Problemas de Mecánica II — Curso 2010/2011

1. Un péndulo doble coplanario está formado por dos barras ligeras y rígidas de longitud l_1 y l_2 a las cuales están unidas dos masas m_1 y m_2. Las dos barras están perfectamente articuladas entre ellas. Una de las barras está sujeta al techo y del extremo libre de la otra se ejerce una fuerza horizontal F.

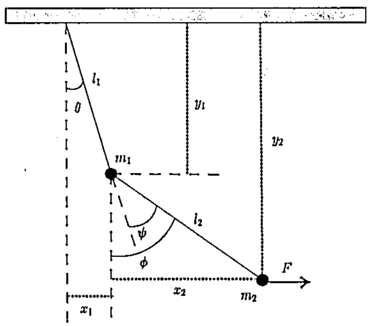
   (a) Cuántas coordenadas generalizadas independientes serán suficientes para caracterizar el sistema?

   (b) Del conjunto de variables (θ,ψ), (θ,ϕ), (ϕ,ψ), (θ,y_2), (x_1,x_2), (y_1,y_2), cuáles pueden servir de coordenadas generalizadas independientes?

   (c) Utilizando el método de trabajo virtual y (θ,ϕ) como coordenadas generalizadas, calcular la posición de equilibrio del péndulo doble.

   (d) Calcular las fuerzas generalizadas Q_θ y Q_ϕ.

   (e) Dar la expresión de la energía cinética en función de θ y ϕ. Escribir las ecuaciones de Lagrange para el caso en que $F=0$.

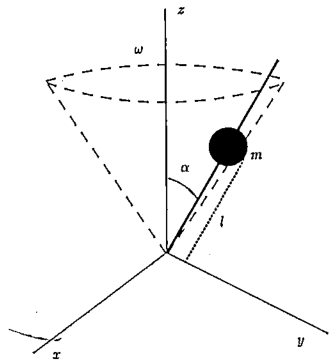


2. Considerar una cuenta que puede deslizarse sin rozamiento por un alambre. Dicho alambre está unido a un motor de forma que gira alrededor de un eje vertical a velocidad angular constante ω. El ángulo α entre el alambre y el eje vertical es fijo.

   (a) Identificar los grados de libertad del sistema.

   (b) Escoger coordenadas generalizadas adecuadas y escribir la Lagrangiana.

   (c) Encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange y resolverlas.



3. Considerar un aro que rueda por un plano inclinado que forma un ángulo θ respecto de la horizontal.

   (a) Identificar los grados de libertad del sistema.

   (b) Escoger coordenadas generalizadas y escribir la Lagrangiana.

   (c) Imponer la condición de rodadura sin deslizamiento con el método de los multiplicadores de Lagrange.

   (d) Escribir la ecuación de ligadura junto con las ecuaciones de Euler-Lagrange y solucionar el sistema. Determinar la aceleración, la fuerza de rozamiento y la velocidad del aro cuando alcance la base del plano.

4. Una partícula puntual de masa m se desliza sin rozamiento desde el punto superior de un aro circular de radio R. Con el método de los multiplicadores de Lagrange, determinar la reacción del aro sobre la partícular y el ángulo $\theta_{\max}$ en el que ésta se despegará.

5. La cicloide es una curva definida de forma paramétrica como

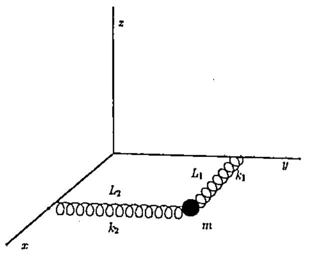
$$\begin{aligned} x(\theta) &= R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) &= R(1-\cos\theta) \end{aligned}$$

Considerar una partícula de masa m que se mueve sobre un arco de cicloide bajo los efectos de la gravedad.

(a) Hallar la Lagrangiana y las ecuaciones del movimiento.

(b) Verificar que la solución del péndulo simple (para amplitudes pequeñas) satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para este sistema. Interpretar el resultado.

6. Considerar un sistema de dos muelles de constantes k_1, k_2 y longitudes L_1, L_2 que forman un ángulo recto entre sí, con puntos de sujeción en paredes ortogonales. Una partícula de masa m se encuentra unida a ambos muelles. Estudiar el sistema con la mecánica de Lagrange y encontrar las ecuaciones del movimiento. Resolverlas en el caso especial en el que $k_1 = k_2$, $L_1 = L_2$, y la partícula parte del reposo desde un punto alejado A en la dirección de la mediatriz del ángulo que forman las paredes.



7. Considerar sistemas en los que la Lagrangiana pueda ser de la forma $L(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$.

(a) Aplicando el principio de mínima acción, encontrar las ecuaciones del movimiento para estos sistemas (considerar que tanto los puntos terminales q_i como las velocidades terminales $\dot{q}_i$ son fijas).

(b) Considerar el caso particular

$$L = -\frac{m}{2} q\ddot{q} - \frac{k}{2} q^2.$$

Según lo visto en el apartado anterior, encontrar las ecuaciones del movimiento.

8. Aplicando el cálculo de variaciones, verificar que la longitud mínima entre dos puntos en el plano es una recta. De forma similar, verificar que las ecuaciones geodésicas en una superfície esférica son circunferencias máximas.

9. Considerar dos medios ópticos con índices de refracción n_1, n_2. Aplicando cálculo de variaciones, demostrar que el principio de Fermat conduce a la ley de Snell.

10. Encontrar la forma que adopta un cable de densidad lineal uniforme ρ y longitud l suspendido por sus extremos desde dos puntos situados a la misma altura.

11. Una partícula de acero esférica de masa m y radio R se mueve bajo los efectos de la gravedad en un fluido con índice de viscosidad η. Sabiendo que la fuerza viscosa es proporcional a la velocidad (ley de Stokes), deducir la forma de la función de disipación. Integrar las ecuaciones del movimiento y demostrar que para tiempos suficientemente largos se alcanza un estado estacionario con velocidad terminal dada por $v = mg(6\pi R\eta)^{-1}$.

12. Encontrar las ecuaciones del movimiento para el sistema descrito por la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2 - q_3\left(\sqrt{q_1^2 + q_2^2} - l\right)$$

Encontrar q_3 en función de q_1, q_2 y la energía.

13. El sistema de una partícula en un campo electromagnético viene descrito por la Lagrangiana

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\mathrm{v}\cdot\mathrm{A}$$

Considerar el caso en el que tanto ϕ como A son independientes de la coordenada x (x es por lo tanto cíclica). Encontrar la cantidad conservada asociada a x.

14. Dos potenciales electromagnéticos (ϕ, A) y (ϕ', A') describen la misma física si están relacionados por una transformación de gauge:

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(x,t)}{\partial t} \\ \mathrm{A}' &= \mathrm{A} + \nabla\chi(x,t) \end{aligned}$$

→ revisar ej. teoría

Determinar cómo afecta una transformación de gauge a la Lagrangiana y discutir sus implicaciones físicas.

15. Considerar una partícula en un campo magnético constante $\mathrm{B} = (0, 0, B)$.

(a) Comprobar que dicho campo puede provenir de un potencial $\mathrm{A} = (-yB, 0, 0)$.

(b) Escribir la Lagrangiana e identificar las coordenadas cíclicas.

(c) Resolver el problema por cuadraturas, *i.e.*, expresar $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ en función de la energía y momentos conservados e integrar las ecuaciones. (Nota: probar el cambio de variable $\zeta = x + iy$). Cuánto vale la frecuencia de ciclotrón?

Finalmente, comprobar que el potencial $\mathrm{A} = (0, xB, 0)$ también genera el campo B. Demostrar que la Lagrangiana resultante difiere de la anterior por una derivada total.

16. El muon es una partícula emparentada con el electrón que se produce mayoritariamente por desintegración de piones en las capas altas de la atmósfera, a miles de Km sobre la superficie del mar. Imaginemos que a 9000 metros se detectan del orden de 10^8 muones. Sabiendo que el tiempo de vida medio del muon es $\tau_0 = 2.197$ μs y que su velocidad es $v = 0.9978c$, usar la ley de desintegración radiactiva

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

para estimar el número de muones que uno esperaría detectar a nivel del mar.

17. Otro de los experimentos que se llevaron a cabo para verificar la dilatación del tiempo consistió en observar el fenómeno en relojes dispuestos en aviones supersónicos. Considerar un caza que pueda volar de forma sostenida a 1 Km/s a una altura de 20 Km. Cuál es el retraso del reloj de a bordo cuando el caza completa una vuelta a la Tierra?

18. Una nave espacial (que puede viajar a $\beta = 0.8$) y su base de lanzamiento terrestre tienen emisores de pulsos electromagnéticos que funcionan a razón de un pulso por hora. Si el primer pulso se corresponde al despegue de la nave, determinar:

(a) El tiempo de recepción del primer fotón en ambos sistemas. Generalizar al fotón enésimo.

(b) En un diagrama espacio-tiempo, dibujar las lineas de mundo de la nave espacial y de los fotones, tanto los emitidos desde la Tierra como desde la nave.

19. Tres mellizas deciden separar sus vidas momentáneamente. La primera se deplaza a un punto situado a 1 año-luz de la Tierra. Llega al cabo de 2 años y permanece ahí medio año. Justo después inicia el camino de retorno y para a una estación espacial situada a medio año-luz de la Tierra. Llega ahí al cabo de un año. La segunda melliza permanece en la Tierra un año y luego coge un transbordador espacial con $\beta = 0.5$ hasta la misma estación espacial. Cuando ambas se encuentran regresan a la Tierra con el mismo transbordador. Determina cuál de las dos hermanas viajeras es más joven cuando se encuentran así como la diferencia de edad entre las tres hermanas en el reencuentro final. Plasma en un diagrama espacio-tiempo las andanzas de las tres hermanas.

20. Considerar una vara de un metro de longitud y dos observadores, Σ y Σ_1, uno en reposo con respecto a la vara y otro con velocidad relativa $\beta = 0.5$. Estudiar la contracción de longitudes analíticamente y gráficamente con la ayuda de un diagrama espacio-tiempo.

21. Dadas las transformaciones de Lorentz para un boost en la dirección del eje x:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

encontrar las ecuaciones de transformación para las velocidades. Determinar a continuación la velocidad de una partícula desde cuatro sistemas de referencia inerciales, Σ_1, Σ_2, Σ_3 y Σ_4 si un observador en Σ_1 ve la partícula con velocidad $v = \alpha c$, $-1 \leq \alpha \leq 1$ y las velocidades de Σ_2, Σ_3 y Σ_4 relativas a Σ_1 son, respectivamente, $v = \frac{c}{4}$, $v = \frac{c}{2}$ y $v = \frac{3c}{4}$.

22. Considerar una fuente emisora de pulsos de frecuencia ν_0 y una fuente receptora que se mueve con velocidad β formando un ángulo θ con respecto a la dirección de emisión de los pulsos. Estudiar el efecto Doppler, *i.e.*, encontrar la frecuencia recibida $\nu(\nu_0, \theta, \beta)$. Verificar que cuando emisor y receptor están alineados ($\theta = 0$) el resultado se reduce a

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

donde los signos superiores corresponden a cuando fuente y receptor se acercan y los signos inferiores a cuando se alejan. Verificar también que si fuente y receptor se mueven en direcciones perpendiculares, entonces

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$$

23. Un rayo de luz con longitud de onda λ_i incide sobre un espejo formando un ángulo θ_i con la normal. Si el espejo está moviéndose en la dirección de la normal con una velocidad $v = 0.6c$, determinar la longitud de la onda reflejada λ_f y el ángulo de reflexión θ_f.

24. Considerar un campo electromagnético genérico con potencial (ϕ, A). Encuentra las transformaciones de Lorentz para los campos eléctrico E y magnético B. Halla los valores de β que seleccionan sistemas de referencia donde sólo uno de los campos es no nulo.

25. Una partícula A se desintegra en dos partículas masivas B y C. Hallar las energías de los productos y el ángulo que forman tanto en el sistema centro de masa como en el sistema laboratorio (considerar $\beta_A = 0.6$). Si la partícula B se desintegra en dos partículas sin masa γ, encontrar el rango de energías posible para γ.

26. Considerar el proceso $A + B \to C + D$ en el sistema laboratorio (partícula B en reposo). Hallar la energía umbral para el proceso en ese sistema de referencia.

27. En el Tevatron en Fermilab se hacen colisionar pares de protones. Uno de los posibles procesos resultantes es la llamada disociación difractiva de los protones:

$$p_1 + p_2 \to (p_1 + n\pi) + (p_2 + m\pi)$$

Hallar la energía umbral de la famlia de procesos definida por (n, m) en el sistema laboratorio. Particularizar a los casos $(0,4)$, $(4,0)$ y $(4,4)$.

28. Una partícula de masa m se hace colisionar con una partícula de masa M inicialmente en reposo (sistema laboratorio). Si m es absorbida por M, calcula la energía en reposo y la velocidad de la partícula resultante en función de la velocidad inicial de m. Considera también el caso simétrico, *i.e.*, la partícula M absorbe m cuando ésta última está en reposo.

29. Un fotón es deflectado por un electrón en reposo (proceso de Compton). Calcular el ángulo de deflexión y velocidades, momentos y energías de las partículas finales.

30. Un fotón puede desintegrarse en un par electrón-positrón según la reacción

$$\gamma(+N) \to e^+ + e^-(+N)$$

donde N es un núcleo espectador. Demuestra que la presencia del núcleo es necesaria para preservar el cuadrimomento global de la reacción y halla la energía umbral del proceso.

31. Dados los siguientes Lagrangianos

$$L_1 = \dot{q}_1^2 + \frac{\dot{q}_2^2}{\mu_1 + \mu_2 q_1^2} + \mu_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mu_4 q_1^2; \qquad L_2 = \alpha \dot{q}_1 q_2 + \beta q_1 q_2$$

hallar la Hamiltoniana para ambos y escribir las ecuaciones de Hamilton. Resolverlas para L_2 y verificar que la solución es la misma que resulta de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Qué cantidades se conservan?

32. Escribir la Hamiltoniana y hallar las ecuaciones de Hamilton para los problemas 1 a 5.

33. La Hamiltoniana $H(q,p,t)$ se construye como la transformada de Legendre de la Lagrangiana $L(q,\dot{q},t)$ con respecto a $\dot{q}$. Construir la función $K(\dot{q},\dot{p},t)$ con una transformada de Legendre apropiada y determinar cuáles serían las ecuaciones del movimiento resultantes.

34. Considerar la transformación

$$\begin{cases} Q = \log\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right) \; ; \\ P = 2\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\sin p \; ; \end{cases}$$

Decidir si es canónica y hallar su función generatriz $F_3(Q,p)$.

35. Mediante los corchetes de Poisson, decidir si las transformaciones siguientes son o no canónicas:

$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{\sin p}{q}\right) \; ; \\ P = q \cot p \; ; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = \arctan \dfrac{\alpha q}{p} \; ; \\ P = \dfrac{\alpha q^2}{2}\left(1 + \dfrac{p^2}{\alpha^2 q^2}\right) \; ; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = q^\alpha \cos\beta p \; ; \\ P = q^\alpha \sin\beta p \; ; \end{cases}$$

36. Encontrar para qué valores de α, β y λ las transformaciones siguientes

$$\begin{cases} Q = \alpha\dfrac{p}{q} \; ; \\ P = \beta q^2 \; ; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q = p + i\lambda q \; ; \\ P = \dfrac{p - i\lambda q}{2i\lambda} \; ; \end{cases}$$

son canónicas y hallar una función generatriz. Resolver con ambas el oscilador armónico unidimensional.

37. Escribir la Hamiltoniana para un cuerpo en caída libre. Encontrar la transformación canónica que lleva a $H' = P$ usando una función generatriz de tipo F_4.

38. Encontrar la función generatriz para la transformación canónica:

$$\begin{aligned} q &= Q + \frac{P}{m}t \\ p &= P \end{aligned}$$

Si la Hamiltoniana del sistema viene dada por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

encontrar la Hamiltoniana $H'(Q,P)$. Particularizando al caso $V(q) = -q$, resolver las ecuaciones del movimiento para Q, P y a continuación para q, p.

39. Dada una función generatriz infinitesimal $G(q,P) = q^2 P$ para un sistema unidimensional, determinar la forma que debe tener la Hamiltoniana $H(q,p)$ para que la transformación canónica sea una simetría.

40. Imaginemos una transformación de coordenadas de la forma $Q(q,p,t) = g(q,t)$. Determina la forma de $P(q,p)$ para que dicha transformación sea canónica. Considera a continuación la transformación infinitesimal

$$\begin{aligned} Q &= q + \epsilon q^3 \\ P &= p - 3\epsilon q^2 p \end{aligned}$$

y en base a lo discutido anteriormente, razona si es canónica. En tal caso, halla la función generatriz infinitesimal asociada. Discute para qué tipo de Hamiltoniana la transformación es una simetría del sistema.

41. Dado un sistema descrito por la Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2 - q^{-2}}{2}$$

demostrar que $D = \dfrac{pq}{2} - Ht$ es una constante del movimiento.

42. Dado el sistema descrito por

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - \lambda q_1^2 + \mu q_2^2$$

demostrar que

$$K_1 = \frac{p_1 - \lambda q_1}{q_2}; \qquad K_2 = q_1 q_2$$

son constantes del movimiento. A través de los corchetes de Poisson o por otros medios, establecer si hay alguna otra constante independiente.

43. Considerar el movimiento de una partícula en tres dimensiones. Verificar que si $f(r^2, p^2, r \cdot p)$ y $\mathrm{F} = f_1 \mathrm{r} + f_2 \mathrm{p} + f_3 \mathrm{r} \wedge \mathrm{p}$, entonces

$$[f, \mathrm{L}] = 0; \qquad [F_i, L_j] = \epsilon_{ijk} F_k$$

44. Dado un sistema descrito por la Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda m t q$$

resolver el problema mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi con las condiciones iniciales $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $p_0 = m v_0$. (Nota: Utilizar la función de prueba $S(q,t) = f(t)q + g(t)$.)

45. Un sistema de un grado de libertad viene descrito por el Hamiltoniano

Típico examen

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Estudiar el espacio de fases marcando los puntos elípticos, hiperbólicos y separatrices para los siguientes potenciales:

(a) $V(q) = \lambda_0 \left(1 - \frac{\mu}{q}\right)^2$

(b) $V(q) = e^{-q}(-q^3 + q^2 + 3q - 1)$

(c) $V(q) = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{q^2} & q \geq a > 0 \\ \infty & q < a \end{cases}$

(d) $V(q) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2}(q+a)^2 & q < a \\ \dfrac{\lambda}{2}(q-a)^2 & q \geq a \end{cases}$

(e) $V(q) = \dfrac{q}{q^2 + a^2}$

(f) $V(q) = \dfrac{q^2 e^{-\lambda\left(\frac{q}{a}\right)^2}}{q^2 + a^2}$

Indicar el intervalo de energía donde puede haber movimientos vibracionales.

46. Una partícula se mueve bajo los efectos de la gravedad a lo largo de una curva definida por

$$y(x) = \Lambda_0 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda_0}$$

(a) Escribir la Lagrangiana y hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange.

(b) Hallar la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton.

(c) Estudiar la estructura del espacio de fases, localizando puntos de retorno, puntos de equilibrio y separatrices.

47. Una partícula se mueve en una dimensión bajo un potencial

$$V(x) = \lambda_0 \sin^{-2}\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Hallar una expresión integral para la función característica de Hamilton. Justificar que el sistema puede describirse mediante variables acción-ángulo y hallar la frecuencia de oscilación.

en Kepler – Goldstein

$\sqrt{A - \frac{B}{\sin^2 x}}$

48. Una partícula se mueve en una cicloide:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= R(\theta + \sin\theta) \\ y(\theta) &= R(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

bajo los efectos de la gravedad. Formula el problema en variables acción-ángulo y halla la frecuencia de oscilación.

$\int \sqrt{(1+\cos\theta)(A - B(1-\cos\theta))}$

$\theta/2$

$\int \cos\frac{\theta}{2} \sqrt{A - B\sin^2\frac{\theta}{2}}$

Schaum

Gradshteyn

49. Considerar dos sistemas de un grado de libertad descritos por

$$H_1 = \frac{p^2}{9q^2} + q^2; \qquad H_2 = q^2 p^2 + \log^2 q, \quad (q > 0);$$

Para cada uno de ellos:

(a) Encontrar los puntos de retorno.

(b) Hallar la acción de las trayectorias periódicas y la frecuencia del movimiento.

(c) Resolver la ecuación característica de Hamilton-Jacobi y encontrar $q(t)$, $p(t)$.

(d) Expresar la energía en función de las variables acción-ángulo.