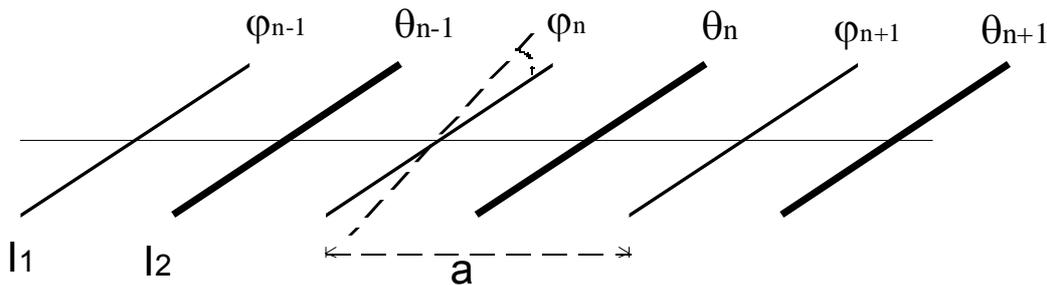


PRACTICAS DE ESTADO SÓLIDO: PRACTICA Nº 2
VIBRACIONES DE UNA CADENA LINEAL
MODOS ACÚSTICOS Y ÓPTICOS

1.- INTRODUCCIÓN

Las vibraciones de los átomos en una red cristalina pueden, en determinadas condiciones, asimilarse a las vibraciones de una serie de osciladores armónicos acoplados. Ello es debido a que, en sus posiciones de equilibrio, la energía de la red es mínima, por lo que las variaciones de energía frente a pequeños desplazamientos serán siempre cuadráticas respecto al desplazamiento y, por tanto, fuerzas recuperadoras dependen linealmente del desplazamiento. Así, para estudiar las vibraciones de una red cristalina, sustituimos los átomos por masas puntuales unidas por resortes caracterizados por una constante elástica. Es la que se llama la aproximación del **crystal armónico**. Una cadena lineal de osciladores acoplados, con parámetro de red a , sería el modelo más sencillo. Si se alternan dos tipos de átomos, de masas diferentes M y m , se podrán observar modos acústicos y ópticos.

En esta práctica, el sistema de osciladores acoplados será una serie de varillas transversales ligadas a un eje elástico de acero. Se alternan varillas de bronce y aluminio, de la misma longitud y diámetro. En las vibraciones que vamos a estudiar las varillas giran respecto al eje y la fuerza recuperadora está generada por la torsión del hilo. La coordenada será el ángulo de giro de cada varilla.



Si llamamos τ a la constante de torsión del eje de acero, las ecuaciones del movimiento serían formalmente idénticas a las de una cadena de átomos unidos por resortes, salvo que los momentos de inercia aparecen en lugar de las masas y los ángulos de giro en lugar de los desplazamientos:

$$I_1 \frac{d^2 \varphi_n}{dt^2} = -\tau(2\varphi_n - \theta_n - \theta_{n-1}) \quad I_2 \frac{d^2 \theta_n}{dt^2} = -\tau(2\theta_n - \varphi_n - \varphi_{n+1}) \quad (1)$$

Dado que buscamos soluciones que se propaguen como ondas armónicas escribimos:

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} \quad \theta_n = \theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} \quad (2)$$

donde k es el vector de ondas ($2\pi/\lambda$) y φ_0, θ_0 las amplitudes de vibración de ambos tipos de varilla (na es, obviamente, la coordenada de la varilla n , medida a lo largo de la cadena). Sustituyendo en la ecuación 1, obtenemos:

$$\begin{aligned} -I_1 \omega^2 \varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} &= -2\tau \varphi_0 e^{inak} e^{-i\omega t} + \tau \theta_0 (1 + e^{-ika}) e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} \\ -I_2 \omega^2 \theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} &= -2\tau \theta_0 e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} + \tau \varphi_0 (1 + e^{-ika}) e^{i(n+\frac{1}{2})ak} e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

Eliminando las exponenciales que aparecen en ambos términos y reagrupando:

$$(2\tau - I_1\omega^2)\varphi_0 - \tau(1 + e^{-ika})e^{\frac{ika}{2}}\theta_0 = 0$$

$$\tau(1 + e^{ika})e^{-\frac{ika}{2}}\varphi_0 - (2\tau - I_2\omega^2)\theta_0 = 0$$

Dicho sistema homogéneo solo tiene solución si se anula el determinante:

$$(2\tau - I_1\omega^2)(2\tau - I_2\omega^2) = \tau^2(1 + e^{-ika})(1 + e^{ika})$$

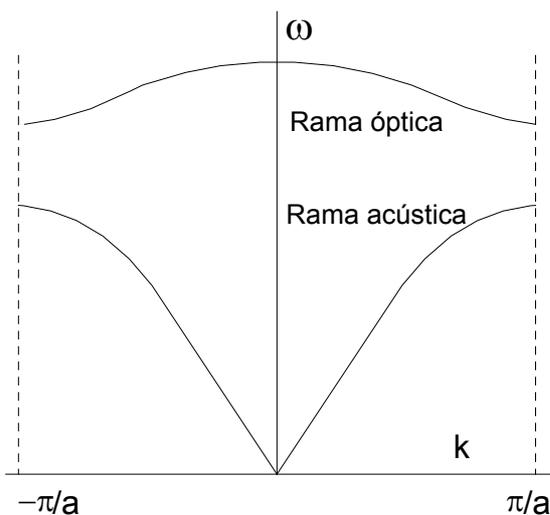
Al reagrupar términos obtenemos una ecuación de segundo grado en ω^2 :

$$I_1I_2\omega^4 - 2\tau(I_1 + I_2)\omega^2 + 2\tau^2(1 - \cos ka) = 0$$

cuya solución indica cómo las frecuencias de vibración dependen del vector de ondas a través de las siguientes **relaciones de dispersión**:

$$\omega^2 = \tau \frac{I_1 + I_2}{I_1I_2} \pm \sqrt{\left(\tau \frac{I_1 + I_2}{I_1I_2}\right)^2 - 2\frac{\tau^2}{I_1I_2}(1 - \cos ka)} = \frac{\tau}{I_r} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau}{I_r}\right)^2 - 2\frac{\tau^2}{I_1I_2}(1 - \cos ka)} \quad (4)$$

donde hemos definido un momento de inercia reducido de las dos varillas $I_r = I_1I_2/(I_1 + I_2)$. Los posibles modos de vibración de la cadena lineal de átomos se clasifican, pues, en dos grandes grupos, correspondientes a los signos + y - en la solución encontrada. La figura muestra la relación de dispersión para ambas soluciones.



Para ver en que consiste la diferencia entre ellos, estudiemos lo que ocurre para $k \rightarrow 0$, es decir, para longitudes de onda mucho más grandes que las distancias interatómicas:

$$\omega^2 = \frac{\tau}{I_r} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{I_r^2}{I_1I_2} k^2 a^2} \right)$$

$$\omega_+^2 = \frac{\tau}{I_r} \left(2 - \frac{I_r^2}{2I_1I_2} k^2 a^2 \right) \approx \frac{\tau}{I_r}$$

$$\omega_-^2 = \frac{\tau}{2(I_1 + I_2)} k^2 a^2 \quad (5)$$

Vemos que la rama correspondiente a la solución ω_- corresponde a un tipo de ondas cuya frecuencia aumenta linealmente con el vector de ondas, para longitudes de onda largas, es decir, esta solución corresponde a las ondas sonoras, de ahí que se le llame rama acústica. La velocidad de propagación de dichas ondas sería

$$v_s = \sqrt{\frac{\tau a^2}{2(I_1 + I_2)}}$$

Hay que señalar que existe una frecuencia máxima, por encima de la cual no existen modos de vibración acústicos. Esa frecuencia corresponde a $k = \pi/a$ es decir, una longitud de onda $2a$. Obviamente, la longitud de onda más corta que puede propagarse en la red corresponde al modo de vibración en que las varillas de dos celdas contiguas vibran en oposición de fase.

La rama descrita por ω_+ corresponde a ondas cuya frecuencia tiende a un valor constante para longitudes de onda largas, valor que depende del momento de inercia reducido y de la constante de torsión del eje. Sería la frecuencia de vibración de dos varillas de momentos I_1 e I_2 unidas por un eje de constante 2τ . Es la rama equivalente a lo que en un sólido se llama rama óptica, debido a que estos modos de vibración interactúan fuertemente con la radiación infrarroja lejana. Es fácil ver que para k tendiendo a cero, todas las varillas de cada tipo vibran en fase y en cada celda, las dos varillas vibrarían en contrafase, con amplitudes relativas dadas por $\varphi_0 I_1 + \theta_0 I_2 = 0$. Entre el borde de la rama acústica y el de la rama óptica existe un intervalo de frecuencia en el que no hay modos permitidos.

Los valores posibles del vector de ondas se determinan imponiendo una condición de contorno. Usualmente, en física de los sólidos, se imponen las condiciones de contorno cíclicas, es decir, si tenemos en total N átomos, imponemos $u_n = u_{n+N}$ lo que equivalen a suponer que la cadena se cierra sobre sí misma. En ese caso, la ecuación 1 conduce inmediatamente a $k = 2\pi m/L = (2\pi/a)(m/N)$, donde $L = Na$ es la longitud de la cadena. En nuestro modelo los extremos están fijos, por lo que la condición sería: $\exp(ikNa) = 0$, es decir, $k = (\pi/a)(2m+1)/N$, o, en función de la longitud de onda: $(2m+1)(\pi/2) = L/\lambda$. La diferencia está en que, en las condiciones cíclicas habría ondas que se propagan mientras que, en las condiciones de contorno con extremos fijos, las ondas son estacionarias.

2.- MATERIAL DISPONIBLE

- Un bastidor con 15 varillas de aluminio y 15 de bronce, alternadas, ligadas a un eje de acero, con distancia media entre ellas de 31 mm. La longitud de las varillas es 30 cm y su diámetro 8 mm. Densidad del Al: 2.7 gr/cm^3 . Densidad del bronce: 8.5 gr/cm^3 .
- Un sistema de excitación de los modos de la red formado por:
 - Un vibrador
 - Un oscilador de baja frecuencia
- Sistema de detección de vibraciones:
 - Imanes que se pueden fijar en el extremo de las barras.
 - Bobina de detección
 - Osciloscopio

Al acercarse la bobina a un imán en vibración se generará en ella una fuerza electromotriz inducida que puede observarse en el osciloscopio, comparada con la frecuencia de excitación.

4.- MEDIDAS A REALIZAR

El objetivo de la práctica es ilustrar el modelo del cristal armónico, mediante una red de osciladores acoplados, buscando la relación de dispersión de los modos de vibración. Para ello, hemos de buscar esos modos excitándolos mediante oscilaciones forzadas. La frecuencia de excitación viene dada por el contador digital del oscilador.

a) Detección de modos:

Para detectar los modos hay que variar la frecuencia a partir de 1 Hz, procurando que la amplitud de vibración del vibrador sea pequeña. Los modos de baja frecuencia pueden observarse a simple vista, cuando se forme una onda estacionaria. Se anotará la frecuencia correspondiente y el número de vientres N_v observado en la onda estacionaria. La longitud de onda del modo será $\lambda = 2L/N_v$, donde L es la longitud del eje.

Para frecuencias superiores a 10 Hz, puede utilizarse el osciloscopio para detectar los modos. Los imanes y la bobina permiten tanto fijar con precisión la frecuencia del modo

(frecuencia a la que se obtiene un máximo de la fem inducida), como la longitud de onda, al observar si vibran o no en fase determinadas varillas.

Verificar la existencia de una frecuencia de corte, comprobando que, por encima de cierta frecuencia solo se excitan modos evanescentes (es decir, modos que solo excitan las varillas próximas a la que está siendo forzada a vibrar), tanto en la rama acústica como en la rama óptica. En la rama óptica solo será posible identificar los modos de centro y borde de zona, acercándose desde frecuencias de modos evanescentes. Para el modo óptico de borde de zona hay que ir aumentando desde la zona de frecuencias entre ambas ramas. Para el modo óptico de centro de zona hay que ir disminuyendo la frecuencia a partir de la de un modo evanescente de alta frecuencia. En ambos casos se observará como, al acercarse al modo buscado, va aumentando el número de varillas que vibran.

b) Estructura de vibración:

Determinar qué varillas vibran en fase y en contrafase en los modos acústico de borde de zona (dos celdas unidad) y óptico de centro de zona (1 celda unidad).

OPCIONAL

c) : Curva de resonancia:

Para uno o dos de los modos que puedan observarse mediante la bobina, determinar la amplitud de vibración en función de la frecuencia.

5.- INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

A partir de la tabla frecuencia/longitud de onda pasar a una tabla frecuencia/vector de ondas ($k=2\pi/\lambda$) y representar las relaciones $\omega(k)$ para ambas ramas.

Realizar un ajuste mediante las ecuaciones 4 y determinar la constante de torsión del eje y la velocidad de propagación de los modos acústicos.

Representar el espectro amplitud/frecuencia obtenido en el punto 4-b e interpretarlo mediante las ecuaciones de las oscilaciones forzadas de un oscilador armónico. Recordemos la ecuación del oscilador armónico amortiguado, con una frecuencia ω_0 y una constante de amortiguamiento γ , sometido a una fuerza armónica de amplitud F_0 y frecuencia ω .

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - m\gamma \frac{dx}{dt} + F_0 e^{-i\omega t}$$

Si buscamos soluciones armónicas $x(t)=x_0 \exp(-i\omega t)$, es fácil ver que la amplitud de vibración x_0 vendrá dada por:

La expresión compleja determina el módulo y el desfase respecto a la fuerza. El módulo será:

$$|x_0| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$

expresión que tiene un máximo para $\omega=\omega_0$, tanto más pronunciado cuanto menor es el amortiguamiento γ . En cuanto al desfase, se obtiene:

$$\text{tg } \phi = -\frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

y es fácil ver que, al pasar por la resonancia, habrá un cambio de fase de 180°.

2) Representación gráfica: representar los modos de vibración en un diagrama $v(k)$ o $\omega(k)$, en la primera zona de Brillouin (pegar la gráfica realizada con el programa gráfico que se prefiera)

3) Calcular la "velocidad del sonido" del sistema de varillas a partir de la relación $v(k)$ o $\omega(k)$ en la zona lineal (modos de orden bajo):

4) Modos de vibración ópticos

4-a) Frecuencias

	Frecuencia (Hz)	λ ($2L/N$)	k ($2\pi/\lambda$)
Centro de Zona			
Borde de zona			

4-b) Dibujar la estructura de vibración de los modos acústicos y ópticos en centro de zona y en borde de zona

OPCIONAL

5) Determinar las curvas de excitación amplitud-frecuencia para varios modos (seleccionar varios modos de frecuencias comprendidas entre 8 y 20 Hz, aproximadamente)

Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo4		Modo 5	
v (hz)	A								

Nota: La numeracion de modos en la tabla se refiere únicamente al orden en que se miden en este apartado, no al orden del modo (número de vientres) definido en el apartado 1.

6) Representación gráfica: representar las curvas amplitud-frecuencia medidas en el apartado anterior (pegar la gráfica realizada con el programa gráfico que se prefiera)

7) Determinar, mediante un ajuste a una forma de pico (lorenziana o gaussiana) o bien gráficamente, la anchura de cada una de las curvas de excitación medidas en el apartado anterior.

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	
Frecuencia						
Anchura						

¿Existe alguna correlación entre la frecuencia del modo y la anchura de su curva de respuesta amplitud-frecuencia?

LABORATORIO DE ESTADO SÓLIDO Y SEMICONDUCTORES
CUESTIONARIO PARA LA PRÁCTICA 2

Nombre: FERNANDO HUESO GONZÁLEZ

Grupo: B L 2

1) Modos de vibración acústicos

$L = (31 \pm 1) \text{ mm} \times 15 \times 2 = 930 \text{ mm} = 93 \text{ cm}$

Orden (N) (nº de vientres)	Frecuencia (Hz) $\pm 0,10$	λ (2L/N) (cm)	k (2π/λ) (m ⁻¹)
1	2,10	186 ± 6	3,38 ± 0,11
2	4,24	93 ± 3	6,8 ± 0,2
3	6,30	62 ± 2	10,1 ± 0,3
4	8,40	46,5 ± 1,5	13,5 ± 0,4
5	10,50	37,2 ± 1,2	16,9 ± 0,5
6	12,55	31,0 ± 1,0	20,3 ± 0,7
7	14,45	26,6 ± 0,9	23,6 ± 0,8
8	16,30	23,3 ± 0,8	27,0 ± 0,9
9	17,90	20,7 ± 0,7	30,4 ± 1,0
10	19,30	18,6 ± 0,6	33,8 ± 1,1
11	20,75	16,9 ± 0,5	37,2 ± 1,2
12	22,00	15,5 ± 0,5	40,5 ± 1,3
13	22,95	14,3 ± 0,5	43,9 ± 1,4
14	23,40	13,3 ± 0,4	47,3 ± 1,5
15	24,0	12,4 ± 0,4	50,7 ± 1,6
		$L = 2a$	

$a = (62 \pm 2) \text{ mm}$

Aunque la longitud total sería $L = 31 \times 31 \text{ cm}$, disminuimos la parte a la izquierda del excitador conscientemente por que es solo media celda unidad, con lo que se descompensarían los resultados. Además no podemos contar vientres o nudos en esa zona, con lo que lo consideramos un efecto de borde que no tenemos en cuenta.

centro de zona
↓
idealmente
 $L = \infty$,
 $\lambda = \infty$,
 $K = 0$

borde de zona
↓
al quieto

La moviéndose $\rightarrow \lambda = 2a$

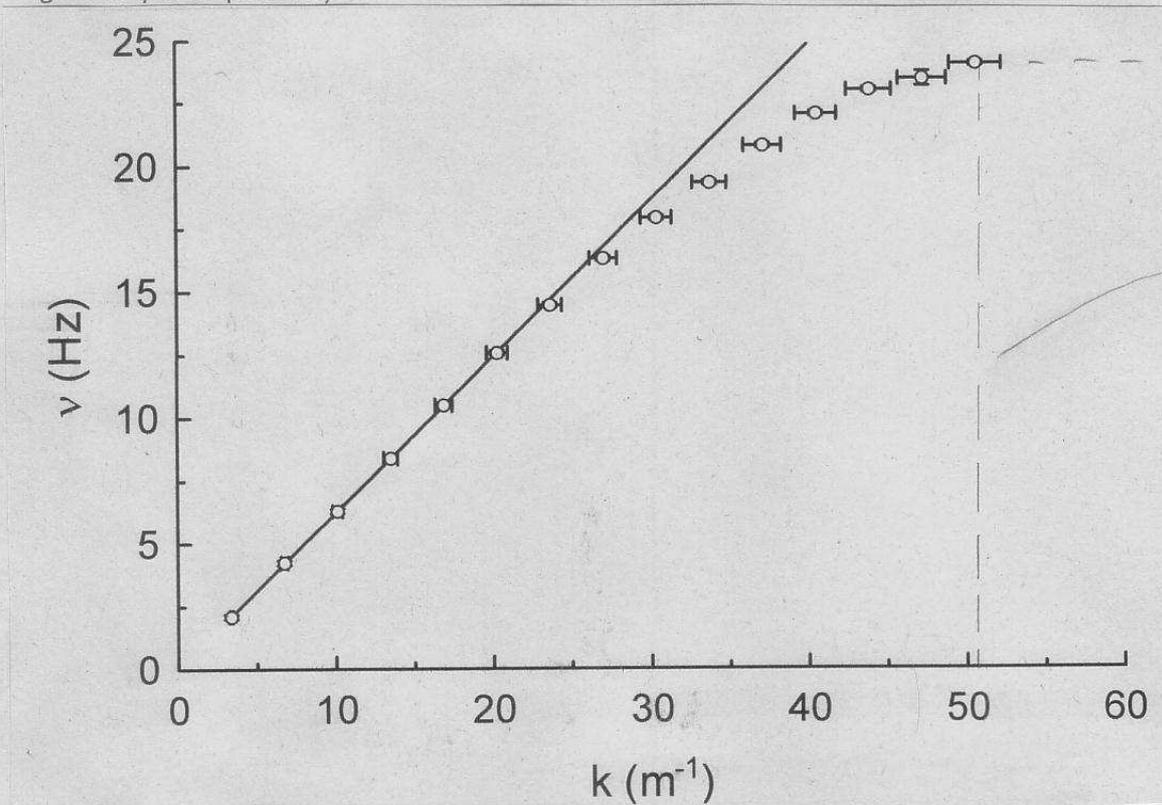
Si no: $\frac{2L}{\lambda} \neq 2a$
(borde de zona)

Lo pero se acoplan otros modos que no son de torsión, lo que puede ser una fuente de error a tener en cuenta.

Estimo el error de la frecuencia en 0,10 Hz, aproximadamente el intervalo en el que no se aprecian variaciones significativas de la condición de resonancia (máxima amplitud en osciloscopio).

solo modos acústicos

2) Representación gráfica. representar los modos de vibración en un diagrama $v(k)$ o $\omega(k)$, en la primera zona de Brillouin (pegar la gráfica realizada con el programa gráfico que se prefiera)



Frecuencia de corte

Borde de zona:
 $k = \frac{1}{2a}$

I (varilla)
 $= \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$

3) Calcular la "velocidad del sonido" del sistema de varillas a partir de la relación $v(k)$ o $\omega(k)$ en la zona lineal (modos de orden bajo): \rightarrow Realizamos un ajuste para los 6 primeros modos.

$v = v_0 + \frac{v}{2\pi} k$ \rightarrow $r = 0,99999$
 $v_0 = 0,04 \pm 0,04 \text{ Hz}$ \rightarrow compatible con cero.
 $v = 3,686 \pm 0,030 \text{ m/s}$

Velocidad de propagación en el sistema de varillas

4) Modos de vibración ópticos \rightarrow Constante de torsión $Z = \frac{v^2 \cdot 2(I_1 + I_2)}{a^2} = (10,0 \pm 0,9) \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ (guion ec. 4)

4-a) Frecuencias

	Frecuencia (Hz)	λ (2L/N) (cm)	k (2 π / λ) (m ⁻¹)
Centro de Zona	45,30 \pm 0,10	186 \pm 6 = 2L	3,38 \pm 0,11
Borde de zona	39,00 \pm 0,10	12,4 \pm 0,4 = 2a	50,7 \pm 1,6

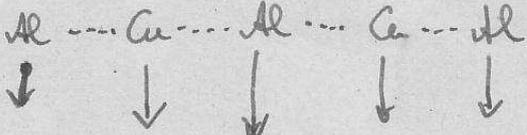
Ambas frecuencias de corte

idealmente, $L = \infty$
 $\lambda = \infty, k = 0$

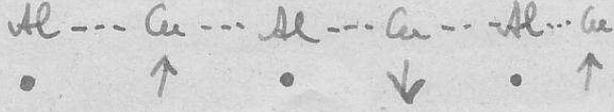
4-b) Dibujar la estructura de vibración de los modos acústicos y ópticos en centro de zona y en borde de zona

Modos acústicos

• Centro de zona: \rightarrow lo vemos para $N=1$

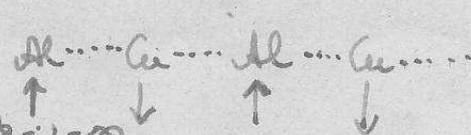


• Borde de zona:

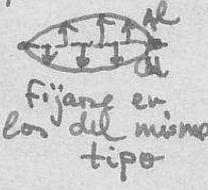
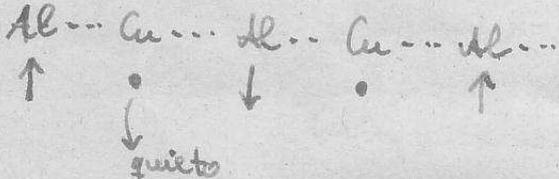


Modos ópticos:

• Centro de zona \rightarrow vemos para $N=1$



• Borde de zona:



OPCIONAL

5) Determinar las curvas de excitación amplitud-frecuencia para varios modos (seleccionar varios modos de frecuencias comprendidas entre 8 y 20 Hz, aproximadamente)

de pico a pico

$x \pm 2mV$

Hago un espaciado constante en amplitud en lugar de en frecuencia para representar mejor el pico.

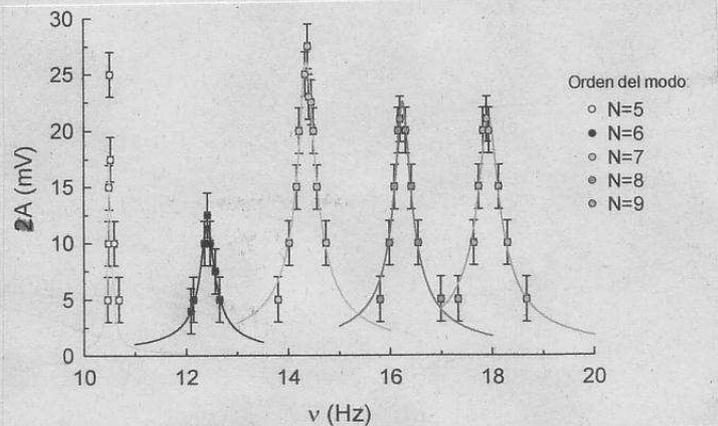
Modo 1		Modo 2		Modo 3		Modo 4		Modo 5	
v (Hz)	A*								
10,46	5	12,09	4	13,80	5	15,80	5	17,33	5
10,48	10	12,14	5	14,02	10	15,99	10	17,64	10
10,49	15	12,36	10	14,17	15	16,09	15	17,74	15
10,51	25	12,42	13	14,22	20	16,16	20	17,83	20
10,52	18	12,47	10	14,34	25	16,20	21	17,90	21
10,59	10	12,57	8	14,39	28	16,31	20	17,94	20
10,68	5	12,65	5	14,41	23	16,42	15	18,13	15
				14,46	22	16,55	10	18,30	10
				14,50	20	16,93	5	18,67	5
				14,57	15				
				14,74	10				

±0,05

Modo 1 → Orden 5
 " 2 → " 6
 " 3 → " 7
 " 4 → " 8
 " 5 → " 9

Nota: La numeración de modos en la tabla se refiere únicamente al orden en que se miden en este apartado, no al orden del modo (número de vientres) definido en el apartado 1.

6) Representación gráfica: representar las curvas amplitud-frecuencia medidas en el apartado anterior (pegar la gráfica realizada con el programa gráfico que se prefiera)



→ Curva de ajuste:

$$A = \frac{cte}{\sqrt{(\nu_r^2 - \nu)^2 + (\Delta\nu)^2}}$$
 frecuencia de resonancia anchura (amortiguamiento)

7) Determinar, mediante un ajuste a una forma de pico (lorenziana o gaussiana) o bien gráficamente, la anchura de cada una de las curvas de excitación medidas en el apartado anterior. Ajusto a una lorenciana y obtengo la frecuencia de resonancia y la anchura como parámetros, que figuran aquí:

	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Frecuencia resonante (Hz)	10,508 ± 0,004	12,418 ± 0,011	14,363 ± 0,009	16,252 ± 0,009	17,935 ± 0,015
Anchura Δν (Hz)	0,028 ± 0,010	0,24 ± 0,02	0,29 ± 0,02	0,28 ± 0,03	0,37 ± 0,03

Coefficiente de correlación

r : 0,92 ; 0,986 ; 0,986 ; 0,989 ; 0,987

¿Existe alguna correlación entre la frecuencia del modo y la anchura de su curva de respuesta amplitud-frecuencia?

Se observa una tendencia de aumento de la anchura de la curva cuanto mayor es la frecuencia de resonancia, es decir, para modos de orden mayor. En algunos casos hay desviaciones respecto a esta tendencia debido a los errores experimentales de medida (mucho ruido en la señal). También hay que señalar como fuente de error, por ejemplo en el modo N=5, que se acoplaba en el pico de la curva modos que no eran de torsión, con lo que se distorsiona la curva.

La explicación es que cuanto mayor es la frecuencia de vibración mecánica, mayor es el amortiguamiento del sistema, más pierde energía el pico y más ancha es la curva. *SIGUE DETRÁS*

Otros comentarios

Si suponemos que el sistema se comporta linealmente y de manera ideal (solo modos de torsión), ν_r y $\Delta\nu$ están relacionados por el factor de calidad: $Q = \frac{\nu_r}{\Delta\nu}$. Para los 5 ajustes se obtiene:

Modo	1	2	3	4	5
Q	370 ± 130	53 ± 6	49 ± 4	58 ± 6	49 ± 4

Por tanto, para los valores 2-5 se obtienen resultados compatibles (Q fijo) dentro de la incertidumbre experimental. El primer valor se desvía bastante por lo ya comentado del excesivo pico en la curva por entrar en juego otros modos de oscilación.

A partir de la fórmula $Q = \frac{\nu_r}{\Delta\nu}$ y los resultados 2-5 (Q \approx cte) es fácil confirmar la observación de que a mayor frecuencia de resonancia (ν_r), mayor anchura de la curva ($\Delta\nu$), de manera que Q sea constante en todos los modos acústicos, pues ése ha sido nuestro resultado ^{aproximadamente} en los picos 2-5. No obstante, ésta es una observación a posteriori, podría ser una casualidad al haber elegido un intervalo de frecuencias pequeño. En principio no hay ninguna ley que obligue a Q a ser constante en los diferentes picos (por ejemplo el primer valor es muy distinto). Por tanto, concluimos que se observa una mayor anchura a mayor frecuencia de resonancia y, aparte, un factor de calidad similar en algunos picos. No?

