(1)

Sucesión $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (aplicación)

" ∞
" nula $|S_n| < \varepsilon \ \forall n > N$
" acotada) $|S_n - S| < \varepsilon$ acotada
Límite de una sucesión (conv.) $S_n - S$ es nula

Inducción
Sucesión → S conv. ; → ±∞ div. ; → oscilante < acot. finit. / no acot. ∞

Suc < (e) creciente / (e) decreciente } monótono

T1: S_n, t_n nulas ⇒ $S_n + t_n$ lb nulas

T2: S_n nula, t_n acotada/cte. ⇒ $S_n t_n$ nula

T3: $\exists \begin{matrix} S_n \to S \\ t_n \to t \end{matrix}$ } $S_n + t_n \to S+t$, $S_n \cdot t_n \to S \cdot t$, $\frac{S_n}{t_n} \to \frac{S}{t}$

T4:

T5: creciente → S / → +∞
decreciente → S / → −∞
(e) crec. acotada → S
monótona no es oscilante

Propieds límites

a_n, b_n convergentes !!
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2) $\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot a$ (cte)

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$ si $b \neq 0$

5) $b > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \log_a b_n = \log_a \lim_{n\to\infty} b_n = \log_a b$

6) $a > 0$
$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$
$\lim_{n\to\infty} a^{b_n} = a^{\lim_{n\to\infty} b_n} = a^b$

INDETERMINACIONES

$\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

CÁLCULO DE LÍMITES

a) $R(n) = \frac{a_0 n^p + \dots}{b_0 n^q}$ (fracc., $\frac{\infty}{\infty}$)
→ $p > q \to \infty$
→ $p < q \to 0$
→ $p = q \to \frac{a_0}{b_0}$

b) E. irrac → transformar (conjugado)

c) $1^\infty \to e^k = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k}{n!}$

$X_n^{Y_n} \to (1^\infty)$ $\lambda = \lim_{n\to\infty}(X_n - 1)\cdot Y_n$
$= e^\lambda$

d) Stolz ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, x)
< Y_n e. crec. + divergente
< X_n, Y_n nulos + Y_n decreciente
} $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{Y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}}}$

e) Media aritmética (si el signo determinado)
a_n no oscilante → $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$

f) Media geométrica
$\{a_n\}$ térm. positivos (combin.) → $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots)^{1/n}$

g) Raíz n-sima de Cauchy
$\{a_n\} > 0$ $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ no oscila
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$

h) Expresiones equivalentes
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ ($n > 10$) F. Stirling
- $\frac{\log_a n}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- $\frac{n^k}{a^n} \to 0$ ($n \to \infty$)
- $a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots \sim a_0 n^k$ ($n \to \infty$)
- $\log(a_0 n^k + a_1 \dots + \dots) \sim \log n^k$ ($n \to \infty$)
- $X_n \to 0 \Rightarrow \log(1 + X_n) \sim X_n$
- $X_n \to 1$ $\log X_n \sim X_n - 1$
- $X_n \to 0$ $\sin X_n, \tan X_n \sim X_n$
- $X_n \to 0 \Rightarrow 1 - \cos X_n \sim \frac{X_n^2}{2}$
- $X_n \to 0 \to \arcsin X_n, \arctan X_n \sim X_n$

★ Cambiar variable, Desarrollo. F. M.

i) ∞^0, 0^∞, 0^0 Tomar logaritmos $A = e^{\ln A}$

j) Recurrencia
(creciente + acotada superior ⇒ ∃lim)
$l = \lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} X_{n+1}$

k) Ley de recurrencia $S_1, S_2, \dots$

(II)

Serie infinita
Suma parcial

D1: $\lim_{n\to\infty} S_n = S \to \sum$ converge o divergente
$\pm\infty$ · S es su suma

Serie < Conv / DIV < $+\infty$, $-\infty$, oscilante < fin. / infin.

→ No propied. desociativa

T1: Serie geométrica

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge sii $|x| < 1$ (razón)

$= \frac{1}{1-x}$ $\frac{a}{1-x}$

T2: Serie Armónica Generalizada

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ C sii $k > 1$, diverge $k \leq 1$

$k=1 \to$ s. armónica

<u>Propieds</u>

1) C o D no afectado al suprimir/alterar nº finito de términos ¿d.s?

2) $\sum u_n = s$, $\sum v_n = t \Rightarrow \sum a u_n + b v_n = as + bt$ C (recíproco no) (contrario sí)

3) $\sum u_n$ es C $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (rec. no)
1) es cond. necesaria pa C!
2) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \to \sum u_n$ D

4) • $u_n \geq 0$ $\forall n \Rightarrow$ → C / → D a $+\infty$ ($k > 1$, $k \leq 1$)

• $u_n \geq 0$ $\forall n$ y C ⟺ $\exists A \in \mathbb{R}^+ / S_N < A$ $\forall N$

lim u_n → = 0 → D / C
lim u_n → ≠ 0 → D

$\not\Longleftarrow$ ⟹ $\sum D$ < lim = 0 / lim ≠ 0

$\sum C$ → lim = 0

5) Comparación (útil con s. armón / geométr.)

$\sum u_n$, $\sum v_n$

i) $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ $\forall n$ $\Rightarrow$ Si $\sum^{\infty} v_n$ C $\Rightarrow \sum^{\infty} u_n$ C

ii) $u_n \leq A \cdot v_n$ $\forall n \geq n_0$ / $A \in \mathbb{R}^+$

i) $\rightsquigarrow \beta = \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n}$

a) $\beta \geq 0$ y $\sum^{\infty} v_n$ C $\Rightarrow \sum^{\infty} u_n$ C

b) $\beta > 0$ y $\sum^{\infty} v_n$ D $\Rightarrow \sum^{\infty} u_n$ D

c) $\beta \to +\infty$ y $\sum^{\infty} v_n$ D $\Rightarrow \sum^{\infty} u_n$ D

T3: Test de Cauchy — RAÍZ

$\lim_{n \to \infty} u_n^{1/n} = l$ $\begin{cases} l < 1 \to \sum^{\infty} u_n \text{ C} \\ l > 1 \to \sum^{\infty} u_n \text{ D} \end{cases}$

$l = 1 \to$ no info

T4: Test de D'Alembert — COCIENTE

$u_n > 0$

$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1 \to \sum^{\infty} u_n \text{ C} \\ l > 1 \to \sum^{\infty} u_n \text{ D} \end{cases}$

$l = 1 \to$ no info

Criterio de Kummer:

$\sum a_n$, $\sum b_n$ $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum^{\infty} b_n$ D

$\alpha = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} \right)$ $\begin{cases} \alpha > 0 \to \sum^{\infty} a_n \text{ C} \\ \alpha < 0 \to \sum^{\infty} a_n \text{ D} \end{cases}$

$\alpha = 0$ no info

Criterio de Raabe

$\sum^{\infty} a_n$ $\beta = \lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ $\begin{cases} \beta > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ C} \\ \beta < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ D} \end{cases}$

$\beta = 1$ no info

Criterio de Condensación de Cauchy

$\sum^{\infty} a_n$ $a_n \geq 0$ decreciente

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ C $\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ C (... D ... D)

8) Número e

$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\Big\|$ $f(x) = \sum_{n=0} \frac{e^x}{n!}\Big|_{x=a} \cdot (x-a)^n \to a = 0$ (MacLaurin)

$\hookrightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$e^k = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$

$\frac{1}{(n+1)!}$ ...

SUMA DE SERIES

1) S. Geométrica

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ C sii $|r|<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

$(a+nb)x^n \quad |x|<1 \leadsto \sum = \frac{1}{1-x}\left\{a + \frac{bx}{1-x}\right\} = \frac{a(1-x)+bx}{(1-x)^2}$

2) S. Aritmético-Geométrica

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \to \text{pr. aritm.}}{b_n \to \text{pr. geomé.}}$ $\quad a_{n+1} = a_n + d \quad b_{n+1} = b_n \cdot r$ $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{b_n}$ C $\Leftrightarrow |r|>1$

$= \frac{a_1}{b_1} + d \cdot B$ — suma pr. geométrica

3) Series telescópicas

- $a_n = b_n - b_{n+1} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ C $\Leftrightarrow \exists \lim b_n = b \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b$
- $a_n = c_{n+1} - c_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ C $\Leftrightarrow \exists \lim c_n = c \Rightarrow \sum a_n = c - c_1$

4) Series hipergeométricas

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \leadsto$ Pol. de 1er orden con $\alpha+\beta-\gamma \neq 0$ ctes. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ C $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$

$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{-a_1 \cdot \gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$

5) Descomposición en fracciones simples

$\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ grado $p<q$, descomponer + S_n

$a_n = \frac{P(n)}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \dots + \frac{R}{(n-k)!}$ → grado del polinomio

---

T5:

$\sum |u_n|$ C $\Rightarrow \sum u_n$ C (c. suficiente) — se dice $\Rightarrow \sum u_n$ Converge Absolutamente (no sabemos)

T6: (Serie alternada)

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ $\quad \leadsto (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^n$ — AC, C, D

$\Rightarrow$ 1) $0 < a_n \leq a_{n-1}$ (suc. decreciente)
2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ C

y $a_0 - a_1 \leq S \leq a_0$
$S_1 \leq S \leq S_0$

T7:

$\sum u_n$ AC → reordenar → m. suma

Si $\sum u_n$ C y $\sum |u_n|$ D → Condicional Convergente (depende del orden!)

$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

$3\sum$

3 ej. carácter

SERIES DE POTENCIAS (Ø S. con Cauchy ||)

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n \cdot x^n}_{u_n} \to$ S. de P. $\quad \left(e^x = \frac{1}{n!} \cdot x^n\right)$

$\to \sum a_n (x-x_0)^n$

T8:

SdPC $\to \forall x \in \mathbb{R}$; $\to \forall x \in I \subset \mathbb{R}$; $\to x = 0$

0°?

T9

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ Si C $x = x_1 \Rightarrow AC \ |x| < |x_1|$

T10

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ $\to$ AC $\forall x \in \mathbb{R}$; $\to$ AC $\forall x \in I$ $(I\{x / |x| < R)$ y D $\forall x \notin I$; $\to$ C sólo para $x = 0$

T11

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to$ Si $\lambda = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda} \to$ Radio de Convergencia de la serie

o $\lambda = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\quad$ AC si $|x| < R$ analizar $x = \pm R \to$ particular

T12

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$, $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = t$ AC $\sum_{p,q=0}^{\infty} u_p v_q$ (orden dado) $= S \cdot t$ (A C)

Ej.

Serie binomial

$f(x) = (1+x)^p \sim \sum_{n=0} \binom{p}{n} x^n \quad |x| < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$ AC $|x| < 1$ D $|x| > 1$

Serie de Taylor

$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{a_n} \cdot (x-a)^n$

↳ Si $a = 0 \to$ Serie de MacLaurin

$\Rightarrow$ cierta si$_{\text{para}}$ $|x-a| < R \to$ Resto $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \right] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

↳ Acotar: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ $\quad 0 < \Theta < 1$

⇓

Forma de Lagrange

→ Error al truncar

DESARROLLOS DE MACLAURIN

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\log(1+x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1)$$

$$\sin x = \sum (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh x = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\arctan x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1)$$

$$\arcsin x = \sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1)$$

$$\sinh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|x| < 1)$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n \qquad (|x| < 1)$$

$$(1-x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \binom{p}{n} \cdot x^n \qquad ?$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$a^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} \cdot x^n \qquad (a > 0)$$

(Obtener a partir de descomposición en fracc. simples y regla $\frac{1}{1-x}$)

(III)

Def: $f: X \to Y \in \mathbb{R}$, $x \to y = f(x)$ (imagen única $\in Y$)

Dominio — Codominio/Rango

D.i) Gráfica $\equiv$ conjunto de pares (x,y) $(x \in X \subset \mathbb{R})$

1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si $A>0, \exists k / f(x) > A \quad \forall x > k$

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si $\varepsilon>0 \; \exists k>0 / |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x > k$

$y = l \to$ Asíntota horizontal

3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$ si $\varepsilon>0 \quad \exists k>0 / |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x < -k \to$ Asín. horizontal

$x \to u_+ / u_-$ dcha. izqda.

D4) $\lim_{x\to c_+} f(x) = +\infty \qquad A>0 \exists \delta / f(x) > A \quad \forall x \in (c, c+\delta)$

(1V) $\lim_{x\to c_-} f(x) = -\infty \qquad A>0 \quad \exists \delta / f(x) < -A \; \forall x \in (c-\delta, c)$

$x = c \to$ Asíntota vertical

Representación gráfica de funciones

1) Dominio
2) Asíntotas
3) Valores particulares
4) Simetrías
5) Extremos puntos de inflexión, conc/conv

---

5) $\lim_{x\to c} f(x) = l$ si $\varepsilon>0 \; \exists \delta / |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in |x-c| < \delta$ (intervalo abierto) entorno de c $(c-\delta, c+\delta)$

$\to x = c$ excluido! $(|\,|>0)$

6) $f(x)$ es continua en $x=c$ si $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) \quad \to \exists f(c)$

$\equiv \varepsilon>0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \; |f(x) - f(c)| < \varepsilon \; \forall x \in |x-c| < \delta \qquad \exists \lim_{x\to c} f(x), \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

$\to$ continua en I abierto (a,b) si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a,b)$

$\to$ en $[a,b]$ si además $\exists \lim_{x\to a_+} f(x) = f(a) \wedge \exists \lim_{x\to b_-} f(x) = f(b)$

$f \; \mathcal{C}[a,b]$

$f, g \in \mathcal{C} \to f+g \in \mathcal{C}$ en punto o I.

$\to f \cdot g \in \mathcal{C}$ " "

$\to f/g \in \mathcal{C} \; \forall x / g(x) \neq 0$

$n \in \mathbb{N} \to x^n \in \mathcal{C} \; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P_n(x) \, \mathcal{C}_{\mathbb{R}}$

$x^{-n} \in \mathcal{C} \; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f \cdot g$ ... 3×3

Cotas de f $\quad f: x \in X \subset \mathbb{R} \to y = f(x) \in Y \subset \mathbb{R}$

si X es un conjunto (contenido en otro) $\Rightarrow f(x)$ es acotada

La Mayor de las cotas superiores $\to$ sup Y
inferiores $\to$ inf Y

D: $\boxed{\text{COMPOSICIÓN DE FUNCIONES}}$

$f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

$g \circ f: X \to Z \quad (g \circ f)(x) = g[f(x)] \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $\underbrace{\qquad\qquad}_{g \circ f}$

T: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} f(x) = c$
$g: f(D) \cup \{c\} \to \mathbb{R}$ continua en c $\Big\} \Rightarrow \lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} g \circ f(x) = g(c)$

C: $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en D
$g: f(D) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ " " $f(D)$ $\Big\}$ $g \circ f$ continua en D

C: $\lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} f(x) = c > 0 \Rightarrow \lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} \log_a f(x) = \log_a c$?

C: $\lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} f(x) = a > 0$
$\wedge \lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} g(x) = b$ $\Big\} \lim_{x \to p(+\infty, -\infty)} [f(x)]^{g(x)} = a^b$ Ej.

7) $f(x)$ Uniformemente Continua $I \subset \mathbb{R}$ (ab, a,∞ semiab)
si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta / (x, y) \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$\to \delta = \delta(\varepsilon) \to$ se verifica xa cualquier punto
$\to$ Si f es unif. continua $\to f$ es continua en el m/ intervalo
(recíproco no es cierto si el intervalo no es cerrado)

8) T. de Heine - Cantor
$f \in \mathcal{C}_{[a,b]} \Rightarrow f$ es UC en $[a, b]$ (cerrado!!)

T1 (Valor Intermedio, Bolzano, 2º Wei)
$f \in \mathcal{C}[a,b]$, $f(a) < c < f(b)$ ($\vee$ $>>$) $\to$ sii es continua!! $\to$ si no no se garantiza x_0
$\Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = c$ $\to$ garantiza q está (no dónde) $\quad f(a) \cdot f(b) < 0 \to$ método bisección

T2
$f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow f$ es acotada en $[a, b]$

T3 (1º Weierstrass)
$f \in \mathcal{C}[a,b] \Rightarrow f$ alcanza sus cotas en $[a, b] \to$ valores máx y mín
= sup = inf

T4 (función inversa)
$f \in \mathcal{C}[a,b]$ estr. creciente, $f(a) = c$, $f(b) = d$
$\Rightarrow \exists g \in \mathcal{C}$ y e. creci. $\forall y \in [c, d] / f[g(y)] = y$ $\quad$ || = en decrec.
$g \equiv f^{-1}$

(IV)

recta secante $\circ$ $f(x) \to (a, f(a); a+h, f(a+h))$

Pendiente $= \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

D: si $\exists \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell \to$ derivada $\dfrac{df}{dx}$, $f'(x) \to$ diferenciable en x (diferenciales)

Si $f(x)$ es diferenciable en $x \Rightarrow f$ es continua en x

si f es continua en $D \Rightarrow G(f)$ es una curva

↳ recta tangente pasa por $a, f(a)$ y pendiente $f'(a)$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Reglas funciones elementales

Funciones hiperbólicas

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$\to \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\left(\Rightarrow \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}\right)$

$\to \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\to \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Def:

$f(x)$ tiene $\begin{cases} \text{máximo} \\ \text{mínimo} \end{cases}$ (extremo) en $x = c$ si $\begin{matrix} f(x) < f(c) \\ f(x) > f(c) \end{matrix}$ en un entorno de $x=c$, $\forall x / |x-c| < \delta, \delta > 0$

Aproxima x polinomios

$f(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r \cdot x^r \to a_r = \dfrac{1}{r!} \cdot f^{(r)}(0)$

$f(a+h)$

Conseq. T's

Regla de L'Hopital

$\left.\begin{matrix} f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ g(a) = \dots = 0 \end{matrix}\right\}$ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \ell$ si $\lim_{x\to a} \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \ell$

Lim (límites)

$\boxed{0 \cdot \infty}$, $\boxed{\infty - \infty} \Rightarrow \dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, $f(x)^{g(x)} \to 0^0$ ∞^0

$g(x) \ln f(x)$

$e^k = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Irracionales — cambio de variable — Irracionales

T1: Leibnitz Newton {Tmas}

f y g con derivada n-sima

$\hookrightarrow (f \cdot g)^{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)} \cdot g^{(r)}$

T2:

$f'(c) \underset{<0}{>0} \Rightarrow f$ es e. crec. en $x=c$ decrec.

T3: Rolle

$f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ (1), f' en (a,b) (2), $f(a)=f(b)$ (3)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ $(a<c<b)$ para el cual $f'(c)=0$

↳ Punto singular (máx/mín)

T4: Valor medio de Cauchy

$f, g \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ (1), f, g deriv. en (a,b) (2), $g'(x) \neq 0$ (3) $\forall x \in (a,b)$

$\exists c \in (a,b) \,/\, \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

T5: Tma del Valor medio

$f(x) \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ (1), f' en (a,b) (2)

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ $(a<c<b)$ / $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(c)$

C: $f'(x)=0\ \forall x\in]a,b[\to f(x)$ es cte en $[a,b]$

T6:

$f'(x)$ en $x=c$ y $f(c)$ es un extremo $\Rightarrow f'(c)=0$

T7:

$\exists$ en entorno de $x=c$

1) $f'(x) \underset{<}{>} 0$ para $x<c$ y $f'(x) \underset{>}{<} 0$ para $x>c \Rightarrow x=c$ es máximo / mínimo

2) $f'(c)=0 \Rightarrow f''(c) \underset{>}{<} 0 \Rightarrow f(c)$ tiene un máximo / mínimo (si no, seguir...)

T8: Tma. de Taylor (f, n derivadas)

$f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(a) + \dots + \underbrace{\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\Theta h)}_{R_n:\ \text{forma de Lagrange}}$, $0<\Theta<1$

↳ extensión del tma. del valor medio hasta n

$a=0 \to$ Desarrollo de MacLaurin

$\to h=x \to$ Polinomio de MacLaurin de grado n-1 de $f(x)$

T9 (extensión del tma. v. medio de Cauchy)

$f(x), g(x)$ / $f, g \in \mathcal{C}_{[a,a+h]}$, $\exists f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ en $a<x<a+h$; $g^{(n)}(x)\neq 0\ \forall x$

$$\frac{f(a+h)-f(a)-h\cdot f'(a)-\frac{h^2}{2}\dots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)}{g(a+h)-g(a)-\dots} = \frac{f^{(n)}(a+\Theta h)}{g^{(n)}(a+\Theta h)}$$

(V)

TOPOLOGÍA

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$M \subset \mathbb{R}^n \to M(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Distancia $\rho(M', M'') = \left[\sum_{k=1}^{n} (X_k - X'_k)^2\right]^{1/2}$

) $\rho(M, M_0) < \varepsilon \to$ Bola abierta n-dimensional de centro M_0 y radio ε $B(M_0, \varepsilon)$

conjunto todos M tal que

) Punto interior de E si $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(M, \varepsilon) \subset E$

E es conjunto abierto si sólo contiene puntos interiores

4) P: punto de la frontera / borde de E si $\forall B(P, \varepsilon)\ \exists$ puntos interiores y exteriores

El cjto. de todos los es la frontera de E (∂E)

) $\overline{E} = E \cup \partial E$ es un cjto. cerrado

) $E \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si una curva continua que los une $\subset E$

↳ Si no → es disconexo

7) Dominio ≡ conjunto abierto y conexo

↳ está acotado si ∃ una bola que lo contiene

↳ Un dominio que contiene a M_0 ≡ entorno de M_0

---

8) Función de n variables

$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ E = dominio de f

$f: M \to u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

) (restricción a $\mathbb{R}^2$) $f(x,y) = f(M)$, $M(x,y)$

$f(M) \xrightarrow[M \to M_0]{} l$ si $\varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) / |f(M) - l| < \varepsilon\ \forall M \,/\, 0 < \rho(M, M_0) < \delta$

$\Rightarrow \lim_{M \to M_0} f(M) = l$ ó $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l$

↳ Límites iterados (cond. necesaria) (Mismas propiedades de límites)

↳ Trayectorias particulares (r, u)

↳ Polares (cond. sufic. y nec.) no ∃ lím (cambio de coordenadas)

10) $f(M)$ es continua en $M_0(x_0, y_0)$ si $\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ | $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) \Leftrightarrow \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

11) $z = f(x,y)$ (reglas de derivadas)

derivada parcial $\to \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ incremento parcial $\Delta_x z$

Incremento total $\to \Delta z = \Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$

$\mathbb{R}^n$ $\lim_{x \to 0} f(x,y) \cdot g(x,y)$

↳ acotada $|f(x)| \leq M$ ∧ $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \to f \cdot g \to 0$

D12) $z = f(x,y)$ en $D \subset \mathbb{R}^2$ p. lineal

↳ diferenciable si $\Delta z = \underbrace{A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y}_{\text{p. lineal}} + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta \cdot (\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y$

$\wedge \quad \alpha \to 0$ si $\Delta y \to 0$

$\wedge \quad \beta \to 0$ si $\Delta y \to 0$

→ La parte lineal del incremento total = diferencial total

$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$

C. necesarias pa la diferenciabilid

T. $f(x,y)$ es diferenciable ⟹ continua en dicho punto

T) Si $f(x,y)$ ...

↳ tiene derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en dicho punto

↳ $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y$

↳ En $\mathbb{R}$ $f(x)$ diferenciable ⟺ $\exists f'(x)$; en varias, no es así (condiciones aparte)

T6)

$z = f(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \in \mathcal{C}_{M_0}$ ⟹ $z = f(x,y)$ es diferenciable

en entorno de M_0 cond. necesaria

↳ La existE de las 1as derivadas no implica la diferencial continuid de la función en dicho punto. Deben ser continuas!

D13) diferencial total:

$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot dx_i \quad \| \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$

T7) Extensión de la regla de la cadena. Derivad de funciones compuestas

$x = x(t)$, $y = y(t)$ difer. de t, $f(x,y)$ dif. de x,y

$z = f(x(t), y(t))$ difer. de t

↳ $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ 3 casos ...

D14) $F(x,y) = 0$ en $D \subset \mathbb{R}^2$

$\forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ $\exists! y$ / $F(x,y) = 0$; $y = f(x)$ ⟹ $F(x, f(x)) = 0$

⟹ $F(x,y)$ especifica la función implícita y de x

T8) $F(x,y) = 0$ (cond. suficie) NO NECESARIAS pa q $\exists$ f implícit.

0) $F(x,y)$ definida y continua en $D = \{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$, $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta\}$

1) $F(x,y)$ se anula en x_0, y_0: $F(x_0, y_0) = 0$

3) $\exists$ y son continuas $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$

4) $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$

La función $y = f(x)$ es diferenciable en I entorno de x_0 y dy/dx:

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y}$ $(\partial F / \partial y \neq 0)$

↳ $\exists \delta_0 > 0$ / $\exists y = f(x)$ unívocaº definida y continua en $I = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ / $y_0 = f(x_0)$ ... y la ecuación $F(x, f(x)) = 0$ se verifica idénticamº $\forall x \in I$

$\varepsilon > 0$

Tr análogo al 2

⇝ f. implícitas de n de 1 variable

$F(x,y,f(x,y))=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ Condic. q cumplir

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$ $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$ $\to \frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$

D15) $f(x,y)$ homogénea de grado h si $\forall\lambda>0$ y $\forall M\in D\subset\mathbb{R}^2$:

$$f(x\lambda,y\lambda)=\lambda^h\cdot f(x,y)$$

D16) $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ funciones diferenciales de (x,y)

Matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Jacobiano (Determinante):

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

Propieds:

1) si $F(u,v)=0\ \forall(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\Longrightarrow\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$

2) u,v ... (x,y); x,y dif. de (s,t) $\quad x=x(s,t),\ y=y(s,t)$

$$\Rightarrow\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$$

3) u,v

$F(x,y,u,v)=0,\ G(x,y,u,v)=0\Longrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{F\ G}{y\ v}}{\frac{F\ G}{u\ v}}$

$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{F\ G}{u\ x}}{\frac{F\ G}{u\ v}}\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{F\ G}{u\ y}}{\frac{F\ G}{u\ v}}$

Cambio de coordenadas, Transforma

$C(x,y)\leadsto P(r,\theta)$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

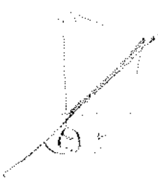
$x^2+y^2=r^2\quad\tan\theta=\frac{y}{x}$ $\qquad J=r\ldots r$

(r,θ,z) Cilíndricas

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$z=z$



Esféricas

$x=r\sin\theta\cos\varphi$

$y=r\sin\theta\sin\varphi$

$z=r\cos\theta$

En general:

$$\lim\frac{\Delta A_{xy}}{\Delta A_{uv}}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

cuando ΔA_{xy} y $\Delta A_{uv}\to 0$

Derivada direccional:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 1$, $\vec{x}^0 \in A \subset \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ unitario

Derivada de f en $\vec{x}^0$ en la dirección $\vec{v}$, $D_{\vec{v}} f$

$$D_{\vec{v}} f = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}^0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}^0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}$$

Propiedad

$$\left.\begin{array}{l} D_{\vec{i}} f = \vec{i} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \\ D_{\vec{j}} f = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right\} \quad D_{\vec{v}} f = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^{3} \left(v_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f$$

Operador Nabla

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

escalares

vectores — vect., esc.

- Gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Derivadas parciales de orden superior

Def) $z = f(x,y)$ son $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ → si ∃ derivadas de ellas se denominan derivadas parciales de segundo orden

f''_{xx} f''_{yy} $\underbrace{f''_{xy}, \ f''_{yx}}_{\text{Derivadas mixtas}} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

T10) función $f(x,y)$, ∃ en entorno de $M_0(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$

$f''_{xy}, f''_{yx} \in C_{(M_0)}$ ⟹ $f''_{xy} = f''_{yx}$

D18/ $z = f(x,y)$, $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ diferencial total

$dz(x,y) \to$ diferenciar $\to$ segunda diferencial o dif. de 2º orden

$d^2 z$

$\to$ Cond. sufic. no q $\exists$ (ext. tma 6) $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \in \mathcal{C}_D$

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z, \quad n \in \mathbb{N} \to z \in \mathcal{C}^n_D$$

n. orden hasta el cual todas las derivadas (mixtas tb) deben ser continuas

Teorema 11 (Taylor)

$z = f(x,y) \in \mathcal{C}^n_{B}$, $B(M_0, \delta)$, $M_0(x_0, y_0)$, $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in B(M_0, \delta)$

$h = \Delta x$, $k = \Delta y$

$$\Rightarrow f(x_0 + h, y_0 + k) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{p!} \left(h \cdot \frac{\partial}{\partial x} + k \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f \Big|_{x_0, y_0} + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \Big|_{\substack{x_0 + \Theta h \\ y_0 + \Theta k}} \quad 0 < \Theta < 1$$

(dentro de la bola)