MÉTODOS MATEMÁTICOS II

(Licenciatura de Física. Curso 2007-2008)

Boletín de problemas a evaluar correspondientes a los Temas I y II
Fecha de entrega: Viernes, 23 de Noviembre de 2007

1. Calcula los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+b}{3n+5}\right)^{4n+7}$

   b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^3 \left(\frac{4}{7}\right)^4 \cdots \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n\right]$

   c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{(2n-3)^4}$

2. Explicando lo que haces prueba por inducción las siguientes igualdades:

   a) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n + n(n+1) = \dfrac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

   b) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

3. Sea la serie numérica $\dfrac{1}{3\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 11} + \dfrac{1}{11\cdot 15} + \cdots$

   Encontrar el término general a_n de la serie, demostrar que la serie es convergente y calcular su suma.

4. Sea la serie numérica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

   Demostrar que la serie es convergente y calcular su suma.

5. Calcula la suma de la siguiente serie numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n-3}{(n+1)!}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{n}\right]$$

6. Estudiar el carácter de la siguiente serie de potencias indicando para que valores de x la serie es convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5x^{2n}}$$

7. Obtener el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x(x^2-8x+5)+14}$

Fernando Iluso González (1)
1º - Fís, - P1, Métodos 2. 9,0

BOLETÍN DE PROBLEMAS

(1)

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+5}\right)^{4n+7} \sim 1^{\infty}$: Indeterminación, se deben ~~tomar logaritmos~~ calcular con el número e.

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+5}\right)^{4n+7} = \lim_{n\to\infty}(X_n)^{Y_n} = e^{\lim_{n\to\infty}(X_n-1)\cdot Y_n} = e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n+5}-1\right)\cdot(4n+7) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6-3n-5}{3n+5}\right)\cdot(4n+7)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(6-5)\cdot(4n+7)}{(3n+5)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n6-20n+76-35}{3n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{(46-20)n+76-35}{(3)\cdot n+5} = \frac{46-20}{3}$$

$$L = e^{\lambda} = e^{\frac{4}{3}(6-5)}$$

✓. 0.5

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\log\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n+3}\right)^n\right]$ → Aplicar Stolz

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}$$

$X_n = \log[(\dots)]$

$Y_n = n$ → sucesión estrictamente creciente

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{n}{n+3}\right)^n\right] - \log\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-1}\right]}{n-(n-1)}$$

→ Propiedad de logaritmos: resta de logaritmos ≙ logaritmo del cociente

log — se cancelan todos los términos, excepto el último.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n}{n+3}\right)^n}{1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+3}-\frac{3}{n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-3}}\right)^{n\cdot\frac{n+3}{-3}\cdot\frac{-3}{n+3}} = \lim e^{\frac{-3n}{n+3}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+3}} = e^{-3} \qquad -3$$

× 0.75

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)}{(2n-3)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}$ → Stolz; Y_n → estrictamente creciente $= \lim_{n\to\infty}\frac{X_n - X_{n-1}}{Y_n - Y_{n-1}}$

se cancelan términos $= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{(2n-3)^4-(2(n-1)-3)^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{8\cdot 8n^3-4\cdot 96n^2\dots} = \frac{1}{64}$

(coeficientes que acompañan a las potencias mayores)

↑ Potencia a la cuarta desaparece

✓ 0.5

②

a) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

☆ Compruebo que es cierto para $n=1$, $n=2$ (el siguiente)

$n=1$ $\quad 1\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(1+2) = 2$ ✓✓

$n=2$ $\quad 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = \frac{1}{3}\cdot 2(2+1)(2+2) = 2\cdot 4 = 8$ ✓✓

☆ Supongo que es cierto para el término n-ésimo.

$1\cdot 2 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

☆ Demuestro que es cierto para el siguiente.

n sustituyo por $(n+1)$ y lo igualo a la fórmula para n y le sumo a_{n+1}

$$\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)\cdot(n+2)$$ → Compruebo la igualdad

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n + 1\right)$$

$$= (n+1)(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$ ✓✓

✓. 0.75

b) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

☆ Compruebo

$n=1$ $\quad \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ ✓

$n=2$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$ ✓

☆ Supongo que es cierto para a_n

☆ Demuestro para a_{n+1} (Compruebo la igualdad utilizando la fórmula para $n+1$ y para n sumándole el término u_{n+1} de la serie.

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$ ✓✓

✓. 0.75

(3) $$\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$$

$$u_n=\frac{A}{4n-1}+\frac{B}{4n+3}\Rightarrow\frac{A(4n+3)+B\cdot(4n-1)}{(4n-1)(4n+3)}$$

$$\Leftrightarrow A(4n+3)+B(4n-1)=1 : 4An+3A+4Bn-B=0n+1$$

$$4An+4Bn=0n \leftrightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B$$

$$3A-B=1=3A+A \leftrightarrow A=\frac{1}{4}\rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\frac{1}{4(4n-1)}-\frac{1}{4(4n+3)}$$

$$=\left(\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 7}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{4\cdot 11}\right)+\left(\frac{1}{4\cdot 11}-\frac{1}{4\cdot 15}\right)+\cdots$$

→ Se cancelan todos los términos excepto el primero y el último.

$$=\frac{1}{12}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4(4n-3)}=\frac{1}{12}$$

Para demostrar la convergencia a priori:

→ Criterio de comparación:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2+8n-3}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\rightarrow$$ S. Armónica generalizada converge $(k>1)$

Por tanto, al ser menor, la original también converge.

✓. 1.0

(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n^2-1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}$

$= \sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) + \log(n-1) - 2\log n)$

$= \cancel{\log 3} + \cancel{\log 1}^{0} - \cancel{2}^{1}\log 2$

$+ \cancel{\log 4} + \cancel{\log 2} - \cancel{2\log 3}$

$+ \cancel{\log 5} + \cancel{\log 3} - 2\cancel{\log 4}$

$+ \cancel{\log 6} + \cancel{\log 4} - \underset{1}{\cancel{2}}\log 5$

$+ \cdots$

Se van cancelando, sólo sobreviven $-\log 2$ y el de la derecha y la izquierda del último término. entre dos

$= -\log 2 + \lim_{n\to\infty} (\log(n+1) - \log n)$

Propiedad válida si existe el límite:

$= -\log 2 + \lim_{n\to\infty} \log\frac{n+1}{n} = -\log 2 + \log \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$

$= -\log 2 + \cancel{\log 1}^{0} = -\log 2$

Para demostrar la convergencia, ningún criterio nos proporciona información. Pero, si manipulamos la expresión descubrimos que ésta es una serie telescópica.

$a_n = \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \log\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n\cdot n}\right)$

$= \log\left(\frac{n+1}{n}\right) + \log\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) - \log\left(\frac{n}{n-1}\right) = c_{n+1} - c_n$

$\sum a_n$ converge sii $\exists \lim c_n = c$

cambio se acepta si $\exists$ lim.

$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \log\frac{n}{n-1} = \log \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = \log 1 = 0$

$\exists \lim \Rightarrow \sum a_n$ converge

La suma es $\sum a_n = c - c_1 = -\log(\overset{c_1}{2}) + \log \overset{c}{0}$

$= -\log 2$

Coincide con lo de arriba.

1.0

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n-3}{(n+1)!}+\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-3}{(n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n \rightsquigarrow x^n$ Serie geométrica $|x|<1$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-3}{(n+1)!}+\cancel{\sum_{n=0}}\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}$

$\frac{P(n)}{n!}=\frac{A}{n!}+\frac{B}{(n-1)!}+\dots\frac{R}{(n-r)!}$

descomponer en fracciones reduciendo el factorial del denominador hasta $(n-r)!$ donde r es el grado del polinomio

$\Rightarrow \frac{n-3}{(n+1)!}=\frac{A}{(n+1)!}+\frac{B}{n!}$

$=\frac{A+B\cdot(n+1)}{(n+1)!}\Leftrightarrow A+B(n+1)=n-3$

$\hookrightarrow B=1 \rightarrow A=-4$

$\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{4}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}=-4\cdot(e-1)+e=-3e+4$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=e-1$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n-3}{(n+1)!}+\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]=-3e+4+\frac{4}{7}=-3e+\frac{32}{7}$

✓ 1.0

(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^5\cdot x^{2n}}$ $\rightsquigarrow$ Estudiar convergencia

$\hookrightarrow$ Criterio del cociente

→ lo con la raíz $\lim \sqrt[n]{|u_n|}$

módulo mando pot.

→ Prescindo del módulo por ser n positivo y exponente par.

$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)}{(n+2)^5\cdot x^{2n+2}}\cdot\frac{(n+1)^5\cdot x^{2n}}{(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}x^{-2}\cdot\frac{(n+1)^5\cdot(2n+3)}{(n+2)^5(2n+1)}$

$=x^{-2}\cdot 1$

Converge cuando $l<1$

$x^{-2}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}<1 \Leftrightarrow x^2>1$ $x<-1$ $x\in\ldots]-1,1[\ldots$

$-1<x$ $|x|<1$

$1<x$

Extremos del intervalo

$x=1$ $\left(\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{3}{(n+1)^5}\right)\rightsquigarrow$ Al ser $\frac{1}{x^{2n}}$ una serie geométrica, para $x=1$ y $x=-1$, la serie ~~diverge~~.

Sustituir específicamente!

(Sólo puede converger cuando $|x|<1$)

$x=\pm 1 \rightarrow a_n=\frac{2n+1}{(n+1)^5}=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)^5}=\underbrace{\frac{2}{(n+1)^4}-\frac{1}{(n+1)^5}}_{\text{son c/ (armónica generalizada)}}$

comparación, $(n+1)^?$

OJO! ¡posible!

$=2\sum\frac{1}{(n+1)^4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^5}$

X 1.0/

(7)

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-4x+3}$

Función no definida en $x=1$, $x=3$

$(x-3) \rightsquigarrow 3^2-12+3=0$ ✓

Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -4 & 3 \\ +3 & & 3 & -3 \\ \hline +3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

$\Leftrightarrow A(x-1)+B(x-3) = 3x-5$

$-A-3B=-5$

$Ax+Bx=3x \to A+B=3$

$+(B-3)-3B=-5$

$B=1$

$A=2$

$$f(x) = \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x-1} = \frac{2}{-3(1-\frac{x}{3})} + \frac{-1}{(1-x)}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^n + x^n\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(1+\frac{2}{3^{n+1}}\right)$$ ✓ 1.0

b) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x(x^2-8x+5)+14} = \dfrac{3x+4}{x^3-8x^2+5x+14} = \dfrac{3x+4}{(x-2)(x+7)(x+1)}$

$2^3-8\cdot2^2+5\cdot2+14=0$ ✓

Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 5 & 14 \\ 2 & & 2 & -12 & -14 \\ \hline & 1 & -6 & -7 & 0 \\ 7 & & 7 & 7 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+7)} + \frac{C}{x+1}$$!!

$x-7$

$\Rightarrow A(x+7)(x+1) + B(x-2)(x+1) + C(x+7)(x-2)$

$= 3x+4+0x^2$

$\cancel{x^2}(A+B+C) = 0x^2$

$A8x - Bx + C5x = 3x$

$8A - B + 5C = 3$

$7A - 2B - 14C = 4$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -14 & 4 \\ 8 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & -1 & -13 & 4 \\ 8 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$ Resta

$\Rightarrow 0 \; 0 \; -18 \mid 1 \qquad C = -\frac{1}{18}$

$1)+3) = 9 \; 0 \; 6 \mid 3 \to 9A = 3-6C \Leftrightarrow A = \frac{1-2C}{3} = \frac{10}{27}$

$A+B+C=0 \to B = -\frac{17}{54}$

$$f(x) = \frac{10}{27}\frac{1}{(x-2)} - \frac{17}{54}\cdot\frac{1}{(x+7)} - \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(x+1)} = -\frac{10}{27\cdot2(1-\frac{x}{2})} - \frac{17}{54}\cdot\frac{1}{7(1-(-\frac{x}{7}))}$$

$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(1-(-x))} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{10}{54}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{17}{54\cdot7}\cdot\left(\frac{-x}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{18}(-x)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^n}{54}\left(\frac{10}{2^n} + \frac{17}{7\cdot(-7)^n} + 3\cdot(-1)^n\right)\right]$$ resultado incorrecto.

X ✓ 0.75

MÉTODOS MATEMÁTICOS II

(Licenciatura de Física. Curso 2007-2008)

Boletín de problemas a evaluar correspondientes a los Temas III y IV
Fecha de entrega: Jueves, 24 de Enero de 2008

1. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x(x+1)}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(\sinh x) - x}{2}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

2. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = e^x\,(x^2-1)$.

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ a + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ a + bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

   En los ejercicios (b) y (d) determinar los valores de a y b para que las correspondientes funciones sean continuas.

4. Demostrar, razonando la respuesta, que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^{205} + \frac{178}{5 + x^2 + \sin^2 x} = 67. \tag{1}$$

5. Calcular la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

   (a) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, (b) $y = x^3\,e^x$, $y = x\,\sin x$.

6. Obtener el polinomio de Taylor de grado diez para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. Sea $y = f(x)$ definida en forma paramétrica por : $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$. Sean

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt}\ ,\ \ddot{\phi} \equiv \frac{d^2\phi}{dt^2}\ ,\ \dddot{\phi} \equiv \frac{d^3\phi}{dt^3}\ ,\ \dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt}\ ,\ \ddot{\psi} \equiv \frac{d^2\psi}{dt^2}\ ,\ \dddot{\psi} \equiv \frac{d^3\psi}{dt^3}\ ,$$

   las correspondientes derivadas.

   Obtener la fórmula que nos permite calcular la derivada $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en función de las derivadas anteriores.

Fernando Hueso González B, P.
1º - FÍS, Métodos 2

10

(1)

a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x(x+1)}$

Por la dcha: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$

Por la izqda: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x\cdot(-1)}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1$

Por la dcha: $|x| = x$, pues $x>0$

" " izqda: $|x| = -x$, pues $x<0$

$\nexists$ lim al no coincidir por la derecha o la izquierda

0,75

b) $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{\log(\sinh x) - x}{2} = \frac{\log\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - x}{2} = \frac{\log(e^x - e^{-x}) - \log 2 - x}{2}$$

→ F. identidad: $x = \log e^x$

$$= \frac{\log\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x}\right) - \log 2}{2} = \frac{\log(1 - e^{-2x})}{2} - \frac{\log 2}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\log(1-e^{-2x})}{2} - \frac{\log 2}{2}\right]$$

si $\exists$ lim

$$= \frac{\log \lim_{x\to\infty}(1-e^{-2x})}{2} - \frac{\log 2}{2} = \frac{\cancelto{0}{\log(1)}}{2} - \frac{\log 2}{2} = -\frac{\log 2}{2}$$

0,75

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} \sim \frac{0}{0}$: Indeterminación

Regla de L'Hopital:

$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$; $g(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{0}{0}$ $\quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \exists\, l$?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

0,5

(Asíntotas: $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$)

Valores particulares:

$f(1) = 0 \quad f(-1) = 0 \rightarrow$ 2 cortes con el eje de abcisas

$f(0) = -1$

Extremos:

$f'(x) = e^x (x^2 - 1 + 2x) \equiv$ pendiente en x de la curva

$\rightsquigarrow$ Extremos si $f'(x) = 0$

$e^x (x^2 - 1 + 2x) = 0 \Rightarrow e^x$ toma valores positivos siempre (excepto ~~en~~ $-\infty$, $e^x \to 0$)

$\hookrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \rightsquigarrow$ Ecuación de 2º grado $\rightarrow$ 2 raíces

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2 \cdot 1} = -1 \pm \sqrt{2} \quad \begin{matrix} x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_2 = -1 + \sqrt{2} \end{matrix}$$

Simetría respecto a -1 y $f(-1) = 0$

$\rightarrow$ Para saber si es máximo o mínimo

$f''(x) = e^x (x^2 - 1 + 2x + 2x + 2)$

$= e^x (x^2 + 4x + 1)$

$f''(x_1) = \underbrace{e^{-1-\sqrt{2}}}_{>0} \underbrace{((-1-\sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-1-\sqrt{2}) + 1)}$

$1 - 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{2} + 2 - 4 - 4\sqrt{2} + 1 < 0$

$\hookrightarrow f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ Máximo en x_1

$f''(x_2) = \underbrace{e^{-1+\sqrt{2}}}_{>0} \underbrace{((-1+\sqrt{2})^2 + 4(-1+\sqrt{2}) + 1)}$

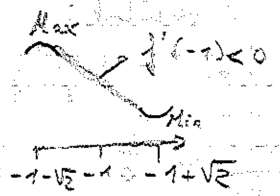
$= 1 + 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} + 1$

$= 2 + 2\sqrt{2} - 4 \rightarrow 2\sqrt{2} > 2 \Rightarrow f''(x_2) > 0$

$\hookrightarrow$ Mínimo en x_2

Comprobación

$f'(-1) = \frac{1}{e} \cdot (1 - 1 - 2) < 0$ ✓



V. particular pendiente:

$f'(0) = -1$

Puntos de inflexión: $\Rightarrow$ Sig. Página

$f''(x) = 0 \;\wedge\; f'''(x) = e^x (x^2 + 4x + 1 + 2x + 4) \neq 0$

$= e^x (x^2 + 6x + 5)$

$e^x > 0$

$x^2 + 6x + 5 = 0$ — a cero cuando

$$x_{5,6} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} = -3 \pm 2$$

$f'''(x) = e^{-3-2} (25 - 30 + 5) = 0$ ✓

$f'''(x_6) = e^{-1} (1 - 6 + 5) = 0$ ✓

P. inflexión:

$f''(x)=0 \qquad x^2+4x+1=0$

$e^x>0 \qquad x_{3,4}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$

$f'''(x_3)\neq 0\ ,\ f'''(x_4)\neq 0 \rightarrow$ Puntos de inflexión!

Límites:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} \overset{\text{ptos}}{e^x}\overset{\to+\infty}{(x^2-1)}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$? $\exists$ un sólo máximo, con lo que cuando $x\to-\infty$, la función será menor que $f(-1-\sqrt{2})$.

Por otra parte, $f(x) > 0$ siempre

y $f'(x)>0$ (estrictamente creciente hasta el máximo)
$x<0$

$\rightsquigarrow$ Por tanto $f(x)$ tenderá a cero por encima del eje de abcisas cuando $x\to-\infty$

$\hookrightarrow$ Asíntota horizontal $l=0$

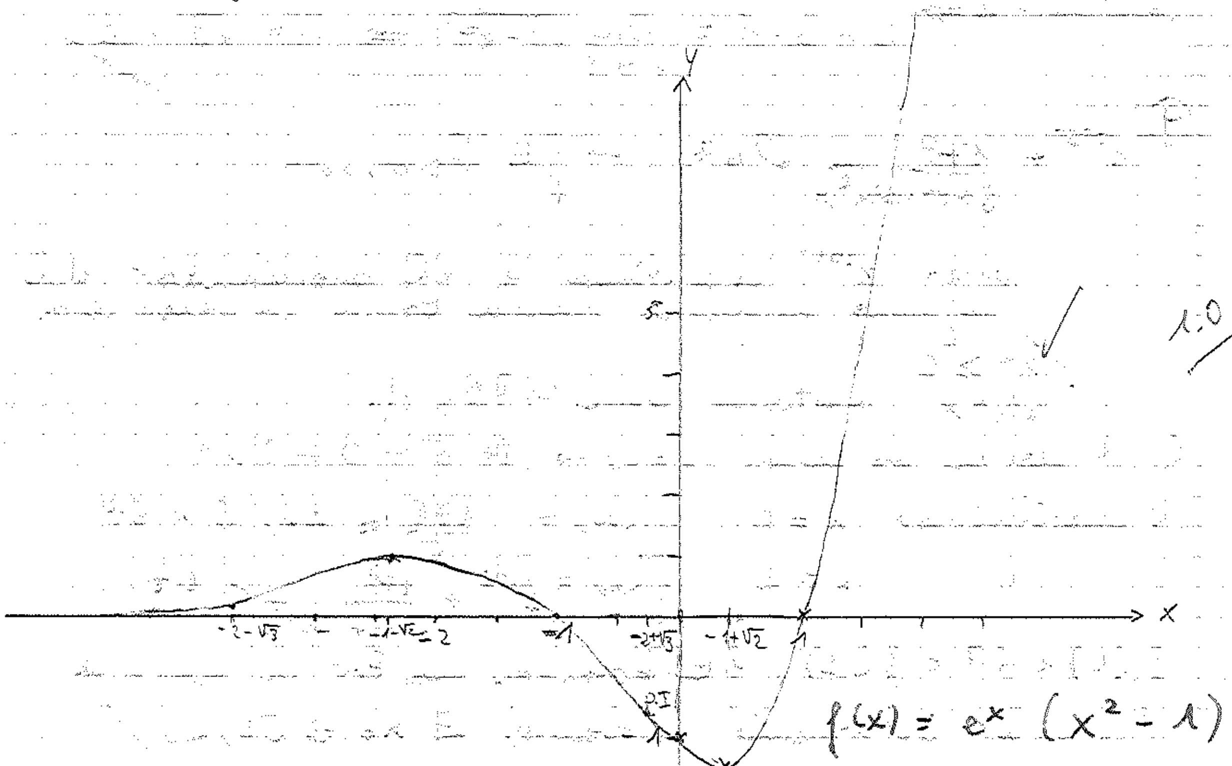
- No se observa ninguna simetría.
- Codominio $I=[f(-1+\sqrt{2})\ldots+\infty]$

$e^x(x^2-1) \overset{x\to-\infty}{\sim} 0\cdot\infty$

$\triangle$ Por l'Hopital: $f(x)=x^2-1$, $g(x)=e^{-x} \rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}\sim\dfrac{\infty}{\infty}$

(También se puede hacer con cambio de variable $e^x=t$) $x=\log t$

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2x \to -\infty}{-e^{-x} \to -\infty}$ si $x\to-\infty \Rightarrow \dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\dfrac{2}{e^{-x}}\underset{\text{si } x\to-\infty}{\longrightarrow}0=0$ ✓



1,0

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{[illegible]}{x-2} = \frac{[illegible]}{(x-2)} = x+2 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ ✓ 0.5

Igual por la derecha e izqda.

$\lim_{x\to 2} x+2 = 4 \neq 3 \to$ Discontinua en $x=2$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ a+x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

Condición: $a + \overset{0}{x} = \lim_{x\to 0} e^x \Leftrightarrow a = 1$ ✓ 0.5

c) $f(x) = \begin{cases} \text{I} & \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ \text{II} & 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{III} & \sqrt{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

✓ 0.5

$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+x^2} = 1 \to$ Discontinua en $x=0$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{1+e^{-x}} = 0 \to$ Coincide con II, pero no con III.

d) $f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a+bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

✓ 0.5

Condición 1 $\Rightarrow a\cdot\cos 0 = \lim_{x\to 0} \sqrt{4-x^2} \Rightarrow a = 2$

Condición 2 $\Rightarrow 2 + b\cdot 1 = \lim_{x\to 1} \sqrt{4-x^2} \Rightarrow b = \sqrt{3} - 2$

4) $x^{205} + \frac{178}{5+x^2+\sin^2 x} \overset{?}{=} 67 \to f \in \mathcal{C}_{[-\infty,+\infty]}$,

pues x^{205} es continua y el denominador del segundo sumando nunca toma el valor cero.

$x^2 \geq 0$

$\sin^2 x$ acotada entre 0 y 1.

✓ 1.0

En el peor de los casos $(x=0) \to 5 + 0 + 0 > 0$

Si sustituimos $x = 0$, $f(x) = \frac{178}{5} = 35,6 < 67$

" " $x = 2$ $f(x) = 2^{205} + \frac{178}{5+4+\sin^2 2} > 67$

$f(0) < 67 < f(2)$, $f \in \mathcal{C}_{(-\infty,+\infty)} \to$ Por el teorema del valor intermedio (Bolzano) $\exists\, x_0 \in [0,2]$ / $f(x_0) = 67$. $0 < x_0 < 2 \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}$ / $f(x_0) = 67$.

⑤

(a) $y' = \dfrac{1\cdot(1-x) - (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2} = 2\cdot 1\cdot (1-x)^{-2}$

$y'' = 2\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-3} = 2\cdot 2\cdot 1\cdot(1-x)^{-3}$

$y''' = 2\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-4} = 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(1-x)^{-4}$

$\vdots$

$y^n = 2\cdot n!\cdot(1-x)^{-n-1}$ ✓ 0,5

Demostración por inducción:

$y^{n+1} = 2\cdot(n+1)!\cdot(1-x)^{-n-1-1} = (y^n)' = 2\cdot n!\cdot(-n-1)\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-n-1-1}$

$= 2\cdot \underbrace{n!\cdot(n+1)}_{(n+1)!}\cdot(1-x)^{-n-2} = 2(n+1)!\,(1-x)^{-n-2}$ ✓

(b) $y = x^3\cdot e^x$

$y' = e^x\,(x^3 + 3x^2)$

$y'' = e^x\,(x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 6x)$ ✓ 0,75

$y''' = e^x\,(x^3 + 6x^2 + 3x^2 + \cancel{6x + 12x} + 6)$

18 + 6

y^{iv}

las 3 primeras se cancelan!

$x^3 \quad x^2 \quad x \quad x^0$

anterior·n anterior·n

$1 \quad 3n \quad 3(n-1)\cdot n \quad (n-2)(n-1)\cdot n$

D/ por inducción: $\quad y^n = e^x\,[x^3 + 3n\,x^2 + 3\,(n-1)\cdot n\,x + n\,(n-1)(n-2)]$

$y^{n+1} = e^x\,[x^3 + 3(n+1)\,x^2 + 3\,n\cdot(n+1)\,x + (n+1)\,n\,(n-1)]$

$= (y^n)' = e^x\,[x^3 + 3nx^2 + 3(n-1)\cdot nx + n(n-1)(n-2)$
$+ 3x^2 + 3\cdot 2nx^2 + 3(n-1)\cdot n]$

$= e^x\,[x^3 + x^2\,(3n+3) + x\,(3(n-1)\cdot n + 3\cdot 2\cdot n) + n\cdot(n-1)(n-2+3)]$

$= e^x\,[x^3 + x^2\,(3\,(n+1)) + x\,(3n\,(n+1)) + n\,(n-1)(n+1)]$ ✓

Por Leibnitz:

$f^{(n)} = e^x \quad g^0(x) = x^3,\ g'(x) = 3x^2 \quad g''(x) = 6x \quad g'''(x) = 6$ → Resto de derivadas se cancelan

$(f\cdot g)^n = e^x\left(\binom{n}{0}x^3 + \binom{n}{1}3x^2 + \binom{n}{2}6x + \binom{n}{3}\cdot 6\right)$

$= e^x\left(x^3 + 3nx^2 + n\cdot(n-1)\cdot\dfrac{6}{2!} + n\,(n-1)(n-2)\cdot\dfrac{6}{3!}\right)$

$= e^x\,(1x^3 + 3nx^2 + 3n\,(n-1) + 1n\,(n-1)(n-2))$ ✓

Los coeficientes 1, 3, 3, 1 están relacionados con que $g(x) = x^3$

1 CW

Supongamos $y = x^a \cdot e^x$

$g^0(x) = x^a$ $\qquad$ $f(x) = e^x$

$g^1(x) = a \cdot x^{a-1}$ $\qquad$ $f^{(n)}(x) = e^x$

$g''(x) = a \cdot (a-1) \cdot x^{a-2}$

$\vdots$

$g^{a-1}(x) = a \cdot (a-1) \cdots 2 \cdot x$

$g^a(x) = a!$ → Las siguientes son cero.

Por Leibnitz:

$$(f \cdot g)^n = e^x \left(\binom{n}{0} x^a + \binom{n}{1} a \cdot x^{a-1} + \dots + \binom{n}{a-1} \frac{a!}{1!} x + \binom{n}{a} a! \right)$$

$$= e^x \underbrace{\left(\binom{n}{0} \frac{a!}{a!} x^a + \binom{n}{1} \frac{a!}{(a-1)!} x^{a-1} + \dots \binom{n}{a-1} \frac{a!}{1!} \cdot x + \binom{n}{a} \frac{a!}{0!} \right)}_{a+1 \text{ términos}}$$

$$= e^x \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{n}{i} \cdot \frac{a!}{(a-i)!} \cdot x^{a-i} \right)$$

$$= e^x \left(\sum_{i=0}^{a} \frac{n!}{(n-i)! \cdot} \frac{a!}{i!\,(a-i)!} \cdot x^{a-i} \right)$$

$$= e^x \left(\sum_{i=0}^{a} \frac{n!}{(n-i)!} \cdot \binom{a}{i} \cdot x^{a-i} \right).$$

⇒ Expresión general de la derivada n-ésima de una función de la forma $y = x^a \cdot e^x$, $\forall a > 0$, $x \in \mathbb{R}$

→ Los coeficientes que aparecían, por tanto, venían dados por $\binom{a}{i}$, con lo que se calculan fácilmente (o con el triángulo de Tartaglia).

Aplicando la fórmula para $a = 3$, recuperamos la expresión original:

$$(f \cdot g)^n = e^x \left(1\, x^3 + 3n x^2 + 3\, n(n-1) x + 1\, n(n-1)(n-2) \right)$$

(c) $y = x\sin x$

$y' = \underline{\sin x + x(+\cos x)}$

$y'' = \cos x + \cos x + x(-\sin x)$

$= \underline{2\cos x + x(-\sin x)}$

$y''' = 2(-\sin x) + (-\sin x) + x(-\cos x)$

$y''' = \underline{3(-\sin x) + x(-\cos x)}$

$y^{iv} = 3(-\cos x) + (-\cos x) + x\sin x$

$= \underline{4(-\cos x) + x\sin x}$ → Derivadas cíclicas

$n > 0$

$y^{(n)} = n \cdot f^{n-1}\sin x + x \cdot f^{n}\sin x$

Gracias a la periodicidad de las funciones trigonométricas,
→ Se pueden expresar las derivadas n-ésimas del seno como:

En cada derivada se le añade un término al derivar $\frac{d\, x\cdot(\sin x)}{dx}$

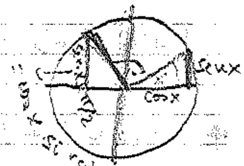
$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$n = 1 \to \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$n = 2 \to \sin(x + \pi) = -\sin x$

$n = 3 \to \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

$n = 4 \to \sin(x + 2\pi) = \sin x$ → así sucesivamente.



Por tanto:

$$y^{(n)} = n \cdot \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + x \cdot \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

✓ 0.75

D/ Por inducción:

$y^{n+1} = (n+1)\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + x\sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

$= (y^{n})' = n \cdot \left(\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)' + \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot\left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)'$

e derivada sumar

$= (n+1)\cdot\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ ✓

Por Leibnitz: $g(x)\sin x$

$g^{0}(x) = x \quad g'(x) = 1$ → Resto $= 0$ de derivadas

$(f\cdot g)^{n} = \binom{n}{0}\cdot x\cdot(\sin x)^{(n)} + \binom{n}{1}\,1\cdot \sin x^{(n-1)}$

$= x(\sin x)^{n} + n\cdot\sin x^{(n-1)} = n\cdot\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$
$+ x\cdot\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ✓

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ → Para obtener el desarrollo en serie de Taylor, es más sencillo haciendo un cambio de variable.

$u = x^2$ → Al deshacer el cambio tendré potencias de x pares → para el polinomio

$f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(u) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)\cdot(1-u)^{-\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow f^{(n)}(u) = \dfrac{\prod_{i=0}^{n}(2n+1)}{\ldots}\cdot(1-u)^{\frac{-(2n+1)}{2}}$

$f(u) = \sum_{r=0} a_r \cdot u$

Se puede combrobar que:

$a_r = \frac{1}{r!} \cdot f^{(r)}(0)$, $f(u) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \cdot f^{(r)}(0) \cdot u^r$

Deshaciendo el cambio de variable:

$f(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} \cdot f^{(r)}(0) \cdot x^{2r}$ (sólo habrá potencias pares)

a_r es un coeficiente, no cambia al cambiar la variable

$\frac{1}{r!} \underbrace{f^{(r)}(0)}_{f^{(r)}(u)^{u=0}} = \frac{\prod_{i=0}^{n} 2u+1}{2^u \cdot r!} (1-0^2)^{-\frac{(2u+1)}{2}} = \frac{\prod_{i=0}^{n} 2u+1}{2^r \cdot r!} = a_r$

Para obtener el polinomio de grado diez, r debe llegar hasta 5

Sustituyendo los valores en ⊛, obtenemos:

$\rightarrow x^{2r}$

$a_0 = \frac{1}{0!} \cdot f(0) = 1 \rightarrow x^0$

$a_1 = \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x^2$

$a_2 = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{8} \rightarrow x^4$

$a_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} = \frac{5}{16} \rightarrow x^6$

$a_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4} = \frac{35}{128} \rightarrow x^8$

$a_5 = \frac{1}{5!} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2^5} = \frac{315}{1280} = \frac{63}{256} \rightarrow x^{10} \rightarrow$ Grado diez.

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{63}{256} x^{10} + \frac{35}{128} x^8 + \frac{5}{16} x^6 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{1}{2} x^2 + 1$

/ 1.0 /

5

7

$y = f(x)$

$x = \phi(t) \longrightarrow t = \phi^{-1}(x) = t(x)$

$y = \psi(t) \longrightarrow y = f(\phi(t)) = \psi(t)$

$= \psi(t(x)) \leftarrow t = \phi^{-1}(x) = t(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d\psi}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{\dot\psi}{\dot\phi}$$

Regla Cadena

igual que antes

dependen de x a través de t → f(t), t = t(x)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot\psi}{\dot\phi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi}{\dot\phi}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\ddot\psi\dot\phi - \dot\psi\ddot\phi}{(\dot\phi)^2} \cdot \frac{1}{\dot\phi}$$

$$= \frac{\ddot\psi\dot\phi - \dot\psi\ddot\phi}{(\dot\phi)^3} = \frac{\ddot\psi}{(\dot\phi)^2} - \frac{\dot\psi\ddot\phi}{(\dot\phi)^3}$$

misma regla que en d^2

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot\psi}{\dot\phi^2} - \frac{\dot\psi\ddot\phi}{\dot\phi^3}\right) \cdot \frac{1}{\dot\phi} = \left[\frac{\dddot\psi\dot\phi^2 - \ddot\psi \cdot 2\dot\phi\ddot\phi}{\dot\phi^4} - \frac{(\ddot\psi\ddot\phi + \dot\psi\dddot\phi)\cdot\dot\phi^3 - \dot\psi\ddot\phi\, 3\dot\phi^2\cdot\ddot\phi}{\dot\phi^6}\right] \cdot \frac{1}{\dot\phi}$$

$$= \frac{\dddot\psi}{\dot\phi^3} - \frac{\ddot\psi \cdot 2\ddot\phi}{\dot\phi^4} - \frac{\ddot\psi\ddot\phi}{\dot\phi^4} - \frac{\dot\psi\dddot\phi}{\dot\phi^4} + \frac{3\dot\psi\ddot\phi^2}{\dot\phi^5}$$

/ 1.0

$$= \frac{\dddot\psi}{\dot\phi^3} - \frac{3\ddot\psi\ddot\phi}{\dot\phi^4} - \frac{\dot\psi\dddot\phi}{\dot\phi^4} + \frac{3\dot\psi\ddot\phi^2}{\dot\phi^5}$$

MÉTODOS MATEMÁTICOS II
(Licenciatura de Física. Curso 2007-2008)

Boletín de problemas a evaluar correspondientes al Tema VII
Fecha límite de entrega: Miércoles, 30 de Abril de 2008

1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int x^n \ln x \, dx \ (n \neq -1)$, (b) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, (c) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} \, dx$,

(d) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} \, dx$, (e) $\int \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{2x^2+x-1}}$.

2. Utilizando la definición de la función Gamma y sabiendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^2} \, dx$, (b) $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{t}} \, dt$, (c) $\int_0^{+\infty} \sqrt[4]{t}\, e^{-\sqrt{t}} \, dt$

3. Calcular las áreas de las figuras planas encerradas por las siguientes curvas:

(a) Cartesianas: $y = x^2 - 3x - 4, \ y = 4 + 3x - x^2$.

(b) Cartesianas: $y = x - 1, \ y = 1, \ y = \ln x$.

(c) Paramétricas: área comprendida en la mitad del primer ciclo del cicloide, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (ver figura 26 curvas para consulta).

(d) Polares: área comprendida entre la primera y segunda espira de la espiral de Arquímedes, $r = a\varphi$ (ver figura 30 curvas para consulta).

4. Calcular el volumen de los sólidos de revolución generados al girar alrededor del eje x las curvas siguientes:

(a) $y = \sin x, \ 0 \leq x \leq \pi$, (b) $y = \sin^2 x, \ 0 \leq x \leq \pi$,

5. Calcular la longitud del arco de las siguientes curvas entre los puntos indicados:

(a) Cartesianas: $y = \ln \sin x, \ \pi/3 \leq x \leq \pi/2$.

(b) Paramétricas: $x = \frac{t^3}{3} - t, \ y = t^2 + 2, \ 0 \leq t \leq 2$.

(c) Polares: $r\varphi = 1, \ 1/2 \leq \varphi \leq 2$ (espiral hiperbólica; ver figura 31 curvas para consulta).

3er Boletín de ejercicios

Fernando Juneso Vaszallo
BP1 - 1º - Física

10

(1)

(a) $\int x^n \ln x \, dx \quad (n \neq -1)$ → Integrar por partes

• $u = \ln x$ • $dv = x^n dx$

$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ → $\exists$ si $(n \neq -1)$ $\frac{x^n}{n+1}$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{\ln x \cdot x^{n+1}}{n+1} - \int \overbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}}^{\frac{x^n}{n+1}} dx + C_1$$

$$= \frac{\ln x \cdot x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C_1 = (*)$$

✓ 0.5

El resultado se puede comprobar derivando la expresión

$$\frac{d}{dx}(*) = \ln x \cdot x^n + \frac{x^{n+1}}{x \cdot (n+1)} - \frac{x^n}{n+1} = \ln x \cdot x^n \equiv \text{integrando}$$

(b) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow$ Cambio de variable $x = \sin t$, $dx = \cos t \, dt$

$$\int \frac{\sin^5 t \cdot \cos t \, dt}{\sqrt{\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t}}} = \int \frac{\sin^5 t \cos t}{\cos t} dt = \int \sin^5 t \, dt$$

→ Cambio de variable:

$\sin^2 t = 1 - z^2$ ← $z = \cos t$

$dz = -\operatorname{sen} t \, dt$

$$= -\int \sin^4 t \, dz = -\int (1-z^2)^2 dz$$

$$= -\int (1 - 2z^2 + z^4) dz = \int (2z^2 - 1 - z^4) dz$$

✓ 0.5

$$= \frac{2z^3}{3} - z - \frac{z^5}{5} + C_1 = \frac{2}{3}\cos^3 t - \cos t - \frac{\cos^5 t}{5} + C_1$$

$$= -\cos(\arcsin x) + \frac{2}{3}\cos^3(\arcsin x) - \frac{\cos^5(\arcsin x)}{5} + C_1$$

$\cos t = \sqrt{1-x^2}$ puedes expresar el resultado final mejor ...

(c) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$ → División polinómica.

$$(x^3-1) : (4x^3-x) = \frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{4}x - 1}{4x^3 - x}$$

$$-(x^3 - \frac{1}{4}x)$$

$$= \int \frac{1}{4} dx + I_2$$

$$\int \frac{4}{4x^3-x}dx = \int \frac{4}{4x^3-x}dx - \int \frac{1}{4x^3-x}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{4x^2-1}dx - \int \frac{1}{x(4x^2-1)}dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{1}{(x^2-\frac{1}{4})}dx - I_3 \underset{(I\,28)}{=} \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot \ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + C - I_3$$

Fracciones simples

$$I_3 = \int \frac{1}{x(4x^2-1)}dx = \int \frac{1}{x\cdot(2x-1)(2x+1)}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{2x+1}+\frac{C}{2x-1}\right)dx$$

$$\rightarrow A\cdot(2x-1)(2x+1) + Bx(2x-1) + Cx(2x+1) = 1$$

Agrupando las potencias:

$$\left.\begin{array}{l} 4A + 2B + 2C = 0 \\ -B + C = 0 \\ -A = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A=-1 \\ B=C=1 \end{array}$$

$$I_3 = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx = -\ln|x| + \frac{\ln|2x+1|}{2} + \frac{\ln|2x-1|}{2} + C'$$

$$I_1 = \frac{1}{4}x$$

$$I = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right| + \ln|x| - \frac{\ln|2x+1|}{2} - \frac{\ln|2x-1|}{2} + Cte$$

$$= \frac{1}{4}x + \underbrace{\frac{1}{16}\cdot\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\cdot\frac{x^{16}}{(2x+1)^{1/2}}\cdot(2x-1)^{-1/2}\right|}_{\text{está parte es un poco incorrecta}} + C$$

✓ 0.5

el resultado se puede simplificar más

$$\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x+1)^9(2x-1)^7}\right|$$

1(d)

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx \Rightarrow$$ Cambio de variable: $\sin x = t$

$dt = \cos x\, dx$

$t^2 = 1-\cos^2 x$

$$= \int \frac{\cos^4 x}{t^3}\cdot dt = \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\,dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^3}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t^3}dt - 2\int \frac{1}{t} + \int t\,dt = -\frac{1}{2t^2} - 2\ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + C_1$$

$$= -\frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$$ ✓ 0.5

1(e)

$$\int \frac{dx}{(3x+2)\sqrt{2x^2+x-1}}$$ → Cambio de variable: $t = \frac{1}{3x+2}$

$dt = -\frac{3}{(3x+2)^2}dx$ $\quad x = \frac{\frac{1}{t}-2}{3}$

$$= -\int \frac{t\cdot \overbrace{(3x+2)^2}^{=\frac{1}{t^2}}\,dt}{3\cdot\sqrt{2x^2+x-1}} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{\frac{1}{t}-2}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{t}-2}{3} - 1}}$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(\frac{2}{t^2}-\frac{8}{t}+8+\frac{3}{t}-6-9\right)}}$$

meter dentro

$$= -\frac{1}{\cancel{3}}\int \frac{\cancel{3}\,dt}{\sqrt{2-5t-7t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-7t^2-5t+2}}$$ → Completar cuadrados

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(-7)\left[\left(t+\frac{5}{14}\right)^2 - \left(\frac{-2}{7}-\frac{25}{4\cdot 49}\right)\right]}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{81}{196}-\left(t+\frac{5}{14}\right)^2}}$$

cambiar signos

(I. 25)

$$= -\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot \arcsen\left(\frac{t+5/14}{\sqrt{\frac{81}{196}}}\right) + C_1$$ $\quad a^2 = \frac{81}{196} \rightarrow t+\frac{5}{14} = u$

$dt = du$

$$= -\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsen\left(\frac{\frac{1}{3x+2}+5/14}{\frac{9}{14}}\right)+C_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsen\left(\frac{14}{27x+18}+\frac{5}{9}\right)+C_1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsen\left(\frac{14+5(3x+2)}{9\cdot(3x+2)}\right)+C_1 = -\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsen\left(\frac{15x+24}{9(3x+2)}\right)+C_1$$

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{1/2} \cdot e^{-x^2} dx \longrightarrow$$ Cambio de variable:

$y = x^2$ (los límites no cambian)

$dy = 2x dx$

$x = y^{1/2}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2} \cdot e^{-y}}{x} dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{-1/2} \cdot e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \underbrace{y^{-1/4}}_{y^{(3/4-1)}} \cdot e^{-y} dy = \boxed{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \cancel{\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)!}$$

✓ 0.5

(b) $$\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{t}}\, dt \longrightarrow$$ Cambio de variable: $\ln \frac{1}{t} = z$

$\ln \frac{1}{t} \xrightarrow{t \to 0} z \to \infty$

$dz = \frac{1}{\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right) dt$

$$-\int_\infty^0 \sqrt{z}\, t\, dz$$

$z = \ln \frac{1}{t} \xrightarrow{t \to 1} 0$

$\frac{1}{t} = e^{z}$

Cambio límites y signo

$$= \int_0^\infty \underbrace{\sqrt{z}}_{z^{(\frac{3}{2}-1)}} \cdot e^{-z} \cdot dz = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

✓ 0.5

(c) $$\int_0^{+\infty} t^{1/4} \cdot e^{-\sqrt{t}} dt \longrightarrow$$ Cambio de variable

$\sqrt{t} = z$

$dz = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$

(límites no cambian)

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} z^{1/2} \cdot z \cdot e^{-z} dz$$

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{z^{3/2}}_{z^{5/2-1}} \cdot e^{-z} dz$$

$$= 2 \cdot \Gamma(5/2) = 2 \cdot \Gamma(3/2 + 1) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

✓ 0.5

3(a) Áreas

$f(x) = x^2 - 3x - 4 \;;\; g(x) = 4 + 3x - x^2$

Puntos de corte $\rightarrow f(x) = g(x) \rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0$

Se observa que $f(x) = -g(x)$

$$x_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 8 \cdot 2}}{4} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^{4} (g(x) - f(x))\,dx$$

$$A = 2 \int_{-1}^{4} g(x)\,dx = 2 \cdot \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4)\,dx$$

$$= -2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \right]_{-1}^{4}$$

✓ 0.5

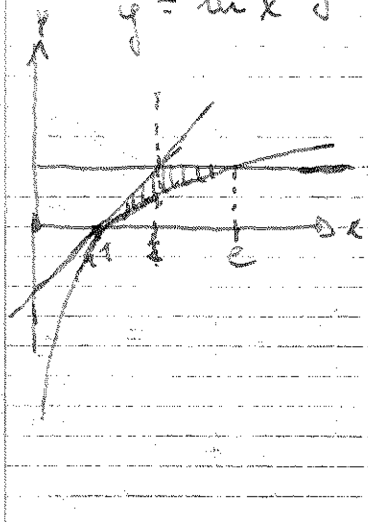
$$= -2 \cdot \left[\frac{64}{3} - 3 \cdot 8 - 16 + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 \right] = \frac{125}{3}$$

(b) $\left.\begin{array}{l} y = x - 1 \\ y = 1 \\ y = \ln x \end{array}\right\}$ Puntos de corte

$1 = x - 1 \rightarrow x_1 = 2$

$x - 1 = \ln x \rightarrow x_2 = 1$

$1 = \ln x \rightarrow x_3 = e$



Subdividimos en dos áreas:

$$A_1 = \int_{1}^{2} ((x-1) - \ln x)\,dx$$

integrar por partes $u = \ln x$, $dv = dx$

$$= \frac{1}{2} - \left[x \ln x - x \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \left[2\ln 2 - 2 + 1 \right]$$

$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

$$A_2 = \int_{2}^{e} (1 - \ln x)\,dx$$

$$= \left[x - (x \ln x - x) \right]_{2}^{e} = \left[2x - x \ln x \right]_{2}^{e} = -4 + 2\ln 2 + 2e - e$$

$A = A_1 + A_2$ ...

✓ 0.5

$y = a(1-\cos t) = \varphi(t)$ (F. 26)

$\rightarrow$ Primer ciclo $\rightarrow$ $t_1 = 0 \quad t_2 = \pi$

$$S = \int_0^\pi \psi(t)\cdot\dot{\varphi}(t)\,dt = \int_0^\pi a^2(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt$$

$$= a^2\int_0^\pi (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2\int_0^\pi \left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right]dt$$

$$= a^2\int_0^\pi \left[\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right]dt$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}t - 2\,\mathrm{sen}\,t + \frac{\mathrm{sen}\,2t}{4}\right]^\pi$$

$$= a^2\left[\frac{3}{2}\pi - 0\right] = \frac{3\pi a^2}{2}$$

0.75

(d) $r = a\theta$

$\rightarrow$ Límites entre $\alpha = 2\pi$ y $\beta = 4\pi$

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta a^2\theta^2\,d\theta = \frac{1}{2}a^2\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_\alpha^\beta$$

$$= \frac{1}{6}a^2\left[4^3\pi^3 - 2^3\pi^3\right] = \frac{1}{6}a^2\cdot\pi^3\cdot[64-8] = \frac{56}{6}a^2\pi^3$$

No obstante, a este resultado hay que restarle la integral de 0 a 2π que hemos contado de más A_1

$$A_T = A_1 - \left[\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{2\pi} = A_1 - \frac{1}{6}a^2\left[8\pi^3\right] = \frac{28}{3}a^2\pi^3$$

$$- \frac{4}{3}a^2\pi^3 = \frac{24}{3}a^2\pi^3 = 8a^2\pi^3$$

0.75

4(a)

$y = \sin x \qquad 0 \le x \le \pi$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$A = \pi\int_0^\pi y^2\,dx = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi\cdot\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2$$

✓ 0.5

(b) $\qquad 0 \le x \le \pi$

$$A = \pi\cdot\int_0^\pi \sin^4 x\,dx = \pi\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\cancel{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi\cdot\int_0^\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x}\right)dx$$

$+$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\int_0^\pi \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$

✓ 0.5

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\left[\frac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi^2}{8}$$

5a)

$y = \ln \sin x \qquad \pi/3 \le x \le \pi/2$

$$L = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad y' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,dx$$

→ Cambio de variable: $\tan \frac{x}{2} = t$

$dx = 2dt/1+t^2$

$\sin x = 2t/_{1+t^2}$

$$\int_{\pi/3} \frac{dt}{t} = \Big[\ln|t|\Big]_{\pi/3}$$

$$= \ln\left|\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|\tan\frac{\pi}{6}\right|$$

$$= -\ln\left|\tan\frac{\pi}{6}\right|$$

$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right|$$

5b)

$$= -\ln\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \ln\sqrt{3}$$

✓ 0,5

$$\varphi = x = \frac{t^3}{3} - t, \quad y = t^2 + 2 = \psi$$

$$\dot\varphi = t^2 - 1$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot\varphi)^2 + (\dot\psi)^2}\, dt \qquad \dot\psi = 2t$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 2$$

$$= \int_0^2 \sqrt{(t^2-1)^2 + (2t)^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}\, dt$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\underbrace{t^4 + 2t^2 + 1}_{(t^2+1)^2}}\, dt = \int_0^2 (t^2+1)\, dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + t\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} + 2 = 14/3$$

✓ 1.0

c) $r\varphi = 1 \qquad r = \frac{1}{\varphi} \qquad \alpha = 1/2,\ \beta = 2$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}}\, d\varphi$$

$$= \int_{1/2}^2 \sqrt{\frac{1}{\varphi^4}(\varphi^2+1)}\, d\varphi = \int_{1/2}^2 \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2+1)^{1/2}\, d\varphi$$

→ Condiciones de Chebychev

$$p = \frac{1}{2} \quad m = -2, \quad n = 2$$

$$z^2 = 1 + \varphi^{-2} \qquad \varphi^2 = \frac{1}{z^2 - 1}$$

$$2z\, dz = -2\varphi^{-3}\, d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{z\, dz}{\varphi^{-3}} = z\, dz\, \varphi^3$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \varphi^{-2} (1+\varphi^2)^{1/2} \cdot z \, dz \cdot \varphi^3 = \int_{z_1}^{z_2} \varphi (1+\varphi^2)^{1/2} z \, dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{1}{z^2-1}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)^{1/2} z \, dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \left[\left(\frac{1}{z^2-1}\right) \cdot \left(\frac{z^2}{z^2-1}\right)\right]^{1/2} z \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{z^2}{(z^2-1)^2}\right)^{1/2} z \, dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} \frac{z^2}{z^2-1} \, dz = \int_{z_1}^{z_2} \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right) dz \overset{(I\,28)}{=} z \Big|_{z_1}^{z_2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \Bigg]_{z_1}^{z_2}$$

$$z_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{1/2}\right)^2} = \sqrt{5} \qquad z_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$I = \sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{\sqrt{5/4} - 1}{\sqrt{5/4} + 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} \right| \right)$$

1.0

MÉTODOS MATEMÁTICOS II

(Licenciatura de Física. Curso 2007-2008)

Boletín de problemas a evaluar correspondientes a los Temas VIII y IX
Fecha límite de entrega: Jueves, 5 de Junio de 2008

1. Calcula la integral doble
$$\int\int_R x^2 y \, dx \, dy \tag{1}$$
siendo R la región del primer cuadrante comprendida entre las dos rectas dadas por las ecuaciones $x + y = 1$, $x + y = 2$.

2. Empleando coordenadas cilíndricas, calcula la integral triple
$$\int\int\int_R z^2 \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz \tag{2}$$
siendo R la región limitada por el paraboloide $x^2 + y^2 = z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

3. Calcula el trabajo W efectuado por la fuerza $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k}$, entre $t = 0$ y $t = \pi/6$.

4. Aplicando el teorema de Green en el plano calcular el área del astroide, dado en forma paramétrica por las ecuaciones $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, siendo a una constante y t el parámetro de la curva, $t \in [0, 2\pi]$.

5. Calcular las siguiente integral curvilínea:
$$\int_C (2xy^3 - y^2 \cos x) \, dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) \, dy$$
a lo largo de la parábola $2x = \pi y^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(\pi/2, 1)$.

6. Sea el campo vectorial $\mathbf{A} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y sea la región limitada por los planos $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1, z = -1, z = 1$.

   (a) Calcula la integral de superficie $\int\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$, siendo S la superficie de la región anterior.

(b) Comprueba que el resultado anterior coincide con la integral de volumen

$$\int\int\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV, \tag{3}$$

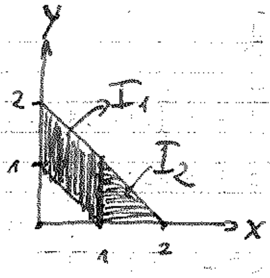
siendo V el volumen de la región anterior (es decir, se cumple el teorema de la divergencia). Recuerda que en el integrando anterior $\nabla \cdot \mathbf{A}$ indica la divergencia del campo vectorial $\mathbf{A}$, operador diferencial definido como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A^x}{\partial x} + \frac{\partial A^y}{\partial y} + \frac{\partial A^z}{\partial z} \tag{4}$$

Fernando Hueso González
1º - Fís. Grupo B - P1

4º Boletín de problemas

10



(1) $\iint_R x^2 y \, dx\,dy$ R: $x+y=1$, $x+y=2$, 1er cuadrante

Dividimos la región plana en dos subregiones, cortadas por la recta $x=1$.

$$\iint_R x^2 y \, dx\,dy = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \iint_{S_1} x^2 y \, dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=1-x}^{2-x} x^2 y \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} x^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^{2-x} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x^2 \left((2-x)^2 - (1-x)^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (4 - 4x + x^2 - 1 - x^2 + 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (3-2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (3x^2 - 2x^3) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x^3 - \frac{2}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$I_2 = \int_{x=1}^{2} \left(\int_{y=0}^{2-x} x^2 y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 (2-x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 (4 - 4x + x^2) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^5}{5} - 2^4 + \frac{2^2 \cdot 2^3}{3} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{3} \right)$$

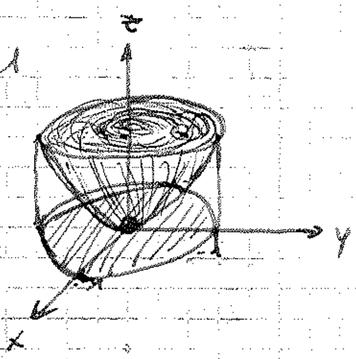
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 2^5 - 15 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^5 - 3 + 15 - 20}{15} \right) =$$

$$= \frac{1}{30} (96 - 240 + 160 - 8) = \frac{96 - 88}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{15} = \frac{15 + 16}{60} = \frac{31}{60}$$

✓ 1.5

$$\iiint_R z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz \qquad R: \begin{cases} x^2+y^2 = z \\ x^2+y^2 = 1 \\ z=0,\ z=1 \end{cases}$$



→ Transformación a cilíndricas:

$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \qquad z = z$

$x^2+y^2 = \rho^2$

$|J| = \rho$

R':

$\rho\in[0,1]$

$\varphi\in[0,2\pi]$

$z\in[0,1]$ ↳ ligado a curva $x^2+y^2 = z = \rho^2$

$$\Rightarrow \iiint_{R'} z^2\,\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

$$= \int_{\rho=0}^{1}\left[\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{z=0}^{\rho^2} z^2\rho^2\,dz\right)d\varphi\right]d\rho$$

$$= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{3}\rho^6\cdot\rho^2\,d\varphi\,d\rho = \frac{1}{27}\cdot 2\pi$$

/ 1.5 /

③ $\vec{F} = (z, y^2, x) \qquad \vec{r} = (\sin t, \cos t, \tan t)$

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \left(\cos t, -\sin t, \dfrac{1}{\cos^2 t}\right)dt$

$t\in[0,\pi/6]$

$\vec{F}$ a lo largo de C: $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \tan t$

$\vec{F_c} = (\tan t, \cos^2 t, \sin t)$

$$\vec{F_c}\cdot d\vec{r} = \left(\tan t\cos t + \cos^2 t(-\sin t) + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)dt$$

$$\int_0^{\pi/6}\left(\tan t\cos t + \cos^2 t(-\sin t) + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)dt$$

/ 1.0 /

$$= \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{1}{\cos t}\right]_0^{\pi/6}$$

$$= -\frac{\sqrt3}{2} + \frac{3\sqrt3}{3\cdot 8} + \frac{2}{\sqrt3} + 1 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{\sqrt3}{8} - \frac{\sqrt3}{2} + \frac{2}{\sqrt3} - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{3\sqrt3}{8} + \frac{2\sqrt3-1}{3} = \frac{-9\sqrt3+16\sqrt3-8}{24} = \frac{7\sqrt3}{24} - \frac{1}{3}$$

④ Tma. Green en el plano
↳ Área:

Astroide:

$$A = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$$

→ en paramétricas: $a \in \mathbb{R}$, cte.

$x = a\cos^3 t \qquad dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$

$y = a\sin^3 t \qquad dy = 3a\sin^2 t\cos t\, dt$

$t \in [0, 2\pi]$ → vuelta completa camino cerrado

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t - (-a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t \sin t)]\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)\,dt \quad \to a \text{ cte}$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\,\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{1}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t \cos^2 t}_{\underbrace{(\sin t\cos t)^2}_{\frac{\sin 2t}{2}}}\,dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 2t}_{\frac{1}{2}(1-\cos 4t)}\,dt = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{\cos 4t}{2}}\right)dt$$

entre 0 y 2π dará cero (f. par $0-2\pi$)

$$= \frac{3a^2}{8}\cdot\left[\frac{1}{2}t\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{8}$$

✓ 2,5

⑤ $$\int_C (2xy^3 - y^2\cos x)\,dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,dy$$

$C:\ 2x = \pi y^2 \quad \to (0,0) \to (\pi/2, 1)$

↳ $x = \dfrac{\pi y^2}{2} \qquad x = g(y) \to$ Sustituir:

$dx = \pi y\,dy$

$$\int_0^1 \left(2\frac{\pi y^2}{2}y^3 - y^2\cos\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot\pi y\,dy + \left(1 - 2y\sin\frac{\pi y^2}{2} + 3\frac{\pi^2 y^4}{4}\cdot y^2\right)dy$$

$$= \int_0^1 \left(\pi^2 y^5 - y^3\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot\pi + 1 - 2y\sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) + \frac{3}{4}\pi^2 y^6\right)dy$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{4} y^7 \qquad - \pi I_3 + \frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) + y \right]_0^1$$

$I_3 = \int y^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot dy$ → Integrar por partes:

$$u = y^2 \qquad dv = \overset{\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{2}\right)}{y} \cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot dy$$

$$du = 2y\,dy \qquad v = \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\, y^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\int 2y \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot dy$$

$$= \qquad\qquad - \frac{2}{\pi^2}\left(-\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} y^2 \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) + \frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi y^2}{2} + C$$

$$I = \left[\frac{\pi^2}{4}y^7 \qquad - y^2\sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) \underbrace{- \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)}_{0} + y\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{4}y^7 + \qquad - \sin\left(\frac{\pi y^2}{2}\right)\cdot y^2 + y\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \qquad - 1 + 1 = \frac{\pi^2}{4}$$

También se puede calcular por otro camino, puesto que es independiente.

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2\cos x) = \frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)$$

$$6xy^2 - 2y\cos x = -2y\cos x + 6xy^2$$

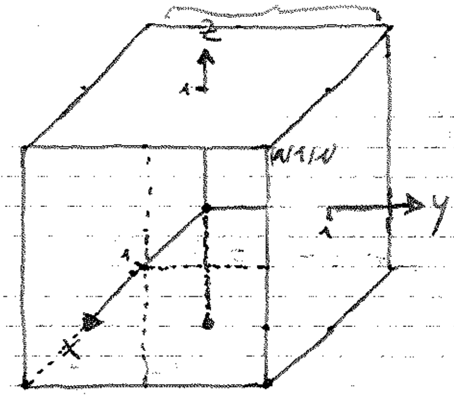
$$I = \int_{x=0}^{\pi/2} (\cancel{2xy^3 - y^2\cos x})\,dx + \int_{y=0}^{1} \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2 y^2\right) dy$$

$$\begin{pmatrix} y=0 \\ dy=0 \end{pmatrix} \quad 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} x=\pi/2 \\ dx=0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[y - y^2 + \frac{\pi^2}{4}y^3\right]_0^1 = 1 - 1 + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

2.0

⑥ a) $\vec{A} = (2x, y, -z)$



La normal en las seis caras del cubo:

$\vec{n}_1 = (1, 0, 0)$

$\vec{n}_2 = (-1, 0, 0)$

(Ejes perpendiculares a los planos)

$\vec{n}_3 = (0, 1, 0)$ $\quad \vec{n}_5 = (0, 0, 1)$

$\vec{n}_4 = (0, -1, 0)$ $\quad \vec{n}_6 = (0, 0, -1)$

→ Las ecuaciones del plano dan el vector normal:

p.ej: $1x + 0y + 0z = 1$ $\;\;\hookrightarrow \vec{n}_1 (1, 0, 0)$

Debido a la linealidad, podemos dividir la superficie total en 6 caras y sumar las integrales:

$$I_1 = \iint_{S_1} 2x\, dS$$ → S_1 ($x=1$) es un plano paralelo al plano zy. La proyección de dS en z, y.

$$= \iint_{S_1} \underset{x=1\text{ (plano)}}{2x}\, dy\, dz = \int_{y=-1}^{1} \int_{z=-1}^{1} 2\, dy\, dz = 2 \left[y\right]_{-1}^{1}\left[z\right]_{-1}^{1} = 8$$

$$I_2 = \iint_{S_2} -\underset{x=-1}{2x}\, dy\, dz = +2 \int_{y=-1}^{1}\int_{z=-1}^{1} dy\, dz = 8$$

$$I_3 = \iint_{S_3} \underset{y=1}{y}\, dS = \iint_{S_3} dS = 4$$ (Área de una cara (lado 2))

$$I_4 = \iint_{S_4} -\underset{=-1}{y}\, dS = I_3$$

$$I_5 = \iint_{S_5} -\underset{z=1}{z} \cdot dS = -\iint_{S_5} dS = -4$$

$$I_6 = \iint_{S_6} \underset{z=-1}{z}\, dS = I_5$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 16$$

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 2+1-1=2$$

$$2\iiint_V dV \Rightarrow \quad V_{cubo} = 2^3 = 8 \quad \int_{x=-1}^{1} dx \int_{y=-1}^{1} dy \int_{z=-1}^{1} dz = 8$$

$$= 2\cdot 8 = 16 \checkmark$$

2.0