

DETERMINACIÓN DE LA
GRAVEDAD Y DEL
COEFICIENTE DE
ROZAMIENTO MEDIANTE
EL PLANO INCLINADO

(Práctica nº 15: Entre las pirámides)

FERNANDO HUESO GONZÁLEZ

Pareja 7 - Grupo B-L1

2º DE FÍSICA - UVEG

Laboratorio de Mecánica y Ondas

Práctica realizada el 13-X-08

Informe entregado el 27-X-08

OBJETIVO

El objetivo de este experimento es analizar el comportamiento de un móvil sobre un plano inclinado en condiciones de rozamiento. Midiendo la posición y la velocidad de un carrito deslizante mediante un detector SÓNAR, estudiamos su movimiento para diferentes ángulos del plano (carril) inclinado con la finalidad de comprobar las leyes de Newton y calcular los coeficientes de rozamiento estático y cinético, así como obtener el valor de la aceleración de la gravedad.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para analizar el movimiento de deslizamiento de una masa sobre un plano inclinado, conviene recordar las leyes de Newton y trazar un diagrama de fuerzas:

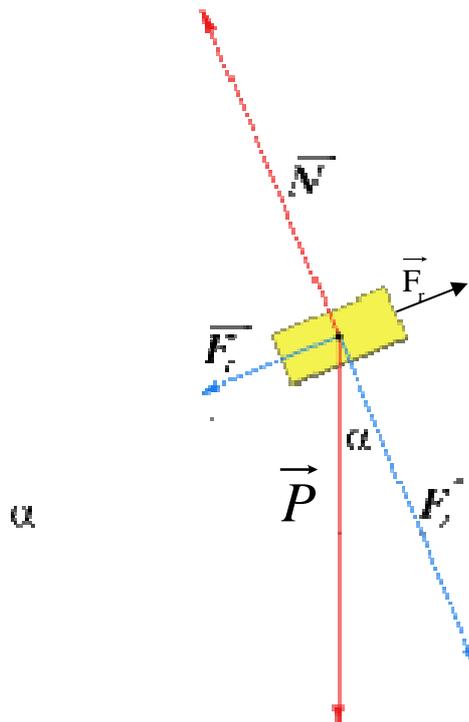


Figura 1 - Diagrama de fuerzas en un plano inclinado.

En la figura se observa la fuerza de la gravedad (peso P) sobre un cuerpo de masa m , que se descompone en dos componentes, una paralela al plano inclinado (F_1) y otra perpendicular a éste (F_2). Por tanto:

$$\vec{P} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \leftrightarrow P = mg \quad [1]$$

$$F_1 = P \sin \alpha \leftrightarrow F_2 = P \cos \alpha^1 \quad [2]$$

La componente F_1 acelera el móvil sobre el plano (hacia la izquierda, de forma que su energía potencial disminuya y su energía cinética aumente), mientras que la componente F_2 , por la 3ª ley de Newton (acción y reacción) va acompañada de la fuerza normal al plano N , de signo opuesto a F_2 e igual módulo.

Asimismo está presente una fuerza de rozamiento F_r , proporcional a la fuerza normal y perpendicular a ella, que se opondrá al movimiento, con lo que tendrá dirección opuesta a F_1 . Esta fuerza de rozamiento dependerá de un coeficiente característico de las superficies de contacto entre el objeto y el plano sobre el que deslice, que se denomina coeficiente de rozamiento cinético, mientras está en movimiento, y estático, si todavía no ha comenzado el mismo.

$$\vec{N} = -\vec{F}_2 \leftrightarrow F_r = \mu N = \mu mg \cos \alpha \quad [3]$$

¹ Si $\alpha=0$, $F_1=0$ y el móvil permanece en reposo.

En el eje del plano inclinado actuarán dos fuerzas (F_1 y F_r) que acelerarán el móvil al bajar por el plano inclinado (a_b). Según las leyes de Newton:

$$mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = ma_b \quad [4]$$

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = a_b \quad [5]$$

Esta última expresión prueba que la aceleración del móvil es independiente de su masa. En definitiva, el carro se moverá con aceleración uniforme.

En caso de que el móvil ascienda, puesto que la fuerza de rozamiento siempre se opone el movimiento, ésta cambiará de signo y tendrá esta vez la misma dirección que F_1 , con lo que la aceleración del móvil al subir (a_s) por el plano será distinta (y mayor):

$$g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = a_s \quad [6]$$

DISEÑO Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para poder estudiar el movimiento de un cuerpo sobre un plano inclinado, precisamos medir la velocidad en función del tiempo en distintas condiciones y calcular la aceleración del mismo. Para ello, realizamos un montaje experimental con un carril rígido de aluminio de 2,3m de longitud sustentado por un extremo mediante un travesaño entre dos trípodes, cuya altura se puede regular. De esta manera podemos inclinar el plano un determinado ángulo α . La medida de este ángulo se realiza mediante un plomo suspendido de un hilo sobre una escala semicircular dividida en 180° , con sensibilidad de 1° .

Pese a que lo ideal sería estudiar el deslizamiento de una masa sobre el plano, modificamos las condiciones y empleamos un carrito sobre unas pequeñas ruedas (con masa pequeña en comparación con el carrito), cuyo momento de inercia consideramos despreciable. De esta manera, el carrito rueda sobre el plano fácilmente, con poco rozamiento. Hay que cuidar que en los surcos del carril estén limpios de residuos para que no haya perturbaciones en el movimiento.

Es de interés también medir la masa del carrito y de unas masas accesorias instalables sobre el carrito para verificar la no dependencia de la aceleración con la masa. Por ello, pesamos las distintas masas en la báscula electrónica, cuya sensibilidad es 1g.

$$m_{\text{car}} = 251 \pm 1 \text{ g (carrito)}$$

$$m_{\text{mad}} = 130 \pm 1 \text{ g} = m_2 \text{ (madera con gamuza)}$$

$$m_{\text{h1}} = 490 \pm 1 \text{ g}$$

$$m_{\text{h2}} = 496 \pm 1 \text{ g}$$

$$m_{\text{h1}} + m_{\text{h2}} = m_3 \text{ (metal)}$$

$$m_{\text{car+hel}} = 566 \pm 1 \text{ g (carrito con hélice)}$$

Para analizar la velocidad y la posición del carrito sobre el plano en distintos instantes, empleamos un aparato de detección denominado SÓNAR, basado en ultrasonidos. A consecuencia del efecto Doppler, el reflejo en el carrito de las ondas emitidas por el SÓNAR hace que varíe su frecuencia en función de su velocidad. Además, el tiempo que tarda en llegar la señal (onda sonora que se propaga en el medio a una velocidad conocida) permite establecer la posición. Para una adecuada detección de las ondas, el dispositivo debe estar orientado correctamente, de manera que el carrito pueda reflejar las ondas en cualquier posición del carril. La orientación del detector, situado en el extremo superior del carril, debe regularse si se detectan datos anormales.

El dispositivo SÓNAR del experimento detecta la posición y la velocidad cada dos centésimas de segundo aproximadamente. Estos datos son registrados por el ordenador, en el que se representan las gráficas de posición y velocidad en función del tiempo. Mediante el ajuste por mínimos cuadrados correspondiente, se puede obtener la aceleración uniforme del carrito.

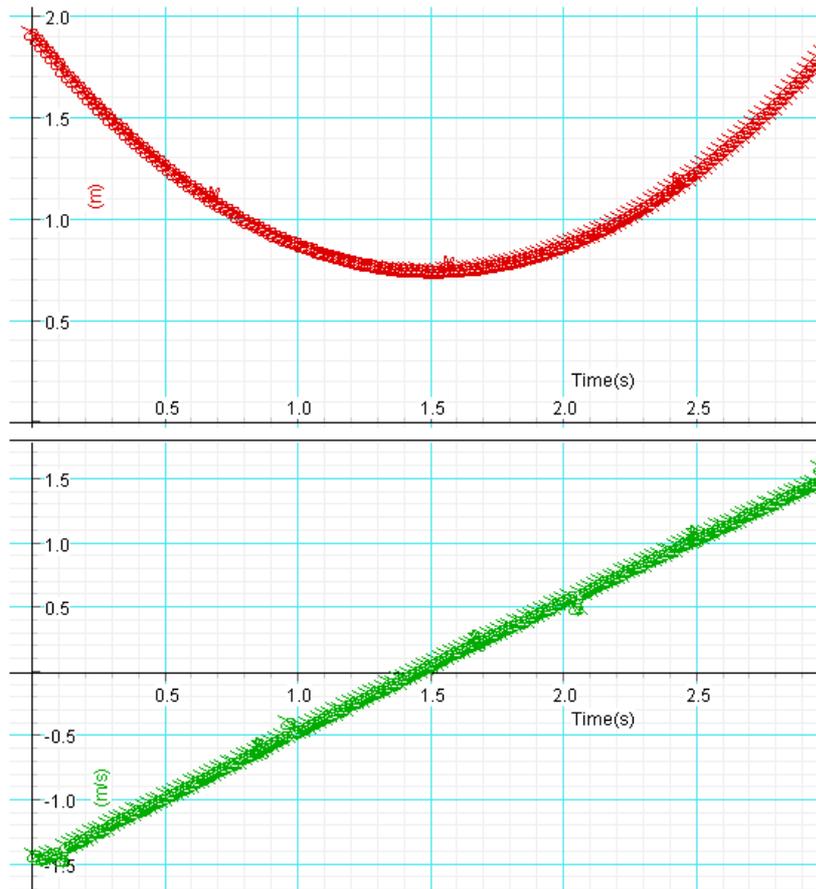


Figura 2 – Detección de posición y velocidad al impulsar hacia arriba el carrito por un plano inclinado.

Ahora bien, si observamos las ecuaciones [5] y [6], podemos idear un método mediante el que determinar μ y g a partir de las medidas de la aceleración al subir y al bajar el carrito. En efecto, si le damos un impulso al carrito desde la parte baja del plano hacia arriba y dejamos que retorne a la posición inicial, podremos obtener mediante el ajuste la aceleración de subida y de bajada. Tendremos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\mu = \frac{a_s - a_b}{a_s + a_b} \tan \alpha = \frac{a_s - a_b}{g \cos \alpha} \quad [7]$$

$$g = \frac{a_s + a_b}{2 \sin \alpha} \quad [8]$$

Las constante μ y g son función de las aceleraciones de subida y bajada y del ángulo del plano inclinado. Por tanto, calculando las aceleraciones para distintos ángulos del plano podremos obtener una serie de valores para el coeficiente de rozamiento cinético y para la gravedad, valor que compararemos con el tabulado.

$$\delta(a_s + a_b) = \delta(a_s - a_b) = \sqrt{\delta(a_s)^2 + \delta(a_b)^2} \quad [9]$$

$$\delta(g)^2 = \left(\frac{\delta(a_s + a_b)}{2 \sin \alpha} \right)^2 + \left(\frac{-(a_s + a_b)}{2 \sin^2 \alpha} \cos \alpha \cdot \delta(\alpha) \right)^2 \quad [10]$$

$$\delta(\mu)^2 = \left[\left(\frac{1}{a_s + a_b} - \frac{a_s - a_b}{(a_s + a_b)^2} \right) \tan \alpha \cdot \delta(a_s) \right]^2 + \left[\left(\frac{-1}{a_s + a_b} - \frac{a_s - a_b}{(a_s + a_b)^2} \right) \tan \alpha \cdot \delta(a_b) \right]^2 + \left[\frac{a_s - a_b}{a_s + a_b} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \delta(\alpha) \right]^2 \quad [11]$$

Es importante resaltar que la aceleración de subida es distinta que la de bajada, por lo que para el ajuste se deben seleccionar exclusivamente los correspondientes a cada aceleración. La delimitación de las dos aceleraciones la marca el corte con el eje de abscisas, instante en el que el carro deja de subir y comienza a bajar (**Figura 2**). No obstante, es conveniente no seleccionar los puntos más cercanos a este corte,

pues teóricamente el coeficiente de rozamiento pasa a ser el estático (mayor que el cinético) durante el instante en el que la velocidad es cero, aunque la variación sea probablemente despreciable. Aparte, tampoco se deben seleccionar los puntos correspondientes a los instantes iniciales si se conecta el detector a la vez que se le da el impulso, pues hay una fuerza externa actuando (tu mano).

Hasta ahora hemos diseñado un montaje experimental en el que estudiamos el rozamiento una vez está el cuerpo en movimiento. Para estudiar el rozamiento estático podemos colocar el carrito sobre una gamuza rugosa e ir levantando muy lentamente el plano hasta un ángulo para el cual empieza a deslizar sobre el plano. A partir de dicho ángulo límite α_{lim} y mediante un diagrama de fuerzas es posible determinar el coeficiente de rozamiento estático, que experimentalmente se demuestra que es mayor que el cinético.

Para el ángulo preciso en el que empieza a moverse, según el esquema de la **Figura 1**, la fuerza de rozamiento F_r es equivalente en módulo a la tangencial al plano F_1 .

$$F_1 = F_r \leftrightarrow mg \sin \alpha_{lim} = \mu_{est} mg \cos \alpha_{lim} \quad [12]$$

$$\mu_{est} = \tan \alpha_{lim} \quad [13]$$

$$\delta(\mu_{est}) = \frac{1}{\cos^2 \alpha_{lim}} \delta(\alpha_{lim}) \quad [14]$$

Para comparar este valor con el cinético se escoge un ángulo mayor que el límite y se mide la aceleración de bajada. Manipulando las ecuaciones [5] y [6] y tomando el valor de la gravedad como conocido, se llega a la siguiente expresión para μ_{c-g} :

$$\mu_{c-g} = \tan \alpha - \frac{a_b}{g \cos \alpha} \quad [15]$$

$$\delta(\mu_{c-g})^2 = \left[\left(-\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{a_b \sin \alpha}{g \cos^2 \alpha} \right) \delta(\alpha) \right]^2 + \left[\frac{-1 \cdot \delta(a_b)}{g \cos \alpha} \right]^2 \quad [16]$$

Por último podemos analizar el movimiento sobre un plano horizontal de un cuerpo acelerado uniformemente. Si situamos un carrito propulsado con una hélice (m_{c+h}) sobre el carril horizontal, se acelerará. Esta aceleración dependerá de la orientación de la hélice respecto al carril, siendo ésta máxima al estar la hélice perpendicular al carril y nula al estar perpendicular. Es decir, la componente de la fuerza de la hélice paralela al carril será la que cause la aceleración (ley de acción y reacción), mientras que la perpendicular no tendrá efecto apreciable (se desprecie el rozamiento lateral con el carril). Por tanto, detectando la aceleración del carrito para distintos ángulos de la hélice α_{hel} podemos verificar el comportamiento que teóricamente se predice según las leyes de Newton y determinar la fuerza con la que propulsa la hélice.

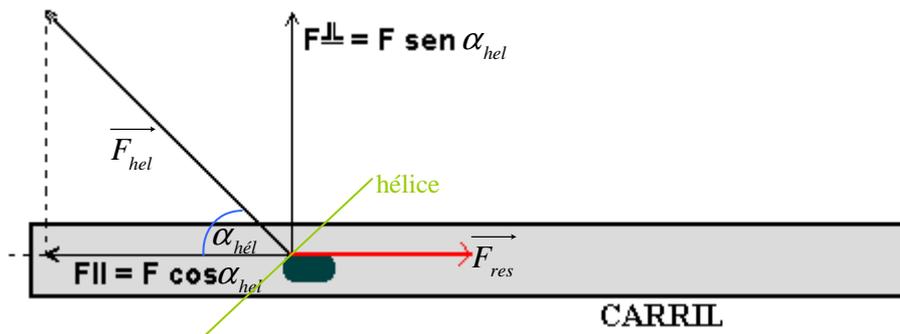


Figura 3 - Descomposición de la fuerza de propulsión del carrito con hélice sobre el carril horizontal.

$$F_{res} = m_{c+h} a_c = F_{hel} \cos \alpha_{hel} \quad [17]$$

$$F_{hel} = \frac{m_{c+h} a_c}{\cos \alpha_{hel}} \quad [18]$$

$$\delta(F_{hel})^2 = \left(\frac{a_c \delta(m_{c+h})}{\cos \alpha_{hel}} \right)^2 + \left(\frac{m_{c+h} \delta(a_c)}{\cos \alpha_{hel}} \right)^2 + \left(-\frac{m_{c+h} a_c}{\cos^2 \alpha_{hel}} (-\sin \alpha_{hel}) \delta(\alpha_{hel}) \right)^2 \quad [19]$$

ADQUISICIÓN DE DATOS

Rozamiento cinético

La detección del movimiento se realiza para distintos ángulos del plano inclinado impulsando el carrito hacia arriba. Elegimos ángulos crecientes de 5 en 5 grados y para cada ángulo realizamos medidas para las distintas masas accesorias. Mediante el programa de ordenador (Data Studio) realizamos el ajuste por mínimos cuadrados y obtenemos la aceleración (pendiente de la recta en la gráfica de velocidad frente a tiempo).

Tabla 1 – Aceleración de subida a_s y de bajada a_b en función del ángulo de inclinación del plano α y de las masas accesorias m' situadas sobre el carrito.

$\alpha \pm 1^\circ$	$m' \pm 1g$	$a_s \text{ (m/s}^2\text{)}$	$a_b \text{ (m/s}^2\text{)}$
5	/	$0,818 \pm 0,004$	$0,762 \pm 0,005$
	m_2	$0,794 \pm 0,003$	$0,7460 \pm 0,0014$
	m_3	$0,788 \pm 0,003$	$0,7474 \pm 0,0016$
9	/	$1,536 \pm 0,010$	$1,468 \pm 0,018$
	m_2	$1,510 \pm 0,019$	$1,47 \pm 0,10$
	m_3	$1,54 \pm 0,02$	$1,484 \pm 0,003$
15	/	$2,590 \pm 0,006$	$2,506 \pm 0,003$
	m_2	$2,588 \pm 0,004$	$2,529 \pm 0,004$
	m_3	$2,607 \pm 0,004$	$2,560 \pm 0,003$
20	/	$3,241 \pm 0,005$	$3,160 \pm 0,005$
	m_2	$3,27 \pm 0,04$	$3,176 \pm 0,0017$
	m_3	$3,248 \pm 0,007$	$3,196 \pm 0,004$
25	/	$4,07 \pm 0,03$	$3,931 \pm 0,012$
	m_2	$4,12 \pm 0,02$	$3,980 \pm 0,011$
	m_3	$4,17 \pm 0,06$	$4,04 \pm 0,03$

Cabe resaltar que en ocasiones, la detección no era la adecuada y unos datos se desviaban exageradamente de la recta de ajuste. Esto se debía probablemente a que el sónar no estaba perfectamente orientado. Por ello, se seleccionaban para el ajuste sólo aquellos puntos que no presentaban estas anomalías. Aun así, comprobamos que los errores mayores de ciertas aceleraciones (hasta 10 veces, como se ve en la tabla anterior) se correspondían con las detecciones donde estaban presentes estas desviaciones. Por tanto, deberían repetirse dichas medidas con el objetivo de evitar este error causado por el método experimental de medida (error en la detección mediante el sónar).

Rozamiento estático

Para estudiar el coeficiente de rozamiento estático entre el plano inclinado y la gamuza colocamos la madera (m_2) sobre el carrito con la cara de la gamuza visible. El carrito se coloca boca abajo sobre el plano de manera que la gamuza esté en contacto con el carril. (Se coloca la gamuza para el coeficiente de rozamiento sea apreciable y el ángulo crítico mensurable, en lugar del carrito que rueda sin apenas rozamiento en lugar de deslizarse). Levantando el plano, inicialmente horizontal, muy lentamente vamos buscando el punto en el que la gamuza empieza a deslizarse. Una vez ajustado cuidadosamente ese punto, medimos el ángulo crítico α_{lim} que marca el plomo:

$$\alpha_{lim} = 17 \pm 1^\circ$$

Hay que resaltar que este valor depende de la parte del carril en la que situamos el carrito, puesto que la superficie del plano no era completamente lisa, al haber suciedad acumulada en ciertas zonas. En consecuencia, el ángulo crítico dependía de la posición del carril, con lo que el valor medido es relativo a la posición en la que se midió.

Para comparar el rozamiento estático con el cinético, detectamos la caída del carro con gamuza sobre el plano inclinado a un ángulo mayor que el crítico mediante el ordenador y calculamos su aceleración. Realizamos para $\alpha = 20^\circ$ las dos siguientes medidas:

$$a_{b1} = 0,323 \pm 0,009 \text{ m/s}^2$$

$$a_{b2} = 0,360 \pm 0,010 \text{ m/s}^2$$

Al soltar el carrito observamos inmediatamente que la aceleración a lo largo del carril no era uniforme, al variar el rozamiento en función de la posición, con lo que queda patente la limitación del método experimental. Por ello, la dispersión de las dos medidas de la aceleración es grande (11%). Para mejorar estos datos no habría sido suficiente realizar más medidas, sino limpiar la superficie del plano inclinado.

Fuerza de una hélice

Para analizar la fuerza de una hélice que propulsa el carrito sobre el carril del plano horizontal, realizamos medidas de la velocidad mediante el detector y obtenemos la aceleración mediante al ajuste por mínimos cuadrados. Empleamos la velocidad de rotación menor de la hélice; realizamos medidas para intervalos crecientes (diez en diez) de ángulos de la hélice $\alpha_{hél}$ respecto a la perpendicular del carril y obtenemos los siguientes valores:

Tabla 2 – Aceleración a sobre el plano horizontal al propulsarse el carrito mediante la hélice según el ángulo $\alpha_{hél}$ entre la misma y la perpendicular del carril.

$\alpha_{hél} \pm 2^\circ$	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$
0	0,479 \pm 0,004
10	0,448 \pm 0,019
20	0,44 \pm 0,03
30	0,425 \pm 0,003
40	0,365 \pm 0,002
50	0,299 \pm 0,004
60	0,219 \pm 0,002
70	0,1319 \pm 0,0015
80	0,0401 \pm 0,0010
90	0,0000 \pm 0,0006

Asignamos un error mayor a la medida del ángulo que en el apartado anterior, pues ésta se realiza a partir de una rosca en la que aparece una escala dividida de diez en diez grados, aunque el espacio entre estas divisiones es considerable y se puede ajustar “a ojo”.

Asimismo, comprobamos que existía un ángulo crítico menor que 90° , en el que el rozamiento impedía el movimiento del carrito. Medimos este ángulo cuidadosamente para analizar el coeficiente de rozamiento estático con el carrito, que ya no es despreciable al ser la componente de la fuerza de propulsión paralela al carril muy pequeña respecto al rozamiento lateral e inferior. El ángulo crítico medido (menor error que los anteriores al haberlo determinado más cuidadosamente) es:

$$\alpha_{hél-lim} = 86 \pm 1^\circ$$

TRATAMIENTO DE LOS DATOS

Rozamiento cinético

Como se observa en la **Tabla 1** en todos los casos, la aceleración de subida es mayor que la de bajada para cada ángulo, con lo que la predicción teórica se corresponde con los datos obtenidos. Además, como cabe esperar, la aceleración es mayor cuanto mayor es el ángulo. En cuanto a la independencia de la aceleración con la masa para un mismo ángulo, podemos afirmar que los datos no presentan variaciones significativas entre sí; en su mayoría sus errores abarcan intervalos conjuntos. Por un lado, en los datos de la aceleración de subida, éstos están aleatoriamente distribuidos alrededor de un valor medio, por encima o por debajo independientemente de la masa. No obstante, en la aceleración de bajada, se observa una leve tendencia de que la aceleración es mayor cuanto mayor sea la masa, lo cual sucede en la mayoría de grupos de tres medidas como se ve en la siguiente gráfica:

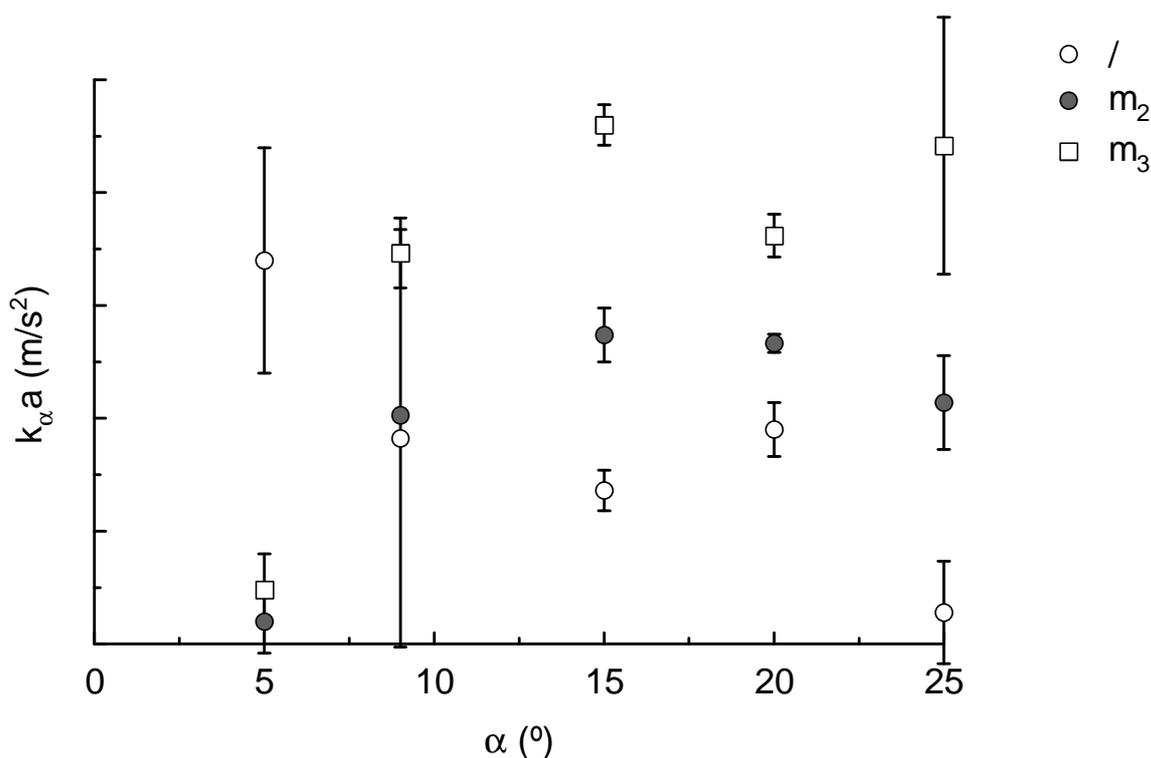


Figura 4 - Diferencias entre las medidas de la aceleración de bajada según las masas accesorias ($m_3 > m_2 > m_1$) para cada ángulo α .

Nota: Se ha reescalado la aceleración de forma distinta para cada ángulo para que se apreciaran mejor las diferencias en una gráfica conjunta. Por ello, no se debe comparar las medidas entre distintos ángulos sino los grupos de tres medidas por ángulo entre sí. Aparte, se ha omitido el error de la a de m_2 a 9° al exceder los márgenes de la gráfica.

Este fenómeno podría deberse a que hemos despreciado el efecto del rozamiento con el aire, que depende de la velocidad. Cuanto mayor sea la masa del cuerpo para la misma superficie y factor de forma, mayor inercia tiene y menos efecto tiene la resistencia del aire al movimiento. Este fenómeno es claramente apreciable en el ciclismo, donde los corredores más corpulentos descienden más rápido.

No obstante, para verificar esta idea haría falta realizar medidas más precisas, en las que no se solapasen los intervalos de error; en la gráfica se aprecia que algunas medidas son bastante cercanas entre sí (a menos de dos barras de error). Por tanto, la idea es una simple hipótesis sin fundamento experimental suficiente.

Empleando las ecuaciones [5], [6], [10] y [11] podemos obtener los valores de la gravedad y el coeficiente de rozamiento cinético para cada ángulo y masa:

Tabla 3 – Valor de la gravedad g y el coeficiente de rozamiento cinético μ para distintos ángulos de inclinación del plano α y masas accesorias m' .

$\alpha \pm 1^\circ$	$m' \pm 1g$	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	μ
5	/	$9,1 \pm 1,8$	$0,0031 \pm 0,0007$
	m_2	$8,8 \pm 1,8$	$0,0027 \pm 0,0006$
	m_3	$8,6 \pm 1,7$	$0,0023 \pm 0,0005$
9	/	$9,6 \pm 1,1$	$0,0036 \pm 0,0012$
	m_2	$9,5 \pm 1,1$	$0,002 \pm 0,005$
	m_3	$9,7 \pm 1,1$	$0,0029 \pm 0,0011$
15	/	$9,8 \pm 0,6$	$0,0044 \pm 0,0005$
	m_2	$9,9 \pm 0,6$	$0,0031 \pm 0,0004$
	m_3	$10,0 \pm 0,7$	$0,0024 \pm 0,0003$
20	/	$9,4 \pm 0,4$	$0,0046 \pm 0,0005$
	m_2	$9,4 \pm 0,5$	$0,005 \pm 0,002$
	m_3	$9,4 \pm 0,5$	$0,0029 \pm 0,0005$
25	/	$9,5 \pm 0,4$	$0,0081 \pm 0,0019$
	m_2	$9,6 \pm 0,4$	$0,0081 \pm 0,0014$
	m_3	$9,7 \pm 0,4$	$0,007 \pm 0,004$
Valor medio		$9,48 \pm 0,09$	$0,0042 \pm 0,0005$

Nota: El error del valor medio es la desviación estándar entre la raíz del número de medidas

En cuanto a los valores de la gravedad, podemos afirmar que son compatibles con el valor esperado de $9,81\text{m/s}^2$, ya que están situados por encima y por debajo de dicho valor aleatoriamente y porque el valor aceptado está comprendido en todos los casos en el intervalo de incertidumbre, como se aprecia en la siguiente gráfica:

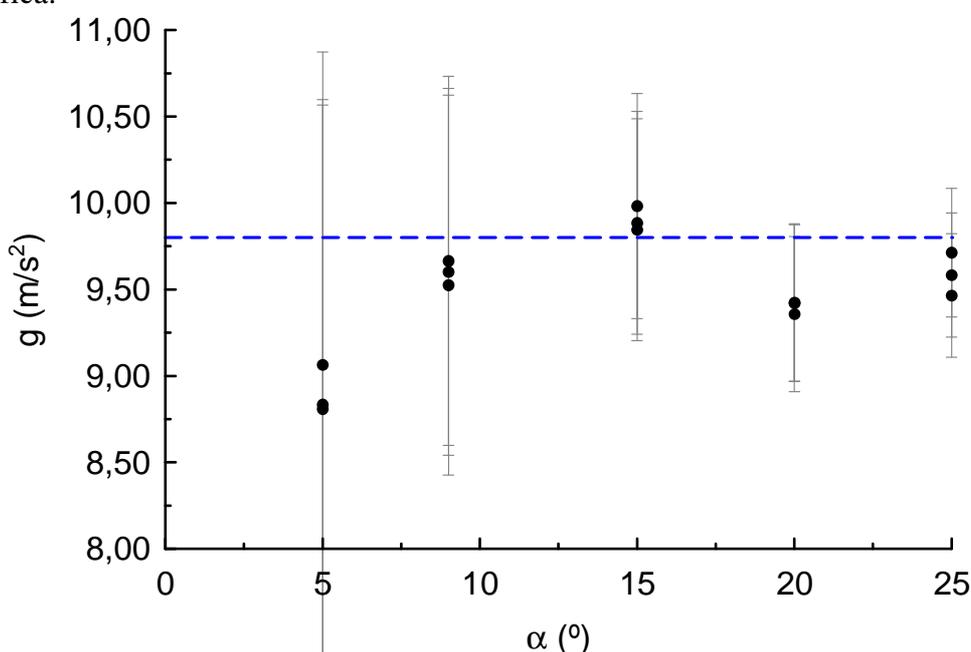


Figura 5 - Valores de la aceleración g para distintos ángulos α del plano inclinado.

Nota: la línea azul marca el valor local de la gravedad $g_a = 9,80 \text{ m/s}^2$ (calculado para la latitud y altura de Burjassot)

En cuanto al valor medio de la gravedad, concluimos que es compatible con el esperado, pues la desviación relativa es del 3%. No obstante, al no tratarse de una distribución aleatoria, la desviación estándar es demasiado pequeña, pues el valor esperado queda a más de dos barras de error. Por ello, podemos calcular g alternativamente mediante un ajuste por mínimos cuadrados. Modificando la ecuación [8] podemos representar la suma de aceleraciones partido por dos frente al seno del ángulo:

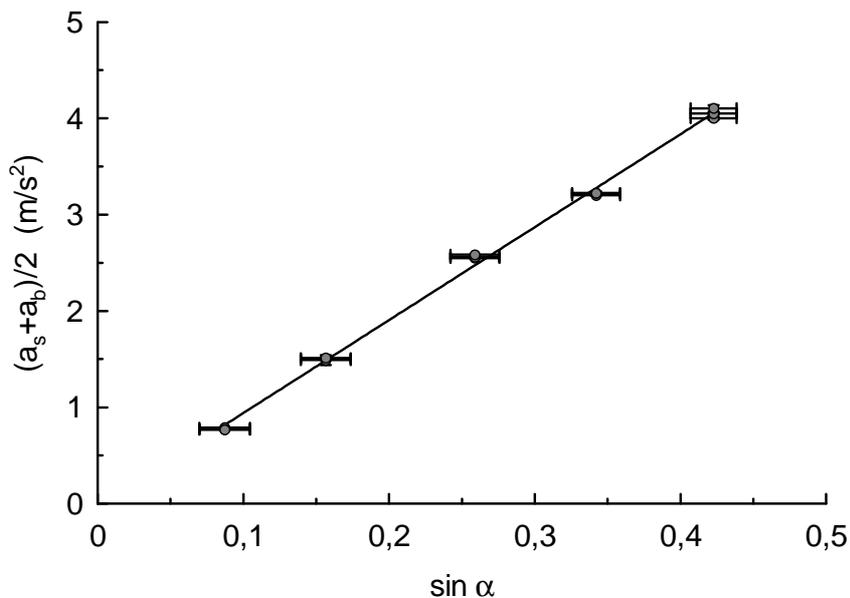


Figura 6 - Ajuste de la aceleración de la gravedad g por mínimos cuadrados.
 Ecuación de la recta: $(a_s + a_b)/2 = (9,64 \pm 0,13) \cdot \sin \alpha + (-0,02 \pm 0,04)$ [m/s²] $r = 0,999$

La pendiente es la aceleración de la gravedad:

$$g = 9,64 \pm 0,13 \text{ m/s}^2$$

Este valor tiene un error relativo del 1,6% respecto al valor esperado y la diferencia entre los valores es del orden del intervalo de error del resultado, con lo que podemos dar este valor por satisfactorio.

Para mejorar la precisión de este resultado, deberíamos mejorar la medida del ángulo, pues en la propagación de errores se observaba que el peso principal del error residía en el intervalo de error del ángulo de inclinación. Aun así, habría que refinar el método experimental para evitar algún error sistemático, pues en la **Figura 5** se obtienen valores que en su mayoría están por debajo del valor esperado.

En cuanto a los resultados obtenidos para el rozamiento cinético, podemos resaltar que los coeficientes obtenidos son muy pequeños, lo cual es lógico al no tratarse de un deslizamiento entre superficies sino de una rodadura. Los coeficientes obtenidos son compatibles para los distintos ángulos y masas, excepto en el último caso en el que el valor nos sale más de dos veces mayor que el anterior. Esto se puede deber a que las medidas de la aceleración a ese ángulo fueron más imprecisas (como se ve en los correspondientes errores) debido a la detección incorrecta del sónar. Por ello, si se descartan las últimas tres medidas en la obtención de la media, se obtiene el siguiente resultado para el coeficiente de rozamiento cinético:

$$\mu_c = 0,0033 \pm 0,0003$$

Aunque teóricamente se espera que los coeficientes obtenidos para los distintos ángulos sean independientes del ángulo, los datos apuntan una leve tendencia al crecimiento del coeficiente con el ángulo, como se observa en la siguiente gráfica:

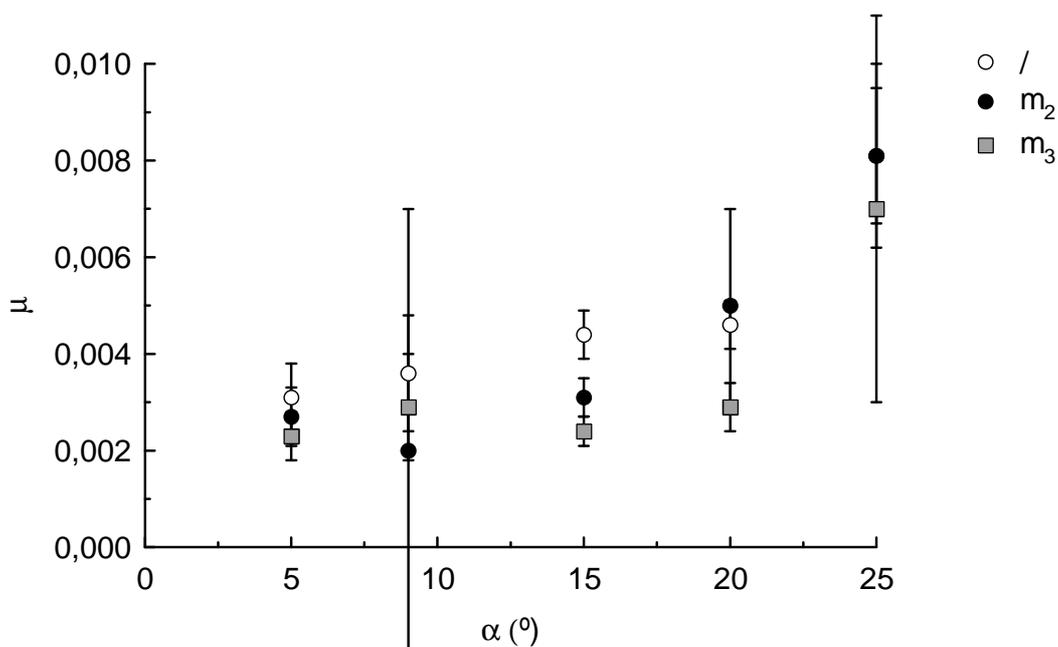


Figura 7 - Coeficiente de rozamiento cinético obtenido para los distintos ángulos de inclinación del plano.

La dispersión de los resultados obtenidos para μ es bastante alta, del 146% si tenemos en cuenta todos los valores y del 96% si descartamos los últimos tres. Esto se debe en parte a que el valor de μ es muy pequeño y el error relativo de cada μ_c muy grande (entre el 10% y el 50%), con lo que el método experimental no nos permite determinar μ_c con fiabilidad suficiente. No obstante, como se ve en la **Figura 7**, podemos ver que los errores de los μ_c para distintos ángulos se solapan entre sí, con lo que es razonable calcular el valor medio como resultado final. Otra manera de ilustrar la dispersión de los datos obtenidos es realizar la siguiente representación, donde según la ecuación [7] se predice un comportamiento lineal de los puntos.

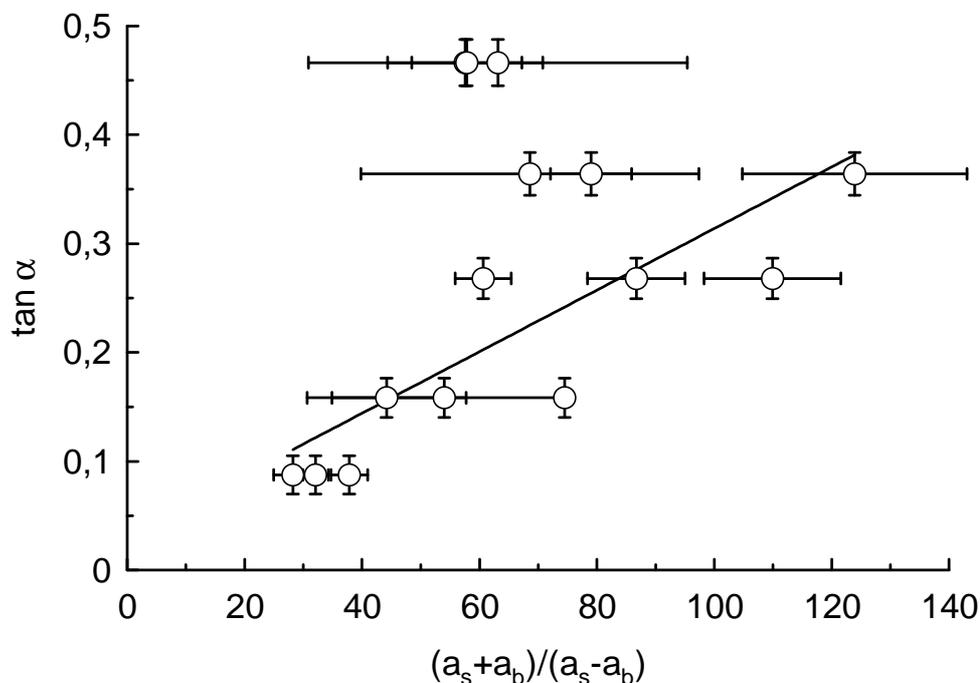


Figura 8 - Ajuste a una recta, donde la pendiente es el coeficiente de rozamiento cinético.

$$\text{Ecuación de la recta: } \tan \alpha = (0,0028 \pm 0,0007)(a_s + a_b)/(a_s - a_b) + (0,03 \pm 0,05)$$

$$r = 0,77$$

Nota: el ajuste se ha realizado descartando las tres últimas medidas. Aparte se ha ocultado el error de la sexta medida.

$$\mu_c = 0,0028 \pm 0,0007$$

Como se observa, tanto visualmente como por el coeficiente de correlación lineal, el ajuste a una recta no es bueno, lo que pone de manifiesto las limitaciones del método experimental empleado y la dificultad de obtener con precisión un coeficiente de rozamiento cinético tan pequeño mediante los dispositivos experimentales de detección de la velocidad y la posición y la medida del ángulo. En resumen, el valor obtenido es orientativo, pero la dispersión y los errores sistemáticos (dependencia con el ángulo) en la determinación del mismo impiden que nuestro resultado final sea preciso y fiable.

Rozamiento estático

A partir del ángulo crítico obtenido para el carrito con gamuza y empleando la ecuación [13] y [14] se obtiene el valor para el rozamiento estático:

$$\mu_{\text{est}_g} = 0,306 \pm 0,019$$

Comparando con el valor del apartado anterior, este coeficiente es cien veces mayor, lo cual es lógico dado que el carrito rodaba apenas sin rozamiento (tan sólo con el coeficiente de rozamiento a la rodadura μ_c), mientras que en este caso deslizaba sobre una gamuza rugosa, con un rozamiento intuitivamente mucho mayor (dos órdenes de magnitud) y una aceleración mucho menor.

En el caso de tomar g en el apartado anterior como $9,80\text{m/s}^2$, el valor medio de μ_c (ecuación [7]) sería parecido al obtenido alternativamente:

$$\mu_c = 0,0032 \pm 0,0003$$

Para comparar el coeficiente de rozamiento cinético y estático de un mismo material, se elige un ángulo de 20° y dejamos deslizar desde lo alto del plano el carrito con gamuza. A partir de la medida la velocidad y la aceleración, se obtiene el coeficiente de rozamiento cinético:

$$\mu_{c_g} = 0,327 \pm 0,011$$

Aunque el valor cinético obtenido es mayor que el estático, cuando experimentalmente está probado que es a la inversa, los intervalos de error se solapan, con lo que lo único que podemos afirmar es que ambos son del mismo orden, pero no discernir con exclusividad cuál es mayor. El que el cinético nos salga algo mayor puede deberse a que el rozamiento en distintas zonas del carril era diferente, y la zona en la que deslizó para detectar su velocidad no coincidía con aquella en la que buscamos el ángulo límite para el rozamiento estático.

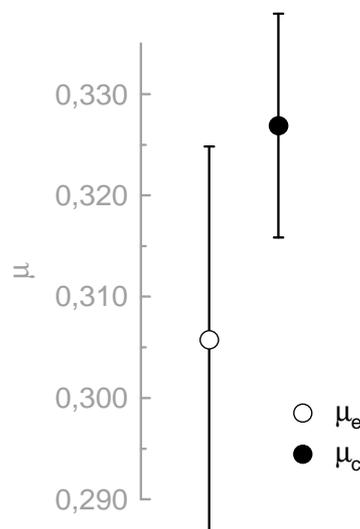


Figura 9 - Comparación de los coeficientes de rozamiento estático μ_e y cinético μ_c para el carrito con gamuza.

Fuerza de una hélice

Como se observa en la siguiente gráfica, el modelo teórico se corresponde con los datos experimentales obtenidos para el carrito propulsado por una hélice a distintos ángulos respecto al carril:

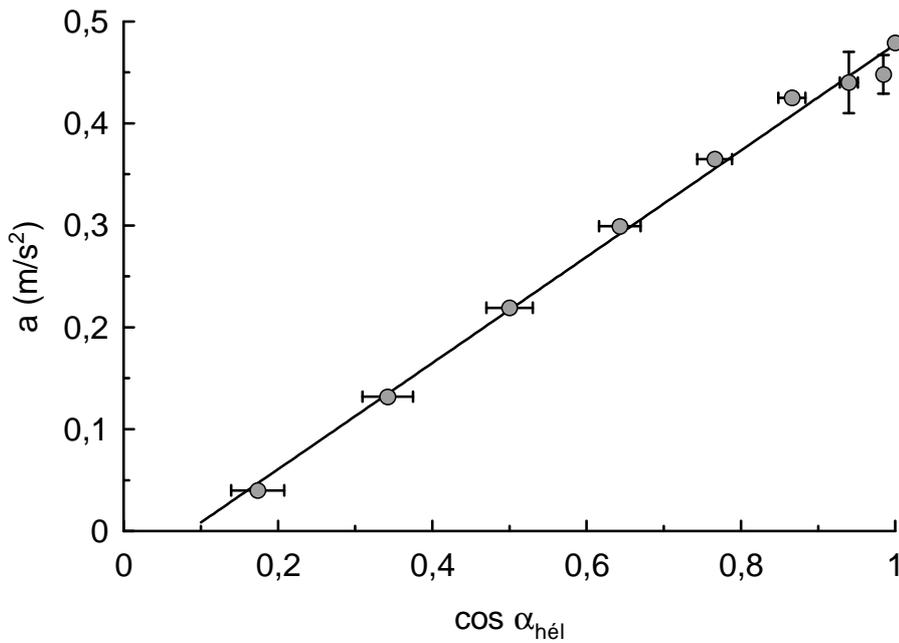


Figura 10 - Aceleración del carrito propulsado por una hélice según el ángulo respecto a la perpendicular del carril.
 Ecuación de la recta: $a = (0,521 \pm 0,014) \cdot \cos \alpha_{hél} + (-0,044 \pm 0,011) \text{ [m/s}^2\text{]}$ $r = 0,997$

Hay que resaltar que la recta obtenida tiene una ordenada en el origen algo alejada del cero, en contra de la ecuación [18], modelo según el cual la recta debería pasar por cero. Esto tiene una explicación muy clara: hemos despreciado la fuerza de rozamiento. El valor para el cual la aceleración se hace cero es el ángulo límite que medimos como $86 \pm 1^\circ$, cuyo coseno corresponde a la intersección de la recta con el eje x. Por otra parte, a partir de la pendiente A, según la ecuación [18] se obtiene la fuerza de la hélice:

$$a = \frac{F_{hél}}{m_{c+h}} \cos \alpha_{hél} \rightarrow F_{hél} = A \cdot m_{c+h} \rightarrow \delta_r (F_{hél})^2 = \delta_r (A)^2 + \delta_r (m_{c+h})^2 \quad [20]$$

Si observamos el ajuste de la recta, se comprueba que el comportamiento lineal es evidente excepto en los tres últimos puntos. Si realizamos el ajuste descartándolos, el coeficiente de correlación lineal aumenta considerablemente:

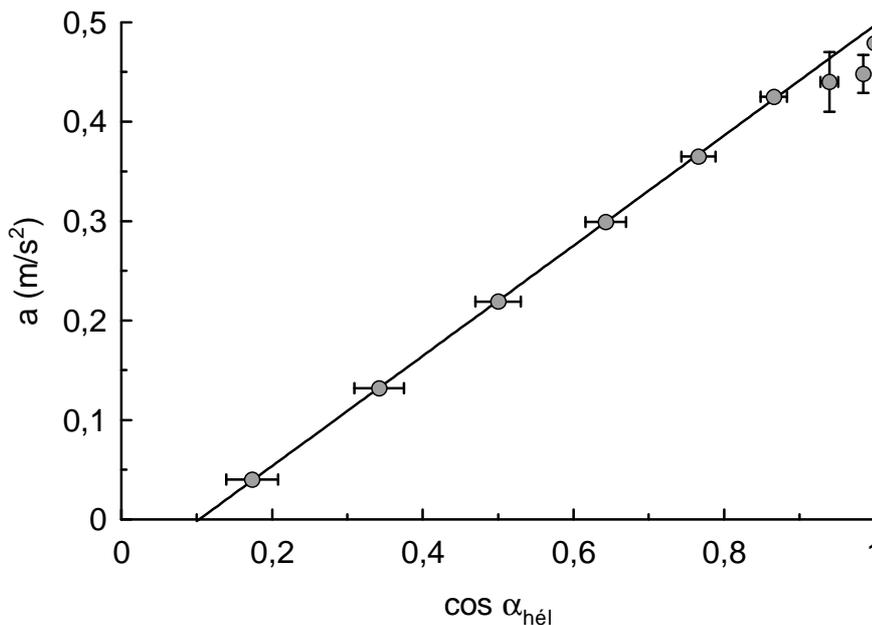


Figura 11 - Variante del ajuste por mínimos cuadrados descartando los tres últimos puntos.
 Ecuación de la recta: $a = (0,554 \pm 0,003) \cdot \cos \alpha_{hél} + (-0,0572 \pm 0,0018) \text{ [m/s}^2\text{]}$ $r = 0,99994$

Si calculamos el valor de la fuerza para las dos variantes, se obtiene:

$$F_{h\acute{e}l_1} = 0,295 \pm 0,008 \text{ N}$$

$$F_{h\acute{e}l_2} = 0,3136 \pm 0,0018 \text{ N}$$

Alternativamente, si calculamos $F_{h\acute{e}l}$ para cada par de medidas (ecuaciones [18] y [19]) y calculamos la media, se obtiene:

$$F_{h\acute{e}l_med} = 0,259 \pm 0,012 \text{ N}$$

En resumen, el modelo te3rico desarrollado predice correctamente el comportamiento lineal, como se ve en la gr3fica anterior, pero el haber despreciado el rozamiento provoca que la recta corte el eje de abscisas en un valor mayor que 0. Este corte corresponde con un 3ngulo funci3n de la pendiente A y la ordenada en el origen B:

$$0 = A \cos \alpha_{lim_h} + B \rightarrow \alpha_{lim_h} = \arccos \frac{-B}{A} \rightarrow \delta(\alpha_{lim_h})^2 = \left(-\frac{\frac{-1}{A}}{\sqrt{1 - \left(\frac{-B}{A}\right)^2}} \delta(B) \right)^2 + \left(-\frac{\frac{-B}{A^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{-B}{A}\right)^2}} \delta(A) \right)^2 \quad [21]$$

$$\alpha_{lim_h1} = 85,2 \pm 1,2^\circ$$

$$\alpha_{lim_h2} = 84,08 \pm 0,19^\circ$$

Ambos valores son compatibles con el 3ngulo cr3tico experimental ($\alpha_{lim_h} = 86 \pm 1^\circ$). El primer valor es el que m3s se ajusta al experimental, pues sus intervalos de error se solapan, con lo que concluimos que la determinaci3n de dicho 3ngulo ha sido acertada.

A partir de este 3ngulo podemos obtener el coeficiente de rozamiento est3tico. En la situaci3n donde el 3ngulo es l3mite, la fuerza de rozamiento provocada por el peso y por la fuerza de la h3lice lateralmente son equivalentes en m3dulo a la fuerza de propulsi3n (su componente paralela al carril):

$$F_{res} = F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h} = \mu_{est_h} (m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h}) \quad [22]$$

$$\mu_{est_h} = \frac{F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h}}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})} \quad [23]$$

$$\delta(\mu_{est_h})^2 = \left(\frac{\cos \alpha_{lim_h} \delta(F_{h\acute{e}l})}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})} - \frac{F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h} \sin \alpha_{lim_h} \delta(F_{h\acute{e}l})}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})^2} \right)^2 + \left(-\frac{F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h} g}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})^2} \delta(m_{c+h}) \right)^2 \quad [24]$$

$$+ \left(\frac{-F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h} \delta(\alpha_{lim_h})}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})} + \frac{F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h} \cdot F_{h\acute{e}l} \cos \alpha_{lim_h} \delta(\alpha_{lim_h})}{(m_{c+h} g + F_{h\acute{e}l} \sin \alpha_{lim_h})^2} \right)^2$$

$$\mu_{est1} = 0,0042 \pm 0,0010$$

$$\mu_{est2} = 0,0055 \pm 0,0002$$

El resultado calculado es del orden del obtenido en el primer apartado ($\mu_c = 0,0033 \pm 0,0003$), donde se evaluaba el rozamiento del carrito sobre el plano inclinado. Esto se debe a que los carritos eran similares y por tanto el coeficiente de rozamiento, dependiente del material, parecido. En este caso, el coeficiente es mayor porque se trata del est3tico, mientras que en el otro caso era el cin3tico. Esto se corresponde plenamente con lo esperado, pues experimentalmente est3 demostrado que el est3tico es siempre mayor que el cin3tico. Por tanto, estos resultados son concluyentes y concuerdan con lo esperado.

CONCLUSI3N

Este experimento ha cumplido el objetivo de analizar el movimiento bajo condiciones de rozamiento. Se ha estudiado tanto el coeficiente de rozamiento cin3tico como el est3tico y determinado sus valores. Adem3s, se ha obtenido el valor de la aceleraci3n de la gravedad compatible con el valor esperado, se ha calculado el valor de la fuerza de propulsi3n y se ha comprobado que el coeficiente de rozamiento est3tico es mayor que el cin3tico, con lo que el experimento se ha desarrollado satisfactoriamente. No obstante, es conveniente se3alar varias limitaciones que han causado tanto imprecisi3n en los resultados como errores sistem3ticos (por ejemplo al determinar g).

En cuanto a las limitaciones del método experimental, cabe destacar la dispersión en la medida de las aceleraciones, causada en parte por una deficiente detección por parte del sónar, cuya orientación era variable. La dificultad de orientarlo correctamente nos ha impedido obtener resultados más precisos. De la misma manera, el error en la medida del ángulo, como se puede comprobar mediante el análisis de errores, tiene un peso fundamental en el error final, con lo que habría que emplear un aparato de medida más preciso si se quisiese mejorar la precisión de los resultados.

Cabe señalar también que el estudio del rozamiento cinético se ha llevado a cabo despreciando el momento de inercia del carrito. Quizá sería más adecuado hacer deslizar un carro sin ruedas, cuya superficie tenga un rozamiento pequeño. De esta manera, la determinación de μ sería más precisa y adecuada (reducimos errores sistemáticos) y se correspondería más con el valor real.

Otra de las limitaciones del experimento ha sido la suciedad sobre el plano inclinado, que ha causado que no pudiésemos comparar adecuadamente el rozamiento estático con el cinético al ser los coeficientes distintos en función de la posición del plano. Para una correcta comparación de estos valores se debería limpiar a fondo la superficie del carril antes del experimento.

A lo largo del experimento se ha visto la influencia del rozamiento en todo movimiento en un medio viscoso. Por tanto, hay que tener siempre en cuenta que éste está siempre presente, y se debe valorar si despreciarlo o no dependiendo del ámbito de precisión que se quiera obtener. Por ejemplo, el rozamiento con el aire podría tener alguna influencia al comparar la aceleración según la masa. Y el rozamiento del carrito con hélice con el carril explica que exista un ángulo límite para el cual el carrito no puede moverse.

En resumen, podemos concluir que el experimento ha sido exitoso y que se han alcanzado los objetivos propuestos del estudio del rozamiento y la gravedad en un plano inclinado, tanto conceptual como cuantitativamente, puesto que se han obtenido valores concretos, se ha comparado los coeficientes de rozamiento cinético y estático y se ha comprobado correctamente el comportamiento de las medidas obtenidas de acuerdo a los modelos teóricos desarrollados.

Bibliografía:

- Tipler-Mosca, 5ª Ed 2005.; Ed. Reverté; Vol. IA y Apéndice
- Guión de prácticas del Laboratorio de Mecánica y Ondas, 2º de Física, UVEG
- Physikalisch Technische Bundesanstalt: <http://www.ptb.de>