezcla con pesos* $3/7$ *y* $4/7$ *de los estados* $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$ *y* $(0,0,0,1)$ *, expresados en la base anterior.*

a) Escribid la matriz densidad correspondiente.

b) Encontrad su descomposición espectral.

c) Construid los proyectores sobre cada subespacio propio de la matriz densidad.

d) Calculad los valores esperados de A y B en el estado mezcla.

e) Calculad la probabilidad de que una medida de A de el valor 1*.*

f) Calculad la probabilidad de que, al medir A y B se obtenga 2 *y* 4 *respectivamente.*

Problema 3.2. *Utilizando los mismos datos del problema anterior, determinad:*

a) La probabilidad de obtener 3 *en una medida de B si antes de ha hecho una medida filtrante de A para el valor* 1*.*

b) La probabilidad de obtener 3 *en una medida de B si antes se ha hecho una medida no filtrante de A.*

c) La probabilidad de obtener 1 *en una medida de A si antes se ha hecho una medida de B no filtrante.*

Problema 3.3. *Un oscilador cuántico se encuentra en el estado* $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$ *(ved problema 2.5). Si se hace una medida no filtrante de la energía, ¿cuál será el operador densidad resultante de la medida? ¿Cuál será el valor esperado de* p *y de* p^2 *en el conjunto descrito por este operador densidad?*

Problema 3.4. *Un conjunto de partículas de spin 1/2 está en un estado descrito por el vector de polarización* $\vec{P}$*. Si* $\vec{n}$ *es un vector unitario en una dirección arbitraria, calculad :*

a) El valor esperado del espín en esa dirección.

b) Las probabilidades de obtener $\frac{\hbar}{2}$ *y* $-\frac{\hbar}{2}$ *al medir el espín en esa dirección.*

c) La polarización resultante si hacemos una medida no filtrante del espín en esa dirección.

Problema 3.5. *Un haz de partículas de espín* $1/2$ *tiene el vector de polarización* $\vec{P}_i = (0,0,1)$*. Se mide la componente del espín en una dirección descrita por los ángulos esféricos* θ *y* ϕ *, seleccionando el valor* $\frac{\hbar}{2}$ *. Si el vector de polarización final es* $\vec{P}_f = \frac{1}{2}(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ *:*

a) ¿En qué dirección se hizo la medida?

b) ¿Cuál hubiese sido la matriz densidad si no se hubiese seleccionado ningún valor en la medida realizada en la dirección obtenida en a)?

3.1

4 grados de libertad $\to 2\times 2$

$\{A, B\}$ CCOC : $\{|1,3\rangle ; |1,4\rangle ; |2,3\rangle ; |2,4\rangle\}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \equiv |1\rangle \quad \equiv |2\rangle \quad \equiv |3\rangle \quad \equiv |4\rangle$

$\frac{3}{7} \to \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) \ ; \ \frac{4}{7}(0,0,0,1)$

a)

al revés

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\right) + \frac{4}{7}|4\rangle\langle 4|$$

$$= \frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 2| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 1|\right) + \frac{4}{7}|4\rangle\langle 4|$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

b) $\rho = \sum_a a \Lambda_a \ , \quad \Lambda_a = |a\rangle\langle a|$

Buscamos vectores propios $|\rho - \lambda I| = 0 \to |3\rangle$ y $|4\rangle$ ya propios con autovalores 0 y $\frac{4}{7}$.

$$\frac{3}{14}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad |4\rangle \equiv |a_1\rangle$$

$\lambda_1 = 2 \to \mu_1 = \frac{3}{7}$

$-x + y = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |a_2\rangle$

$\lambda_2 = 0 \to \mu_2 = 0$

$x + y = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |a_3\rangle$

$$\rho = 0 \cdot \overset{\text{doble}}{\Lambda_{a=0}} + \frac{4}{7}|a_1\rangle\langle a_1| + \frac{3}{7}|a_2\rangle\langle a_2|$$

c) $\Lambda_{a=0} = |3\rangle\langle 3| + |a_3\rangle\langle a_3| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Lambda_{a=\frac{4}{7}} = |4\rangle\langle 4| = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

$\Lambda_{a=\frac{3}{7}} = |a_2\rangle\langle a_2| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$

$\Bigg\}\ \sum_a \Lambda_a = I$ ✓

Relación de clausura

$$\rho = \frac{4}{7}|a_1\rangle\langle a_1| + \frac{3}{7}|a_2\rangle\langle a_2| = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)\left(\langle 1| + \langle 2|\right) + \frac{4}{7}|4\rangle\langle 4|$$ ✓

d) $\langle A\rangle_\rho$, $\langle B\rangle_\rho$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 4 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$ expresados en la base original

$$\langle A\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\{\rho\cdot A\} = \frac{1}{7}\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{7}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+8\right) = \frac{11}{7} = \frac{3}{7}\cdot 1 + \frac{4}{7}\cdot 2 \checkmark$$

$$\langle B\rangle_\rho = \mathrm{Tr}\{\rho\cdot B\} = \frac{1}{7}\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 4 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{7}\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 9/2 & 12/2 & & \\ 9/2 & 12/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{9}{2}+22\right) = \frac{53}{14} = 3\cdot\frac{3}{14} + 4\cdot\frac{3}{14} + 4\cdot\frac{4}{7} \checkmark$$

e)

$$p(a=1) = \langle 1|\rho|1\rangle + \langle 2|\rho|2\rangle = \mathrm{Tr}\{\rho\underbrace{(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)}_{\Lambda_{a=1}}\}$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & \\ 3/2 & 3/2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{7}\cdot 3 = \frac{3}{7} = \frac{3}{14}+\frac{3}{14} \checkmark$$

f) $p(\underbrace{a=2,\ b=4}_{\text{CCO compatibles}}) = \langle 4|\rho|4\rangle = \mathrm{Tr}\{\rho\underbrace{|4\rangle\langle 4|}_{\Lambda_{a=2,b=4}}\} = \frac{4}{7}$

↳ Simultáneo, no secuencial!

Las probabilidades cambian con el orden (por tanto) aunque conmuten, la P_{global} no y el resultado final de la medida.

↓ ver ejc. 3.2

3.2.

a) $\rho' = \dfrac{\sum_{a\in\Delta} \Lambda_a \rho \Lambda_a}{\sum_{a\in\Delta} Tr(\rho \Lambda_a)}$; $p(a') = \sum_{a'\in\Delta'} Tr(\rho' \Lambda_{a'})$

$\rho = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}$

$\Lambda_{a=1} = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ ver (3.1)

$\rho' = \dfrac{\Lambda_{a=1}\,\rho\,\Lambda_{a=1}}{Tr(\rho\Lambda_{a=1})} = \dfrac{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{7}\cdot 3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$p(b=3) = Tr(\rho' \cdot \Lambda_{b=3})$

$\Lambda_{b=3} = |1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$p(b=3) = Tr\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}$ //

$\Lambda_{a=2} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ → $\Lambda_{a=1} + \Lambda_{a=2} = I$ ✓

relació de clausura

b) $\rho' = \dfrac{\Lambda_{a=1}\rho\Lambda_{a=1} + \Lambda_{a=2}\rho\Lambda_{a=2}}{Tr\{\rho\Lambda_{a=1} + \rho\Lambda_{a=2}\}}$

$= \dfrac{\frac{1}{7}\left(\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 4 \end{pmatrix}\right)}{Tr\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & \\ 3/2 & 3/2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 4 \end{pmatrix}\right\}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 3/2 & 3/2 & & \\ 3/2 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}}{7} = \rho$

$p(b=3) = Tr\{\rho' \cdot \Lambda_{b=3}\} = Tr\{\rho \cdot \Lambda_{b=3}\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \cdot \frac{1}{7}$

$= \frac{3}{14}$ // ✓ $= \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}$

c) $\rho' = \dfrac{\Lambda_{b=3}\rho\Lambda_{b=3} + \Lambda_{b=4}\rho\Lambda_{b=4}}{Tr\{\rho\Lambda_{b=3} + \rho\Lambda_{b=4}\}}$

$\Lambda_{b=4} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ → $\Lambda_{b=3} + \Lambda_{b=4} = I$ ✓

$\rho' = \dfrac{\frac{1}{7}\left[\begin{pmatrix} 3/2 & \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}\right]}{\frac{1}{7} Tr\left\{\begin{pmatrix} 3/2 & & \\ 3/2 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & & \\ 0 & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix}\right\}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & & & \\ & 3/2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \neq \rho$

$p(a=1) = Tr\{\rho' \Lambda_{a=1}\} = Tr\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3/2 & & \\ & 3/2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}$ //

(3.3)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle$$

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| - \frac{i}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}\langle 2|\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{2}, +\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} & 1/4 & i/4 \\ 1/2\sqrt{2} & -i/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{Tr}\{\rho\} = 1 \checkmark$$

hermítico ✓

$$\rho' = \frac{\sum_{n=0}^{2} \Lambda_n \rho \Lambda_n}{\mathrm{Tr}(\Sigma \rho \Lambda_n)} \quad ; \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho' = \frac{\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1/4 \end{pmatrix}}{\mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix} 1/2 & & \\ i/2\sqrt{2} & 0 & \\ 1/2\sqrt{2} & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -i/4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & & 1/2\sqrt{2} \\ & 0 & i/4 \\ & & 1/4 \end{pmatrix}\right.}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Tr}(\rho') = 1$$

ρ' diagonal → pierdes coherencias (términos cruzados)

→ operador momento

$$\langle p\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\cdot p) \quad ; \quad \langle p^2\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\cdot p^2)$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,(a_+ - a_-)$$

$$p|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle - \sqrt{n}\,|n-1\rangle\right)$$

$$\langle n'|p|n\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n',n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{n',n-1}\right)$$

$$\langle 0|p|0\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 1|p|1\rangle = 0 \quad ; \quad \langle 2|p|2\rangle = 0$$

$$\langle 1|p|0\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} = \langle 0|p|1\rangle^*$$

$$\langle 2|p|0\rangle = 0 = \langle 0|p|2\rangle$$

$$\langle 1|p|2\rangle = i\sqrt{\hbar m\omega} = \langle 2|p|1\rangle^*$$

$$p = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & \sqrt{2}\,i \\ 0 & -\sqrt{2}\,i & 0 \end{pmatrix}\cdot\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \qquad p^2 = p\cdot p = \frac{\hbar m\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1+2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Tr}\{p\} = 0$

$$\rho' p = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\hbar m w}{2}}\begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 \\ i & 0 & \sqrt{2}\,i \\ 0 & -\sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix} \to Tr(\rho' p) = \langle p \rangle = 0$$

$$\rho' p^2 = \frac{\hbar m w}{8}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \langle p^2\rangle = Tr(\rho' p^2) = \frac{7}{8}\hbar m w$$

Para comparar con el caso sin medida previa:

$$\rho p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -i & +\frac{1}{2} \\ i/4 & 1/\sqrt{2} & i/2\sqrt{2} \\ 1/4 & -i/\sqrt{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{\hbar m w}{2}} \to Tr(\rho p) = \langle p \rangle = \sqrt{\frac{\hbar m w}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)$$
$$= \sqrt{\hbar m w}$$

$$\rho p^2 = \frac{\hbar m w}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3i}{2\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 3/4 & i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3i}{4} & 1 \end{pmatrix} \to \langle p^2\rangle = Tr(\rho p^2) = \frac{\hbar m w}{1}\cdot\frac{11}{8}$$

3.4

Spin 1/2 $\quad \vec{p} \quad \vec{s}$

$\vec{n}$ vector unitario $\to \vec{n} = (u_1, u_2, u_3)$ matrices de Pauli

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \qquad \vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} u_3 & u_1 - iu_2 \\ u_1 + iu_2 & -u_3 \end{pmatrix}$$

a) $\langle \vec{S}\cdot\vec{n}\rangle_\rho = Tr\{\rho\cdot\vec{S}\cdot\vec{n}\}$

Camino 1:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & 1 - p_3 \end{pmatrix}$$

Camino 2: (+ fácil)

$$\langle \vec{S}\cdot\vec{n}\rangle_\rho = Tr(\rho\cdot\vec{S}\cdot\vec{n}) = \frac{1}{2}Tr\left\{(I + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})\left(\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\right)\right\}$$
$$= \frac{\hbar}{4}\left(\underbrace{Tr\{\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\}}_{n_j Tr(\sigma_j) = 0} + Tr\{(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\}\right) = Tr\{p_i\sigma_i\sigma_j n_j\}\frac{\hbar}{4}$$
$$= Tr\{p_i n_j(\delta_{ij}I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)\}\frac{\hbar}{4}$$
(propiedad matrices Pauli) $= \frac{\hbar}{4}Tr\{p_j n_j\cdot I\} = \frac{\hbar}{2}\vec{p}\cdot\vec{n}$

$$\rho\cdot(\vec{S}\cdot\vec{n}) = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} (1+p_3)u_3 + (p_1 - ip_2)(u_1 + iu_2) & (1+p_3)(u_1 - iu_2) + (p_1 - ip_2)(-u_3) \\ (p_1 + ip_2)u_3 + (1-p_3)(u_1 + iu_2) & (p_1 + ip_2)(u_1 - iu_2) + (1-p_3)(-u_3) \end{pmatrix}$$

$$Tr\{\rho\vec{S}\cdot\vec{n}\} = \frac{\hbar}{4}\left(p_3u_3 + \cancel{u_3} + p_1u_1 + \cancel{ip_1u_2} - \cancel{ip_2u_1} + p_2u_2 + p_1u_1 + \cancel{ip_2u_1} - \cancel{ip_1u_2}\right.$$
$$\left. + p_2u_2 + p_3u_3 - \cancel{u_3}\right) = \frac{\hbar}{2}\vec{p}\cdot\vec{n}$$

b) $\langle\vec{S}\cdot\vec{n}\rangle = \frac{\hbar}{2}x + (1-x)\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{\hbar}{2}\vec{p}\cdot\vec{n}$ diagonalizar $\vec{S}\cdot\vec{n}$

$\hookrightarrow 2x = 1 + \vec{p}\cdot\vec{n} \qquad ; x = Tr\{\rho\Lambda^+\}\cdots$ complicado, para obtener Λ^+

$$p\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = x = \frac{1 + \vec{p}\cdot\vec{n}}{2} \to p\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = 1 - p\left(+\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1 - \vec{p}\cdot\vec{n}}{2}$$

c) $\rho' = \dfrac{\sum_a \Lambda_a \rho \Lambda_a}{\sum_a Tr(\rho \Lambda_a)}$ $\qquad \Lambda_+ = |\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+|$

$\Lambda_- = |\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},-|$

Más fácil con $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \vec{\sigma}\cdot\vec{n})$ (ver apuntes) elemaster

$= \dfrac{|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle \left(\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+|\rho|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\right)\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| + \text{idem para } (-)}{Tr\left(\rho\, |\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| + \text{idem para } (-)\right)}$

$Tr(\rho|\psi\rangle\langle\psi|) \equiv \langle\psi|\rho|\psi\rangle$

$= \dfrac{|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\, p(+\frac{\hbar}{2}) \langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| + |\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\, p(-\frac{\hbar}{2}) \langle \vec{S}\cdot\vec{n},-|}{\underbrace{p(+\frac{\hbar}{2}) + p(-\frac{\hbar}{2})}_{1}}$

b)

$= \frac{1}{2}|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| + \frac{\vec{p}\cdot\vec{n}}{2}|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| + \frac{1}{2}|\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},-| - \frac{1}{2}\vec{p}\cdot\vec{n}\,|\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\langle\vec{S}\cdot\vec{n},-|$

$= \frac{1}{2}\left(I + \vec{p}\cdot\vec{n}\left(\underbrace{|\vec{S}\cdot\vec{n},+\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},+| - |\vec{S}\cdot\vec{n},-\rangle\langle \vec{S}\cdot\vec{n},-|}\right)\right)$

$+1|+\rangle + (-1)|-\rangle \rightarrow$ 3ª matriz de Pauli en la base propia de $\vec{n}$.

$= \frac{1}{\hbar/2}\vec{S}\cdot\vec{n} = \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$

o por teorema espectral $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\vec{n}=\hat{z}}$

$\begin{cases} \Lambda_+ - \Lambda_- = \vec{\sigma}\cdot\vec{n} \\ \Lambda_+ + \Lambda_- = I \end{cases}$

$\rho' = \frac{1}{2}\left(I + (\vec{p}\cdot\vec{n})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\right)$

Comparando con

$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})$ se deduce que: $\vec{p}\,' = (\vec{p}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n}$

$\rho' = \frac{1}{2}(I + \vec{p}\,'\cdot\vec{\sigma})$ $\quad \hookrightarrow$ para medidas no filtrantes

3.5

$\vec{p} = (0,0,1)$

$\vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) = \vec{p}_f = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right)$

$\rho = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho' = \dfrac{\Lambda_+ \rho \Lambda_+}{Tr(\rho\Lambda_+)}$ $\qquad 2\Lambda_+ = I + \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$

$\rho' = \dfrac{\frac{1}{4}(1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{n})\rho(1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{n})}{\frac{1}{2}(2+0)} = \cdots$ No hace falta. $\quad \vec{n} = \vec{p}_f$

$\vec{p}_f \parallel \vec{n}$, $\|\vec{p}_f\| = \|\vec{n}\| = 1 \rightarrow \vec{p}_f = \vec{n}$ (elegimos $+\frac{\hbar}{2}$)

$\left.\begin{array}{l} \sin\theta\cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sin\theta\sin\phi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right\}$ $\tan\phi = 1 \rightarrow \phi = 45°$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \theta = 60°$

b) Ver 3.4c) $\rho' = \frac{1}{2}(I + (\vec{p}\cdot\vec{n})(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})) = \frac{1}{2}(I + \cos\theta\, \vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \cdots$ sustituir $\theta, \hat{n}$

$\vec{p}_f\,' = \cos\theta\cdot\hat{n}$

Problemas propuestos

Problema 4.1. Consideremos el hamiltoniano de interacción de un electrón con un campo magnético $\vec{B}$ dirigido a lo largo del eje z y que se puede escribir como $H = \omega S_z$, con $\omega = \frac{eB}{m_e c}$. Supongamos B constante (campo estático y uniforme).

a) Determinad los valores y vectores propios de H.

b) Escribid el operador de evolución temporal y determinad la evolución de un estado que, en $t = 0$, viene dado por $|\alpha >= c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$.

c) Especificad la evolución temporal para el caso particular de que $|\alpha\rangle$ sea el vector $|S_x;+\rangle$. Para este caso, calculad las probabilidades de que, en el instante t, se encuentren los valores $\pm\frac{\hbar}{2}$ al medir S_x.

Problema 4.2. Usando el hamiltoniano del problema anterior, encontrad la evolución temporal de los operadores de espín $S_x(t), S_y(t)$ y $S_z(t)$, a partir de la ecuación de evolución de Heisenberg.

Problema 4.3. Un electrón está sometido a un campo magnético uniforme y constante dirigido según la dirección del eje z positivo. En $t = 0$, el electrón se encuentra en el estado propio de $\vec{S}.\vec{n}$ con valor propio $\frac{\hbar}{2}$ con $\vec{n}$ el vector unitario fijado por las coordenadas esféricas θ y $\phi = 0$ (contenido en el plano xz y formando un ángulo θ con el eje z).

a) Obtened la probabilidad de encontrar al electrón en el estado con $s_x = \frac{\hbar}{2}$ como función del tiempo.

b) Encontrad el valor esperado de S_x como función del tiempo.

c) Verificad el resultado en los casos $\theta \to 0$ y $\theta \to \pi/2$.

Problema 4.4. Una caja que contiene solo una partícula está dividida en dos compartimientos (izquierda y derecha) por una división muy delgada. Si despreciamos las variaciones espaciales en cada parte de la caja, podremos representar mediante $|L\rangle(|R\rangle)$ el estado correspondiente a encontrar la partícula con seguridad a la izquierda (derecha). El estado más general se puede escribir como

$$|\alpha\rangle = |R\rangle \langle R|\alpha\rangle + |L\rangle \langle L|\alpha\rangle$$

donde $\langle R|\alpha\rangle$ y $\langle L|\alpha\rangle$ se pueden considerar como “funciones de onda”. La partícula puede pasar de un lado al otro por efecto túnel; este efecto viene descrito por el hamiltoniano

$$H = \Delta(|L\rangle \langle R| + |R\rangle \langle L|)$$

con Δ un numero real.

a) Encontrad los estados propios de H normalizados y sus autovalores.

b) En la imagen de Schrödinger, fijamos los vectores base $|L\rangle$ y $|R\rangle$, y consideramos la evolución temporal de los estados. Si el sistema está representado por $|\alpha\rangle$ en $t = 0$, encontrad el estado$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ para $t > 0$ aplicando el operador de evolución temporal.

c) Supongamos que en $t = 0$, la partícula se encuentra a la izquierda con certeza. ¿Cuál es la probabilidad de encontrarla en este estado en función del tiempo?

d) Escribid las ecuaciones acopladas para las funciones de onda $\langle L|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$ y $\langle R|\alpha, t_0 = 0; t\rangle$. Demostrad que las soluciones a las ecuaciones de Schrödinger acopladas son las esperadas del apartado b).

e) Supongamos ahora que hemos cometido el error de escribir el hamiltoniano como

$$H = \Delta |L\rangle \langle R|$$

Resolviendo el problema general de la evolución temporal con este hamiltoniano, mostrad que la probabilidad no se conserva.

4.1

$\vec{B} = B\hat{z}$

$H = \omega S_z$, $\omega = \frac{eB}{m_e c}$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\sigma_z} = \frac{\hbar}{2}\omega\,\sigma_z$$

a) $\lambda_+ = \frac{\hbar\omega}{2} \equiv c$, con $|+\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda_- = -\frac{\hbar\omega}{2} = -c$, con $|-\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

b) $$U(t,t_0) \overset{H = cte}{=} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} = e^{-i\frac{\omega}{2}(t-t_0)\sigma_z} \overset{t_0=0}{=}$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}\sigma_z} = e^{-\frac{i\omega t}{2}}|+\rangle\langle+| + e^{\frac{i\omega t}{2}}|-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0\\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

↑función de un operador

$$|\alpha,t\rangle = U(t)|\alpha\rangle = U(t)\begin{pmatrix}c_+\\c_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_+ e^{-i\omega t/2}\\ c_- e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$ → Periodo $\frac{4\pi}{\omega}$ ↓ 2 vueltas pa volver al principio (espín 1/2) mismo estado

$$= c_+ e^{-i\omega t/2}|+\rangle + c_- e^{+i\omega t/2}|-\rangle$$ en valores esperados es $\frac{2\pi}{\omega}$

c) $$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \to |S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$|S_x,-\rangle = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$|\alpha,t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\omega t/2}\\ e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

$$p\left(\pm\frac{\hbar}{2}\right)_{S_x} = |\langle S_x,\pm|\alpha,t\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|(1, \pm 1)\begin{pmatrix}e^{-i\omega t/2}\\ e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|e^{-i\omega t/2} \pm e^{i\omega t/2}\right|^2 = \frac{1}{4}\begin{cases}|2\cos\omega t/2|^2\\ |-2i\sin\omega t/2|^2\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} p\left(+\frac{\hbar}{2}\right)_{S_x} &= \cos^2\frac{\omega t}{2}\\ p\left(-\frac{\hbar}{2}\right)_{S_x} &= \sin^2\frac{\omega t}{2}\end{aligned}\right\}\ \Sigma = 1 \checkmark$$

otra manera es cambiar de base: $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{S}_x,+\rangle + |\vec{S}_x-\rangle)$

$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\vec{S}_x,+\rangle - |\vec{S}_x,-\rangle)$

$$|\alpha,t\rangle = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t/2}(|S_x+\rangle + |S_x-\rangle) + e^{i\omega t/2}(|S_x+\rangle - |S_x-\rangle)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|S_x+\rangle\left(e^{i\omega t/2} + e^{-i\omega t/2}\right) + |S_x-\rangle\left(e^{-i\omega t/2} - e^{i\omega t/2}\right)\right)$$

$$= |S_x+\rangle\cos\omega t - i|S_x-\rangle\sin\omega t$$

$p(+\frac{\hbar}{2}) = |\langle S_x+|\alpha\rangle|^2 = \cos^2\omega t$; $p(-\frac{\hbar}{2}) = \sin^2\omega t$

(4.2)

$A_H(t) = U^+(t,t_0)\, A_S(t)\, U(t,t_0)$ → Heisenberg

$i\hbar \frac{d}{dt} A_H = [A_H, H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_H$, con $\frac{\partial}{\partial t} A_H \equiv U^+ \frac{d}{dt}(A_S) \cdot U$

$A_S \neq A_S(t) \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} A_H = 0$

$\overset{\parallel}{S}$ → no depende del tiempo $A_S = \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$

$i\hbar \frac{d}{dt} A_H = [A_H, H]$ $\quad A_H = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}_H$

→ Calculamos $\vec{\sigma}_H$ en lugar de $\vec{S}_H$ para ahorrarnos las dimensiones

$$i\hbar \frac{\hbar}{2} \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_H = \frac{\hbar}{2}[\vec{\sigma}_H, \sigma_{Hz}]\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_{Hj} = \frac{\omega}{2i}[\sigma_{Hj}, \sigma_{Hz}] = \frac{\omega}{2i} 2i\, \epsilon_{jzk}\sigma_{Hk} = \omega\, \epsilon_{jzk}\sigma_{Hk}$$

→ omitimos la H por simplificar

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma_x &= -\omega\sigma_y \\ \frac{d}{dt}\sigma_y &= \omega\sigma_x \end{aligned}\right\} \qquad \ddot{\sigma}_x = -\omega\dot{\sigma}_y = -\omega^2\sigma_x \; ; \; \ddot{\sigma}_y = \omega\dot{\sigma}_x = \omega(-\omega)\sigma_y$$

$$\ddot{\sigma}_x + \omega^2\sigma_x = 0 \qquad \rightarrow \text{OAS}$$

$$\ddot{\sigma}_y + \omega^2\sigma_y = 0$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_z = 0$$

$$\sigma_x = U^+ \sigma_{x_S} U \overset{4.1}{=} \begin{pmatrix} e^{i\omega t/2} & \\ & e^{-i\omega t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t/2} \\ e^{-i\omega t/2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega t/2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix}$$

σ_y → de la misma manera o derivando: $\sigma_y = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\sigma_x$

$$\sigma_y = -\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} 0 & i\omega e^{i\omega t} \\ -i\omega e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i e^{i\omega t} \\ i e^{-i\omega t} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\omega t - \pi/2)} \\ e^{-i(\omega t - \pi/2)} & 0\end{pmatrix}$$

↳ desfase $\pi/2$ con σ_x
↳ precesión espín en eje z

$$\sigma_z = \sigma_{z_S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$\vec{\sigma}(t=0) = \vec{\sigma}_S$ ✓

Otra manera es resolver el sistema directamente ensayando:

$\sigma_x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$; $\sigma_x(0) = B = \sigma_{x_S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$\sigma_y = C\sin\omega t + D\cos\omega t$; $\sigma_y(0) = D = \sigma_{y_S} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}$

$\sigma_z = cte$; $\sigma_z(0) = cte = \sigma_{z_S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\sigma_x = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t \Big|_{t=0} = A\omega = -\omega\sigma_y(0) = -D\omega \rightarrow A = -D$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_y\Big|_{t=0} = C\omega = \omega\sigma_x(0) = \omega B \rightarrow C = B$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_{x_S} \cos\omega t - \sigma_{y_S} \sin\omega t \\ \sigma_y = \sigma_{x_S} \sin\omega t + \sigma_{y_S} \cos\omega t \\ \sigma_z = \sigma_{z_S} \end{cases}$$

$$\vec{\sigma} \equiv \vec{\sigma}_H = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x_S} \\ \sigma_{y_S} \\ \sigma_{z_S} \end{pmatrix} = R_z(\omega t) \cdot \vec{\sigma}_S = \vec{\sigma}_H$$

Para $\vec{S}$:

$\vec{S}_H(t) = R_z(\omega t)\, \vec{S}_S$ → precesión del espín

$\langle \vec{S}(t) \rangle = R_z(\omega t) \langle \vec{S}(0) \rangle$

ya que:

$\langle \vec{S}_S \rangle = \langle \vec{S}_H \rangle = \langle \alpha, t_0 | \vec{S}_H | \alpha, t_0 \rangle = \langle \alpha, t_0 | U^+ \vec{S}_S U | \alpha, t_0 \rangle = \langle \alpha, t | S | \alpha, t \rangle$ (ctes en t)

Para un vector cualquiera:

$|\alpha, t_0\rangle = c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$

$\langle S_i \rangle = \langle \alpha, t | S_{i_S} | \alpha, t \rangle = \langle \alpha, t_0 | S_{i_H} | \alpha, t_0 \rangle$

$(c_+, c_- \in \mathbb{R})$

$\langle S_x \rangle = \hbar c_+ c_- \cos\omega t$

$\langle S_y \rangle = \hbar c_+ c_- \sin\omega t$

$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} (|c_+|^2 - |c_-|^2)$

(4.3)

e^-

$\vec{B} = B_0 \hat{z}$

$|\alpha, t_0\rangle = |\vec{S}\cdot\vec{n}, +\rangle \quad , \quad \vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$

$\vec{S}\cdot\vec{n} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$

Análogo a 4.2, pero proyectando en $\hat{n}$

$S_{n_H} = U^+ S_{n_S} U$

$\frac{d}{dt} \sigma_{n_H} = \frac{\hbar}{2} [\sigma_{n_H}, \sigma_{z_H}]$ → $\vec{\sigma}_H \cdot \vec{n} = \sum_i \sigma_{H i} \cdot n_i \rightarrow \langle \vec{\sigma}_H \cdot \vec{n} \rangle = \sum_i n_i \langle \sigma_{i_H} \rangle$

en base z, problema 2.2, $\phi = 0$

$|\alpha, t_0\rangle = |\vec{S}\cdot\vec{n}, +\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |+\rangle + \sin\frac{\theta}{2} |-\rangle \equiv c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle$

$\langle S_x \rangle = \hbar c_+ c_- \cos\omega t = \hbar \cos\theta/2 \sin\theta/2 \cos\omega t = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \cos\omega t$

$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin\theta \sin\omega t$

$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\hbar}{2} \cos\theta$

n no depende de t $\langle \vec{n} \rangle = \vec{n}$; $n_i = $ cte

$\langle S_n(t) \rangle = \langle \vec{S}\cdot\vec{n} \rangle = \langle S_x \rangle n_x + \langle S_y \rangle n_y + \langle S_z \rangle n_z = \frac{\hbar}{2} \cos\omega t \sin^2\theta + 0$

$+ \frac{\hbar}{2} \cos^2\theta$

a) $p(|S_x,+\rangle) = |\langle S_x,+|\alpha,t\rangle|^2 \equiv x(t)$

b) $\langle S_x(t)\rangle_\alpha = \hbar c_+ c_- \cos\omega t = \frac{\hbar}{2}\sin\theta\cos\omega t = x(t)\cdot\frac{\hbar}{2} + (1-x(t))\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$

$\sin\theta\cos\omega t = 2x-1 \rightarrow x(t) = \frac{1+\sin\theta\cos\omega t}{2}$ // (a)

c) • $\theta = 0$

$x(t) = \frac{1}{2}$ → lógico mides S_z cuando $|\alpha,t_0\rangle = |S_x,+\rangle$ ($\theta = 0$)

↳ la precesión no afecta a probabilidades de z pues $\frac{dS_z}{dt} = 0$

• $\theta = \pi/2$ → mides S_x

$x(t) = \frac{1}{2}(1+\cos\omega t) = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$ → lógico, precesión de período $\frac{4\pi}{\omega}$ (en fases) //

y $\frac{2\pi}{\omega}$ en probabilidades o valores esperados.

(4.4)

$|L\rangle \;\vdots\; |R\rangle$ → $|\alpha\rangle = \left(\sum_a |a\rangle\langle a|\right)|\alpha\rangle = |R\rangle\langle R|\alpha\rangle + |L\rangle\langle L|\alpha\rangle$

$= \begin{pmatrix}\langle R|\alpha\rangle \\ \langle L|\alpha\rangle\end{pmatrix}$ f. de onda

Base $\{|a\rangle\} = \{|L\rangle; |R\rangle\}$

$H = \Delta(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$; $\Delta \in \mathbb{R}$

a) $= \Delta\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \Delta\sigma_x$ → Vectores propios $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ con valores propios $\pm\Delta$ $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

⇒ los estados de energía definida no están localizados

b) $|\alpha,t_0\rangle = |\alpha,0\rangle = \begin{pmatrix}r\\ \ell\end{pmatrix}$

$|\alpha,t\rangle = U(t)|\alpha,0\rangle$ con $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\Delta\sigma_x t\right)$ → no es diagonal en L,R!

$\sigma_x = |L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|$

$U(t) = \exp\left(-\frac{i\Delta t}{\hbar}(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|)\right) = e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}}|+\rangle\langle+| + e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}}|-\rangle\langle-|$

$= \begin{pmatrix}e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}} & 0\\ 0 & e^{i\Delta t/\hbar}\end{pmatrix}_{\text{base}\,\pm} = \frac{e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}}}{2}(|L\rangle+|R\rangle)(\langle L|+\langle R|) + \frac{e^{\frac{i\Delta t}{\hbar}}}{2}(|L\rangle-|R\rangle)\cdot(\langle L|-\langle R|)$

$= \frac{e^{-\frac{i\Delta t}{\hbar}}}{2}(|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) + e^{\frac{+i\Delta t}{\hbar}}(|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R| - |R\rangle\langle L| - |L\rangle\langle R|)$

$= |L\rangle\langle L|\cos\frac{\Delta t}{\hbar} + |R\rangle\langle R|\cos\frac{\Delta t}{\hbar} - i\sin\frac{\Delta t}{\hbar}(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta t}{\hbar} & -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \\ -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} & \cos\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix}_{\substack{L\\R}} \quad ; \quad U\cdot U^{+} = I \checkmark$$

$$|\alpha,t\rangle = U(t)|\alpha,0\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) r - i\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \ell \\ -i\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) r + \cos\frac{\Delta t}{\hbar}\, \ell \end{pmatrix}$$

c) $t=0$

$|\alpha,0\rangle = |L\rangle \rightarrow \ell = 1,\ r = 0$

$$|\alpha,t\rangle = \begin{pmatrix} -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \\ \cos\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

$$p(L)_t = |\langle L|\alpha,t\rangle|^2 = \cos^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \quad //$$

d) $$i\hbar\frac{d}{dt}|\alpha,t\rangle = H|\alpha,t\rangle = \Delta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \\ \cos\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta t}{\hbar} \\ -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$i\hbar\begin{pmatrix} -i\frac{\Delta}{\hbar}\cos\frac{\Delta t}{\hbar} \\ -\frac{\Delta}{\hbar}\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} \cos\frac{\Delta t}{\hbar} \\ -i\sin\frac{\Delta t}{\hbar} \end{pmatrix} \quad // \checkmark$$

En general

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_R(t) \\ c_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_R(t) \\ c_L(t) \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} c_L(t) \\ c_R(t) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} i\hbar\dot{c}_L = \Delta c_R \\ i\hbar\dot{c}_R = \Delta c_L \end{array}\right\} \text{Ecuaciones acopladas}$$

$$i\hbar\ddot{c}_L = \Delta\dot{c}_R = \Delta\Delta\frac{c_L}{i\hbar} \rightarrow \ddot{c}_L + \frac{\Delta^2}{\hbar^2}c_L = 0$$

$$\ldots\ \text{''}\ \ldots\ \ddot{c}_R + \frac{\Delta^2}{\hbar^2}c_R = 0$$

Supones $\left.\begin{array}{l} c_L = A\sin\omega t + B\cos\omega t \\ c_R = C\sin\omega t + D\cos\omega t \end{array}\right\}$; $\omega = \frac{\Delta}{\hbar}$

$c_L(0) = \underset{B}{\underset{\|}{\langle L|\alpha\rangle}}$; $c_R(0) = \langle R|\alpha\rangle = D$

$i\hbar\dot{c}_L(0) = i\overset{\Delta}{\overbrace{\hbar\omega}}A = \Delta c_R(0) = \Delta\cdot D \rightarrow Ai = D$

$i\hbar\dot{c}_R(0) = i\underbrace{\hbar\omega}_{\Delta}C = \Delta c_L(0) = \Delta B \rightarrow Ci = B$

$c_L = \frac{D}{i}\sin\omega t + B\cos\omega t = -i\,r\sin\omega t + l\cos\omega t$

$c_R = \frac{B}{i}\sin\omega t + D\cos\omega t = -i\,l\sin\omega t + r\cos\omega t$

coincide con b) ✓

están al revés $\begin{pmatrix} c_R \\ c_L \end{pmatrix}$

e) $H = \Delta |L\rangle\langle R| = \Delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ No es hermítico, no es un observable

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_R(t) \\ c_L(t) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 0 \\ c_R(t) \end{pmatrix}$$

↳ $i\hbar \frac{d}{dt} c_R = 0 \rightarrow c_R = cte = c_R(0)$

$i\hbar \frac{d}{dt} c_L = \Delta c_R$ ↳ $\frac{d}{dt} c_L = cte \rightarrow c_L = \frac{cte\,\Delta}{i\hbar} t + c_L(0) = c_L(0) + \frac{c_R(0)\Delta t}{i\hbar}$

$$P_L + P_R = |c_L|^2 + |c_R|^2$$

$$= |c_L(0)|^2 + |c_R(0)|^2 = 1$$

$$= |c_L(t)|^2 + |c_R(t)|^2 = \left|c_L(0) + c_R(0)\frac{\Delta t}{\hbar}\right|^2 + |c_R(0)|^2 > 1$$

↳ Viola unitariedad, llegan más partículas!

Para que U sea unitario, H debe ser hermítico.

Problemas propuestos

Problema 5.1. Considerad un sistema de dos niveles con $E_1 < E_2$, y con un potencial dependiente del tiempo que conecta los dos niveles, de la forma:

$$V_{11} = V_{22} = 0, V_{12} = \gamma e^{i\omega t}, V_{21} = \gamma e^{-i\omega t}$$

con ω real. En $t = 0$, sólo el nivel inferior está poblado, de forma que $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.

a) Encontrad $|c_1(t)|^2$ y $|c_2(t)|^2$ resolviendo exactamente las ecuaciones diferenciales acopladas para $c_1(t)$ y $c_2(t)$.

b) Repetid el cálculo utilizando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo al orden más bajo, y comparad con el apartado anterior para valores pequeños de γ. Considerad los casos en que ω es próximo a ω_{21} y cuando es muy diferente.

Problema 5.2. Una partícula se encuentra, en $t < 0$, en el estado fundamental de un oscilador armónico. En $t = 0$ se conecta una perturbación de la forma:

$$H'(x,t) = Ax^2 e^{-t/\tau}$$

Utilizando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, calculad la probabilidad de que, cuando $t \gg \tau$, el sistema haya hecho una transición a uno de los estados excitados.

Problema 5.3. Considerad un sistema compuesto por dos partículas de espín 1/2 . Para $t < 0$, el hamiltoniano no depende del espín y la energía se puede considerar como cero ajustando el origen de energías. Para $t > 0$, añadimos una perturbación dada por

$$H'(t) = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right)\vec{S}_1\vec{S}_2$$

El sistema se encuentra en el estado $|+-\rangle$ para $t \leq 0$. Calculad, como función del tiempo, la probabilidad de encontrar el sistema en cada uno de los estados$|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ y $|--\rangle$:

a) Resolviendo el problema exactamente.

b) En primer orden de teoría de perturbaciones dependientes del tiempo. ¿En qué situación se obtiene el resultado obtenido en el apartado anterior?.

Problema 5.4. Un átomo de hidrógeno en el estado fundamental ($n = 1, l = 0, m = 0$) se pone entre las placas de un condensador, aplicando un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje z :

$$\vec{E} = \left\{ \begin{array}{c} 0\, si\, t < 0 \\ \vec{E}_0 e^{-t/\tau}\, si\, t > 0 \end{array} \right\}$$

Utilizando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, calculad la probabilidad de encontrar el átomo, cuando $t \gg \tau$, en cada cual de los tres estados 2p ($n = 2, l = 1, m = 0, \pm 1$). Haced lo mismo para el estado 2s ($n = 2, l = 0, m = 0$).

5.1

2 ——— E_2 $\quad E \uparrow$

1 ——— E_1

$$V = \gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad H = H_0 + V$$

$$c_1(0) = 1 \qquad c_2(0) = 0$$

a) $|\psi, t\rangle = \sum_n \overset{U(t,t_0)}{c_{n,\psi}(t)} |n\rangle \; ; \; |\psi, t\rangle_I = U^+ |\psi, t\rangle = \sum c_{n,\psi}(t) |n\rangle$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle = H_0 |\psi, t\rangle + V |\psi, t\rangle$$

en teoría se demuestra

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle_I = V_I(t) |\psi, t\rangle_I$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = V_I \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$V_I = e^{\frac{itH_0}{\hbar}} V \cdot e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{itE_1}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{+itE_2}{\hbar}} \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{itE_1}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{itE_2}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{+i\omega t} e^{\frac{itE_1}{\hbar}} \\ e^{-i\omega t} e^{\frac{itE_2}{\hbar}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{itE_1}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-itE_2/\hbar} \end{pmatrix} \gamma = \gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{it}{\hbar}(E_1 - E_2)} e^{+i\omega t} \\ e^{-\frac{it}{\hbar}(E_1 - E_2)} e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{I\,nm} = e^{i\omega_{nm} t} V_{nm} \quad \text{con} \quad \omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \; ; \; \Omega = \frac{E_1 - E_2}{\hbar} + \omega = \omega_{12} + \omega = \omega - \omega_{21}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & e^{i\Omega t} \\ e^{-i\Omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} e^{+i\Omega t} c_2 \\ e^{-i\Omega t} c_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = \dfrac{\gamma}{i\hbar} e^{i\Omega t} c_2 \\ \dot{c}_2 = \dfrac{\gamma}{i\hbar} e^{-i\Omega t} c_1 \end{cases}$$

$$\ddot{c}_2 = \frac{\gamma}{i\hbar} (-i\Omega) e^{-i\Omega t} c_1 + \frac{\gamma}{i\hbar} e^{-i\Omega t} \dot{c}_1 = -\frac{\gamma\Omega}{\hbar} \left(e^{-i\Omega t} c_1\right) + \frac{\gamma}{i\hbar} e^{-i\Omega t} \frac{\gamma}{i\hbar} e^{i\Omega t} c_2$$

$$= -\frac{\gamma\Omega}{\hbar} \cdot \frac{i\hbar \dot{c}_2}{\gamma} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}(-1) c_2$$

$$\hookrightarrow \ddot{c}_2 + i\Omega \dot{c}_2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} c_2 = 0$$

$\longrightarrow$ Ensayo solución tipo $c_2 = A \cdot e^{\alpha t}$ $\rightarrow$ ecua de valores propios

$$A \cdot e^{\alpha t} \left(\alpha^2 + i\Omega\alpha + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \alpha_\pm = \frac{-i\Omega \pm \sqrt{-\Omega^2 - 4\gamma^2/\hbar^2}}{2}$$

$$\alpha_\pm = -\frac{i\Omega}{2} \pm i \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 + \gamma^2/\hbar^2}$$

$$c_2 = A_+ e^{\alpha_+ t} + A_- e^{\alpha_- t}$$

$$c_2(0) = 0 = A_+ + A_- \qquad \text{con } \beta = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}}$$

$$c_2 = B\left(e^{\alpha_+ t} - e^{\alpha_- t}\right) = B\left(e^{-i\frac{\Omega t}{2}}\right)\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right) = 2iB\cdot e^{-i\frac{\Omega t}{2}}\left(\sin\beta t\right)$$

$$i\hbar \dot{c}_2 = i\hbar\, 2iB\, e^{-i\cancel{\Omega t}}\left(-\frac{i\Omega}{2}\sin\beta t + \beta\cos\beta t\right) = \gamma e^{-i\cancel{\Omega t}} c_1$$

$$i\hbar\, \dot{c}_2(0) = \gamma e^{-i\Omega t} \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{c_1(0)} \longrightarrow i\hbar\, 2iB(\beta) = \gamma$$

$$2iB = \frac{\gamma}{i\hbar\beta}$$

$$c_2 = \frac{\gamma}{i\hbar\beta} e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \sin\beta t$$

$$c_1 = \frac{i\hbar}{\gamma}\dot{c}_2 e^{i\Omega t} = \frac{\cancel{i\hbar}}{\cancel{\gamma}}\cdot\frac{\cancel{\gamma}}{\cancel{i\hbar}\beta} e^{-i\cancel{\Omega t}}\cdot e^{i\cancel{\Omega t}}\left(-\frac{i\Omega}{2}\sin\beta t + \beta\cos\beta t\right)$$

$$= \cos\beta t - \frac{i\Omega}{2\beta}\sin\beta t$$

$$|c_2|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\beta^2}\cdot\sin^2\beta t$$

$$|c_1|^2 = \cos^2\beta t + \frac{\Omega^2}{4\beta^2}\sin^2\beta t$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = \cos^2\beta t + \frac{\sin^2(\beta t)\overbrace{\left(\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{\Omega^2}{4}\right)}^{=\beta^2}}{\beta^2}$$

$$= 1 - \sin^2\beta t\left(\frac{4\beta^2 - \Omega^2}{4\beta^2}\right)$$

$$= 1 - \sin^2\beta t\left(\frac{\gamma^2}{\hbar^2\beta^2}\right)$$

$$= \cos^2\beta t + \sin^2\beta t = 1$$

Conserva la probabilidad

b) $c_{21} = c_{21}^{(0)} + c_{21}^{(1)} + \dots$

$c_{21}^{(0)} = \delta_{21} = 0$

$$c_{21}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\, V_{21}(t_1)\, e^{i\omega_{21}t_1} = -\frac{i\gamma}{\hbar}\int_0^t dt_1\, e^{-i(\omega-\omega_{21})t_1}$$

$$= -\frac{i\gamma}{\hbar}\,\frac{1}{-i(\omega-\omega_{21})}\cdot\left(e^{-i(\omega-\omega_{21})t} - 1\right) = \frac{\gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})\frac{t}{2}}}{\hbar(\omega-\omega_{21})}\left(e^{-i(\omega-\omega_{21})\frac{t}{2}} - e^{i(\omega-\omega_{21})\frac{t}{2}}\right)$$

$$= -\frac{2i\gamma e^{i\Omega\frac{t}{2}}}{\hbar\Omega}\cdot\sin\frac{\Omega}{2}t \longrightarrow |c_{21}|^2 \simeq \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

Como $c_2(0) = 0$ y es teoría de perturbaciones, $|c_2|^2 \sim |c_{21}^{(1)}|^2 \Rightarrow |c_1|^2 = 1 - |c_2|^2$

$$= 1 - \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

Comparemos con a)

$$|C_1|^2 \overset{a)}{=} 1 - \sin^2(\beta t)\left(\frac{\gamma^2}{\hbar^2\beta^2}\right) \leftrightarrow |C_1|^2 \overset{b)}{=} 1 - \frac{\gamma^2}{\hbar^2}\frac{1}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

Si $\beta \sim \frac{\Omega}{2}$, los resultados coinciden.

$$\beta^2 = \frac{\Omega^2}{4} + \frac{\gamma^2}{\hbar^2} \longrightarrow \text{se cumplirá para } \frac{\gamma}{\hbar} \text{ pequeño } \left(\frac{\gamma}{\hbar} \ll \Omega\right)$$

Para γ altos, la perturbación es grande y no nos vale con quedarnos a 1er orden.

Idem para C_2:

$$|C_2|^2 \overset{a)}{=} \frac{\gamma^2}{\hbar^2\beta^2}\sin^2\beta t \qquad \overset{b)}{=} \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2}\sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right)$$

Otra manera de calcular C_1 en teoría de perturbaciones (más complicada) es:
que hacer $1 - |C_2|^2$

$$C_{11} = C_{11}^{(0)} + C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}$$ ... hay que llegar a 2º orden para conservar $|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1$

$$C_{11}^{(0)} = \delta_{11} = 1$$

$$C_{11}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt_1\, V_{11}(t_1)\, e^{i\omega_{11}t_1} = 0$$

$$C_{11}^{(2)} = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_m \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, V_{1m}(t_1)\, e^{i\omega_{1m}t_1} \cdot V_{m1}(t_2)\, e^{i\omega_{m1}t_2}$$ ← $m=2$ sobrevive

$$= -\frac{1}{\hbar^2}\int_0^t e^{i\omega_{12}t_1}dt_1 \int_0^{t_1} e^{i\omega_{21}t_2}\gamma^2 e^{i\omega(t_1-t_2)}\cdot dt_2 = -\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\int_0^t e^{i\Omega t_1}dt_1 \int_0^{t_1} e^{-i\Omega t_2}dt_2$$

$$= -\frac{\gamma^2}{\hbar^2}\int_0^t e^{-i\Omega t_1}dt_1\left[e^{i\Omega t_1} - 1\right]\cdot\frac{1}{-i\Omega} = \frac{\gamma^2}{\hbar^2 i\Omega}\int_0^t \left[1 - e^{-i\Omega t_1}\right]dt_1$$

$$= \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\left(t(-i\Omega) \quad e^{-i\Omega t} + 1\right) \; \overset{\Omega t \ll 1\ ??}{=} \; \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}e^{-\frac{i\Omega t}{2}}\left(e^{\frac{i\Omega t}{2}} - e^{-\frac{i\Omega t}{2}}\right)$$

$$= \frac{\gamma^2 \cdot 2i}{\hbar^2\Omega^2}\,\mathrm{sen}\frac{\Omega t}{2}\cdot e^{-\frac{i\Omega t}{2}}$$

$$|C_{11}|^2 = \qquad ?$$

(7.2)

$t<0 \rightarrow |0\rangle$ (oscilador armónico)

$$H'(x,t) = Ax^2 e^{-t/\tau} = V$$

$$\langle n|V|m\rangle = Ae^{-t/\tau}\langle n|x^2|m\rangle = Ae^{-t\tau}\langle xn|xm\rangle$$

$$x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle + \sqrt{n}\,|n-1\rangle\right)$$

$$c_{ni}(t) \simeq \cancel{\delta_{ni}}_{0} - \frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\cdot V_{ni}(t')\cdot e^{i\omega_{ni}t'} \Rightarrow c_{n0}$$

$$V_{n0} \Rightarrow \langle n|x^2|0\rangle = \langle xn|x0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\langle n-1|\sqrt{n} + \langle n+1|\sqrt{n+1}\right)|1\rangle$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{2}\,\delta_{n-1,1} + \delta_{n+1,1}\right)$$

$$c_{n0}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\; A\cdot e^{-t'/\tau}\frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{2}\,\delta_{n,2} + \delta_{n,0}\right)e^{i\omega_{n0}t'}$$

$$= -\frac{i}{\cancel{\hbar}}\frac{A\cdot\cancel{\hbar}}{2m\omega}\left(\sqrt{2}\,\delta_{n,2} + \delta_{n,0}\right)\int_0^t e^{t'(i\omega_{n0} - 1/\tau)}\,dt'$$

$$= -\frac{Ai}{2m\omega}\frac{(\sqrt{2}\,\delta_{n,2} + \delta_{n,0})}{i\omega_{n0} - 1/\tau}\left[e^{t(i\omega_{n0} - 1/\tau)} - 1\right] = -\frac{Ai}{2m\omega}\frac{(\sqrt{2}\,\delta_{n,2} + \delta_{n,0})}{i\omega_{n0} - 1/\tau}e$$

Como $n \neq 0$

$\delta_{n,0} = 0 \rightarrow$ sólo podrá saltar al nivel 2 $(\delta_{n,2})$

$$c_{n,0}(t) = c_{20}(t) = \frac{-Ai}{\sqrt{2}\,m\omega}\;\frac{e^{-t/\tau}\cdot e^{i\omega_{20}t} - 1}{i\omega_{20} - 1/\tau} \xrightarrow{t \gg \tau} = \frac{Ai}{\sqrt{2}\,m\omega}\cdot\frac{1}{i\omega_{20} - 1/\tau}$$

$$P_{0\to n} = \underset{\lim t \gg \tau}{P_{0\to 2}} = |c_{20}|^2 = \frac{|A|^2}{2m\omega}\cdot\frac{1}{\omega_{20}^2 + 1/\tau^2} = \frac{|A|^2}{2m\omega}\;\frac{1}{4\omega^2 + 1/\tau^2}$$

$$\omega_{20} = \omega\left(2 + \frac{1}{2} - \left(0 + \frac{1}{2}\right)\right) = 2\omega$$

$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

5.3

$\vec{S} = \frac{1}{2}$

$H'(t) = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\ \vec{S_1}\cdot\vec{S_2} = \frac{4\Delta}{\hbar^2}\ \frac{\hbar^2}{4}\cdot\vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2} = \Delta\ \vec{\sigma_1}\cdot\vec{\sigma_2}$ → matrices de Pauli

$|i\rangle = |+-\rangle$

Base : $\{ |++\rangle ; |+-\rangle ; |-+\rangle ; |--\rangle \}$

$H'_{nm} = \langle n|H'|m\rangle =$

$\vec{S_1}\cdot\vec{S_2}$ → escribir en función de $S_1^+, S_2^+, (\ )^2$, etc.

...

5.4.

$n=1,\ \ell=0,\ m=0$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \vec{E}_0 \cdot e^{-t/\tau} & \text{si } t>0 \end{cases} \qquad \vec{E}_0 = E_0 \hat{z}$$

$|i\rangle = |100\rangle$; $|f\rangle = |n\ell m\rangle$

$$H = H_0 + V \quad ; \quad V = qE_0 z e^{-t/\tau}$$

$$c_{fi} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t'} V_{fi}(t')$$

$$V_{fi}(t') = \langle f|V|i\rangle = \langle f|qE_0 z e^{-t/\tau}|100\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{n\ell m}^* \cdot qE_0 \cdot z \cdot \psi_{100}\, dV\, e^{-t/\tau}$$

$$= cte \cdot e^{-t/\tau}$$

$$c_{fi} = \frac{-iqE_0}{\hbar}\int_0^t dt'\, e^{i\omega_{fi}t' - t'/\tau} \cdot \langle f|z|i\rangle = -\frac{iqE_0\langle f|z|i\rangle}{\hbar}\left[\frac{e^{i\omega_{fi}t' - t'/\tau}}{i\omega_{fi} - 1/\tau}\right]_0^{t\gg\tau}$$

$$\simeq -\frac{iqE_0\langle f|z|i\rangle}{\hbar}\cdot\frac{-1}{i\omega_{fi}-1/\tau} = \frac{i}{\hbar}qE_0\frac{\langle f|z|i\rangle}{i\omega_{fi}-1/\tau}$$

$$|c_{fi}|^2 = \frac{q^2E_0^2}{\hbar^2}\cdot\frac{|\langle f|z|i\rangle|^2}{\omega_{fi}^2 + 1/\tau^2} = K\,\frac{\langle f|z|i\rangle^2}{\omega_{fi}^2+1/\tau^2}$$

$$|c_{210|100}|^2 = \frac{q^2E_0^2}{\hbar^2}\,\frac{\langle 210|z|100\rangle^2}{(\omega_{210}-\omega_{100})^2 + 1/\tau^2} \quad ; \quad \omega_{n\ell m} = \frac{E_n}{\hbar} = -\frac{13{,}6\,eV}{\hbar n^2}$$

$$\rightarrow (\omega_{210}-\omega_{100})^2 = \frac{1}{\hbar^2}(-13{,}6\,eV)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\langle 210|z|100\rangle^2 = \int \psi_{210}^* \cdot z\,\psi_{100}\cdot r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int R_{21}^*\cdot Y_{10}^*\cdot(r\cos\theta)\cdot R_{10}Y_{00}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= \int\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2}\cdot\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\cdot\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cdot\cos\theta\cdot\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\cdot 2e^{-r/a_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\cdot r^3\,\sin\theta\cos\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{r}{a_0}\right)^4 dr\, e^{-\frac{3r}{2a_0}}\ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta \qquad \Big| x = \frac{3}{2}\frac{r}{a_0}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{2^4}{3^4}x^4 e^{-x} a_0\frac{2}{3}dx\left[\frac{\cos^3\theta}{(-3)}\right]_0^\pi = \frac{2^4 a_0}{\sqrt{2}\,3^6}\cdot 4!\left(\frac{-1-1}{-1}\right) = \frac{2^5}{\sqrt{2}\,3^6}\cdot 4!\,a_0$$

$$= \frac{2^8}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{3^5}\,a_0$$

el resto de $\langle n|z|i\rangle$ son cero por simetría angular.

$$\rightarrow P_{100\to 210} = |c_{100-210}|^2 = \frac{2^{15}}{3^{10}}\,\frac{q^2E_0^2a_0^2}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2+1/\tau^2}$$