$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$

$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ $\quad$ I

$z = (x, y)$

$= x + iy$

$= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ $\quad \theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= r \cdot e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ $\quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ☆ $\quad$ F. de Moivre $\to (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta$

$z_1 z_2 = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$z^n = r^n e^{i\theta n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}$ $\quad k = 0, \dots, n-1$, $k \in \mathbb{N}$

$\log z = \log|z| + i(\theta + 2k\pi)$

$S_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$a^z = e^{z \ln a}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$ $\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\quad \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\quad$ = s prop.

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ $\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ $\quad \cos(z_1+z_2) = \checkmark \quad \mathrm{sen}(z_1+z_2) = \checkmark$

$\mathrm{senh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\quad$ * $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$

$\mathrm{tgh}\, z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$ $\quad$ * $\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

$\cos iz = \cosh z \quad \sin iz = i\sinh z \quad \mathrm{tg}\, iz = i\,\mathrm{tgh}\, z$

$\cosh iz = \cos z \quad \sinh iz = i \sin z \quad \mathrm{tgh}\, iz = i\,\mathrm{tg}\, z$

$a_0 z^n + \dots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0,\ a_n \in \mathbb{C})$

- Toda ecuación polinómica con coeficientes complejos de grado n siempre tiene n soluciones, donde algunas o todas pueden ser iguales

$a_0(z - z_1)(z - z_2)(\ )\dots = 0$

- Si p/q [illegible] es solución de la ec. $\to$ [illegible] divisor de $\frac{a_n}{a_0}$

- [illegible] $\sum z_i = -\frac{a_1}{a_0}$ [illegible]

$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$ 4C

$(z^{-1})^* = (z^*)^{-1}$

$z \cdot z^* = x^2 + y^2 = z^* z$

$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$ 3P

$Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)$

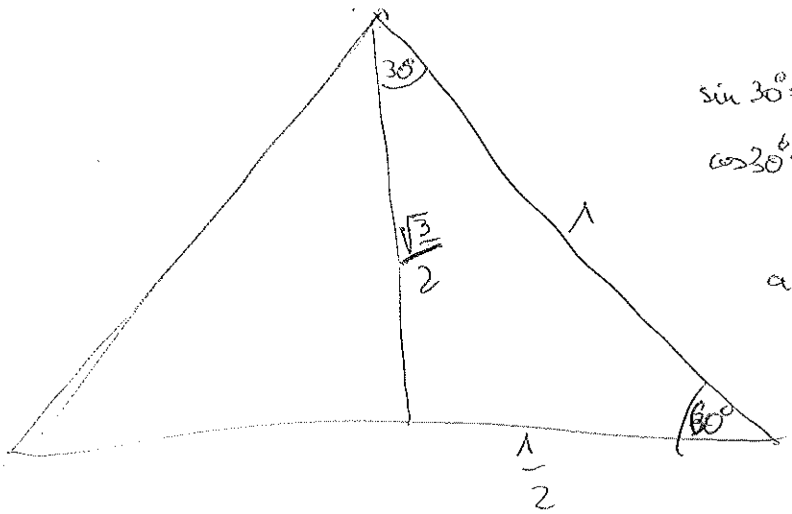
$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 2P

$|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$

$|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 Re\{z_1 \cdot z_2^*\}$

$\triangle$ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z| \geq Re\{z\}$



$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$

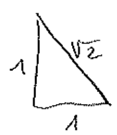
$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60°$

$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

$\operatorname{arctg} 1 = 45°$

$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45$

$\tan 45 = 1$



II

l.c.i. c.i.

$G \times G \xrightarrow{*} G$

- As.
- Conm
- Distr. 1

e.n. (único si ∃)

e.s (único) (x simetrizable)

e. reg < dcha / izqda

- Si x es simetrizable → x es regular
- ∀ $a * x = b$ solución si < Asoc / ∃e / a simetrizable

¿homom?

GRUPO

e.alg. formada x el par $(G, *)$

l.c.i. $\xrightarrow{*}$ Asociativa
→ E.n.
→ E.S.
> (abeliano si (.))

- e.n. único
- $\forall x \ \exists! \ x^{-1}$
- $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ $(\neq a^{-1} * b^{-1})$ si conm.
- Todos los elem son simplificables
- Las ecuas $a * x = b$ $(y * a = b)$ tienen solución

SUBGRUPO

$H \subset G$ → H subgrupo del grupo G si $H, *$ es un grupo

- Parte estable: $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$
- E. neutro $\in H$
- E. simétr. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

(impropios $(G, *)$ / $(\{e\}, *)$ son subgrupos)

$H \subset G$, $(G, *)$ → H es subgrupo de G sii $x * y^{-1} \in H$ — Tma. de caracteriz. de subgrupos

- $(H_1, *)(H_2, *)$ subgr. → Intersecc. $H_1 \cap H_2$!b
- Unión no es subgrupo en general

Gr. conm.: $(I^{1/p}, \cdot)$ $p > 0 \in \mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{Q}, +)$

$(\mathbb{R}, +)$

$(\mathbb{C}, +)$

$(\mathbb{Q} \sim 0, \cdot)$

$(\mathbb{R} \sim 0, \cdot)$

$(\mathbb{C} \sim 0, \cdot)$

← $(\mathbb{N}, +)$ / $(\mathbb{Z} \sim 0, \cdot)$

Cuerpos → $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ / $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ / $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

← $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Distri? / endomorf. sobrey.? / cosh y ch

Homomorfismos

$(G, *)$ y $(H, \perp)$

$f: G \to H$ es un homomorfismo entre grupos si $f(x*y) = f(x) \perp f(y)$ $\forall x, y \in G$

Monomorfismo I $\forall a, b \in A / a \neq b \to f(a) \neq f(b)$

Epimorfismo S $\forall b \in B \exists a \in A / f(a) = b$

Isomorfismo B $\forall b \in B \exists! a \in A / f(a) = b$ la inversa de la aplica

Endomorfismo = (en ...)

Automorfismo = ...

$f(e) = \epsilon$

$f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$

$Img\{f\} \equiv f(G)$ es subgrupo de $(H, \perp)$ si $f: G \to H$ es homom.

imagen de f

Núcleo $Nuc\{f\} = \{x \in G / f(x) = \epsilon \in H\}$

es subgrupo de $(G, *)$

PROPIEDADES

$f: G \to H$ homomorfx.

$I \subset G$ es sg de $(G, *) \to f(I) \subset H$ es sg de $(H, \perp)$

$J \subset H$ " " $(H, \perp) \to f^{-1}(J) \subset G$, " " $(G, *)$

G es g conmutativo $\to f(G)$ también

f es un isomorfismo $\to f^{-1}$ también

f es un monomorfismo sii $Nuc(f) = \{e\}$

la composición de 2 homomorfx es otro homomorfx

Anillo

$(A, \perp, *)$

1. $(A, \perp)$ gr. abeliano
2. $*$ asociativa
3. distributiva respecto de $\perp$

Si $\exists$ e.n. respecto de $*$ → Anillo Unitario

Si $*$ es conmutativa → Anillo Abeliano (con ...)

Cuerpo

$(K, \perp, *)$

1. $(K, \perp)$ gr. abeliano
2. $(K - \{e\}_\perp, *)$ gr. abeliano
3. $*$ distributiva respecto de la ley $\perp$

III

S_n, $n!$ elem ☆

$\tau \circ \tau^{-1} = I$ ☆

S_n $\binom{n}{2}$ trasposiciones (ciclo de 2 elementos) ☆

$(i_1 i_2 \ldots i_p) = (i_1 i_p)(i_1 i_{p-1}) \cdots (i_1 i_2)$ ☆ $\quad p \leq n$ ($n-p$ restantes no cambian)

$sig\,\sigma = (-1)^{n_t}$ ☆ n_t de σ siempre par o impar

$sig(I) = 1 \qquad sig$ ciclo $= (-1)^{p-1}$

ciclo de p elementos → $p-1$ transposiciones (∞ posibilids)

σ → producto de ciclos disjuntos

$sig(\sigma_1 \circ \sigma_2) = sig(\sigma_1) \cdot sig(\sigma_2)$

x Permutac ≡ toda aplic biyectiva de E_n en sí mismo ← automorfx

$\sigma : E_n \to E_n \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots \end{pmatrix}$

S_n conjunto formado por todas las permutaciones sobre E_n

l.c.i. o

(todas de aplicac biyect.)

→ Asociativa: (aplicac)

→ Elemento neutro: (I)

→ " simétrico ($\exists\ \sigma^{-1}$ xq es biyectiva)

⟹ Grupo de permutaciones (no abeliano)

$sig : (S_n, \circ) \to (\{+1, -1\}, \cdot)$ Homomorfismo entre grupos

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \begin{cases} 0 & \text{si tiene índices repetidos} \\ sig\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix} & \text{si no l.i.} \end{cases}$$

mín. común múltiplo de elem del ciclo disjunto → orden

$(S_\sigma, \circ)$ → conjunto generador de permutacs $\subseteq S_n$

conjunto generado x σ grupo

¿

?

$p < n$?

$P S_n$

Grupo y Anillo!

$$\left\{\begin{array}{l} E = \{ |u\rangle, \dots \} \\ \text{l.c.i.} \ + \ (|u\rangle + |v\rangle = |u+v\rangle \in E) \\ \text{l.c.e} \ \circ_{ppe} (\alpha, |u\rangle) \leadsto \alpha \cdot |u\rangle = |\alpha \cdot u\rangle \end{array}\right.$$

$EV \to$ terna $\{ (E, +), (K, +, \circ), (\circ) \}$

- $(E,+)$: Grupo abeliano
- $(K,+,\circ)$: Cuerpo
- $(\circ)$:
  - Distributiva respecto suma vectores
  - " " " escalares
  - Asociativa " ppe
  - $\exists$ elemento unidad $\exists 1 \in K / 1 |v\rangle = |v\rangle$ en de K.

T. inmediatos

0 e.n de $(K,+)$, $|0\rangle$ el e.n. de $(E,+)$

1) $\forall v \in E \quad 0 \cdot |v\rangle = |0\rangle$ } 3.0
2) $\forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot |0\rangle = |0\rangle$
3) $\forall \alpha \in K \wedge \forall |v\rangle \in E$
   $(-\alpha) \cdot |v\rangle = -(\alpha \cdot |v\rangle)$] 2.5
4) $\forall |v\rangle \in E \wedge \forall \alpha \in K$
   $-(\alpha \cdot |v\rangle) = \alpha \cdot |-v\rangle$ ... simétr. de $|v\rangle$ en $(E,+)$
5) $\forall \alpha \in K \wedge \forall v \in E$
   si $\alpha \cdot |v\rangle = |0\rangle \to$ o bien $\alpha = 0$
   o bien $|v\rangle = |0\rangle$
6) $|v\rangle, |w\rangle \in E$, $\alpha \neq 0 \in K$
   Si $\alpha \cdot |v\rangle = \alpha \cdot |w\rangle \Rightarrow |v\rangle = |w\rangle$] Sim
7) $\alpha, \beta \in K$, $|v\rangle \neq |0\rangle \in E$
   Si $\alpha |v\rangle = \beta \cdot |v\rangle \Rightarrow \alpha = \beta$

CLI $\quad \Delta \neq 0 \to \alpha = \beta = \gamma = 0$

El conj. de las matrices $n \times n$ sobre cualquier cuerpo K es esp. vect.
Suma / escalar $\to$ Prop / isomorfo a $K^{n \cdot n}$

?

Equivale entre n+1 tuplas reales base canónica
isomorfy
$(a_0, a_1, \dots) = (1,0,\dots)(0,1,0,\dots)\dots(0,\dots,0,1)$

SEV

$F \subset E$ es sev si $\{ (F \subset E, +), (K, +, \circ) \ (\circ) \}$ tiene estructura de ev.

c. sufic: $(F,+)$ subgrupo de $(E,+)$
Parte estable para $(\circ)$ $\forall v \in F: \alpha |v\rangle \in F$

C nec y suf: TMA DE CARACT. $\alpha, \beta \in K, |u\rangle, |v\rangle \in F$

$F \subset E$ es sev $\Leftrightarrow \alpha \cdot |u\rangle + \beta |v\rangle \in F$

$F_1 \cap F_2$ es sub. vec. de E
$F_1 \cup F_2$ no " " " en general

$\left\{ \begin{array}{l} SS \\ SD \\ SC \end{array} \right.$

Combinads lineales

$W = \{|v_1\rangle, |v_2\rangle \dots |v_n\rangle\} \subset E$

- $|v\rangle \in E$ es c.l de W si $|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |v_i\rangle$ ~~mas~~ (α_i escalares) (caracterizan e.v)
- Ls depende linealmente de W.
- familia de vectores no nulos es l.i. si ninguno es c.l. de los restantes
  Ls si no: linealmente dependiente / ligado

→ W l.i sii $\alpha_1 \cdot |v_1\rangle + \alpha_2 \dots + \alpha_n \cdot |v_2\rangle = 0$ → única solución.
$\alpha_i = 0 \quad \forall i_{[1,n]}$

Base de un e.v. E; $\mathbb{B} = \{|e_i\rangle\}$

Conjunto de vectores que satisfagan:

i) $\mathbb{B}$ l.i.

ii) $\mathbb{B}$ sist. generador (todo vector de E se expresa como c.l. de $\mathbb{B}$) $E = \langle \mathbb{B} \rangle$

→ componentes de $|v\rangle$ con respecto a $\mathbb{B}$ = los escalares de la c.l. de $|v\rangle$ respecto de $\mathbb{B}$
$|v\rangle = \alpha_1 |e_1\rangle + \alpha_2 \dots$

- Base canónica en $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$
  $|e_1\rangle = (1, 0, \dots 0)$
  $|e_2\rangle = (0, 1, 0, \cdot, 0)$
  $\vdots$
  $|e_n\rangle = (0, \dots, 0, 1)$

- E.v. de dim. finita e infinita
  → e.v. de dimensión finita si cualquier subconjunto tiene a lo sumo n vectores l.i.
  " " " infinita si $\exists$ $W \subset E$ que tenga p vectores l.i xa cualquier p natural

T_1: $\dim E = n$ → al - una base de n vectores

T_2: Cualquier base de un e.v. E, $\dim E = n$, tiene el mismo nº de vectores

- e.v. separable → dim infinita donde $\mathbb{B} = \{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$

SV Suma

U_1, U_2, suma de subespacios $U_1 + U_2 = \{|v\rangle = |u_1\rangle + |u_2\rangle \ / \ |u_1\rangle \in U_1 \wedge |u_2\rangle \in U_2\}$ es sev.

→ Suma es directa $U_1 \oplus U_2$ cuando todo vector de $U_1 + U_2$ se escribe de forma única como $|v_1\rangle + |v_2\rangle$.

- T: $U_1 + U_2$ es directa $\Leftrightarrow$ $U_1 \cap U_2 = \Theta = \{|0\rangle\}$
- U_1 y U_2 son complementarios si $E = U_1 \oplus U_2$

FÓRMULAS DE DIMENSIONES

1) $\dim U \leq E$ $(U \subset E)$, = sii $U = E$
2) F. de Grassmann: $\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim (U_1 \cap U_2)$
3) $\dim (U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4) U_1, U_2 complementarios
   $\dim E = n = \dim U_1 + \dim U_2$

V

$\{(E,+), (\mathbb{C},+,\cdot), (\cdot)\}$ un e.v. complejo

l.c.e. $E \times E \to \mathbb{C}$ $\langle v|w\rangle$

Producto interno o escalar si

1) Complejo conjugado $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^*$

2) Linealidad respecto de la suma de vectores $\langle u|v+w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle \leftrightarrow$

3) " " del producto por un escalar $\langle v|\alpha w\rangle = \alpha\langle v|w\rangle \leftrightarrow \langle \alpha v|w\rangle = \alpha^*\langle v|w\rangle$

4) Definido positivo $\langle v|v\rangle \geq 0 \wedge \langle v|v\rangle = 0 \iff |v\rangle = 0$

➡ E_pH: e.v. complejo donde se ha definido un producto interno

- $\langle v|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 0$
- $\langle u|v\rangle = \langle u|w\rangle \cdot \forall u \in E, \Rightarrow |v\rangle = |w\rangle$
- $\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i^* \cdot \beta_j \langle v_i|w_j\rangle$

$\sum |w|$

✗ Norma de un vector: (nº real no negativo)

$\|v\| = \oplus\sqrt{\langle v|v\rangle}$

- $\|v\| \geq 0 \wedge \|v\| = 0 \iff |v\rangle = 0$
- $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

✗ Desigualð de Schwarz

$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \wedge = \iff |w\rangle = \alpha \cdot |v\rangle$

✗ Desigualð de Minkowsky (triangular)

$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$(\mathbb{C}^n,+)(\mathbb{C}+\cdot)(\cdot)$

$\langle v|w\rangle = \sum v_i^* w_i$

$L^2_{\omega}(a,b)$

$\int v(x)^* w(x)\,dx$

Ortogonalið

- $|u\rangle \perp |v\rangle \iff \langle u|v\rangle = 0$
- W es ortogonal si vectores ortogonales $\to \langle v_i|v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$
  $\to \langle v_i|v_j\rangle = \|v_i\|^2 \cdot \delta_{ij}$
- $|u\rangle$ unitario si $\|u\| = 1$
- W es sistema ortonormal si $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$ (ortog + unitario)

Tma (dependencia lineal de vectores ortogonales)

- W familia ortogonal de vectores no nulos $\Rightarrow W$ es l.i.
- W, n vectores, " no nulos $\dim E = n \to W$ es una base ortogonal de E
- " " " ortonormales $\to$ " " " " ortonormal

Tma (componentes IBON)

- E, sistema ortonormal de vectores

$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i\rangle \to \alpha_i = \langle e_i|v\rangle \Rightarrow$ Proyección de $|v\rangle$ sobre E

Tma (producto escalar respecto de b.o.n)

$\mathbb{B} = \{|u_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ una b.o.n

$\hookrightarrow \langle v|w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \cdot w_i$ $(|v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i |u_i\rangle$

$w_i = \sum_{i=1}^{n} w_i |u_i\rangle$

Pol?

Tma de ortonormaliza de Gramm-Schmidt

$W=\{|v_i\rangle\}_{i=1}^{n}$ familia de vectores l.i., de E

$\Rightarrow \exists$ familia de vectores ortonormales $V=\{|u_i\rangle\}_{i=1}^{n}$, equivalente $\langle W\rangle=\langle V\rangle$

↳ $E\neq\emptyset$, $\dim E=n \to$ siempre $\exists$ una b.o.n. de E.

Receta:
$$\begin{cases} |u_1\rangle=\dfrac{1}{\|v_1\|}|v_1\rangle \\ |v'_i\rangle=|v_i\rangle-\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}\langle u_j|v_i\rangle\cdot|u_j\rangle \\ |u_i\rangle=\dfrac{1}{\|v'_i\|}\cdot|v'_i\rangle \end{cases}$$

Subespacios ortogonales

- $U_1 \perp U_2$ (subesp.) son ortogonales (subespacios) si todo vector de U_1 es $\perp$ a todo vector de U_2

Tma:
↳ U_1 y U_2 sub. ortogonales de E
$\Rightarrow U_1\cap U_2=\{|0\rangle\}\Rightarrow U_1\oplus U_2$

$(1,0,0) \xrightarrow{\text{s.o.s}} (0,1,0)$ ¿l.i.?

$\}_{U^\perp}$ $(0,1,0)(0,0,1)$

- $U\subset E \to$ subespacio ortogonal a U, $U^\perp=\{|v\rangle\in E / \langle v|u\rangle=0 \ \forall |u\rangle\in U\}$

Tma:
U s.v. de epH, $\dim E=n$, $U^\perp$ su subespacio ortogonal
$E=U\oplus U^\perp \to U^\perp$ es el complementario de U ⟿ complementario ortogonal de U

$\mathbb{B}_U+\mathbb{B}_{U^\perp}=\mathbb{B}_E$

Desarrollo de Fourier

$\{\cos kx, \operatorname{sen} kx, 1\}$ $k=1,\dots,+\infty$

$L^2(0,2\pi) \to \int f(x)^*\cdot g(x)\cdot dx=\langle f|g\rangle$ ($-\pi$, π)

$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx<+\infty$

$\int_0^{2\pi}$ sin cos $=0$
sin sin $=\delta_{kk'}\cdot\pi$
cos cos $=\delta_{kk'}\pi$
sen $=0$
cos $=0$
$dx=2\pi$

$|e_0\rangle=\dfrac{1}{\sqrt2\cdot\pi}$ $\Rightarrow$ base de $L^2[0,2\pi]$

$|e_k\rangle=\dfrac{1}{\sqrt\pi}\cos kx$; $|\epsilon_k\rangle=\dfrac{1}{\sqrt\pi}\cdot\sin kx$ $\Rightarrow \langle e_k|e_{k'}\rangle=\delta_{kk'}$ $\langle\epsilon_k|e_k\rangle=0$
$\langle\epsilon_k|\epsilon_{k'}\rangle=\delta_{kk'}$ $\langle e_0|e_0\rangle=1$

↳ $|v\rangle=\langle e_0|v\rangle\cdot|e_0\rangle+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\langle v|e_k\rangle|e_k\rangle+\langle v|\epsilon_k\rangle|\epsilon_k\rangle\right]$

Polinomios ortonormales

- P. de Legendre: $P_n(x)=\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{2^n\cdot n!}\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right)$ $\int_{-1}^{1}P_n(x)\cdot P_m(x)\cdot dx=\delta_{nm} \to L^2[-1,1]$ (cualq. func. como c. lineal)
- P. de Laguerre: $L_n(x)=\dfrac{e^{-x/2}}{n!}\left(e^x\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n\cdot e^{-x})\right)$ ... aunq converja, sigue siendo polinomio $L^2[0,+\infty]$
- P. de Hermite: $H_n(x)=\dfrac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}\cdot 2^{n/2}\cdot\sqrt{n!}}\cdot\left((-1)^n\cdot e^{x^2}\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\right)$ $L^2[-\infty,+\infty]$

5 1$^{\text{os}}$ de $\mathcal{L}$

$|e_1\rangle=\dfrac{1}{\sqrt2}$ $|e_2\rangle=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot x$ $|e_3\rangle=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{5}{2}}\cdot(-1+3x^2)$ $|e_4\rangle=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{2}}\cdot(-3+5x^2)$ $|e_5\rangle=\dfrac{3}{8\sqrt2}\cdot(3-30x^2+35x^4)$