

Problema 4.5 – Electromagnetismo (Profesor: Benito Gimeno)

Con cuatro láminas conductoras muy largas se forma un prisma de sección rectangular de lados a y b . Determinar el potencial dentro del prisma cuando dos caras opuestas se conectan a tierra y las otras dos a potenciales $\pm V_0$.

La solución del potencial en la región $-a/2 < x < a/2$, $-b/2 < y < b/2$ es:

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V(-1)^m}{\pi(2m+1)\sinh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)\frac{b}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)y\right)$$

Haremos una representación numérica para el caso en que:

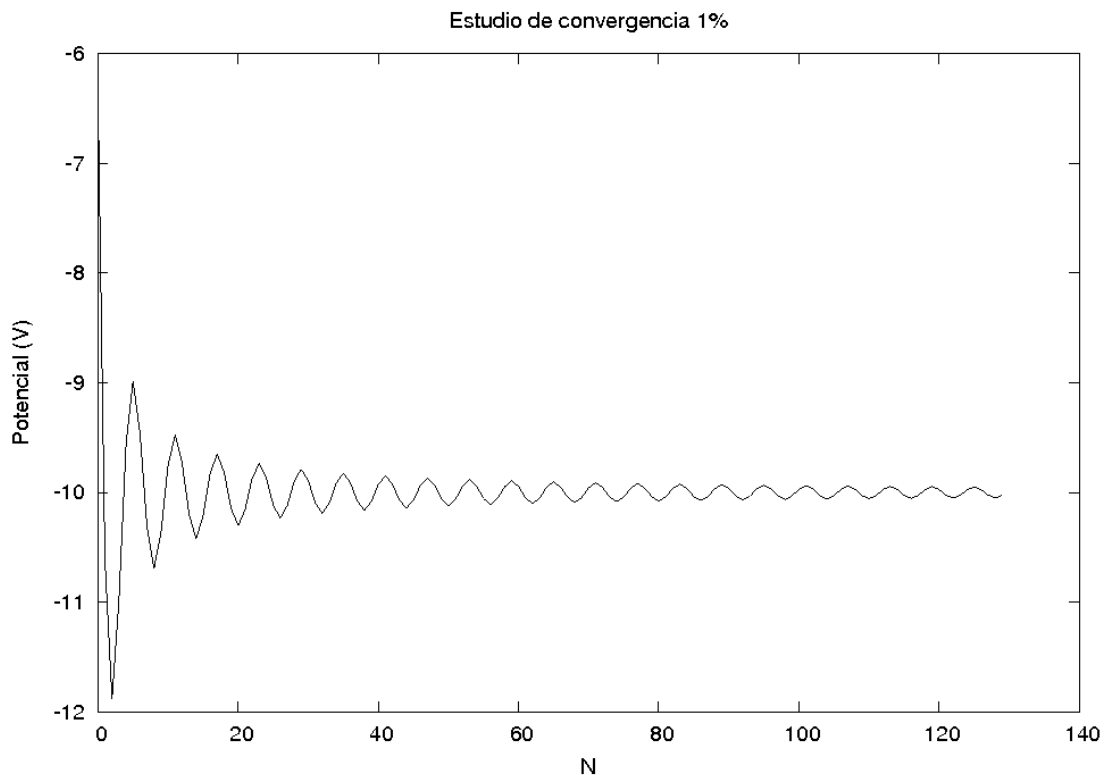
$$V_0 = 10V$$

$$a = 1m$$

$$b = 0,5m$$

1. – Realizar un estudio de convergencia de la función en punto x,y para determinar cuántos términos debemos escoger para que el error relativo sea menor del 1%.

Escogemos $x = a/3$, $y = -b/2$ (por lo que V debería acercarse a 10V).



Gráfica 1

Al programar en C++, se ha tenido en cuenta la oscilación acumulada entre distintos puntos (ya que oscila cada n puntos), y no se ha puesto como condición de convergencia la diferencia entre una iteración y la anterior, sino que la oscilación total de un pico respecto al valor central (dividido para obtener desviaciones relativas) fuese menor del 1%.

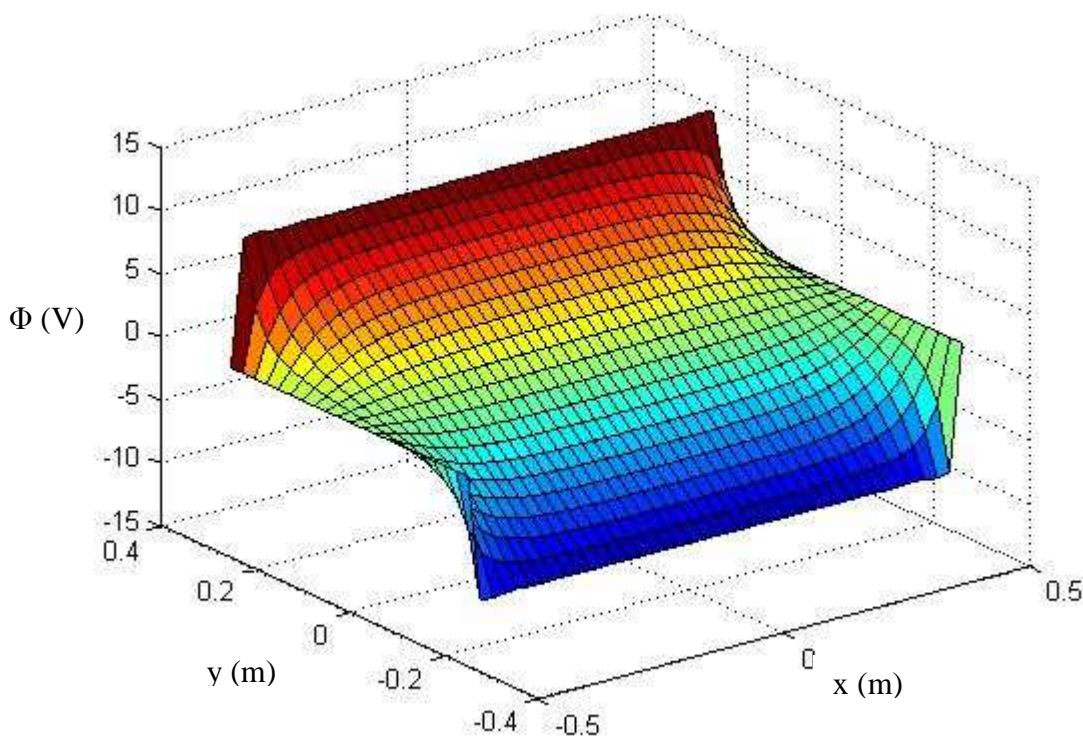
Se ha elegido un punto conflictivo, pues estamos en un borde, donde el potencial es más picado y necesita más iteraciones para converger. Si eligiésemos un punto más cercano al centro del rectángulo, se necesitarían menos iteraciones (compruebo que unas 35). Como de este estudio queremos obtener el límite del sumatorio para luego calcular x, y en cualquier punto, escogemos aquel punto donde el N máximo sea mayor para que sea aplicable en cualquier punto del rectángulo, de ahí el escoger un punto “especial”.

Con este valor máximo $MAX = 130$ realizaremos el resto de sumatorios en los ejercicios siguientes.

2. – Representar en 3D el potencial frente a x e y escogiendo un número suficiente de puntos (mallado).

Escogemos 40×20 puntos (densidad uniforme).

Cabe señalar que en todas los cálculos y representaciones posteriores se excluyen las cuatro esquinas del rectángulo por tratarse de puntos que no están bien definidos. Si lo representamos con Matlab con una superficie que contenga a los 800 puntos calculados:



Gráfica 2

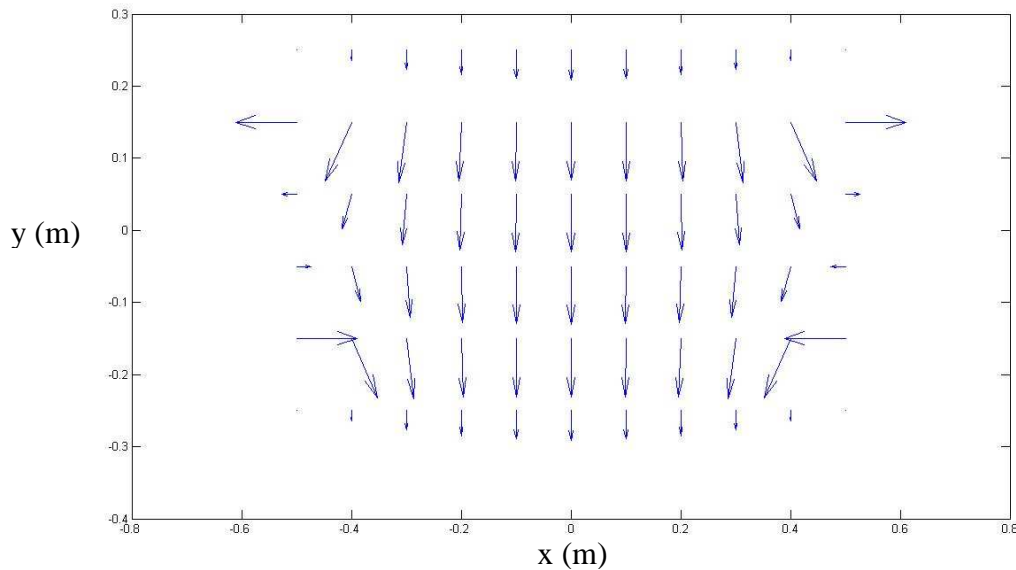
Se comprueba, por tanto, que se cumplen las condiciones de contorno, puesto que en los bordes $|x| = a/2$ el potencial vale $0V$, en $y = \pm b/2$ es igual a $\pm 10V$.

3. – Comprobar que la componente tangencial del campo eléctrico en los bordes se anula.

El campo eléctrico se obtiene derivando la expresión del potencial (gradiente). Simplificando obtenemos:

$$E(x, y) = -\nabla \Phi = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V(-1)^m}{a \sinh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)\frac{b}{2}\right)} \left[-\sin\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)y\right); \cos\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right) \cosh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)y\right); 0 \right]$$

Que si lo representamos gráficamente con Matlab:



Gráfica 3 – Representación del campo vectorial E en el rectángulo.

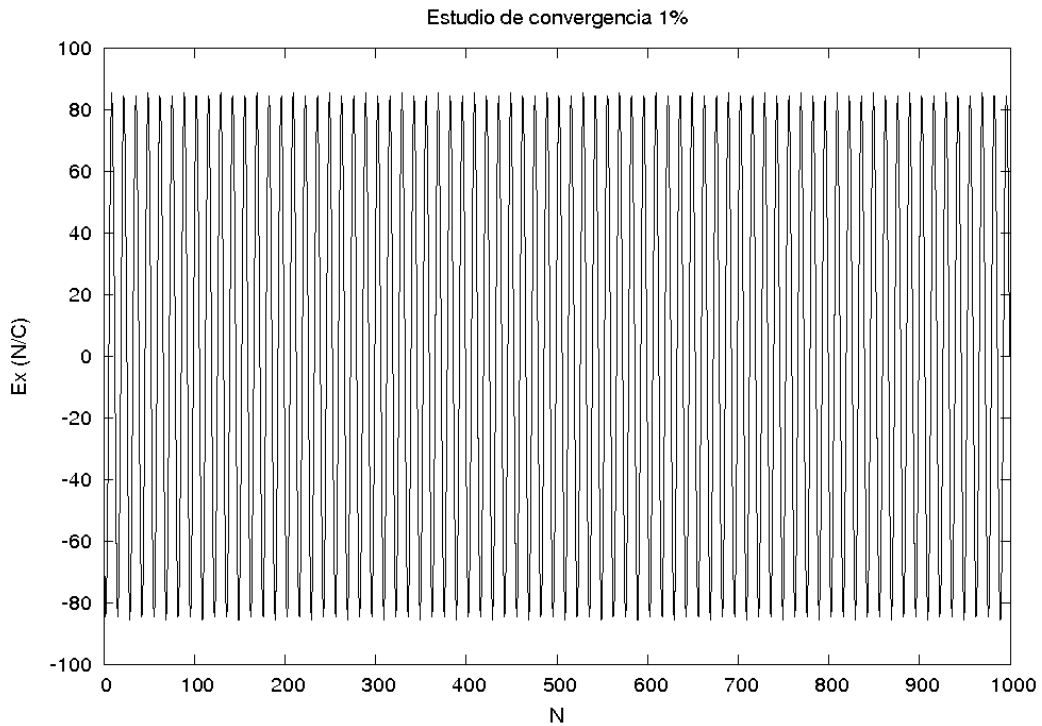
Si calculamos E_x en $y=\pm b/2$ se obtiene tras simplificar:

$$E_x(x, \pm \frac{b}{2}) = \pm \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V_0(-1)^m}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right)$$

Si calculamos E_y en $x=\pm a/2$ se obtiene tras simplificar:

$$E_y(\pm \frac{a}{2}, y) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4V_0(-1)^m}{a \sinh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)\frac{b}{2}\right)} \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}(2m+1)\right) \cosh\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)y\right) = 0$$

En efecto, calculamos que el campo E_y se cancela en el borde, pero no sucede así a primera vista con E_x . De hecho, si hacemos un estudio de convergencia de dicha serie en un punto x que no anule el seno, podemos ver que la serie oscila infinitamente y acotadamente. Hacemos el cálculo y representación para $x=0,425$ e $y = -b/2$.

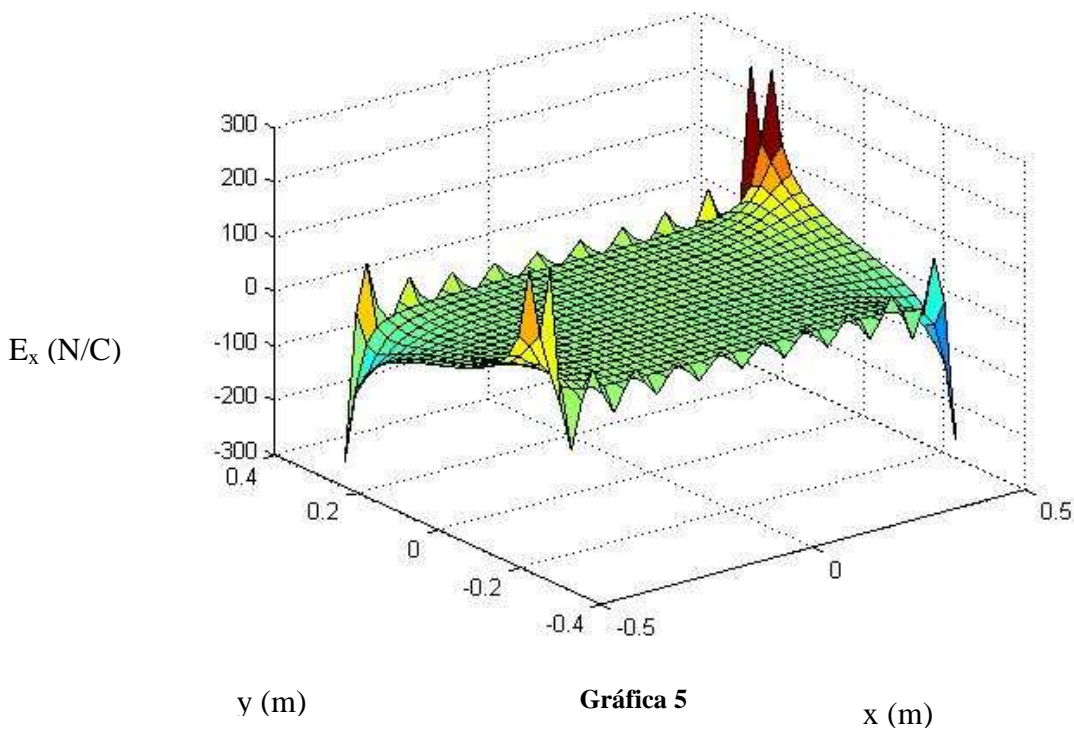


Gráfica 4

Se elige un valor de x para el que no se anula el seno automáticamente para ver la falta de convergencia. Por tanto, al representar el campo en $y = -b/2$ y x variable, habrá ocasiones en el que sea cero y otras en las que la suma sea oscilante.

No obstante, podemos comprobar que el valor medio es cero, que es lo que cabe esperar al tratarse de un metal.

En resumen, podemos ver que el campo E_x oscila apreciablemente en los bordes si ponemos si utilizamos un N máximo (y no hacemos la media cuando la serie es oscilante). Si representamos el campo E_x en todo el rectángulo, se obtiene la siguiente gráfica:



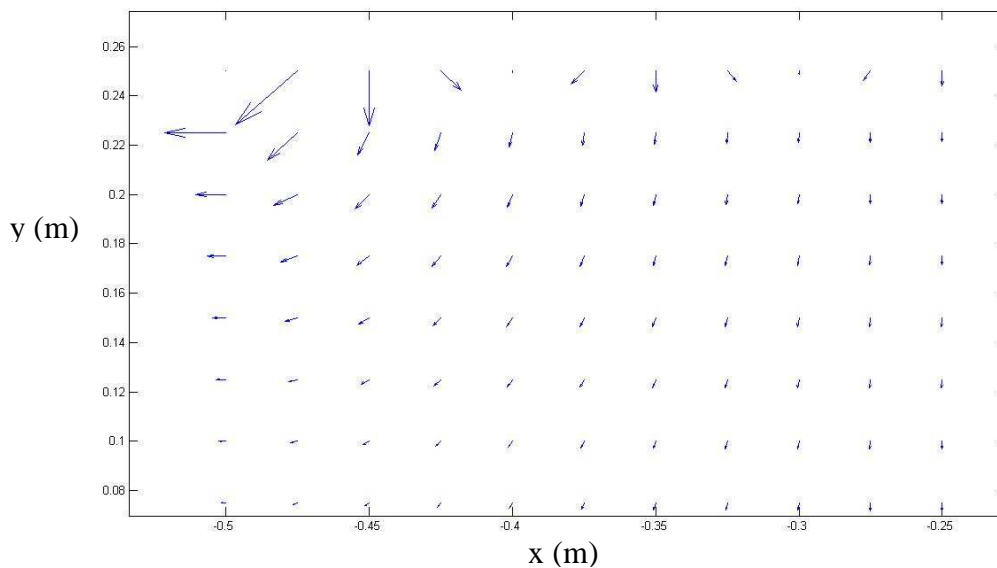
Gráfica 5

Las variaciones en torno al cero en el borde $y = \pm b/2$ son significativas, mayor incluso que el campo E_x en otros puntos del rectángulo y comparable a E_y en ese mismo punto, lo que se debe a la no convergencia de la serie.

En el interior del rectángulo, E_x es pequeño, despreciable frente a E_y como se aprecia en la Gráfica 3.

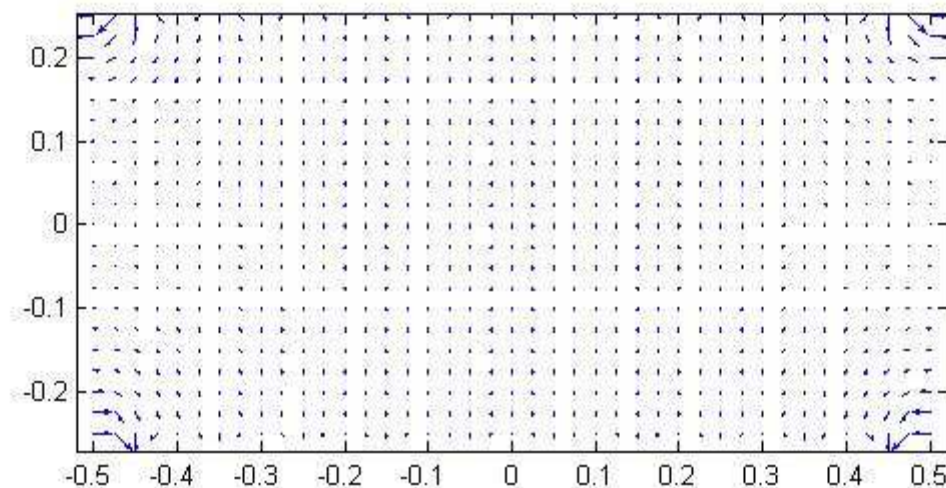
En el caso de E_y en $x=\pm a/2$ no hay ningún problema numérico, porque matemáticamente es cero cada término del sumatorio (a diferencia de E_x), puesto que el coseno se anula.

La Gráfica 3 podría hacernos pensar que estas variaciones de E_x respecto al 0 en el borde son despreciables frente a E_y en ese punto y que en los laterales la componente tangencial se anula, pero si ampliamos la imagen en el borde, se observa que ambos valores sí son comparables en el borde superior (donde E_x oscila):



Gráfica 6

Si representamos los vectores en toda la región, no se aprecia claramente porque dominan las divergencias de los bordes frente al campo en el centro, lo que se debe a que los valores en las esquinas sí son significativos, incluso mayores, respecto al resto de la región.



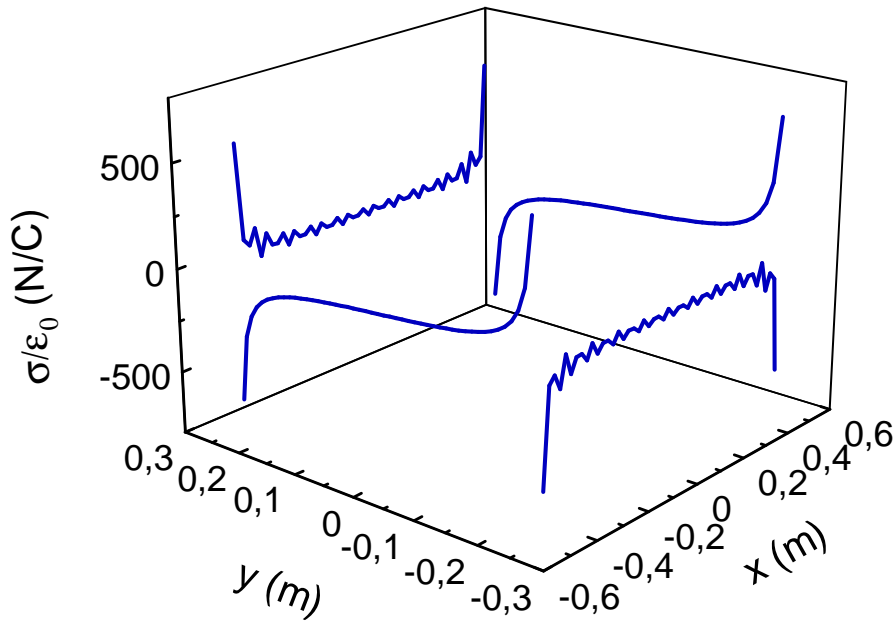
4. – Representar la densidad superficial de carga en los bordes con 50 puntos por lateral.

Suponiendo que las componentes tangenciales a los bordes son cero, la densidad superficial es simplemente:

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \vec{E} \cdot \vec{n}$$

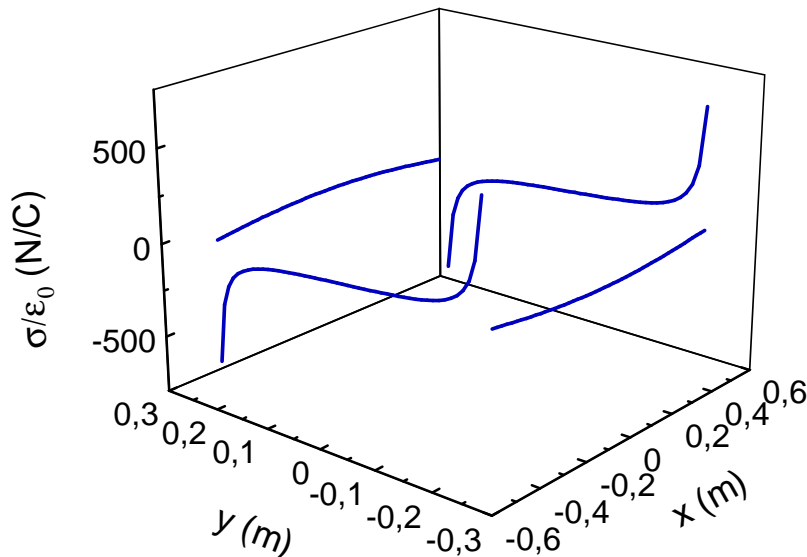
es decir, en $x = \pm a/2$, la densidad superficial a lo largo de y vendrá dada por $\pm E_x$, mientras que en $y = \pm b/2$, ésta vendrá dada por $\pm E_y$, donde se ha tenido en cuenta que el vector normal a la superficie que sale de la región tiene signo contrario en cada lateral opuesto.

Representando los valores se obtiene la siguiente distribución de densidad superficial de carga.



Gráfica 7

Como vemos, la densidad superficial de carga es oscilante en x (si se representasen más puntos, se vería más suave) debido a que no se ha cogido un número suficiente de términos (el número máximo de iteración para la convergencia establecido según el potencial no es suficiente para el campo). Para 200 iteraciones, se suaviza la gráfica:



Como comentario general, cabe señalar que para realizar el estudio del campo eléctrico y la densidad superficial de carga se ha utilizado un número de iteraciones dado por el estudio realizado para el potencial, cuando cabría la posibilidad de que se necesitase un número mayor para obtener un mismo error relativo. Estas desviaciones podrían ser más significativas en los bordes y en las esquinas, que son puntos más conflictivos, como se ha observado al representar la densidad superficial. No obstante, el número de iteraciones no es la razón de las desviaciones grandes en los bordes en el campo E_x , sino que se trata de una desviación puramente matemática y no de un error numérico.

Recordemos que la convergencia de una serie necesita (condición necesaria, no suficiente) que el término del sumatorio cuando n tiende a infinito se anule, lo cual no sucede ya que aparece una indeterminación en el límite -1 elevado a infinito multiplicado por seno de infinito, con lo que el límite no es cero. Es decir, la serie no converge. Esto se debe a que al derivar el potencial, que sí converge al tener un $(2m+1)$ en el denominador, este término se cancela. El término de E_x en infinito sólo es cero si el argumento del seno se cancela para todo m , es decir, si:

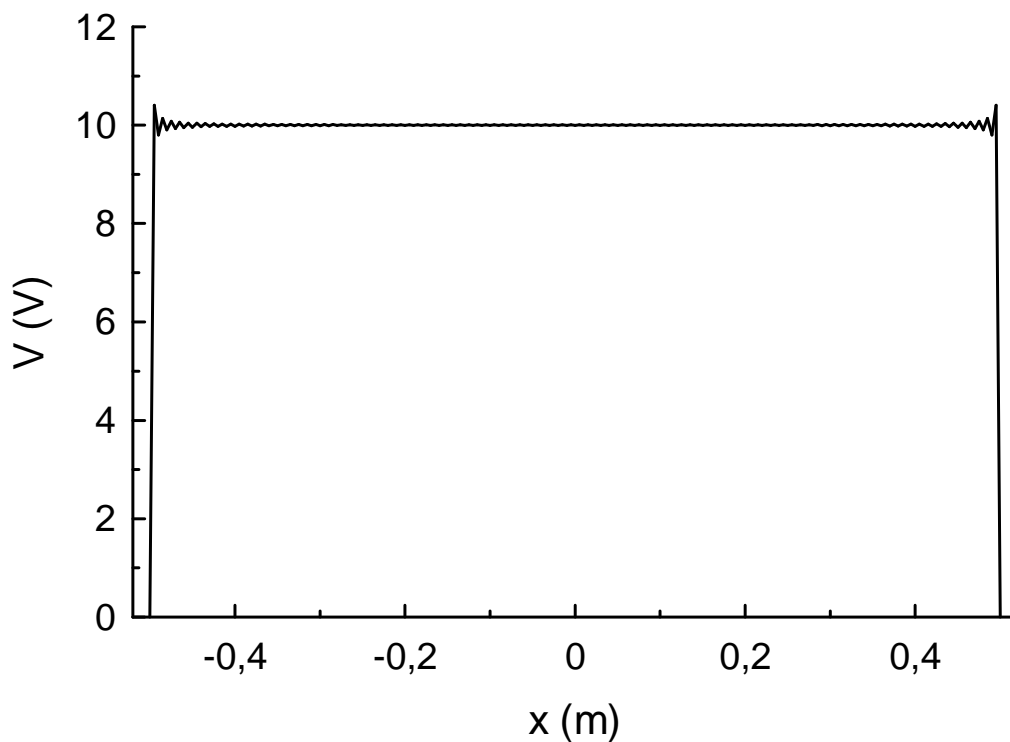
$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4V_0(-1)^m}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right) \neq 0 \text{ en general}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{4V_0(-1)^m}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}(2m+1)x\right) = 0 \text{ si } V_0 \rightarrow 0 \text{ ó si } \frac{\pi}{a}(2m+1)x = p\pi$$

Para ciertos x fijos, el campo es 0 porque todo término es cero, si $x=pa/(2m+1)$ siendo p y m números enteros, como se ha comprobado en la Gráfica 5, donde V toma el valor 0 cada ciertos valores de x .

Por último, resaltar que se trata de un problema ideal en el que se han despreciado los efectos de las esquinas, donde el potencial pasaba de 0V a 10V en cada lateral de un punto al siguiente. Esto podría ser la explicación última de por qué el campo eléctrico ha tenido un comportamiento anómalo al derivar el sumatorio del potencial (dando una serie infinitamente oscilante y acotada) en los laterales. Otra opción de que el campo converja es no llegar a m grandes y hacer tender "a" a infinito, con lo que si nos restringimos a x cercano a cero, este comportamiento desaparece y los efectos de los bordes son despreciables, con lo que se cumpliría la condición de que la componente tangencial a la superficie de un metal del campo se anula. Aunque de los resultados generales anteriores numéricos tras derivar la expresión del potencial no podemos concluir que ésta sea nula en todo caso, podemos partir directamente de la expresión del potencial. En lugar de usar una comprobación numérica, podemos emplear el argumento teórico de que el potencial debe cumplir la condición de contorno de que vale 10V en todo el borde para todo x del lateral, y que como dicho valor no varía a lo largo de x , la derivada es cero y la componente tangencial se anula.

Como curiosidad, el potencial en los bordes superior e inferior se obtiene mediante una serie infinita que presenta el fenómeno de Gibbs. Se ha representado para el borde a +10V, con 200 puntos (x) y 500 términos cada sumatorio.



Detalle en un menor tramo de x y mayor densidad de puntos:

