

MÁQUINA DE ATWOOD:  
MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE  
MASAS UNIDAS POR UNA CUERDA  
EN EL SENO DE AIRE Y DE AGUA

*(Práctica n° 9: Atrapado en un ascensor)*

**FERNANDO HUESO GONZÁLEZ**  
*Pareja 7 - Grupo B-L1*  
2° DE FÍSICA - UVEG  
Laboratorio de Mecánica y Ondas  
*Práctica realizada el 9-II-09*

## OBJETIVO

En este experimento se estudia el movimiento de diferentes masas en una máquina de Atwood. Inicialmente se estudia el efecto del rozamiento de la cuerda y la polea, posteriormente la aceleración del sistema debido a una diferencia de masa entre las de cada extremo en el aire, y finalmente se estudia el movimiento acelerado hasta una velocidad límite de una esfera pequeña en el agua. Los objetivos principales del experimento son:

- la determinación del rozamiento del sistema;
- la determinación de la aceleración de la gravedad;
- la influencia de la masa total del sistema y la diferencia entre las masas de cada extremo, así como el rozamiento en la aceleración del sistema;
- el estudio del movimiento de una esfera en el seno del agua y la determinación de su velocidad límite;
- la identificación de dicho movimiento como régimen laminar o turbulento, así como la determinación del número de Reynolds y los parámetros característicos de la esfera (radio, coeficiente de forma o de arrastre).

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Las ecuaciones empleadas, que aquí no se demuestran (consultar bibliografía), son las siguientes: La aceleración del sistema viene dada por:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad [1]$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas en cada uno de los extremos de la cuerda de la máquina de Atwood.

El análisis de errores se realiza mediante el método estadístico de derivadas parciales.

La velocidad límite en los regímenes laminar y turbulento son respectivamente:

$$m_{ef} = m_1 - m_2 \rightarrow v_l = \frac{g}{6\pi\eta a} \left( m_{ef} - \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \right) \quad [2]$$

$$v_l = \left( \frac{2g}{C_d \pi \rho a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( m_{ef} - \frac{4}{3} \pi \rho a^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad [3]$$

donde  $m_1$  a es el radio de la esfera que se mueve en el fluido (agua),  $\eta$  su viscosidad,  $\rho$  su densidad y  $C_d$  el coeficiente de forma de la esfera.

El número de Reynolds caracteriza el régimen. Para valores pequeños, menores que 1, el régimen es laminar, mientras que para valores entre  $10^3$  y  $10^5$  el régimen es turbulento.

$$R = \frac{\rho l v}{\eta} \quad [4]$$

## Introducción teórica más desarrollada

Hemos comentado que las claves de nuestro experimento son los conceptos de fuerza, masa y aceleración, lo que nos conduce irrevocablemente a las Leyes de Newton, concretamente a la segunda (1).

$$\sum_i F_i = m_{total} a \quad (1)$$

Como es por todos sabido en ella se relacionan precisamente los conceptos que nos interesan, dándonos un buen punto de partida para estudiar la aceleración de un cuerpo a partir de su masa.

Sin embargo, cómo suele ocurrir, la utilización de esta Ley arrastra las otras dos, de igual importancia que la citada. De hecho, es precisamente la tercera Ley la que, en resumen, nos dice que toda fuerza aplicada sobre un cuerpo implica otra de igual módulo y sentido contrario.

Precisamente esto último es lo que nos permite definir la tensión de una cuerda como la fuerza que se opone a la aplicada en el otro extremo. Por ejemplo, en el caso de una cuerda fija de la cual penda un cuerpo, podemos decir que la tensión es igual en módulo al peso. (2)

$$T = mg \quad (2)$$

Con todo lo expuesto hasta el momento estamos en disposición de comprender el funcionamiento de “la máquina de Atwood”, montaje experimental ideado por George Atwood en 1784 para calcular el valor de la aceleración de la gravedad.

El montaje original consta de una cuerda con pesas en ambos extremos colocada sobre una polea (Fig. 1). Si despreciamos el rozamiento y los factores de inercia del sistema obtenemos un método sencillo de operar con una precisión aceptable.

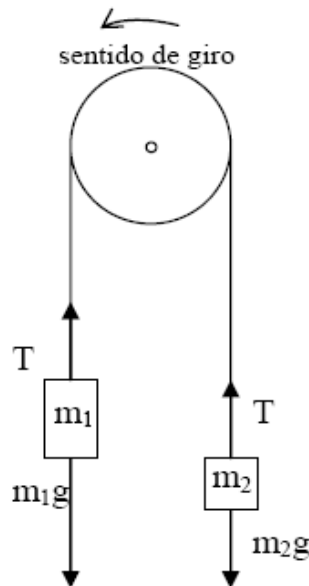


Fig. 1: Esquema de la “máquina de Atwood”

Aplicando lo anteriormente comentado a ambas partes de la cuerda, obtenemos las expresiones (3) y (4), de las cuales podemos, despejando la tensión, obtener la aceleración en función de las masas (5) con su correspondiente error de propagación (6).

$$m_1 g - T = m_1 a \quad (3)$$

$$m_2 g - T = -m_2 a \quad (4)$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (5)$$

$$\delta(a) = \frac{2g}{(m_1 + m_2)} \sqrt{(m_1 \delta(m_2))^2 + (m_2 \delta(m_1))^2} \quad (6)$$

Esto nos permite por fin explotar las posibilidades del montaje, pues modificando a conciencia la masa de los cuerpos podemos controlar la aceleración de caída/subida de las pesas, lo que nos permitirá obtener la relación que buscamos.

Por otro lado, en la segunda parte del experimento, la fuerza de rozamiento pasará de ser una magnitud despreciada a ser el centro de nuestra investigación. Concretamente analizaremos las características del fluido empleado a partir de la relación entre la velocidad y algunas de sus propiedades como la densidad o la fluidez. De hecho será esta dependencia con una u otra magnitud la que marque el régimen al que responde el fluido a estudiar.

Podría darse el caso de que la velocidad del objeto sumergido dependa de la viscosidad, lo que indicaría que se está moviendo en un régimen laminar y que responde la ecuación de Stokes (7).

$$F(v) = 6\pi\eta a v \quad (7)$$

Sin embargo, esta velocidad podría ser proporcional a la densidad, lo que indicaría su carácter turbulento. En este caso la ecuación que describiría su movimiento vendrá de la mano de Newton (8).

$$F(v) = \frac{1}{2} C_d \rho \pi a^2 v^2 \quad (8)$$

Precisamente de estas expresiones podemos obtener otras que nos permitan evaluar el régimen del fluido a partir de la velocidad límite del cuerpo cuando se desplaza en su interior.

Esta velocidad límite no es otra que la velocidad del cuerpo a partir del momento en el que la fuerza de rozamiento sumada al empuje iguala su peso, por lo que el movimiento pasa a ser uniforme.

En el caso de un régimen laminar emplearemos la ecuación (9), mientras que en un caso de régimen turbulento haremos lo propio con (10).

$$v_{\text{límite}} = \frac{g}{6\pi\eta a} \left( m_{ef} - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \right) \quad (9)$$

$$v_{\text{límite}}^2 = \left( \frac{2g}{\pi a^2 \rho C_d} \right) \cdot \left( m_{ef} - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \right) \quad (10)$$

Otra forma más rápida de determinar el régimen del fluido empleado es el análisis del número de Reynolds (11), el cual indicará régimen laminar con valores muy pequeños o turbulento en caso de estar comprendido entre  $10^3$  y  $2 \times 10^3$ . De nuevo calculamos por el método de las derivadas parciales el error asociado a esta medida (12).

$$R_y = \frac{\rho l v}{\eta} \quad (11)$$

$$\delta(R_y) = \frac{\rho}{\eta} \sqrt{(v \delta(l))^2 + (l \delta(v))^2} \quad (12)$$

## Montaje experimental

En nuestro caso, la máquina de Atwood empleada ha sufrido unas ligeras modificaciones que no afectan en absoluto al funcionamiento descrito. Por ejemplo, el número de poleas, pues utilizaremos 2 pequeñas en lugar de una de mayor tamaño. Esto no ha sido una elección propia sino una circunstancia impuesta por el montaje disponible en el laboratorio. Sin embargo podemos encontrarle ventajas frente al original, pues al ser más pequeñas reducimos el rozamiento y la influencia que su inercia pudiese ejercer en el sistema, razón de más para despreciarlos a lo largo de toda la experiencia.

Otro aspecto modificado ha sido la medida del tiempo, en la cual se basa el cálculo de la velocidad y la aceleración, pues empleamos un ordenador que obtenía los datos a través de una célula fotoeléctrica orientada hacia los radios de la polea. Lo que hacía especialmente cómodas y precisas las sucesivas medidas (Fig. 1).

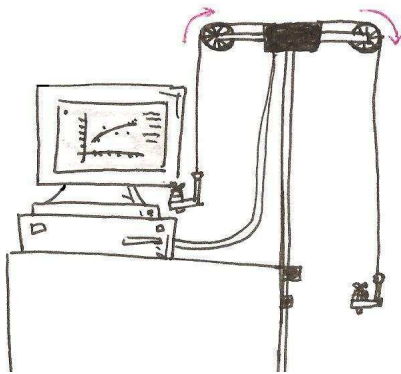


Fig. 2: Primera parte

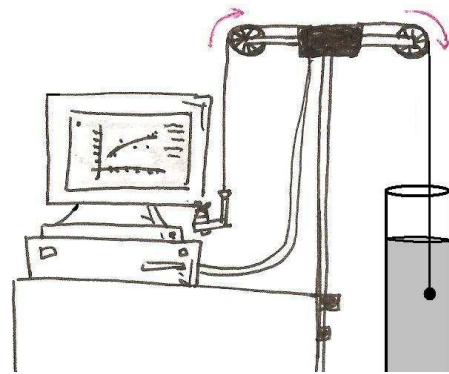


Fig. 3: Segunda parte

Llegados a la segunda parte (Fig. 2) de la experiencia tuvimos que modificar ligeramente el montaje para adecuarlo a las nuevas expectativas. Por ello colocamos un tubo de agua bajo una de las poleas con la intención de que el cuerpo colgado de ella se sumergiera al comenzar su descenso.

Además, en esta parte nos interesaba un cuerpo de masa fija, por lo que sustituimos uno de los portapesas por una bola de metal. Este objeto presentaba otro beneficio respecto del anterior, pues su forma esférica minimizaba la actuación de la fuerza de rozamiento, lo que queda recogido en las pertinentes ecuaciones con el llamado coeficiente de forma.

El ajuste lineal, utilizando la expresión 7, tiene dos parámetros: A (la pendiente de la recta) y B (la ordenada en el origen), que serán

$$A = \frac{2g}{\pi r^2 \rho C_d}$$

$$B = -\frac{8gr}{3C_d} \quad (8)(9)$$

Recombinando estas expresiones se pueden obtener dos valores. En primer lugar se puede obtener un radio teórico para la esfera,  $r_t$ , que será

$$r_t^3 = -\frac{3B}{4\pi A\rho} \quad (10)$$

y el factor de forma, que es uno de los objetivos del experimento

$$C_d^3 = \frac{128g^3}{\rho 9\pi AB^2} \quad (11)$$

# RESULTADOS

## Movimiento en el aire

Se le da un pequeño impulso al platillo 2 (columna derecha en las masas) hacia abajo.

**Tabla 1** – Valores de la aceleración obtenidos a partir del ajuste lineal por mínimos cuadrados del ordenador de los datos de velocidad (a partir de sucesivos cortes del haz fotoeléctrico por el radio de la polea) frente al tiempo.

$m \pm 0,01g$		R	B (m/s)	M (m/s <sup>2</sup> )	F (N)	$a_m$ (m/s <sup>2</sup> )
34,96	35,01	0,99	0,254	-0,0328	0,90 $\pm$ 0,07	0,007 $\pm$ 0,002
		0,969	0,594	-0,0341	0,95 $\pm$ 0,07	
		0,987	0,637	-0,0432	1,27 $\pm$ 0,10	
40,01	40,01	0,969	0,811	-0,0438	1,47 $\pm$ 0,06	0,000 $\pm$ 0,001

*Nota: R es el coeficiente de correlación, B la velocidad inicial y M la pendiente en la gráfica velocidad frente a tiempo.*

*$a_m$  se calcula según la diferencia de masa entre el lado izquierdo (I) y derecho (II) según la ecuación [I].*

*La fuerza se calcula (en módulo) restando a  $a_m$  la columna M y multiplicando por la masa en cuestión. En ambas columnas se obtiene el mismo resultado para la fuerza pese a que las masas sean distintas porque la precisión no es suficiente.*

La aceleración por rozamiento la despreciaremos y causará un error de casi una décima, y dicho error crece con la velocidad. En el rozamiento interviene la cuerda y la polea principalmente

Otras causas de error observadas nada más comenzar el experimento son:

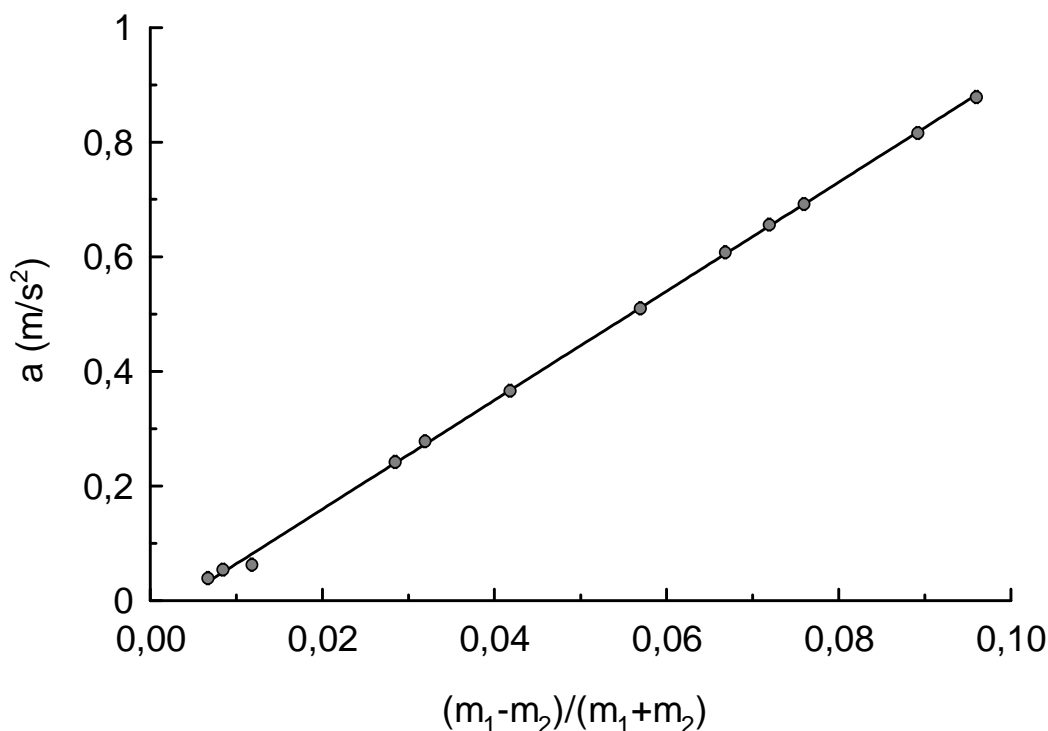
- El haber despreciado el momento de inercia de la polea.
- El desprecio de la masa de la cuerda, así como su torsión y el giro de la masa sobre sí misma.
- El rozamiento con el aire.
- Las oscilaciones horizontales del cable (que originan oscilaciones en la bajada, lo cual perturba la uniformidad del movimiento).
- Una excesiva precisión (poco error) en el peso de las masas, que podría verse influido por la grasa de las manos, o por un error sistemático de la báscula, etc. Convendría haber elegido pesas más grades para reducir el error relativo.

En esta segunda parte se cargan los platillos y se suelta el segundo desde lo alto.

**Tabla 2** – Valores de la aceleración obtenidos a partir del ajuste lineal por mínimos cuadrados del ordenador de los datos de velocidad (a partir de sucesivos cortes del haz fotoeléctrico por el radio de la polea) frente al tiempo.

$m \pm 0,03g$	R	B (m/s)	M (m/s <sup>2</sup> )	$m_{at} \pm 0,00015$
135,50	164,27	1,00	0,373	0,879
136,52	163,25	1,00	0,348	0,816
138,50	161,27	1,00	0,298	0,692
143,62	156,15	1,00	0,179	0,366
145,62	154,15	1,00	0,19	0,242
148,62	151,15	0,999	0,0242	0,0541
185,73	214,51	1,00	0,295	0,656
186,75	213,49	1,00	0,316	0,608
188,73	211,51	1,00	0,259	0,51
193,73	206,51	1,00	0,142	0,278
197,76	202,48	1,00	0,055	0,0628
198,78	201,46	0,999	0,0341	0,0395

*Nota:  $m_{at}$  es el cociente de masas que acompaña a g en la ecuación [1].*



**Figura 1 - Dependencia lineal entre la aceleración y una función de las masas en la máquina de Atwood.**

Ecuación de la recta:  $a = (9,51 \pm 0,06) \cdot (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2) + (-0,031 \pm 0,004) \text{ [m/s}^2\text{]}$   $r = 0,9998$

Se observa un buen ajuste de la recta a los puntos experimentales, como se comprueba a partir del coeficiente de correlación lineal. El tercer punto sale algo desviado, lo cual coincide con una observación que realizamos en la medida. Al soltar el platillo y ser la diferencia de masas tan escasa, el movimiento tardó en iniciarse debido presumiblemente al rozamiento estático a la rodadura. Por ello, el valor de la aceleración es algo menor de lo esperado según el ajuste lineal.

Según la ecuación [1], la pendiente coincide con el valor de la aceleración de la gravedad  $g$ :

$$g = 9,51 \pm 0,06 \text{ m/s}^2$$

El valor es algo distante de lo esperado por los errores experimentales comentados antes. Además, se observa que la ordenada del origen está algo alejada de cero, lo que se debe en gran parte a que hemos despreciado la aceleración de rozamiento (negativa). De hecho, una media de los valores obtenidos del ajuste de la aceleración de rozamiento en el anterior apartado es muy similar al de la ordenada en el origen, lo cual es totalmente consistente.

El valor de  $g$  obtenido no depende de la masa total del sistema, sino tan sólo de la diferencia de masa entre los platillos. Es posible que cuanto mayor sea la masa del sistema, menor error relativo se comete y menos influye el rozamiento en la determinación de la aceleración de la gravedad.

Por completitud, se estudia el movimiento libre de la polea, sin cuerdas, para comprobar el rozamiento debido a su propia rotación, y se obtiene la siguiente pendiente en el ajuste, que representa la aceleración de rozamiento:  $M = -0,293$  ;  $r=0,998$ . Esto demuestra que el rozamiento de la polea influye más cuanto menor es la masa del sistema.

Otra manera de comprobar el efecto del rozamiento es buscar aquella combinación de masas que haga que la recta tenga pendiente cero. En ese momento, la aceleración debida a la diferencia de masas y la aceleración debida al rozamiento están totalmente compensadas y son iguales en módulo y de signo opuesto. El resultado es que las masas se mueven con movimiento uniforme. Experimentalmente, encontramos esta condición aproximadamente para una diferencia de masas entre los platillos de  $0,30 \pm 0,01\text{g}$  y una carga total de  $100,24\text{g}$ . El valor de la pendiente obtenido es de  $-0,009\text{m/s}^2$  y el de la aceleración de rozamiento es de  $-0,029 \pm 0,003 \text{ m/s}^2$ , valor que es plenamente compatible con el obtenido a partir del ajuste en la figura anterior.

## Movimiento en el agua

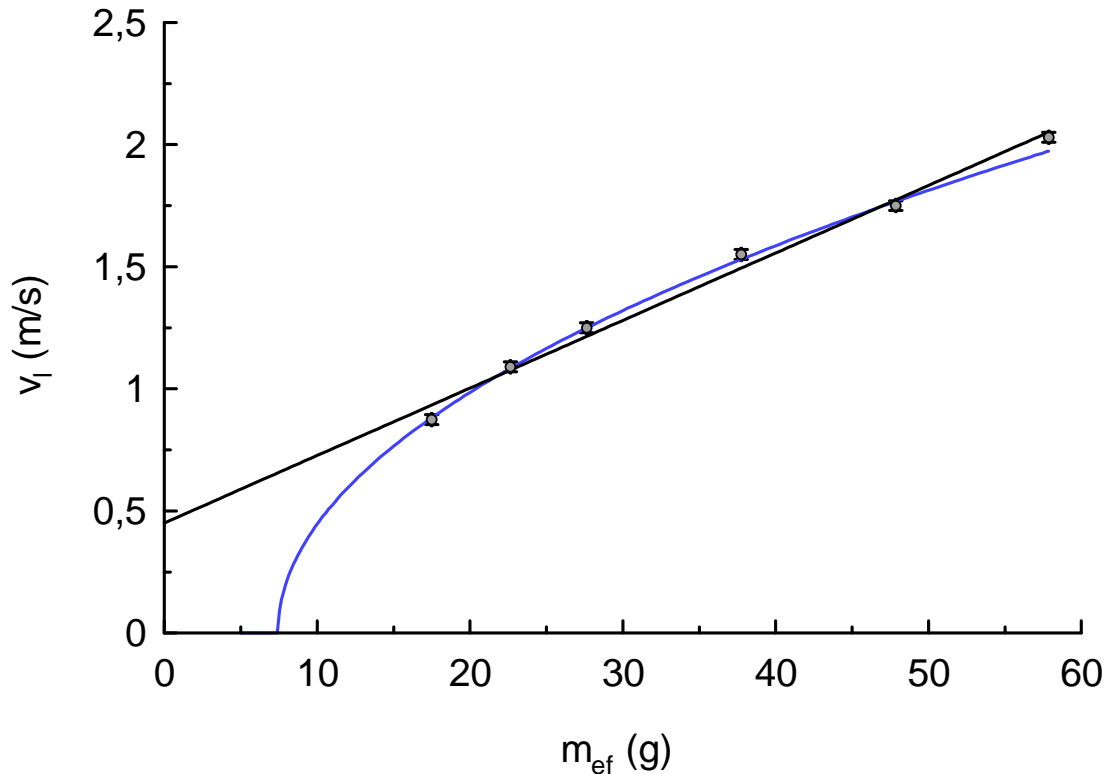
En este caso, se coloca en un extremo de la cuerda una esfera dura y en el otro distintas masas, de forma que el peso de la esfera menos su empuje sea siempre mayor que el peso de las masas del otro extremo para que se pueda soltar desde lo alto y la esfera caiga verticalmente hacia el suelo por el interior del tubo de agua.

**Tabla 3 – Velocidad límite obtenida para el movimiento de una esfera en el agua en la máquina de Atwood.**

$m \pm 0,02g$	$m_{ef} \pm 0,03g$	$V_{lim} \pm 0,02 \text{ m/s}$	$M \text{ (m/s}^2\text{)}$	$m_{at} \pm 0,00015$	
63,16	5,30	57,86	2,03	0,879	0,09597
	15,31	47,85	1,75	0,816	0,08917
	25,41	37,75	1,55	0,692	0,07596
	35,52	27,64	1,25	0,366	0,04180
	40,52	22,64	1,09	0,0395	0,00670
	45,66	17,50	0,87	0,242	0,02846

*Nota: La velocidad límite se leía de los últimos valores de la tabla de datos registrados por el ordenador. Por ello, es importante detener la detección antes de que la bola toque fondo.*

Representando la velocidad límite frente a la masa efectiva, según las ecuaciones [2] y [3]:



**Figura 2 - Ajuste de la velocidad límite frente a la masa efectiva según el régimen laminar (negro) o turbulento (azul).**

Régimen laminar:  $v_l = (0,0277 \pm 0,0013) \cdot (m_{ef} - (-16 \pm 3))$  [m/s]  $r = 0,995$

Régimen turbulento:  $v_l = (0,278 \pm 0,003) \cdot (m_{ef} - (7,4 \pm 0,5))^{1/2}$  [m/s]  $r = 0,999$

*Nota: Para el ajuste al régimen turbulento se prescinde del punto más a la derecha.*

Como se observa, el ajuste según el régimen turbulento es más preciso, mientras que el laminar se obtiene una ordenada en el origen positiva, cuando se esperaría que fuese negativa, y un coeficiente de correlación menor. Podemos afirmar que estamos en una región de velocidades del régimen turbulento, lo que se confirma calculando el número de Reynolds según la ecuación [4] (se toma densidad y viscosidad del agua destilada, velocidad límite del orden de las medidas y  $l=2a$ , diámetro de la esfera) y sustenta la compatibilidad de los datos medidos experimentalmente:

$$R \approx 30000$$



Según las ecuaciones [2] y [3], identificando correctamente la expresión con los parámetros resultantes del ajuste, podemos calcular el radio de la esfera  $a$  y el coeficiente de forma  $C_d$ :

$$a = 1,21 \pm 0,05 \text{ cm}$$

$$C_d = 0,55 \pm 0,05$$

El valor del radio es del orden del medido experimentalmente ( $a_{\text{exp}} = 1,10 \pm 0,01 \text{ cm}$ ) y el valor del coeficiente de forma o arrastre es cercano al valor típico de una esfera (alrededor de 0,4).

Las posibles causas de desviación respecto a lo esperado por efectos no tenidos en cuenta son:

- La oscilación de las masas al caer.
- El haber despreciado la fuerza de rozamiento.
- La suciedad del agua, cuya viscosidad y densidad podrían ser algo distintas al valor utilizado (agua destilada).

## CONCLUSIÓN

En esta práctica se ha estudiado el movimiento de masas en la máquina de Atwood, tanto en el aire como en el agua. Se ha analizado el efecto del rozamiento de las poleas en la aceleración del sistema, y se ha determinado el valor de la aceleración de la gravedad. Además, se ha estudiado el movimiento de una esfera en agua, que se ajusta a las características de un régimen turbulento. Se ha determinado el número de Reynolds, así como las parámetros característicos de la esfera (radio y coeficiente de forma).

Los valores más importantes que se han determinado en este experimento son los siguientes:

**Tabla 4** – Valores obtenidos y comparación con los valores esperados (*Bibliografía e Internet*).

	Valor obtenido	Valor esperado	Desv. relativa
$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	$9,51 \pm 0,06$	9,80	3%
$a_{\text{roz}} \text{ (m/s}^2\text{)}$	$0,031 \pm 0,004$	$0,029 \pm 0,003$	-7%
$R$	$3 \cdot 10^4$	$10^3 - 10^5$	/
$a \text{ (cm)}$	$1,21 \pm 0,05$	$1,10 \pm 0,01$	-10%
$C_d$	$0,55 \pm 0,05$	0,45	-22%

Se observa, por tanto, que los valores no son compatibles (están a más de dos barras de error), pero que entran en su mayoría dentro de lo aceptable experimentalmente (<10%). Las limitaciones experimentales principales, que han provocado esta imprecisión en los resultados, han sido el rozamiento del sistema (la cuerda con las poleas y las poleas sobre su eje), el rozamiento del aire, la oscilación que perturbaba la verticalidad del movimiento, el desprecio de la masa de las poleas (inercia) así como de la cuerda y las aproximaciones realizadas sobre el fluido como agua destilada.

En resumen, podemos concluir que el experimento ha cumplido el objetivo de estudiar el movimiento de masas en la máquina de Atwood tanto en el aire como el agua y que los valores calculados se ajustan y son compatibles, dentro de las limitaciones experimentales citadas, con lo esperado según los desarrollos teóricos. Por tanto, el experimento se ha desarrollado satisfactoriamente y se han logrado los objetivos propuestos.

### Bibliografía:

- Guión de prácticas del Laboratorio de Mecánica y Ondas, 2º de Física, UVEG