

MOVIMIENTO OSCILATORIO:
PERIODO Y AMORTIGUAMIENTO
EN EL PÉNDULO SIMPLE Y
EL PÉNDULO FÍSICO

(Práctica nº 4: Galileo y el Péndulo)

FERNANDO HUESO GONZÁLEZ

Pareja 7 - Grupo B-L1

2º DE FÍSICA - UVEG

Laboratorio de Mecánica y Ondas

Práctica realizada el 24-XI-08

Informe entregado el 1-XII-08

OBJETIVO

En este experimento se estudia el movimiento oscilatorio de un péndulo simple y un péndulo físico mediante un cronómetro de precisión conectado a una célula fotoeléctrica. Los objetivos principales del experimento son:

- el estudio de la dependencia del periodo del péndulo simple con la amplitud de oscilación;
- la determinación de la aceleración de la gravedad a partir del periodo de oscilación;
- el estudio del amortiguamiento y la obtención de la constante de tiempo y del factor de calidad;
- el estudio en el péndulo físico de la dependencia del periodo con el ángulo de la varilla respecto al plano vertical de oscilación y
- la comparación de los momentos de inercia de la masa obtenidos experimental y teóricamente.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El objeto de estudio en este experimento es el movimiento de un péndulo: su dependencia del período con la amplitud, el amortiguamiento al que está sometido y el estudio del ejemplo concreto del péndulo físico, donde el momento de inercia es influyente en el planteamiento teórico.

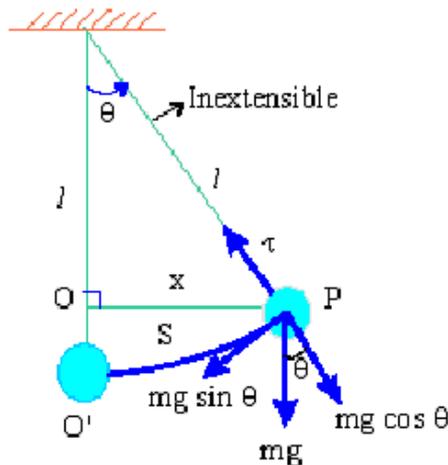


Figura 1 - Diagrama de fuerzas en un péndulo simple.

Si consideramos un péndulo como el de la anterior figura, según las leyes de Newton y relaciones trigonométricas podemos obtener la ecuación diferencial que caracteriza el movimiento e identificar la frecuencia angular ω_0 del movimiento oscilatorio:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad [1]$$

En este planteamiento se considera que el péndulo es un sistema ideal formado por un hilo inextensible y masa despreciable, suspendido por un punto fijo en el extremo superior (pivote sin rozamiento) y suspendido de su extremo inferior una masa puntual.

Si se desarrolla por Taylor el término del seno y se restringe a pequeñas oscilaciones, se obtiene la ecuación de un movimiento armónico simple:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi) \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad [2]$$

Si se generaliza para cualquier amplitud inicial, la expresión del movimiento se obtiene resolviendo una integral elíptica de primera clase.

No obstante, si el ángulo no es demasiado grande podemos truncar el desarrollo en serie en los términos de segundo orden, con lo que obtenemos que el período es aproximadamente:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad [3]$$

Esta fórmula difiere en cuanto a la anterior en su dependencia con el ángulo de oscilación, pero su relación con la longitud y la gravedad no varía; en ambos casos, el periodo será el doble cuando la longitud se cuadriplique o la gravedad se divida entre cuatro, mientras que la masa no influye en el valor del mismo (puesto que se ha despreciado el efecto del rozamiento viscoso). Por ello, si se llevase el péndulo a la luna, donde la gravedad es menor, el periodo del péndulo sería mayor, con lo que si se utilizase como reloj estaría retrasando con respecto al tiempo del mismo péndulo medido en la Tierra.

No obstante, este sistema ideal no se da en la realidad, pues todo sistema oscilante está sometido a rozamiento y amortiguación por diversos factores. Una manera de cuantificar dicha amortiguación es estudiar la tasa de pérdida de energía por ciclo (oscilación). A este cociente se le denomina factor de calidad Q (multiplicado por una constante histórica arbitraria):

$$Q = 2\pi \left| \frac{E}{\Delta E}_{\text{ciclo}} \right| \quad [4]$$

Para obtener el valor de Q es necesario plantear previamente la ecuación de movimiento de un péndulo amortiguado. En la ecuación diferencial aparece una fuerza de rozamiento proporcional a la primera derivada del ángulo (velocidad angular):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \quad [5]$$

La solución a esta ecuación diferencial homogénea es (para pequeñas oscilaciones) representa un decaimiento exponencial de la amplitud con el tiempo (τ es la constante de tiempo o relajación):

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \theta_0) \quad [6]$$

Para hallar la velocidad podemos multiplicar la ecuación por L (longitud del péndulo) de forma que se obtiene el arco. Al derivar esta ecuación (donde v es la velocidad y A_0 la elongación (de arco) inicial en $t = 0$ respecto del equilibrio) se obtiene aproximadamente, (si se supone que al amortiguamiento es débil es lícito despreciar los términos del orden T/τ):

$$v \approx A_0 \omega e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega t + \theta_0) \rightarrow v_{\text{max}} = A_0 \omega \quad [7]$$

Asimismo, si el amortiguamiento es débil, podemos aproximar el factor de calidad Q por:

$$Q = 2\pi \left| \frac{E}{\Delta E}_{\text{ciclo}} \right| \approx 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega\tau \quad [8]$$

Estudiemos ahora el caso de un péndulo físico. Un péndulo físico es un cuerpo de masa m suspendido de un punto que dista una distancia d_{cm} de su centro de masas y que puede realizar un movimiento oscilatorio alrededor del punto de suspensión.

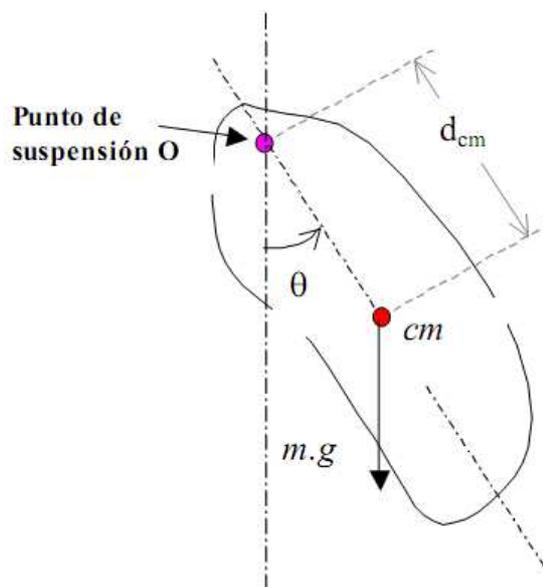


Figura 2 - Esquema de un péndulo físico.

Según las leyes de la dinámica, el momento de fuerzas aplicadas es función del momento de inercia del péndulo y de la aceleración angular:

$$M = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad [9]$$

θ corresponde al ángulo de giro de la varilla respecto a la vertical. La fuerza presente, si despreciamos el rozamiento, es la gravedad y está aplicada sobre el centro de masas del péndulo físico, de masa m , con lo que la ecuación del movimiento queda:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd_{cm} \sin\theta = 0 \quad [10]$$

De igual manera, si aproximamos para ángulos pequeños ($\sin\theta \approx \theta$) obtenemos la ecuación de un movimiento armónico simple con su respectiva frecuencia propia:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd_{cm}}{I}} \quad [11]$$

Cabe resaltar que la fuerza que actúa sobre el sistema corresponde a la componente de la gravedad paralela al péndulo. Si tenemos por ejemplo una varilla y la desplazamos un ángulo φ respecto al plano contenido en el papel (**Figura 2**), tan sólo actúa una componente de la fuerza. Por tanto, se puede definir la gravedad efectiva e introducir la misma en la expresión de la pulsación:

$$M = M_0 \cos\varphi = mgd_{cm} \cos\varphi \rightarrow g_{ef} = g \cos\varphi \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mg_{ef}h}{I}} \quad [12]$$

DISEÑO Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para estudiar el movimiento del péndulo simple preparamos un montaje experimental de un péndulo suspendido por dos hilos de la misma longitud. Ésta puede regularse mediante una clavija con el objeto de que ambos hilos estén igual de tensos. Con este montaje se reduce en gran parte la oscilación lateral que pueda sufrir el péndulo (movimiento en 3D, péndulo esférico), efecto que perturba el movimiento simple a estudiar que tiene lugar en el plano de oscilación.

Hay que tratar de alinear correctamente el sistema soporte-hilo-porta-ángulos. Por una parte, los cables deben tener exactamente la misma longitud (de no ser así, podría haber algún error sistemático); por otra, el plano en el que oscila el péndulo debe coincidir o ser paralelo a aquél en el que está contenido el porta-ángulos para que la medida del mismo sea fiable. Además, el péndulo en reposo debe marcar un ángulo cero. En caso contrario, hay que realizar una corrección de cero. En nuestro montaje particular, el porta-ángulos estaba fijo al soporte, con lo que no era fácil la corrección de la alineación; por tanto, podría haber algún error sistemático debido a una incorrecta determinación del ángulo. Es por ello que, pese a ser la sensibilidad de $0,1^\circ$, hemos sido cautelosos y aumentamos el error hasta $0,5^\circ$ por el citado motivo y por ser difícil la medida del ángulo “a ojo”, puesto que la masa tiene un diámetro considerable y según desde qué perspectiva ajustes a un ángulo desplazas más o menos el péndulo.

Antes de empezar el experimento en sí, realizamos las medidas de los distintos elementos de nuestro montaje, que podrán ser necesarios para posteriores cálculos:

$$L_m = 114,7 \pm 0,2 \text{ cm (cinta métrica)}$$

$$h = 31,60 \pm 0,05 \text{ mm (pie de rey)}$$

$$d = 28,90 \pm 0,05 \text{ mm}$$

$$L_{cm} = L_m + h/2 = 116,3 \pm 0,2 \text{ cm}$$

En el error asociado a la longitud entre el cuerpo y el punto central entre los dos puntos de sujeción del hilo (mediatriz entre los dos hilos) se ha tenido en cuenta el error de sensibilidad de la cinta métrica ($0,1\text{cm}$) y la incertidumbre inherente al centrado de la medida entre ambos hilos, que se realiza “a ojo”. Para una determinación más exacta de esta distancia, habría que medir por ejemplo la longitud de cada hilo y de la estructura entre ellos y obtener por Pitágoras L_m . La distancia h corresponde a la altura

de la masa suspendida, d al diámetro de la misma y L_{cm} es la distancia desde el punto de suspensión a la misma.

No es necesario conocer la masa del cuerpo suspendido por los hilos, ya que no entramos en valoraciones de la fuerza de rozamiento y la inercia del cuerpo, con lo que suponemos el período independiente de su masa.

En la segunda parte de la práctica empleamos un péndulo físico constituido por una varilla que puede oscilar y una masa sujeta en uno de sus extremos. La varilla puede inclinarse un ángulo ϕ respecto a su anterior plano de oscilación, de forma que podemos “simular” efectivamente una variación de la aceleración de la gravedad, pues sólo la componente del coseno tiene influencia sobre el movimiento. La componente restante se compensa por fuerzas normales. En nuestro montaje particular, la varilla está fija al soporte, con lo que no podemos medir su masa. Esto constituye una limitación experimental importante, ya que se está despreciando el momento de inercia de la misma suponiendo su masa despreciable respecto a la del cuerpo fijado en su extremo, cuyas dimensiones y masa sí medimos.

$$L_v = 30,6 \pm 0,2 \text{ cm (regla)}$$

$$a = 19 \pm 1 \text{ mm (regla)}$$

$$m = 109 \pm 1 \text{ g (báscula electrónica)}$$

En el error asociado a la longitud de la varilla L_v se ha tenido en cuenta el error de sensibilidad de la regla (0,1cm) y la incertidumbre en cuanto a la determinación de dónde acaba la longitud de la varilla, puesto que su punto de sujeción no está totalmente en un extremo. Por otra parte, a representa la altura de la masa, y se emplea para calcular la distancia entre el punto de sujeción y el centro de masas del cuerpo:

$$d_{cm} = L_v - a/2 = 29,7 \pm 0,2 \text{ cm}$$

En cuanto al estudio dinámico del movimiento del péndulo, realizamos medidas directas del tiempo mediante un cronómetro de gran precisión (hasta 6 cifras decimales) conectado a una célula fotoeléctrica fijada a un soporte fijo (se puede regular su posición y orientación sobre el mismo). Por una parte empleamos el modo ‘Simple Pend. 2’ para obtener el periodo directamente. Por otra, utilizaremos el modo ‘Gate’ con 16 memorias, que registra automáticamente y sucesivas veces el tiempo durante el que el cuerpo interrumpe el haz de la célula fotoeléctrica para calcular aproximadamente la velocidad instantánea.

Para obtener unos valores del período fiables y contrastados se realiza cada medida tres veces, las cuales son suficientes si su dispersión es menor del 2%. Se calcula la media de los tres valores y se le asigna el error mayor entre la sensibilidad y el error de dispersión.

En la primera parte del experimento se estudia la dependencia del período del péndulo con la amplitud de oscilación. Para ello se mide el período desde distintos ángulos iniciales, por ejemplo desde 30° hasta 14° a intervalos decrecientes de 2° , y se repite el proceso para los mismos ángulos por el lado opuesto. Para corregir un posible error de cero, se toma la media entre ambos valores del período T_+ y T_- para $+\theta$ y $-\theta$ respectivamente:

$$T = \frac{T_+ + T_-}{2} \rightarrow \delta_r(T)^2 = \delta_r(T_+)^2 + \delta_r(T_-)^2 \quad [13]$$

Mediante estos valores medios del periodo para cada ángulo estaremos en condiciones de realizar una representación gráfica y verificar el modelo teórico con un ajuste por mínimos cuadrados. Al representar el periodo frente al seno al cuadrado del ángulo, se espera que las medidas se ajusten a una recta. Tanto a partir de la ordenada en el origen B como de la pendiente A obtenidas del ajuste, es posible calcular la aceleración de la gravedad:

$$\delta(\sin^2 \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta \delta\theta \quad (\theta \text{ en radianes}) \quad [14]$$

$$B = 2\pi \sqrt{\frac{L_{cm}}{g}} \rightarrow g_1 = 4\pi^2 \frac{L_{cm}}{B^2} \rightarrow \delta_r(g_1)^2 = \delta_r(L_{cm})^2 + 4\delta_r(B)^2 \quad [15]$$

$$A = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L_{cm}}{g}} \rightarrow g_2 = \frac{\pi^2}{4} \frac{L_{cm}}{A^2} \rightarrow \delta_r(g_2)^2 = \delta_r(L_{cm})^2 + 4\delta_r(A)^2 \quad [16]$$

Cabe comentar que en la expresión empleada se han truncado después del seno cuadrado el desarrollo en serie. Por tanto, el valor calculado de g_2 es sólo aproximado, ya que se han despreciado muchos términos que contribuyen al mismo. Por contra, la ordenada en el origen sigue siendo la misma independientemente de cuántos términos se mantengan en el desarrollo en serie, con lo que el valor de g_1 será mucho más preciso y adecuado que el obtenido a partir de la pendiente.

En la siguiente parte del experimento se estudia el amortiguamiento al que está sometido el péndulo a partir de una medida indirecta de la velocidad. Se coloca la célula fotoeléctrica en el punto de equilibrio, donde su elongación es mínima y su velocidad, máxima. El cronómetro se conecta en el modo 'Gate' de manera que mida el tiempo Δt que emplea en cruzar el cuerpo el haz de la célula. Dividiendo este tiempo por el diámetro d del cuerpo (que es pequeño) podemos obtener un valor aproximado de la velocidad instantánea:

$$v \approx \frac{d}{\Delta t} \rightarrow \delta_r(v)^2 = \delta_r(d)^2 + \delta_r(\Delta t)^2 \quad [17]$$

Según la ecuación [7], el módulo de la velocidad en el punto de equilibrio (el seno vale 1) al pasar sucesivas veces decaerá exponencialmente con el tiempo:

$$v_{\max} = A_0 \omega e^{-\frac{t}{2\tau}} \rightarrow t = N \frac{T}{2} + t_0 \quad [18]$$

Los instantes de tiempo en los que la velocidad es máxima desde que pasa por primera vez en $t=t_0$ por el equilibrio serán múltiplos enteros (N natural) de medio periodo. Por tanto, si queremos verificar esta ley de decaimiento exponencial podemos representar gráficamente las velocidades instantáneas calculadas en función del tiempo. Otra alternativa es linealizar la ecuación tomando logaritmos, de manera que:

$$\ln v_{\max} = -\frac{t}{2\tau} + \ln(A_0 \omega) \rightarrow \delta(\ln v_{\max}) = \delta_r(v_{\max}) \quad [19]$$

Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, a partir de la pendiente A podemos obtener el valor de la constante de tiempo o relajación:

$$\tau = -\frac{1}{2A} \rightarrow \delta_r(\tau) = \delta_r(A) \quad [20]$$

El factor de calidad, dado que el amortiguamiento de nuestro péndulo es bastante bajo, lo podemos aproximar por la ecuación [8], cuyo error es:

$$Q \approx 2\pi \frac{\tau}{T} \rightarrow \delta_r(Q)^2 = \delta_r(T)^2 + \delta_r(\tau)^2 \quad [21]$$

En cuanto al período cabe destacar que varía a medida que se amortigua el péndulo, con lo que hay que tener en cuenta el error asociado a este efecto en el análisis de errores.

Un método alternativo para calcular el factor de calidad, según la ecuación [6], es comparar el ángulo de oscilación inicial con el ángulo al cabo de un tiempo bastante largo, y despejar τ :

$$\ln \theta(t) - \ln \theta_0 = -\frac{t}{2\tau} \rightarrow \tau = -\frac{1}{2} \frac{t}{\ln \theta(t) - \ln \theta_0} \rightarrow \delta(\tau)^2 = \left(\frac{\tau}{t} \delta(t) \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \frac{t}{(\ln \theta(t) - \ln \theta_0)^2} \right)^2 \left[\left(\frac{\delta(\theta(t))}{\theta(t)} \right)^2 + \left(\frac{\delta(\theta_0)}{\theta_0} \right)^2 \right] \quad [22]$$

En la última parte de la práctica se estudia la variación del periodo del péndulo físico con el ángulo que forma la varilla con el plano vertical para pequeñas oscilaciones. En todos los casos se evita dar un ángulo inicial grande (siempre menor de 15°), ya que el planteamiento teórico se ha simplificado para esta condición.

De manera análogo al péndulo simple, se mide el período con el cronómetro de precisión tres veces por cada ángulo ϕ , independientemente del ángulo inicial de oscilación ($<15^\circ$), y se va aumentando ϕ de 5 en 5° desde 0° hasta 60° . De esta manera, según la ecuación [12], si se calcula el valor del co-

seno y de la frecuencia angular al cuadrado podemos realizar un ajuste por mínimos cuadrados y obtener el valor del momento de inercia I:

$$\omega_0^2 = \frac{mgd_{cm}}{I} \cos \varphi \rightarrow y = Ax \quad [23]$$

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow \delta_r(\omega_0^2) = 2\delta_r(T) \quad [24]$$

$$\delta(\cos \varphi) = \sin \varphi \delta \varphi \quad (\varphi \text{ en radianes}) \quad \delta(g_{ef})^2 = (\cos \varphi \delta(g))^2 + (g \sin \varphi \delta(\varphi))^2 \quad [25]$$

$$A = \frac{mgd_{cm}}{I_{exp}} \rightarrow I_{exp} = \frac{mgd_{cm}}{A} \rightarrow \delta_r(I_{exp})^2 = \delta_r(m)^2 + \delta_r(g)^2 + \delta_r(d_{cm})^2 + \delta_r(A)^2 \quad [26]$$

Alternativamente, y para comparar este valor, se puede calcular el momento de inercia respecto del punto de apoyo suponiendo que la masa es puntual y que la masa de la varilla es despreciable. El momento es simplemente:

$$I_{leo} = md_{cm}^2 \rightarrow \delta_r(I_{leo})^2 = \delta_r(m)^2 + 4\delta_r(d_{cm})^2 \quad [27]$$

ADQUISICIÓN DE DATOS

Periodo del péndulo

Para estudiar la variación del período del péndulo de doble hilo y verificar los modelos teóricos, tomamos medidas del período del péndulo soltándolo tenso desde diferentes ángulos respecto a la vertical: desde 30° hasta -30° a intervalos de 5° . Se emplea el cronómetro de precisión en el modo Simple Pend. 2 con una sola memoria y con la máxima precisión (seis decimales).

Existe un error asociado a la medida del ángulo debido tanto a la imperfecta alineación del porta-ángulos con el cable, al pequeño desajuste entre cada cable del péndulo y al error humano de determinar “a ojo” el ángulo inicial. Por ello, estimamos el error en $0,5^\circ$, pese a ser la sensibilidad del porta-ángulos $0,1^\circ$.

En cuanto al doble cable, hay que revisar antes de realizar las medidas que los dos tengan la misma longitud y estén igual de tensos. Esto reduce posibles oscilaciones en el plano horizontal, que provocan colisiones con la célula fotoeléctrica, cuya anchura no es grande.

Tabla 1 – Tres medidas del período del péndulo simple para cada ángulo inicial θ_0 .

$\theta_0 \pm 0,5^\circ$	$T_{1,2,3} \pm 0,000002 \text{ s}$		
30,0	2,200240	2,201330	2,202016
28,0	2,197992	2,197794	2,197900
26,0	2,193096	2,194300	2,194042
24,0	2,190120	2,190474	2,190286
22,0	2,186334	2,186646	2,186362
20,0	2,183134	2,183052	2,183192
18,0	2,180066	2,180144	2,179988
16,0	2,177700	2,177524	2,177664
14,0	2,174944	2,175440	2,175154
-30,0	2,200686	2,199332	2,199610
-28,0	2,194852	2,195258	2,194998
-26,0	2,191286	2,190944	2,190636
-24,0	2,186890	2,187492	2,186928
-22,0	2,183276	2,183132	2,183384
-20,0	2,180264	2,180098	2,179832
-18,0	2,177130	2,177074	2,177050
-16,0	2,174610	2,174680	2,174542
-14,0	2,172594	2,172398	2,172390

Nota: El ángulo positivo desde la posición del experimentador lo tomamos hacia la izquierda.

En el tratamiento de los datos se comprueba que 3 medidas son suficientes, pues la dispersión es siempre menor al 2%, como se intuye viendo la escasa variación entre una y otra medida gracias a la precisión del cronómetro, que evita el error de reacción humano, el cual está tan sólo presente en la medida del ángulo del desplazamiento inicial respecto al equilibrio.

Amortiguamiento

Para evaluar el amortiguamiento al que está sometido el péndulo, medimos la disminución de la velocidad a lo largo del tiempo, que se espera que siga una ley exponencial. Utilizamos el cronómetro de precisión en el modo ‘Gate’ con 16 memorias y máxima precisión, de forma que se mide el tiempo que tarda en entrar y salir de la célula fotoeléctrica la masa suspendida del cable. Soltamos el péndulo desde un ángulo inicial $\theta_0 = 20,0 \pm 0,5^\circ$ y situamos la célula fotoeléctrica de modo que el cuerpo intercepte la misma en el punto más bajo de la trayectoria (donde la velocidad es mayor).

Tabla 2 – Medida del tiempo durante el que el haz de la célula fotoeléctrica está interceptado por la masa del péndulo al cruzar por i-ésima vez la misma.

i	$t_i \pm 0,0000002s$						
1	0,024114	5	0,024636	9	0,025322	13	0,026062
2	0,024176	6	0,024836	10	0,025510	14	0,026236
3	0,024218	7	0,025002	11	0,025698	15	0,026420
4	0,024420	8	0,025160	12	0,025884	16	0,026594

El cronómetro realiza las 16 medidas automáticamente. Tan sólo hay que desplazarlo un ángulo inicial y luego anotar los datos medidos. Se observa que cuando el cronómetro mide por decimosexta vez, el amortiguamiento ha provocado que el ángulo de desplazamiento máximo se reduzca en hasta 2°. Esto hay que tenerlo en cuenta a la hora de emplear el período correspondiente a la oscilación en el tratamiento de datos, puesto que no es constante sino que varía con el tiempo.

Otra parte del experimento consiste en poner a oscilar el péndulo y ver cuánto varía su amplitud a lo largo de un tiempo grande. Se pone a oscilar a $30,0^\circ \pm 0,5^\circ$ y se conecta un cronómetro (precisión de centésimas) hasta que se observa que el péndulo llega a 15° , momento en el que se detiene el cronómetro. El valor obtenido es $t = 100 \pm 3s$ (debido a que durante varias oscilaciones se observaba el valor del ángulo 15°).

Péndulo físico

Realizamos tres medidas del período para cada ángulo de la varilla ϕ respecto al plano vertical (en el que la varilla oscila cuando $\phi = 0$). El ángulo inicial θ_0 que se desplaza respecto al equilibrio debe ser menor a 15° para que se trate de pequeñas oscilaciones, lo que simplifica posteriores cálculos. Como despreciamos la dependencia del ángulo inicial con el periodo, a diferencia del primer apartado, y no nos interesa su valor, es lícito conectar el cronómetro en el modo ‘Physical Pend.’ con 3 memorias, de forma que se agiliza la toma de datos y se reduce la dispersión por probables variaciones del período si cambiásemos el ángulo inicial.

Tabla 3 – Tres medidas del período del péndulo físico para pequeñas oscilaciones y distintos ϕ de la varilla.

$\phi \pm 1^\circ$	$T_{1,2,3} \pm 0,000002 s$		
0	1,085582	1,085222	1,085484
5	1,086764	1,086614	1,086844
10	1,093344	1,092973	1,093300
15	1,103338	1,103312	1,103318
20	1,121502	1,120612	1,118872
25	1,141236	1,141194	1,141268
30	1,168508	1,169452	1,169476
35	1,200638	1,200236	1,200688
40	1,248474	1,248364	1,248302
45	1,295526	1,295236	1,295388
50	1,356646	1,356684	1,356424
55	1,437102	1,437654	1,436802
60	1,537040	1,538072	1,537824

Se observa inmediatamente que el periodo es mayor cuanto mayor es el ángulo, fenómeno que por intuición cabe esperar. Aparte, cabe señalar una dificultad experimental a medida que crecía el ángulo ϕ ; la colocación de la célula fotoeléctrica era complicada, pues su soporte no podía colocarse de tal forma que el haz de la célula cortase perpendicularmente el plano de oscilación, con lo que la masa del péndulo podía chocar con la misma y perturbar el sistema.

TRATAMIENTO DE DATOS

Periodo del péndulo

En la siguiente tabla se calcula la dispersión de las tres medidas del período para cada ángulo, su media y el error asociado (se elige el mayor entre el error de sensibilidad y el de dispersión).

Tabla 4 –Media del período del péndulo de *doble hilo* y dispersión para cada ángulo inicial θ_0 .

$\theta_0 \pm 0,5^\circ$	D	T_{med} (s)
30,0	0,08%	2,2012 \pm 0,0004
28,0	0,01%	2,19790 \pm 0,00005
26,0	0,05%	2,1938 \pm 0,0003
24,0	0,02%	2,19029 \pm 0,00009
22,0	0,01%	2,18645 \pm 0,00008
20,0	0,01%	2,18313 \pm 0,00004
18,0	0,01%	2,18007 \pm 0,00004
16,0	0,01%	2,17763 \pm 0,00004
14,0	0,02%	2,17518 \pm 0,00012
-30,0	0,06%	2,1999 \pm 0,0003
-28,0	0,02%	2,19504 \pm 0,00010
-26,0	0,03%	2,19096 \pm 0,00016
-24,0	0,03%	2,18710 \pm 0,00015
-22,0	0,01%	2,18326 \pm 0,00006
-20,0	0,02%	2,18006 \pm 0,00011
-18,0	0,00%	2,17708 \pm 0,00002
-16,0	0,01%	2,17461 \pm 0,00003
-14,0	0,01%	2,17246 \pm 0,00005

Se observa que hay medidas en las que la dispersión es 10 veces mayor que en otras. Esta diferencia se debe probablemente a un error del experimentador al desplazar el péndulo respecto de su posición de equilibrio hasta un ángulo determinado tres veces, con lo que es fácil que alguna de ellas el ajuste a “ojo” no sea tan preciso.

Otra observación es que en ningún caso el error de dispersión es menor que el error de sensibilidad, lo que indica que hay que tener en cuenta la dispersión del detector y realizar varias medidas.

Mediante la ecuación [13] se corrige el error de cero en el ángulo y se calcula el período promedio para cada par de ángulos opuestos:

Tabla 5 –Período T promedio para el péndulo de *doble hilo* en función del seno cuadrado de la mitad del ángulo inicial $\pm \theta_0/2$.

$\sin^2 (\pm\theta_0/2)$	T (s)
0,067 \pm 0,002	2,2005 \pm 0,0003
0,059 \pm 0,002	2,19647 \pm 0,00006
0,0506 \pm 0,0019	2,19238 \pm 0,00017
0,0432 \pm 0,0018	2,18870 \pm 0,00009
0,0364 \pm 0,0016	2,18486 \pm 0,00005
0,0302 \pm 0,0015	2,18160 \pm 0,00006
0,0245 \pm 0,0013	2,17858 \pm 0,00002
0,0194 \pm 0,0012	2,17612 \pm 0,00003
0,0149 \pm 0,0011	2,17382 \pm 0,00007

Representando los valores del período frente al seno cuadrado, se obtiene la siguiente gráfica:

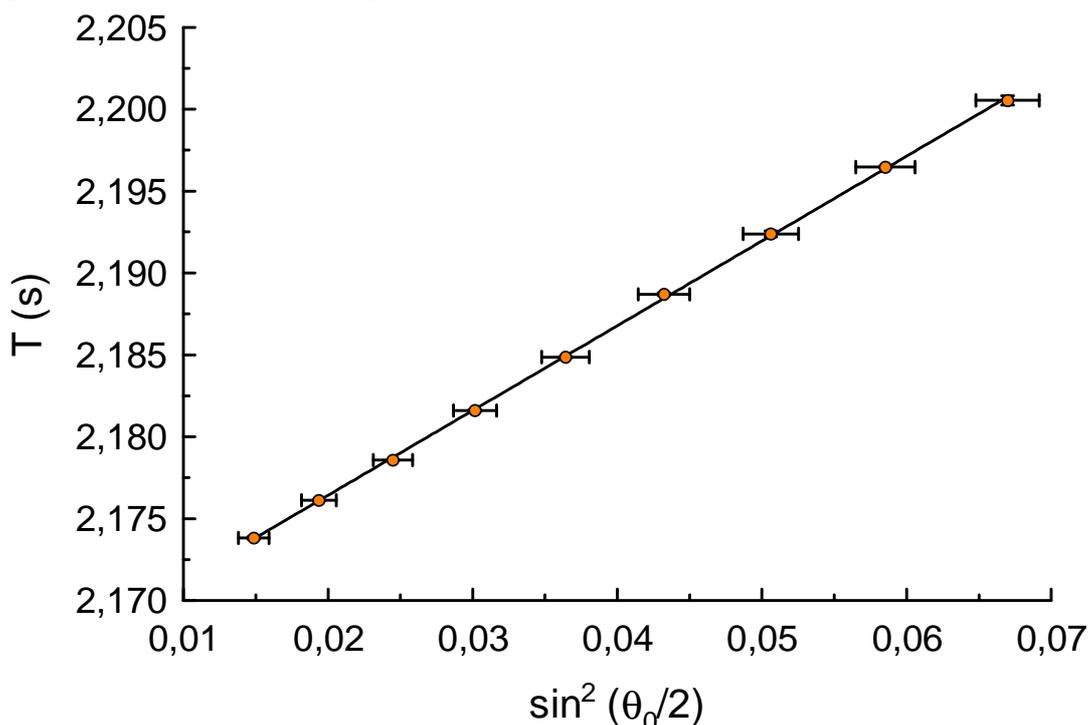


Figura 3 - Dependencia lineal del período del péndulo con una función de la amplitud inicial del mismo.

Ecuación de la recta: $T = (0,518 \pm 0,003) \cdot \sin^2(\theta_0/2) + (2,16607 \pm 0,00013)$ [s] $r = 0,9999$

Tanto visualmente como a partir del coeficiente de correlación lineal, se verifica que existe una dependencia lineal con muy poca desviación de los puntos respecto a la ecuación de la recta. Aparte, se ve que los errores (aleatorios) han sido sobreestimados, pues los puntos se ajustan perfectamente a la recta y las barras de error podrían ser bastante más pequeñas. Este ajuste tan bueno se debe a la gran precisión de la célula, así como a un cuidadoso procedimiento experimental al soltar el péndulo desde el mismo ángulo al realizar las tres medidas, de forma que la dispersión debida al error humano es asimismo reducida.

La ordenada en el origen de la ecuación de la recta representa un paso al límite. El período tiende a ese valor cuando el ángulo inicial tiende a cero (si fuese exactamente cero no habría oscilaciones). Tanto a partir de la pendiente como de la ordenada en el origen se puede obtener el valor de la aceleración de la gravedad, según [15] y [16]:

Tabla 6 – Comparación de la aceleración de la gravedad obtenida experimentalmente con el valor local (*Ptb*).

	g (m/s^2)	Desv.
g_1	$9,786 \pm 0,017$	0,16%
g_2	$10,71 \pm 0,13$	9,25%
g_{mp}	$9,801 \pm 0,017$	0%
g_{loc}	9,801	

Cabe resaltar que estos valores de g son válidos porque hemos supuesto que la amortiguación es despreciable (en el próximo apartado se comprobará que es bajo, con lo que la aproximación es legítima). Aparte de que se hayan despreciado términos de orden superior, se está suponiendo que el péndulo utilizado es un péndulo simple, donde la cuerda no tiene masa, es inextensible, etc., con lo que la precisión está limitada por las mencionadas aproximaciones.

El valor más adecuado corresponde a la ordenada en el origen (primer valor), ya que en el de la pendiente se han despreciado términos de orden superior en el desarrollo en serie de Taylor. De hecho, si se tuviesen en cuenta más términos, el valor correspondiente a la pendiente sería mayor en la ecuación [16], con lo que al estar en el denominador, la aceleración de la gravedad sería menor que la obtenida en la tabla anterior. Esto se corresponde plenamente con los resultados experimentales al compararlos con

el valor aceptado de la gravedad (Ptb). El valor calculado a partir de la ordenada en el origen se ajusta mucho más al esperado, y tiene un error considerablemente menor (más precisión) que el calculado a partir de la pendiente (que entra dentro de los límites del error experimental $<10\%$, aunque los valores no sean compatibles dado que sus barras de error no se solapan). Este valor es mayor de lo esperado, pero como hemos explicado, éste disminuiría y se ajustaría mejor si se tuviesen en cuenta términos de orden superior a 2. Si tenemos en cuenta el peso de los errores de cada valor y realizamos la media ponderada, se obtiene prácticamente el primer valor de g y su error.

Este valor coincide totalmente con el aceptado (su error relativo es del $0,17\%$), aunque el realmente válido es g_1 , cuya desviación es mínima ($0,16\%$), con lo que la determinación de la aceleración de la gravedad se ha llevado a cabo con éxito.

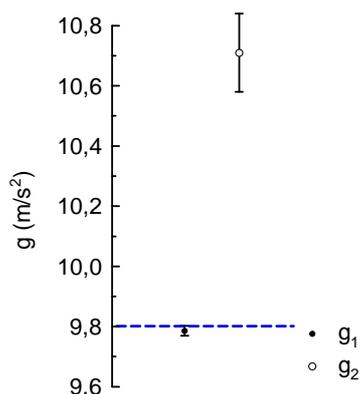


Figura 4 - Comparación de la aceleración de la gravedad obtenida experimentalmente con el valor local (Ptb).

Amortiguamiento

A partir de la ecuación [17], calculamos la velocidad instantánea aproximada y tomamos logaritmos para linealizar el decaimiento exponencial de la velocidad en función del tiempo. Empleamos el valor del período a 20° calculado en el apartado anterior para calcular el tiempo transcurrido entre los distintos pasos del cuerpo ante la célula [19]. Como se observa una disminución en 2° en la amplitud a lo largo de las dieciséis medidas, tomamos el valor a 20° y le asociamos el error de dispersión entre el valor a 18° y a 20° , con lo que $T_{20^\circ;18^\circ} = 2,182 \pm 0,001$ s.

Tabla 7 – Medida del tiempo durante el que el haz de la célula fotoeléctrica está interceptado por la masa del péndulo al cruzar por i -ésima vez la misma.

i	t (s)	v_i (m/s)	$\ln v_i \pm 0,0017$
1	$t_0 = 0 \pm 0$	$1,198 \pm 0,002$	$0,1810$
2	$1,0910 \pm 0,0005$	$1,195 \pm 0,002$	$0,1785$
3	$2,1820 \pm 0,0010$	$1,193 \pm 0,002$	$0,1767$
4	$3,2730 \pm 0,0015$	$1,183 \pm 0,002$	$0,1684$
5	$4,364 \pm 0,002$	$1,173 \pm 0,002$	$0,1596$
6	$5,455 \pm 0,003$	$1,164 \pm 0,002$	$0,1515$
7	$6,546 \pm 0,003$	$1,156 \pm 0,002$	$0,1449$
8	$7,637 \pm 0,004$	$1,149 \pm 0,002$	$0,1386$
9	$8,728 \pm 0,004$	$1,141 \pm 0,002$	$0,1322$
10	$9,819 \pm 0,005$	$1,133 \pm 0,002$	$0,1248$
11	$10,910 \pm 0,005$	$1,1246 \pm 0,0019$	$0,1174$
12	$12,001 \pm 0,006$	$1,1165 \pm 0,0019$	$0,1102$
13	$13,092 \pm 0,006$	$1,1089 \pm 0,0019$	$0,1034$
14	$14,183 \pm 0,007$	$1,1015 \pm 0,0019$	$0,0967$
15	$15,274 \pm 0,007$	$1,0939 \pm 0,0019$	$0,0897$
16	$16,365 \pm 0,008$	$1,0867 \pm 0,0019$	$0,0832$

Si representamos los valores en una gráfica:

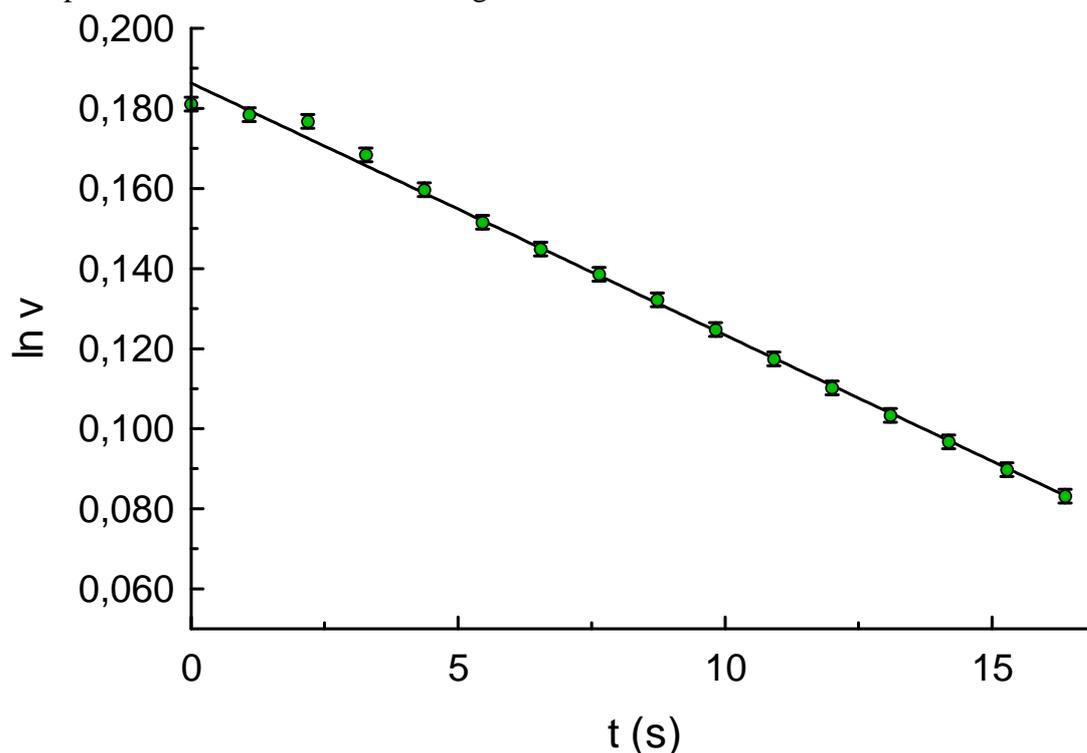


Figura 5 - Decaimiento exponencial de la velocidad en un movimiento oscilatorio amortiguado (péndulo).
 Ecuación de la recta: $\ln v = (-0,00630 \pm 0,00010) \cdot t + (0,1863 \pm 0,010)$ $r = 0,998$

Se observa que los datos se ajustan a una recta con un alto grado de correlación, salvo en las dos primeras medidas, que se desvían sensiblemente. Si prescindimos de estos dos primeros valores, el coeficiente de correlación lineal se acerca más a uno ($r = 0,9995$). Habría que repetir este experimento varias veces para comprobar que la desviación en los valores iniciales se debe simplemente a un error accidental y no de un error del modelo teórico empleado.

A partir de las ecuaciones [20] y [21] se puede calcular la constante de relajación y el factor de calidad:

$$\tau = 79,4 \pm 1,3 \text{ s}$$

$$Q = 229 \pm 4$$

El factor de calidad es muy alto, lo que se corresponde con un amortiguamiento muy pequeño, es decir, una constante de relajación muy larga. Al cabo de 2τ de liberar el péndulo, la oscilación se ha reducido en un factor $1/e$. Esto se corresponde perfectamente con las observaciones experimentales, donde la disminución de la amplitud era muy lenta, solamente apreciable para intervalos de decenas de segundos. Por tanto, se trata de un buen sistema oscilante en el que se puede despreciar el amortiguamiento para intervalos pequeños de tiempo.

Para comprender mejor el valor obtenido para Q , se puede comparar el mismo con otros valores de otros sistemas físicos. Por ejemplo, un circuito con resistencias, bobinas y condensadores suele tener un valor inferior a 100. Por otro lado, los cristales son resonadores piezoeléctricos cuyos valores de Q puede estar sobre varios miles. En los microondas, los factores de calidad también son altísimos (hasta 10.000).

Las pérdidas de energía del péndulo se deben principalmente al rozamiento de la masa suspendida con el aire. Otras causas (con una influencia mucho menor, despreciable frente al rozamiento con el aire) podrían ser el rozamiento de la cuerda en sus puntos de sujeción con el soporte fijo, las vibraciones del soporte, perturbaciones atmosféricas, deformaciones de los materiales del montaje, ...

De manera alternativa se calcula la constante de tiempo y el factor de calidad a partir del tiempo medido en reducir de 30° a 15° su amplitud de oscilación (ecuación [22]). El valor obtenido es:

$$\tau_2 = 72 \pm 4 \text{ s}$$

Para obtener el factor de calidad (ecuación [21]), se emplea un valor del período promedio entre 15° y 30° con un error de valor máximo menos el mínimo asociado:

$$T_{30^\circ;15^\circ} = 2,18 \pm 0,01 \text{ s.}$$

$$Q_2 = 208 \pm 12$$

Este valor alternativo es compatible con el calculado previamente, aunque su precisión es menor debido a la imprecisión en la medida del tiempo.

Péndulo físico

A partir de las medidas obtenidas del período de oscilación calculamos la dispersión y la media del período, y según la ecuación [25] obtenemos unos valores para la gravedad efectiva para cada ángulo φ :

Tabla 8 – Período del péndulo físico T, dispersión D de las medidas del tiempo y gravedad efectiva g_{ef} para pequeñas oscilaciones para distintos φ de la varilla.

$\varphi \pm 1^\circ$	$g_{ef} \text{ (m/s}^2\text{)}$	D	T (s)
0	9,800 \pm 0,010	0,03%	1,08543 \pm 0,00009
5	9,763 \pm 0,018	0,02%	1,08674 \pm 0,00006
10	9,65 \pm 0,03	0,03%	1,09321 \pm 0,00009
15	9,47 \pm 0,05	0,002%	1,103323 \pm 0,000006
20	9,21 \pm 0,06	0,23%	1,1203 \pm 0,0007
25	8,88 \pm 0,07	0,01%	1,14123 \pm 0,00002
30	8,49 \pm 0,09	0,08%	1,1691 \pm 0,0002
35	8,03 \pm 0,10	0,04%	1,20052 \pm 0,00011
40	7,51 \pm 0,11	0,01%	1,24838 \pm 0,00004
45	6,93 \pm 0,12	0,02%	1,29538 \pm 0,00007
50	6,30 \pm 0,13	0,02%	1,35658 \pm 0,00006
55	5,62 \pm 0,14	0,06%	1,4372 \pm 0,0002
60	4,90 \pm 0,15	0,07%	1,5376 \pm 0,0003

Nota: Se toma el valor local de $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ con un error de $0,01 \text{ m/s}^2$.

Para una representación gráfica y un ajuste por mínimos cuadrados es necesario calcular el coseno del ángulo y la frecuencia angular al cuadrado ([23] a [25]):

Tabla 9 – Coseno del ángulo φ de la varilla y frecuencia angular de oscilación al cuadrado del péndulo físico.

$\cos \varphi$	$\omega_0^2 \text{ (s}^{-2}\text{)}$
1,000 \pm 0,0003	33,509 \pm 0,003
0,9962 \pm 0,0015	33,428 \pm 0,002
0,985 \pm 0,003	33,034 \pm 0,003
0,966 \pm 0,005	32,431 \pm 0,000
0,940 \pm 0,006	31,453 \pm 0,018
0,906 \pm 0,007	30,312 \pm 0,000
0,866 \pm 0,009	28,882 \pm 0,006
0,819 \pm 0,010	27,392 \pm 0,003
0,766 \pm 0,011	25,332 \pm 0,001
0,707 \pm 0,012	23,527 \pm 0,001
0,643 \pm 0,013	21,452 \pm 0,001
0,574 \pm 0,014	19,113 \pm 0,003
0,500 \pm 0,015	16,697 \pm 0,003

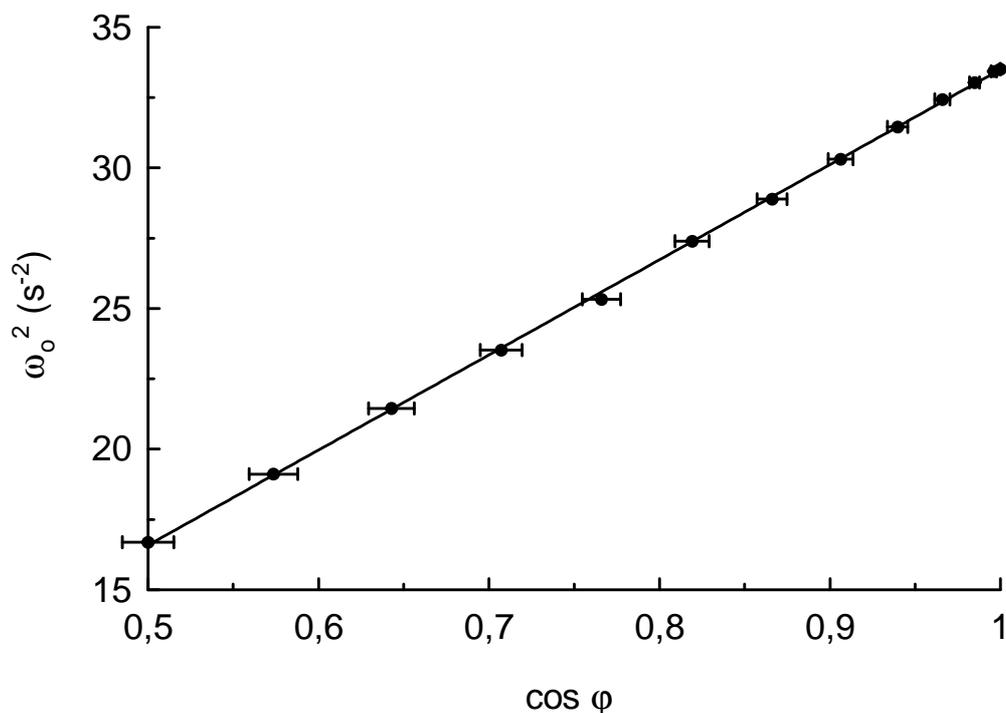


Figura 6 - Dependencia lineal del coseno del ángulo y la frecuencia angular al cuadrado en el péndulo físico.
 Ecuación de la recta: $\omega_0^2 = (33,81 \pm 0,17) \cdot \cos \varphi + (-0,32 \pm 0,14) \text{ [s}^{-2}\text{]}$ $r = 0,9999$

Se aprecia en este caso que la correlación lineal es muy alta; todos los puntos se ajustan perfectamente a la recta, e incluso se han sobreestimado los errores en los ángulos mayores. Con todo, hay una pequeña desviación respecto a lo esperado ya que la ordenada en el origen sale distinta de cero, aunque está prácticamente a dos intervalos de error, lo que entra dentro de lo admisible experimentalmente.

A partir de la pendiente y la ecuación [26] se deduce que el momento de inercia es:

$$I_{\text{exp}} = 0,00937 \pm 0,00012 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 93,7 \pm 1,2 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$

Si lo calculamos a partir de las dimensiones del péndulo según la ecuación [27]:

$$I_{\text{teo}} = 95,8 \pm 1,6 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$$

Se observa que ambos valores comparten el intervalo de error y que la desviación relativa es del 2,2%, con lo que se puede afirmar que son compatibles.

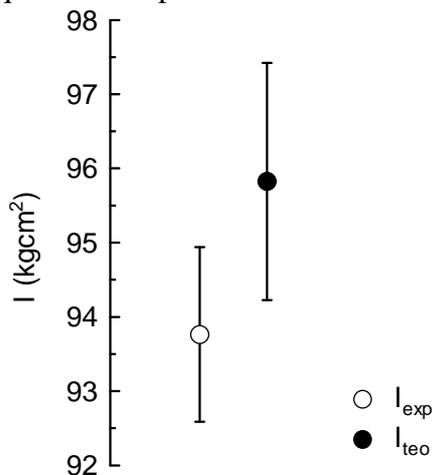


Figura 7 - Comparación del momento de inercia obtenido experimentalmente con el de la fórmula teórica a partir de las dimensiones del péndulo físico.

Cabe resaltar que para una valoración más adecuada de los respectivos momentos de inercia habría que tener en cuenta la masa de la varilla, tanto en la determinación del centro de masas del péndulo físico como en su momento de inercia teórico correspondiente a la oscilación de la misma.

CONCLUSIÓN

En esta práctica se ha estudiado el movimiento oscilatorio del péndulo simple y del péndulo físico mediante la medida del tiempo con un cronómetro de precisión conectado a una célula fotoeléctrica.

En la primera parte se ha estudiado la dependencia del periodo con la amplitud y se ha verificado con un ajuste por mínimos cuadrados las leyes teóricas desarrolladas. Además, se ha calculado el valor de la gravedad por dos variantes y se han comparado con el valor local aceptado, que es perfectamente compatible con el valor obtenido experimentalmente a partir de la ordenada en el origen. El que los valores se correspondan con los aceptados indica que tanto el planteamiento teórico como el montaje y procedimiento experimental ha sido adecuado y ha permitido obtener unos resultados fiables y contrastados.

En cuanto al estudio del amortiguamiento, cabe señalar que se ha verificado la ley exponencial de disminución de la velocidad máxima adecuadamente, y se han obtenido unos valores razonables para la constante de relajación y el factor de calidad. No obstante, estos valores no han podido compararse con ningún valor de referencia, con lo que no podemos descartar posibles errores sistemáticos, por ejemplo en la medida del ángulo.

Por último, se ha estudiado la dependencia del periodo del péndulo físico con el ángulo de la varilla. Se ha comprobado la dependencia lineal entre la frecuencia angular al cuadrado y el coseno del ángulo con una alta correlación lineal, y se ha calculado el valor del momento de inercia. Este valor experimental se ha comparado con el valor calculado teóricamente a partir de las dimensiones del péndulo, y se han obtenido valores compatibles, cuyas barras de error se solapaban.

Las limitaciones experimentales principales han estado relacionadas con la medida del ángulo, pues su determinación a “ojo” aumenta considerablemente la dispersión de nuestras medidas. Esto contrasta con la alta precisión (y baja dispersión) de todas las medidas del tiempo con el cronómetro de gran precisión. Por tanto, los errores aleatorios son muy bajos en comparación con los sistemáticos, que tienen un peso dominante en las desviaciones respecto de lo esperado (por ejemplo en la ordenada en el origen de la Figura 6). Otra de las causas de errores sistemáticos reside en las aproximaciones realizadas para pequeñas oscilaciones, las suposiciones de que se trata de un péndulo simple con amortiguamiento despreciable, que la varilla no tiene momento de inercia, ... Si se quisiese mejorar la precisión de los cálculos habría que tener en cuenta términos de orden superior en el desarrollo en serie, por ejemplo en el cálculo de la aceleración de la gravedad a partir de la pendiente, o en la constante de tiempo en el apartado del amortiguamiento, y no despreciar efectos como el rozamiento con el aire, la inercia de la varilla, etc.

En resumen, podemos concluir que el experimento ha cumplido el objetivo de estudiar el movimiento oscilatorio en el péndulo simple y el péndulo físico, que se han verificado las leyes teóricas desarrolladas y que se han determinado con éxito y bastante precisión los valores de la aceleración de la gravedad, el factor de calidad y el momento de inercia contrastando los mismos con valores de referencia, por lo que podemos afirmar que los objetivos propuestos se han alcanzado satisfactoriamente.

Bibliografía:

- Tipler-Mosca, 5ª Ed. 2005.; Ed. Reverté; Vol. 1, Apéndice
- Guión de prácticas del Laboratorio de Mecánica y Ondas, 2º de Física, UVEG
- Physikalisch Technische Bundesanstalt: <http://www.ptb.de>