③

Fernando Hueso González
B-P1 1º Fís

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & & n \\ -1 & 0 & 3 & & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ddots & n \\ \vdots & & & & \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ → El determinante no cambia al sumar a una fila combinaciones lineales de las restantes.

Si sumamos la fila primera a todas las restantes:

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2n \\ \vdots & & & n-1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & n \end{vmatrix}$ → Empleando el desarrollo de Laplace recursivamente empezando desde la última fila, se tiene:

$= (-1)^{2n} n \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 0 & 2 & \cdots & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & n-1 \end{vmatrix}$ ⇒ (El signo siempre es positivo) Producto de la diagonal principal

$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k) \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 \cdots & (n-k-1) \end{vmatrix}$

$= n!$

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & & n & n \\ 3 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & n \\ n-1 & n & n & \cdots & & n \\ n & n & \cdots & & & n \end{vmatrix}$ → Restando a cada fila la superior empezando desde abajo obtenemos:

Desarrollo de Laplace por la última columna:

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & & 1 & 0 \\ 1 & & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ = Análogamente al anterior, empleando Laplace recursivamente

D.2 última fila

E()? $= (-1)^{n+1} \cdot n \cdot 1 (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \to n-1 \times n-1$

aw? $\ldots = n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= \quad (-1)^{3} \cdot 1$

$= n \cdot (-1)^{(n+1)+n+(n-1)+\ldots+3+2} \qquad (-1)^2 \cdot (-1)^2$

Fernando Hueso González
Métodos I — Grupo BP1
1º - Fís.

Cuestión 5

$A = \begin{pmatrix} e^{ia} & e^{-ib} \\ e^{ib} & e^{ia} \end{pmatrix}$ → Al ser la representación matricial del operador en la base ortonormal, el operador será autoadjunto si $A = A^+$

0/1

$A^+ = \begin{pmatrix} e^{-ia^*} & e^{-ib^*} \\ e^{+ib^*} & e^{-ia^*} \end{pmatrix}$ si $a, b \in \mathbb{R}$
← Trasponer + complejo conjugado.

~~Comparando con A, se observa que $e^{ia} \neq e^{-ia}$~~
~~→ Por tanto, la única solución posible es que a sea un número imaginario de forma que $(e^{ia})^* = e^{ia}$~~

→ $b \in \mathbb{R}$, a imaginario

Cuestión 2

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ → Base ortonormal

Entonces: $A|e_1\rangle = |0\rangle$
$A|e_k\rangle = |e_{k-1}\rangle + |e_{k+1}\rangle \quad k>1$

1/1

$A_{jk} = \langle e_j | A e_k \rangle = \langle e_j | e_{k-1} + e_{k+1} \rangle$

$= \underbrace{\langle e_j | e_{k-1} \rangle} + \underbrace{\langle e_j | e_{k+1} \rangle}$ → Al ser vectores ortonormales:

$= \begin{matrix} 0 \text{ si } j \neq k-1 \\ 1 \text{ si } j = k-1 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \text{ si } j \neq k+1 \\ 1 \text{ si } j = k+1 \end{matrix}$

$= \delta_{j,k-1} + \delta_{j,k+1} \quad (k>1)$
$(k-1>0)$

$A_{j1} = \langle e_j | A e_1 \rangle = \langle e_j | 0 \rangle = |0\rangle$

✓

4/4

$A(x,y) = (2x-y, x+y)$

→ Repr. matricial en la b.o.n $\mathbb{R}^2$

$\left.\begin{array}{l} A(1,0) = (2,1) \\ A(0,1) = (-1,1) \end{array}\right\} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

→ Repr. matricial en B.

B es ortonormal $\Leftrightarrow \perp (e_2)$ $\|e_i\| = 1$

$B_{kj} = \langle e_k | A e_j \rangle$ ✓

$B_{11} = \frac{1}{2} \langle (1,1) | (1,2) \rangle = 3/2$ $B_{12} = \frac{1}{2} \langle (1,1) | (3,0) \rangle = 3/2$

$B_{21} = \frac{1}{2} \langle (1,-1) | (1,2) \rangle = -1/2$ $B_{22} = \frac{1}{2} \langle (1,-1) | (3,0) \rangle = 3/2$

$\mathbb{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ✓

Mediante un cambio de base a partir de la matriz A:

Al ser endomorfismo entre bases ortonormales:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{A} & C \\ \mathbb{D} \downarrow & & \downarrow \mathbb{D} \\ B & \xrightarrow{\mathbb{B}} & B \end{array} \qquad \mathbb{B} = \mathbb{D}^{-1} A \cdot \mathbb{D} = \mathbb{D}^{+} A \mathbb{D}$$

✓ Para hallar $\mathbb{D}$:

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left.\right\} \mathbb{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\downarrow$ autoad

$\mathbb{D}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ✓✓

$|v\rangle$ expresado en B:

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,3) = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) + \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$

$(1,3) = \alpha(1,1) + \beta(1,-1) \quad \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{array}$

$|v\rangle = (2,-1)|_B$

$A|v\rangle_{B} = \mathbb{B} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ✓

Problema EXTRA

$P_2(x)$

Fernando Muro González
B-P1
Mét. 1

2/2

$\partial x \to$ Derivada (Endomorfismo)

$\partial x^+ \to$ Operador adjunto ($\to$ dará un polinomio $\in P_2(x)$)

$|v\rangle, |w\rangle \in P_2(x)$

$\hookrightarrow \langle v | \partial x^+ w \rangle = \langle \partial x\, v | w \rangle$ $|v\rangle = v_0 + v_1 x + v_2 x^2$

$|w\rangle = \dots$

$$\langle \partial x\, v | w \rangle = \int_{-1}^{+1} (v_1 + 2v_2 x)(w_0 + w_1 x + w_2 x^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} (w_0 v_1 + v_1 w_1 x + v_1 w_2 x^2 + 2 v_2 w_0 x + 2 v_2 w_1 x^2 + 2 v_2 w_2 x^3)\,dx$$

$\to$ Las funciones impares serán cero al integrar... Las pares el doble

$$= 2\int_{-1}^{+1} (\underline{w_0 v_1} + \underline{v_1 w_2 x^2} + \underline{2 v_2 w_1 x^2})\,dx$$

Por otro lado: $\partial x^+ w = A + Bx + Cx^2$

$$\langle v | \partial x^+ w \rangle = \int_{-1}^{+1} (v_0 + v_1 x + v_2 x^2)\cdot(A + Bx + Cx^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} A v_0 + \cancel{A v_1 x} + A v_2 x^2 + B v_0 x + B v_1 x^2 + \cancel{B v_2 x^3} + C v_0 x^2 + \cancel{C v_1 x^3} + C v_2 x^4\,dx$$

~~Comparando con la expresión anterior, se tiene que~~

~~$C = 0$ ($C v_2 x^4 = 0 x^4$)~~

~~$A = 0$ ($A v_0 = 0 v_0$)~~

~~$B = w_2 \Longleftrightarrow$~~

Es mejor analizar cómo actúa el operador en los vectores de la base canónica: $(1, x, x^2)$ de $P_2(x)$

$\partial x^+ 1 = A + Bx + Dx^2$

$\langle 1 | \partial x^+ 1 \rangle = \langle \partial x 1, 1 \rangle$

$\int_{-1}^{+1} (A + Bx + Dx^2)\,dx = 0$

$2A + \frac{2}{3} D = 0$ ✓

$\langle x | \partial x^+ 1 \rangle = \langle \partial x\, x, 1 \rangle$

$\int_{-1}^{+1} (Ax + Bx^2 + Cx^3)\,dx = \int_{-1}^{1} dx$ $\to \partial x^+ 1 = 3x$ ✓

$\frac{2}{3} B = 2 \to B = 3$ ✓

$\langle x^2 | \partial x^+ 1 \rangle = \langle \partial x\, x^2 | 1 \rangle$ $A = C = 0$

$+1$

$\langle 1 | \partial_x^+ x \rangle = \langle \partial_x 1 | x \rangle$

$\int_{-1}^{1} (A + Bx + C)dx = 0 = 2A + \frac{2}{3}C \quad -3A = C$ ✓

$\langle x | \partial_x^+ x \rangle = \langle \partial_x x | x \rangle$

$\langle i | A e_j \rangle$

$\int_{-1}^{+1} (Ax + Bx^2 + Cx^3)dx = 0 \overset{(f\cdot \text{impar})}{=} \frac{2}{3}B \to B = 0$ ✓

$\langle x^2 | \partial_x^+ x \rangle = \langle \partial_x x^2 | x \rangle$

$\int_{-1}^{+1} (Ax^2 + Bx^3 + Cx^4)dx = \int_{-1}^{+1} 2x^2\, dx$

$\frac{2}{3}A + \frac{2}{5}C = \frac{4}{3}$ ✓ $\to \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\right)A = \frac{4}{3}$ ✓

$\partial_x^+ x = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2}x^2$ ✓ $\quad A = -\frac{5}{2} \to C = \frac{15}{2}$

$\partial_x^+ x^2 = A' + B'x + C'x^2$

$\langle 1 | \partial_x^+ x^2 \rangle = \langle \partial_x 1 | x^2 \rangle$

$2A + \frac{2}{3}C = 0 \to C = -3A$

$\langle x | \partial_x^+ x^2 \rangle = \langle \partial_x x | x^2 \rangle$

$\frac{2}{3}B = \frac{2}{3} \to B = 1$

$\langle x^2 | \partial_x^+ x^2 \rangle = \langle \partial_x x^2 | x^2 \rangle$

$\frac{2}{3}A + \frac{2}{5}C = 0 \to A = 0 = C$

$\Rightarrow \partial_x^+ x^2 = x$ ✓

$\Rightarrow \partial_x^+ (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = \alpha \cdot 3x + \beta \cdot \left(-\frac{5}{2} + \frac{15}{2}x^2\right) + \gamma x$ ✓

Op. adjunto de ∂_x

Fernando Huerso González
B - P1   1º - Fís.

(10)   4/4

(1)
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 3\lambda \end{cases}$$
→ Analizar el rango de la matriz de coeficientes y la ampliada.

$$\det M' = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 3\lambda \end{vmatrix} \cdot(-6) \oplus = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 & \lambda^2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & 0 & \lambda^2+1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3\lambda-1 \end{vmatrix}$$
→ Laplace por la 3ª fila

$$= 2\cdot(-1)(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} \lambda+3 & 0 & \lambda^2+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3\lambda-1 \end{vmatrix} = 2\cdot\left[(\lambda+3)(3\lambda-1)-5(\lambda^2+1)\right]$$

$$= 2\cdot(-2\lambda^2+8\lambda-8) = -4\cdot(\lambda^2-4\lambda+4) = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda=2 \text{ (ún. soluc.)} \\ \neq 0 \text{ si } \lambda \neq 2 \end{cases}$$ ✓

Si $\lambda \neq 2$ → $rg\, M' = 4 > rg\, M$ (como máximo tres)
→ Sistema incompatible ✓

Si $\lambda = 2$
↳ Buscamos determinante no nulo de 3×3 y escogemos ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1+6-3+6-1+3 \neq 0$$

$\Rightarrow rg\, M = 3 = N \quad \forall \lambda$ ✓

Si $\lambda = 2$, además $rg\, M' = 3$
$\Rightarrow$ S. C. D. ✓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$$ La cuarta fila es la suma de las tres primeras, por lo que se puede eliminar. ✓

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow 5x_1 = 5 \rightarrow x_1 = 1$$

$$3 + 2x_3 = 5 \Leftrightarrow x_3 = 1$$

$$2 + x_2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

La solución única es: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ✓

(2)

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 - \lambda x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \\ \lambda x_1 - x_2 + 13x_3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Sistema homogéneo

$rg\, M = rg\, M'$ siempre, $\forall \lambda$ ✓

↳ Sist. Comp.

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & -\lambda & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ \lambda & -1 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 7\lambda^2 - 4 - 4\lambda + 14 + 13\lambda$$

$$= -7\lambda^2 + 9\lambda + 36 = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda_{1,2} = \frac{9 \pm 33}{14} \\ \neq 0 & \text{si } \lambda \neq \end{cases}$$

$$\left(\frac{-9 \pm \sqrt{81 + 4 \cdot 7 \cdot 36}}{-14}\right)$$

si $\lambda \neq +3 \wedge \neq -\frac{12}{7} \Rightarrow rg\, M = rg\, M' = N$ ✓

↳ S.C.D

→ Solución trivial: (sist. de Cramer homogéneo)

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ✓

Si $\lambda = 3 \rightarrow rg\, M = 2 = rg\, M' < N \rightarrow$ S.C.I.

pues $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 7 \neq 0$ ✓

→ Resolviendo el sistema: (homog.)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$ 3ª es c.l. de la 2ª

→ $x_2 = -2x_3$; $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \alpha,\ x_2 = -2\alpha,\ x_1 = -5\alpha$

→ Se genera un subespacio en $\mathbb{R}^3$ con dos ligaduras

↳ dim $U = 1$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3x_2 - 4x_3}{2}, -2x_3, x_3\right) = x_3(-5, -2, 1)$$

$$U = \langle \{(-5, 2, 1)\} \rangle$$ ✓

Fernando Iluess González
3 - Pr - 1º - Fis

Si $\lambda = -\frac{12}{7}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{12}{7} & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -\frac{12}{7} & -1 & 13 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot 3,5 \quad \cdot 7} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 14 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -12 & -7 & 91 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus(-2)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -12 & -7 & 91 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus(-13)} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 0 & 0 \\ -25 & -20 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 91 & 0 \end{array}\right) \to 2^a \text{ es c.l. de la } 1^a$$ ✓

Se elimina la 2ª fila

$$\begin{cases} 5x_1 = -4x_2 \\ -12x_1 - 7x_2 + 91x_3 = 0 \end{cases}$$

$\to x_2 = -\frac{5}{4}x_1$

$x_3 = \frac{12x_1 + 7x_2}{91} = \frac{(48-35)x_1}{4 \cdot 13 \cdot 7}$

$= \frac{1}{4 \cdot 7}x_1$

Genera el siguiente subespacio:

$\hookrightarrow$

$S(x_1, -\frac{5}{4}x_1, \frac{1}{7}x_1)$

$\hookrightarrow x_1(1, -\frac{5}{4}, \frac{1}{28})$

$\Rightarrow <\{(28, -35, 1)\}>$ ✓

Cuestiones

a) 1. $|A| = -2 \cdot |B|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot |B|$$

cambio de signo ✓

1.5/1.5

4. $\to \det(A+B) = 12 \det A$

$A = [a_{ij}] \quad B = [b_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ a_{31} & \cdots & a_{33} & \\ a_{41} & \cdots & & a_{44} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a_{11} & \frac{3}{2}a_{12} & \frac{3}{2}a_{13} & \frac{3}{2}a_{14} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{24} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$ ✓

$\frac{1{,}5}{1{,}5}$ (sacar coeficientes de cada fila) $\begin{vmatrix} a_{41} & - & - & a_{44} \end{vmatrix}$

Cuest. B $\rightarrow b, c \neq 0, a \neq 1$

1. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & c \\ a & -b & c \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot M_{cof.} \; \exists \Longleftrightarrow \det A \neq 0$ ✓

$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -1 & c \\ a & -b & c \end{vmatrix} = -ac + abc - cb + ca + abc - bc$ (Sarrus)

$= 2abc - 2cb = 2bc(a-1)$ ✓

$= \begin{cases} 0 \text{ si } a=1 \vee b=0 \vee c=0 \\ \neq 0 \text{ en el resto de casos} \rightarrow \exists A^{-1} \end{cases}$

$\frac{1{,}5}{1{,}5}$ $\rightarrow \exists A^{-1} \Longleftrightarrow b, c \neq 0, a \neq 1$ ✓

6. S.I $\rightarrow a=0$
C.I $\rightarrow a=5$
C.D $\rightarrow$ Resto de casos

Analizar rangos:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & a & a \\ 4 & a & 0 \end{vmatrix} = 4a - 3a + 4a - a^2 = -a^2 + 5a = -a(a-5)$

$= \begin{cases} 0 \text{ si } a=0 \wedge a=5 \rightarrow rg\, M < rg\, 3 \\ \neq 0 \text{ en el resto de casos} \rightarrow rg M = 3 \end{cases}$ ✓

La ampliada será como máximo de rango 3.

Por tanto, si $a \neq 0 \vee a \neq 5 \rightarrow rg\, M' = rg\, M = N \rightarrow$ nº de incógnitas ✓

$\hookrightarrow$ El sistema es compatible determinado.

Si $a = 0$

$\frac{1{,}5}{1{,}5}$ $\hookrightarrow rg\, M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\rightarrow rg\, M = 2$ ✓

$rg\, M' \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 - 15 \neq 0 \rightarrow rg\, M' = 3$ $\Big\} \rightarrow$ sistema incompatible ✓

Si $a = 5 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 \neq 0 \rightarrow rg\, M = 2 < N$ ✓ $a=5$ no puede ser tres porque el $\det M = 0$

$rg\, M' \rightarrow$ Como la columna de coeficientes es igual a la tercera columna, $rg\, M' = rg\, M$

$\rightarrow$ El determinante es 0 si no la sustituyes por la tercera al ser iguales dos columnas

$\rightarrow$ También es cero si la sustituyes por la tercera al ser el $\det M = 0$ si $a = 5$ ✓

$\rightarrow rg = rg\, M' = 2 < 3 = N \rightarrow$ S. compatible indeterminado