

COMPROBACIÓN  
DE LAS LEYES DE  
CONSERVACIÓN  
DE LA ENERGÍA Y  
LA CANTIDAD DE  
MOVIMIENTO EN  
CHOQUES ELÁSTICOS  
E INELÁSTICOS

*(Práctica nº 10: ¿Podría existir Flubber?)*

**FERNANDO HUESO GONZÁLEZ**

***Pareja 7 - Grupo B-L1***

**2º DE FÍSICA - UVEG**

**Laboratorio de Mecánica y Ondas**

***Práctica realizada el 13-X-08***

***Informe entregado el 20-X-08***



## OBJETIVO

El objetivo de este experimento es verificar las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento en procesos de choques elásticos e inelásticos. Para ello se estudiará la colisión entre carritos que ruedan sobre un carril horizontal mediante un sistema de detección SÓNAR para determinar su velocidad antes y después del choque, y se analizará el grado de elasticidad del mismo mediante el cálculo del coeficiente de restitución.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para analizar los choques entre carritos, conviene definir en qué consiste un choque y enunciar las leyes de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

Un **choque** o colisión es un proceso en el que dos cuerpos interactúan en un intervalo de tiempo muy breve. Un ejemplo de choque es una pelota que rebota en el suelo, aunque el contacto físico no es necesario para que exista un choque. En esta práctica, la colisión de dos carritos con imanes que se repelen en su parte frontal (de forma que no entran en contacto) también está considerada como choque.

En un choque siempre se cumple el principio de conservación de la energía y la ley de conservación de la cantidad de movimiento. En el caso de choques **elásticos**, la energía cinética previa al choque se mantiene como tal después de él. Los choques elásticos son una idealización, en la realidad sólo se producen choques **parcialmente elásticos**: una parte de la energía se pierde en forma de calor o deformación y otra parte se mantiene como energía cinética. En el caso de choques **inelásticos**, toda la energía puesta en juego en el choque se transforma en calor o deformación y no se recupera para el movimiento.

La ley de conservación de la energía establece que la energía de cualquier sistema que no interactúe con agentes externos a él es invariable con el tiempo aunque se transforme en otras formas de energía. Es decir, la energía no se crea ni se destruye, sino que se transforma y perdura.

Según la ley de conservación de la cantidad de movimiento, en un sistema en el que no actúa ninguna fuerza, el momento lineal se conserva. De hecho, la 2ª ley de Newton establece que la fuerza es la variación de momento lineal con respecto al tiempo. Si dicha fuerza es cero, el momento es necesariamente constante. Ésta es una ley general de la física y se cumple independientemente de que la colisión sea elástica o inelástica, bajo la restricción de que no actué ninguna fuerza externa al sistema.

En el caso de un sistema con varios componentes, el principio se enuncia matemáticamente de la siguiente manera:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = cte \quad [1]$$

Este principio garantiza que la suma de los momentos lineales de cada una de las partículas debe permanecer constante, es decir, si alguna de ellas disminuye momento, otra debe aumentarlo para no violar este principio que las observaciones experimentales siempre han confirmado.

En cuanto al caso concreto de un choque, el momento  $p$  antes del choque de ambos cuerpos (1 y 2) debe ser equivalente al momento  $p'$  después del choque de los mismos:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}' = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad [2]$$

Para caracterizar la elasticidad de un choque se define el coeficiente de restitución como:

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \quad [3]$$

Si el choque es completamente elástico,  $e$  vale 1, mientras que es igual cero para choques inelásticos, donde  $p$  sí se conserva pero se disipa energía en forma de calor y deformación.

## DISEÑO Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Para poder comprobar las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y la energía en choques, diseñamos un montaje experimental en el que hacemos chocar carritos que ruedan sobre un carril horizontal. Para disminuir lo máximo posible el rozamiento, factor que influirá en nuestros resultados (se trata de una fuerza externa), empleamos carritos PASCO con rodamientos de alta precisión y un carril de aluminio con raíles. Hay que revisar que el plano esté horizontal para que no actúe la fuerza de la gravedad sobre los carritos (no se cumpliría la ley de conservación).

Para estudiar los choques elásticos e inelásticos, los carritos disponen de un pivote retráctil (con un muelle) en su parte frontal, y dos imanes muy potentes de neodimio en la trasera, elementos mediante los que se pueden analizar los choques casi elásticos. Además en la parte frontal hay un velcro que puede utilizarse para los choques inelásticos una vez retraído el pivote móvil.

Los magnitudes que debemos medir en el experimento para estudiar las leyes de conservación del momento lineal y la energía son únicamente la velocidad y la masa. Por ello, pesamos los carritos y otras masas accesorias que se pueden instalar en ellos mediante una báscula electrónica (con sensibilidad de 1g):

$$m_a = 250 \pm 1 \text{ g (carrito azul)}$$

$$m_r = 256 \pm 1 \text{ g (carrito rojo)}$$

$$m_{h1} = 257 \pm 1 \text{ g (masa accesorio metálica)}$$

$$m_{h2} = 256 \pm 1 \text{ g}$$

(El error al sumar varias masas es la raíz de la suma de los cuadrados de los errores).



**Figura 1** - Fotografía del carril y carritos utilizados en el experimento.

En cuanto a la velocidad empleamos un sistema de detección SÓNAR, que emite ultrasonidos, cuyo reflejo es detectado. Por efecto Doppler, la variación de frecuencia detectada es función de la velocidad, que es determinada automáticamente por el programa (Datastudio) del ordenador al que se conecta el SÓNAR. En el caso de medir la velocidad de un sólo carrito al chocar contra un extremo fijo, necesitaremos un solo SÓNAR. En el caso de dos carritos, se colocarán dos detectores, uno en cada extremo del carril, que estarán sincronizados y detectarán exclusivamente la velocidad del carrito más cercano a cada uno.

La primera parte del experimento consistirá en estudiar el grado de elasticidad de un choque. Para ello lanzaremos un solo carrito (con el pivote extraído) contra un extremo fijo del carril (topes negros de la Figura 1) y mediremos su velocidad antes y después del choque. Conviene tomar varias medidas (tres) de la velocidad en la gráfica del programa para después calcular su media y el error de dispersión. Este esquema puede repetirse para tres velocidades iniciales distintas y para distintas masas accesorias. Aunque no incluimos el rozamiento en nuestras ecuaciones, debemos tener en cuenta que influye negativamente en nuestros resultados, pues el índice de elasticidad no refleja sólo la pérdida de energía en el choque, sino que se verá afectado por la pérdida de energía por rozamiento a lo largo del tiempo. Al realizar el experimento para distintas masas y velocidades iniciales, podemos comprobar si en los resultados se observa alguna tendencia no ideal, que se deberá estudiar para ver si está originada por el rozamiento que hemos despreciado.

El momento lineal se calcula mediante:

$$p = mv \leftrightarrow \delta(p)^2 = [m\delta(v)]^2 + [v\delta(m)]^2 \quad [4]$$

Se ha prescindido del carácter vectorial porque el experimento tiene lugar en el plano unidimensional. Se calcula simplemente el módulo. En el caso de querer comparar el momento inicial y el final, ambos tendrán el mismo módulo (teóricamente) pero direcciones opuestas.

El coeficiente de restitución se obtiene sustituyendo 0 en la velocidad del segundo cuerpo (tope negro) en la ecuación [3], que no se mueve antes ni después del choque (se considera su masa infinita).

$$e = -\frac{0 - v_1'}{0 - v_1} = \left| \frac{v_1'}{v_1} \right| \quad [5]$$

$$\delta_r(e)^2 = \delta_r(v_1)^2 + \delta_r(v_1')^2 \quad [6]$$

Este índice nos dará una idea de la energía cinética que se ha transformado en otros tipos de energía durante el choque. Para hacernos una idea cuantitativa de esta variación, podemos calcular la energía cinética antes y después del choque:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \leftrightarrow \delta(E)^2 = [mv\delta(v)]^2 + \left[ \frac{1}{2}v\delta(m) \right]^2 \quad [7]$$

En la segunda parte del experimento se estudiará un choque elástico (lo máximo posible) a partir de la colisión frontal entre dos carritos, cuyos imanes de neodimio evitan el contacto físico y provocan que repelan y vuelvan en direcciones opuestas. Para simplificar, se deja un carrito en reposo, se lanza el otro contra él y se mide con los dos detectores la velocidad de cada carrito antes y después del choque. Se calculará el momento lineal y la energía cinética antes y después de la colisión para cada carrito. El momento lineal total antes o después del choque se calcula mediante la ecuación [2] (habrá que tener en cuenta el carácter vectorial y no sustituir directamente el valor de cada sónar, pues son sistemas de referencia con direcciones distintas y habrá que cambiar el signo a una de ambas velocidades), y su error será:

$$\delta(p)^2 = \delta(p_1)^2 + \delta(p_2)^2 \quad [8]$$

$$\Delta p_i = p' - p = \delta(p')^2 + \delta(p)^2 \quad [9]$$

La variación del momento total no será cero (por tanto hay una fuerza) al haber rozamiento y este valor nos dará una idea de la influencia del mismo en nuestros resultados y ver si era realmente despreciable.

Para la energía antes y después del choque:

$$E = E_1 + E_2 \leftrightarrow \delta(E)^2 = \delta(E_1)^2 + \delta(E_2)^2 \quad [10]$$

$$\Delta E = E' - E \leftrightarrow \delta(\Delta E)^2 = \delta(E')^2 + \delta(E)^2 \quad [11]$$

Esta colisión se puede repetir para tres velocidades iniciales distintas y colocando masas accesorias en uno de los carritos para que los carritos tengan masas diferentes. La variación de la energía antes y después del choque  $\Delta E$  nos permitirá verificar si el choque ha sido o no perfectamente elástico (será negativo aunque cercano a cero si es casi elástico). Aparte, el rozamiento rebajará en cierta medida el grado de elasticidad.

Por último se estudiarán los choques inelásticos se empleará el mismo montaje que en el apartado anterior, pero retrayendo los pivotes móviles y haciendo chocar los carritos con los velcros, de forma que queden unidos después del choque. Se utilizarán los dos detectores simultáneamente. El proceso se repetirá para tres velocidades iniciales y para carritos tanto de masas iguales como diferentes. Se calculará el momento lineal y la energía antes y después del choque de manera análoga a los anteriores apartados y se comprobarán las leyes de conservación del momento y la energía.

En el segundo y tercer apartado se puede calcular los coeficientes de restitución e:

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \leftrightarrow \delta(e)^2 = \left( \frac{-\delta(v_2')}{v_2 - v_1} \right)^2 + \left( \frac{\delta(v_1')}{v_2 - v_1} \right)^2 + \left( \frac{v_2' - v_1'}{(v_2 - v_1)^2} \delta(v_2) \right)^2 + \left( -\frac{v_2' - v_1'}{(v_2 - v_1)^2} \delta(v_1) \right)^2 \quad [12]$$

# ADQUISICIÓN DE DATOS

## Coeficiente de restitución

A la hora de medir la velocidad optamos por realizar un ajuste por mínimos cuadrados en la gráfica de la posición en lugar de tomar el valor de la velocidad directamente. Para cada una de las tres medidas elegimos tres puntos (consecutivamente) para el ajuste. Un método alternativo habría sido simplemente tomar los tres puntos de la velocidad antes y después del choque y calcular la media y el error de dispersión. En ese caso, el valor de la media sería equivalente al obtenido mediante en el ajuste en la tercera medida de  $v$  y la primera de  $v'$ , que serán los valores que se deberán emplear en posteriores cálculos.

**Tabla 1** – Velocidad del carrito de masa  $m$  antes ( $v$ ) y después ( $v'$ ) del choque para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.

$m$	$v$	I	II	III
$m_a$	$v$ (m/s)	0,4294 ± 0,0008	0,7125 ± 0,008	0,951 ± 0,007
		0,3998 ± 0,0011	0,6976 ± 0,0019	0,916 ± 0,003
		0,3970 ± 0,0012	0,6835 ± 0,0012	0,9101 ± 0,0015
	$v'$ (m/s)	0,2948 ± 0,0008	0,5685 ± 0,0011	0,792 ± 0,002
		0,2830 ± 0,0008	0,5537 ± 0,0011	0,7775 ± 0,0016
		0,2652 ± 0,0013	0,5427 ± 0,0011	0,7612 ± 0,0013
$m_a+m_{h1}$	$v$ (m/s)	0,5379 ± 0,0019	0,7930 ± 0,0014	1,083 ± 0,005
		0,501 ± 0,002	0,7742 ± 0,0005	1,0752 ± 0,0016
		0,4785 ± 0,0015	0,7640 ± 0,0013	1,0604 ± 0,0016
	$v'$ (m/s)	0,4095 ± 0,0010	0,6806 ± 0,0014	0,9495 ± 0,0015
		0,3887 ± 0,0010	0,6678 ± 0,0013	0,9417 ± 0,0010
		0,3621 ± 0,0009	0,6548 ± 0,0010	0,9286 ± 0,0004
$m_a+m_{h1}+m_{h2}$	$v$ (m/s)	0,375 ± 0,006	0,5187 ± 0,0010	0,809 ± 0,007
		0,3572 ± 0,0009	0,5079 ± 0,0014	0,7962 ± 0,0011
		0,3385 ± 0,0011	0,4924 ± 0,0011	0,7824 ± 0,0009
	$v'$ (m/s)	0,2815 ± 0,0003	0,4429 ± 0,0006	0,6953 ± 0,0006
		0,2741 ± 0,0004	0,4334 ± 0,0008	0,6873 ± 0,0007
		0,2608 ± 0,0007	0,4213 ± 0,0006	0,672 ± 0,004

*Nota:* No se miden los puntos de la gráfica “durante” el choque, sino antes y después para obtener las velocidades.

En la tabla se ha representado el módulo de las velocidades; vectorialmente,  $v$  y  $v'$  tienen direcciones opuestas, con lo que podemos optar por  $v$  como dirección positiva y cambiar  $v'$  de signo si se necesita operar de forma vectorial.

En el momento en que se lanza el carrito se ve que hay un rozamiento considerable que influirá en nuestros resultados. Cuantitativamente se observa la disminución de la velocidad en la tabla en las distintas medidas consecutivas de la velocidad. Por ello, para analizar los valores de la velocidad justo antes y después del choque se deberán emplear la última medida de  $v$  y la primera de  $v'$ .

## Choque elástico

En este caso se mide una sola velocidad antes y después del choque en cada carrito para distintas velocidades iniciales y masas accesorias. Se escoge como sistema de referencia el s3nar situado en el extremo izquierdo, con lo que cambiamos de signo el valor obtenido en el derecho para poder operar después vectorialmente (1 dimensi3n).

**Tabla 2 – Velocidad de los carritos azul  $m_a$  y rojo  $m_r$  antes ( $v$ ) y después ( $v'$ ) del choque elástico para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.**

<b>v</b>		<b><math>m_a</math></b>	<b><math>m_r</math></b>
<i>I</i>	v (m/s)	0,3292 ± 0,0015	$v_0$
	$v'$ (m/s)	-0,00003 ± 0,00004	0,268 ± 0,002
<i>II</i>	v (m/s)	0,581 ± 0,003	$v_0$
	$v'$ (m/s)	-0,00007 ± 0,00009	0,5452 ± 0,0010
<i>III</i>	v (m/s)	0,772 ± 0,008	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,0033 ± 0,004	0,703 ± 0,003
<b>v</b>		<b><math>m_a</math></b>	<b><math>m_r + m_{h1}</math></b>
<i>I</i>	v (m/s)	0,370 ± 0,002	$v_0$
	$v'$ (m/s)	-0,0994 ± 0,0016	0,2041 ± 0,0016
<i>II</i>	v (m/s)	0,560 ± 0,002	$v_0$
	$v'$ (m/s)	-0,1558 ± 0,0016	0,3116 ± 0,0015
<i>III</i>	v (m/s)	0,864 ± 0,005	$v_0$
	$v'$ (m/s)	-0,2521 ± 0,0015	0,5404 ± 0,0012

*Nota:* No se cogen varios puntos de la posición para realizar el ajuste y obtener la velocidad.  
 $v_0 = 0,00000 \pm 0,00000$  m/s

Como se observa en la tabla, el carrito azul se lanza contra el rojo, en reposo, y tras el choque el azul retrocede un poco en la mayoría de casos y el azul sigue con menor velocidad que la del azul en su misma dirección.

Los errores son mayores que en el apartado anterior porque se escogieron más puntos para el ajuste, con lo que la dispersión de los datos (debida en parte al rozamiento) es mayor.

### **Choque inelástico**

El procedimiento experimental en este apartado es análogo al anterior, sólo que el choque en este caso es inelástico (los carritos continúan moviéndose juntos hacia la derecha, con lo que no aparece ningún signo negativo).

**Tabla 3 – Velocidad de los carritos azul  $m_a$  y rojo  $m_r$  antes ( $v$ ) y después ( $v'$ ) del choque inelástico para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.**

<b>v</b>		<b><math>m_a</math></b>	<b><math>m_r</math></b>
<i>I</i>	v (m/s)	0,607 ± 0,002	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,2678 ± 0,0018	0,2661 ± 0,0017
<i>II</i>	v (m/s)	0,638 ± 0,003	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,2801 ± 0,0017	0,278 ± 0,002
<i>III</i>	v (m/s)	0,905 ± 0,002	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,4224 ± 0,0011	0,4225 ± 0,0013
<b>v</b>		<b><math>m_a</math></b>	<b><math>m_r + m_{h1} + m_{h2}</math></b>
<i>I</i>	v (m/s)	0,611 ± 0,003	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,1317 ± 0,0010	0,1313 ± 0,0010
<i>II</i>	v (m/s)	0,874 ± 0,003	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,1957 ± 0,0011	0,1965 ± 0,0010
<i>III</i>	v (m/s)	1,021 ± 0,002	$v_0$
	$v'$ (m/s)	0,2278 ± 0,0012	0,2273 ± 0,0011

En este caso se observa que ambos carritos siguen después del choque unidos a la misma velocidad (valores compatibles a primera vista en la tabla superior).

# TRATAMIENTO DE DATOS

## Coeficiente de restitución

Según las ecuaciones [4] a [11], podemos calcular el momento y la energía correspondientes a las velocidades significativas de la **Tabla 1** y obtener los valores para el coeficiente de restitución.

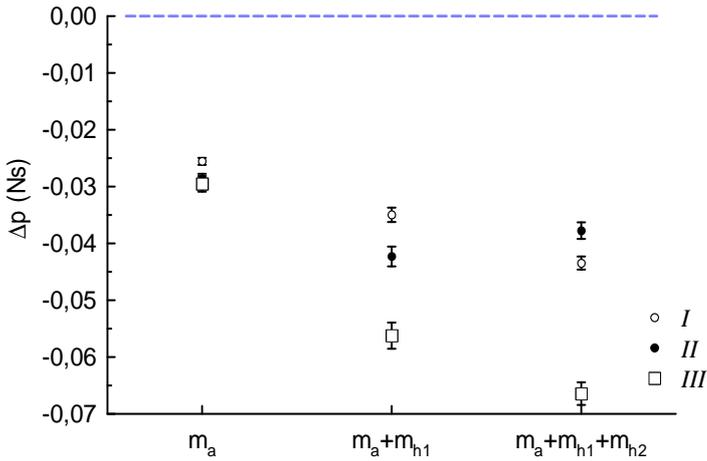
**Tabla 4 – Momento lineal y energía cinética antes (p, E) y después (p', E') del choque, variación de momento y energía ( $\Delta p=p'-p$ ,  $\Delta E=E'-E$ ) y coeficiente de restitución e para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.**

		I	II	III
<b>m<sub>a</sub></b>	<b>p (Ns)</b>	0,0993 ± 0,0005	0,1709 ± 0,0007	0,2275 ± 0,0010
	<b>p' (Ns)</b>	0,0737 ± 0,0004	0,1421 ± 0,0006	0,1980 ± 0,0009
	<b>Δp (Ns)</b>	-0,0256 ± 0,0006	-0,0288 ± 0,0010	-0,0295 ± 0,0014
	<b>E (J)</b>	0,04963 ± 0,00014	0,0854 ± 0,0003	0,1138 ± 0,0005
	<b>E' (J)</b>	0,03685 ± 0,00007	0,0711 ± 0,0002	0,0990 ± 0,0005
	<b>ΔE (Ns)</b>	-0,01278 ± 0,00016	-0,0144 ± 0,0004	-0,0148 ± 0,0007
	<b>e</b>	<b>0,743 ± 0,003</b>	<b>0,832 ± 0,002</b>	<b>0,870 ± 0,003</b>
<b>m<sub>a</sub>+m<sub>h1</sub></b>	<b>p (Ns)</b>	0,2426 ± 0,0010	0,3873 ± 0,0013	0,5376 ± 0,0017
	<b>p' (Ns)</b>	0,2076 ± 0,0008	0,3451 ± 0,0012	0,4814 ± 0,0015
	<b>Δp (Ns)</b>	-0,0350 ± 0,0013	-0,0423 ± 0,0017	-0,0562 ± 0,0023
	<b>E (J)</b>	0,1213 ± 0,0004	0,1937 ± 0,0007	0,2688 ± 0,0012
	<b>E' (J)</b>	0,1038 ± 0,0002	0,1725 ± 0,0006	0,2407 ± 0,0010
	<b>ΔE (Ns)</b>	-0,0175 ± 0,0005	-0,0211 ± 0,0009	-0,0281 ± 0,0015
	<b>e</b>	<b>0,856 ± 0,003</b>	<b>0,891 ± 0,002</b>	<b>0,895 ± 0,002</b>
<b>m<sub>a</sub>+m<sub>h1</sub>+m<sub>h2</sub></b>	<b>p (Ns)</b>	0,2583 ± 0,0010	0,3757 ± 0,0012	0,5970 ± 0,0015
	<b>p' (Ns)</b>	0,2148 ± 0,0005	0,3379 ± 0,0009	0,5305 ± 0,0013
	<b>Δp (Ns)</b>	-0,0435 ± 0,0012	-0,0378 ± 0,0015	-0,0665 ± 0,0020
	<b>E (J)</b>	0,1291 ± 0,0003	0,1879 ± 0,0005	0,2985 ± 0,0008
	<b>E' (J)</b>	0,1074 ± 0,00009	0,1690 ± 0,0003	0,2653 ± 0,0005
	<b>ΔE (Ns)</b>	-0,02175 ± 0,00032	-0,0189 ± 0,0005	-0,0332 ± 0,0009
	<b>e</b>	<b>0,832 ± 0,003</b>	<b>0,899 ± 0,002</b>	<b>0,8887 ± 0,0013</b>

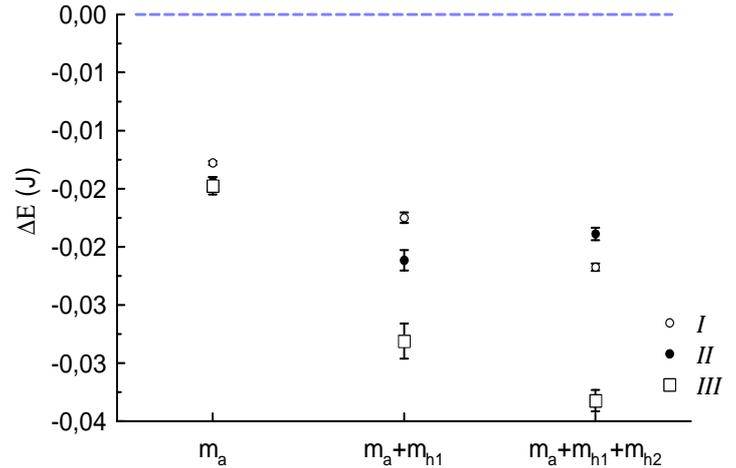
Como se observa en la tabla, la diferencia entre los momentos lineales es siempre negativa, es decir, el momento es siempre menor después del choque, con lo que existe un error sistemático (si fuese aleatorio habría valores alternativamente por encima y por debajo de cero) en el procedimiento experimental. Este error se debe probablemente al rozamiento, que hemos despreciado a la hora de plantear las ecuaciones. Por tanto, no hemos podido verificar la ley de conservación del momento lineal porque no se daban las condiciones necesarias (ausencia de fuerzas externas) para ello. Esto era de esperar con simplemente observar la **Tabla 1**, donde el rozamiento de las ruedas con el carril es fácilmente apreciable. Otra causa del error podría estar en el rozamiento con el aire. De todas formas, la variación de momento siempre nos va a salir distinta de cero si el coeficiente de restitución no es uno, con lo que o bien hay que aumentar el error de la diferencia de momentos para que englobe el cero o bien replantearse el modelo teórico, puesto que experimentalmente es casi imposible que la velocidad después del choque sea la misma que a la ida. Esto se debe a que el extremo fijo puede recibir parte del impulso y, por ejemplo, empezar a vibrar. Esta serie de efectos se han despreciado en el modelo teórico y justifican que el valor de  $\Delta p$  sea sistemáticamente negativo.

En cuanto a la diferencia de energía, es lógico que no sea cero al tratarse de un choque que no es elástico (se pierde energía por deformación del material y por la compresión del muelle del pivote retráctil), aunque una parte de la diferencia podría deberse también al factor de rozamiento.

A continuación se muestran dos gráficas con los residuos del momento y la energía:



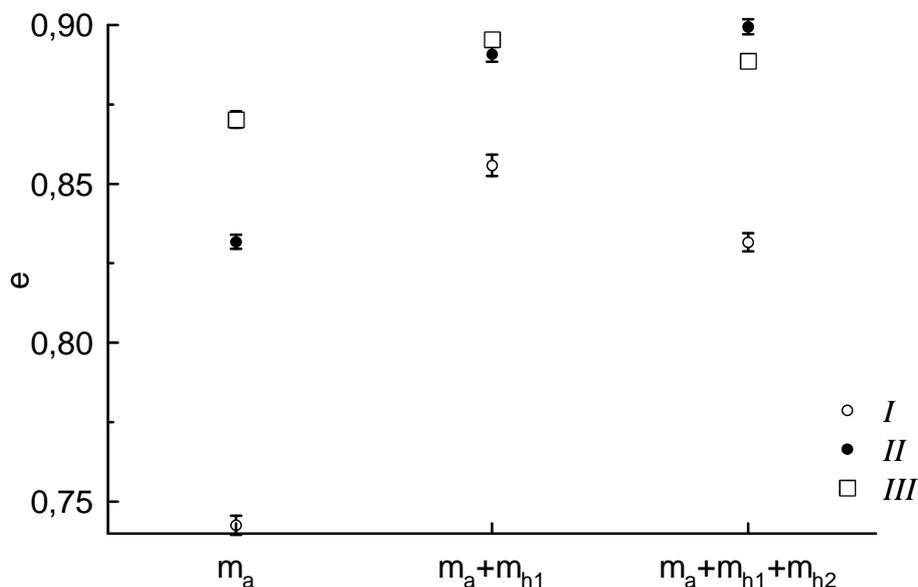
**Figura 2** - Diferencia de p antes y después del choque.



**Figura 3** - Diferencia de E antes y después del choque.

En cuanto a las medidas para distintas velocidades, se aprecia que el residuo es mayor cuanto mayor es la velocidad (excepto en el último caso). No obstante, habría que obtener más medidas para corroborar que este resultado no ha sido una casualidad. Una forma experimental de verificar esta hipótesis sería realizar muchas medidas con (muy) distintas velocidades iniciales para una misma masa y representar la variación de momento frente a la velocidad inicial. En caso de que los puntos presentasen un comportamiento lineal (en nuestro caso, con 3 medidas sería totalmente insuficiente), podríamos afirmar que la variación del momento con respecto al tiempo origina una fuerza viscosa proporcional a la velocidad. Esta fuerza estaría presente durante el choque y explicaría la no conservación del momento lineal en el mismo. Podría tratarse del rozamiento con el aire, aunque quizá su efecto sea despreciable frente al error de nuestras medidas. En cuanto a la dependencia con la masa, aunque parece que cuanto mayor es la masa, mayor es la discrepancia con respecto a cero, no podemos comparar estos valores porque las velocidades iniciales I, II y III son distintas para cada masa. Para estudiar una hipotética dependencia lineal, habría que realizar un experimento en el que la velocidad inicial fuese siempre la misma y en el que se tomasen varias medidas para diferentes masas.

A continuación se muestran los coeficientes de restitución obtenidos, cuyas tendencias son similares a las de la variación de energía y momento.



**Figura 4** - Coeficientes de restitución obtenidos para las distintas masas y velocidades iniciales I, II y III.

En esta gráfica se observa de igual manera que el coeficiente de restitución es mayor (salvo en el último caso) cuanto mayor es la velocidad inicial para una misma masa. Una explicación a este fenómeno es la influencia del rozamiento, la cual hemos despreciado y que tiene un efecto más apreciable cuanto menor es la velocidad. Con todo, el número de medidas no es suficiente como para asegurar que existe una tendencia sistemática; habría que repetir el proceso varias veces más.

En cuanto a los coeficientes obtenidos, se obtiene una dispersión del 18%, pero si descartamos el primer valor (que en la gráfica aparece muy alejado del resto), la dispersión se reduce al 7,8% y se obtiene un valor medio con su error de dispersión:

$$e_m = 0,870 \pm 0,017$$

## Choque elástico

Según las ecuaciones [4] a [11] se puede calcular el momento lineal del sistema de dos carros antes y después del choque, así como la energía cinética:

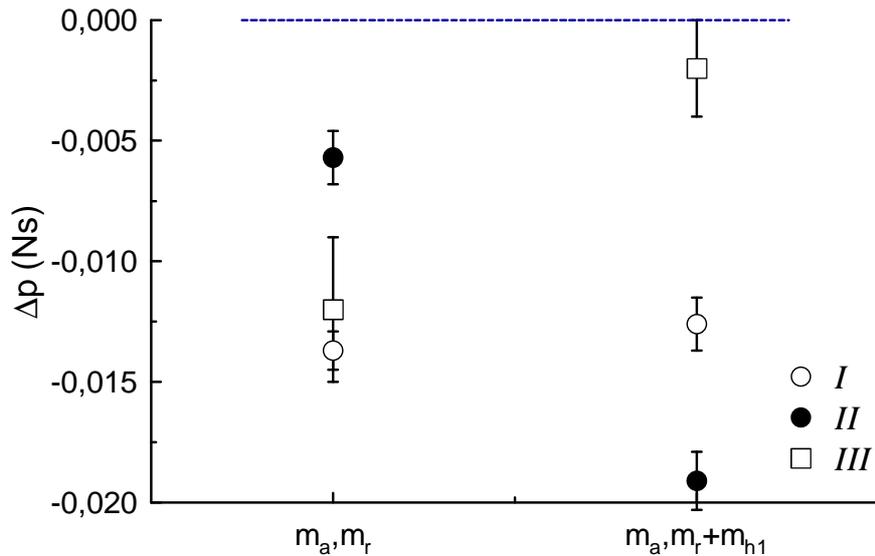
**Tabla 5 – Momento lineal y energía cinética antes ( $p$ ,  $E$ ) y después ( $p'$ ,  $E'$ ) del choque elástico, variación de momento y energía ( $\Delta p = p' - p$ ,  $\Delta E = E' - E$ ) y coeficiente de restitución  $e$  para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.**

		I	II	III
$m_a$	$p$ (Ns)	0,0823 $\pm$ 0,0005	0,1453 $\pm$ 0,0009	0,193 $\pm$ 0,002
	$p'$ (Ns)	0,0686 $\pm$ 0,0006	0,1396 $\pm$ 0,0006	0,1808 $\pm$ 0,0014
	$\Delta p$ (Ns)	-0,0137 $\pm$ 0,0008	-0,0057 $\pm$ 0,0011	-0,012 $\pm$ 0,003
	$E$ (J)	0,01355 $\pm$ 0,00013	0,0422 $\pm$ 0,0005	0,0745 $\pm$ 0,0016
	$E'$ (J)	0,00919 $\pm$ 0,00014	0,0380 $\pm$ 0,0002	0,0633 $\pm$ 0,0006
	$\Delta E$ (Ns)	-0,0044 $\pm$ 0,0002	-0,0041 $\pm$ 0,0005	-0,0112 $\pm$ 0,0017
	$e$	<b>0,814 <math>\pm</math> 0,007</b>	<b>0,939 <math>\pm</math> 0,005</b>	<b>0,906 <math>\pm</math> 0,011</b>
$m_a + m_{h1}$	$p$ (Ns)	0,0925 $\pm$ 0,0006	0,1400 $\pm$ 0,0008	0,2160 $\pm$ 0,0015
	$p'$ (Ns)	0,0799 $\pm$ 0,0010	0,1209 $\pm$ 0,0010	0,2142 $\pm$ 0,0011
	$\Delta p$ (Ns)	-0,0126 $\pm$ 0,0011	-0,0191 $\pm$ 0,0012	-0,002 $\pm$ 0,002
	$E$ (J)	0,0171 $\pm$ 0,0002	0,0392 $\pm$ 0,0003	0,0933 $\pm$ 0,0011
	$E'$ (J)	0,0119 $\pm$ 0,0002	0,0279 $\pm$ 0,0003	0,0829 $\pm$ 0,0004
	$\Delta E$ (Ns)	-0,0052 $\pm$ 0,0003	-0,0113 $\pm$ 0,0004	-0,0105 $\pm$ 0,0012
	$e$	<b>0,820 <math>\pm</math> 0,008</b>	<b>0,835 <math>\pm</math> 0,005</b>	<b>0,917 <math>\pm</math> 0,006</b>

*Nota: El coeficiente de restitución se calcula mediante la ecuación [12]*

Hay que resaltar que en el método experimental se cometió un error al coger demasiados puntos para obtener la velocidad, con lo que multiplicamos el efecto del rozamiento. En caso de repetir el experimento, escogeríamos sólo tres puntos antes y tres después del choque para minimizar su efecto. El haber cogido demasiado puede ser una causa de la diferencia de momento sistemáticamente negativa que se observa en la tabla anterior.

Como se observa a partir del coeficiente de restitución ( $e_m = 0,87 \pm 0,03$ ), el choque no es perfectamente elástico, con lo que la variación de energía cinética es distinta de cero, es decir, se pierde energía en forma de calor y deformación. En cuanto al momento lineal, como ya se ha explicado, se ve influido por el rozamiento. Tan sólo la última medida muestra un valor compatible con cero. No obstante, el cociente entre la variación de momento respecto al momento antes del choque es del 15% aproximadamente en tres casos y menor del 6% en los restantes. Por ello, es posible mejorar estos resultados que están en la frontera de lo aceptable experimentalmente para obtener unos resultados mejores y compatibles con las leyes de conservación.



**Figura 5** - Diferencia de p antes y después del choque para distintas masas de los carritos y velocidades iniciales.

### Anexo - El choque elástico

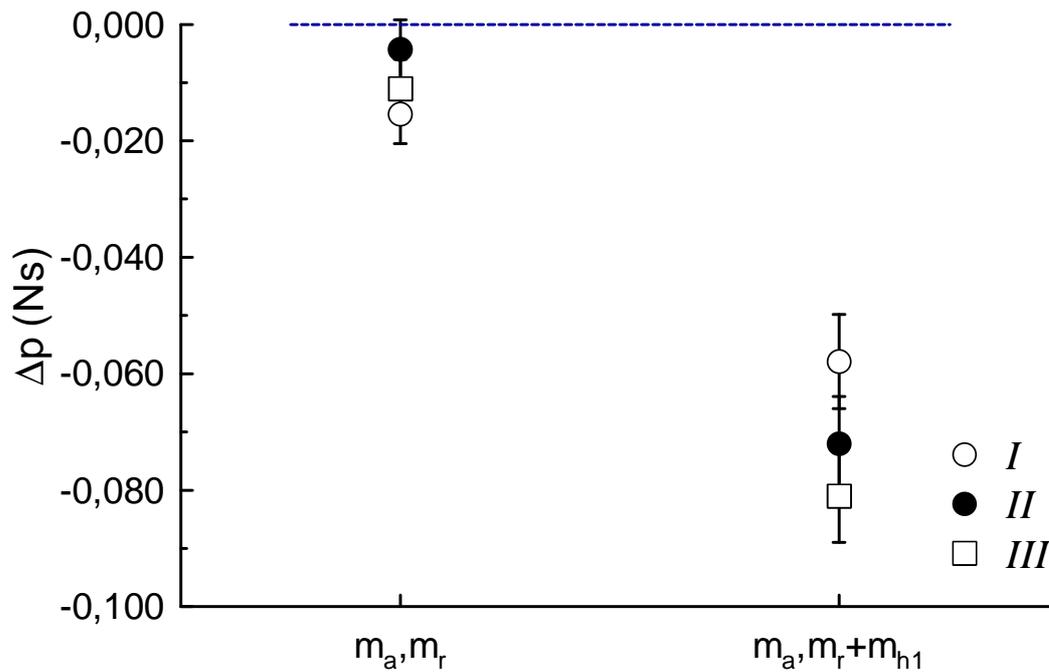
Realizamos una serie de medidas determinando el valor de la velocidad directamente en lugar de hacer el ajuste por mínimos cuadrados. Los valores obtenidos, después de calcular la media y el error de dispersión:

**Tabla 6** – Velocidad de los carritos azul  $m_a$  y rojo  $m_r$  antes ( $v$ ) y después ( $v'$ ) del choque elástico para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.

$v$		$m_a$	$m_r$
I	$v$ (m/s)	$0,40 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$-0,02 \pm 0,01$	$0,35 \pm 0,01$
II	$v$ (m/s)	$0,57 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$0,00 \pm 0,01$	$0,54 \pm 0,01$
III	$v$ (m/s)	$0,64 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$-0,01 \pm 0,01$	$0,59 \pm 0,01$
$v$		$m_a$	$m_r + m_{h1} + m_{h2}$
I	$v$ (m/s)	$0,38 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$-0,18 \pm 0,01$	$0,16 \pm 0,01$
II	$v$ (m/s)	$0,52 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$-0,24 \pm 0,01$	$0,23 \pm 0,01$
III	$v$ (m/s)	$0,61 \pm 0,01$	$v_0$
	$v'$ (m/s)	$-0,29 \pm 0,01$	$0,28 \pm 0,01$

*Nota:* Los valores de la velocidad obtienen calculando la media de tres valores y escogiendo el error mayor entre el dispersión y el de sensibilidad  
 $v_0 = 0,00 \pm 0,01$  m/s

En este caso, los valores obtenidos también son negativos, pero sus errores son mayores y concuerdan mejor con lo esperado:



**Figura 6** - Diferencia de p antes y después del choque.

**Tabla 7** – Momento lineal y energía cinética antes (p, E) y después (p', E') del choque elástico, variación de momento y energía ( $\Delta p = p' - p$ ,  $\Delta E = E' - E$ ) y coeficiente de restitución e para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.

		<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
$m_a$	<b>p (Ns)</b>	0,100 ± 0,004	0,143 ± 0,004	0,160 ± 0,004
	<b>p' (Ns)</b>	0,085 ± 0,004	0,138 ± 0,004	0,149 ± 0,004
	<b><math>\Delta p</math> (Ns)</b>	-0,015 ± 0,005	-0,004 ± 0,005	-0,011 ± 0,005
	<b>E (J)</b>	0,0200 ± 0,0010	0,0406 ± 0,0014	0,0512 ± 0,0016
	<b>E' (J)</b>	0,0157 ± 0,0009	0,0373 ± 0,0014	0,0446 ± 0,0015
	<b><math>\Delta E</math> (Ns)</b>	-0,0043 ± 0,0013	-0,0033 ± 0,0020	-0,0066 ± 0,0022
	<b>e</b>	<b>0,93 ± 0,05</b>	<b>0,95 ± 0,03</b>	<b>0,94 ± 0,03</b>
$m_a + m_{h1}$	<b>p (Ns)</b>	0,095 ± 0,006	0,130 ± 0,006	0,153 ± 0,006
	<b>p' (Ns)</b>	0,037 ± 0,006	0,058 ± 0,006	0,071 ± 0,006
	<b><math>\Delta p</math> (Ns)</b>	-0,058 ± 0,008	-0,072 ± 0,008	-0,081 ± 0,008
	<b>E (J)</b>	0,0181 ± 0,0010	0,0338 ± 0,0013	0,0465 ± 0,0015
	<b>E' (J)</b>	0,0106 ± 0,0009	0,0208 ± 0,0013	0,0306 ± 0,0016
	<b><math>\Delta E</math> (Ns)</b>	-0,0074 ± 0,0013	-0,0130 ± 0,0019	-0,0159 ± 0,0022
	<b>e</b>	<b>0,89 ± 0,05</b>	<b>0,90 ± 0,04</b>	<b>0,93 ± 0,03</b>

Como se observa, los valores obtenidos para este choque mediante este procedimiento son algo mejores, pues el choque es menos inelástico y las diferencias de momento y de energía menores. Por tanto, el valor medio del coeficiente de restitución también es superior:

$$e_{m\_elas2} = 0,924 \pm 0,013$$

## Choque inelástico

**Tabla 8** – Momento lineal y energía cinética antes ( $p$ ,  $E$ ) y después ( $p'$ ,  $E'$ ) del choque inelástico, variación de momento y energía ( $\Delta p = p' - p$ ,  $\Delta E = E' - E$ ) y coeficiente de restitución  $e$  para tres velocidades iniciales distintas (I, II y III) y distintas masas accesorias.

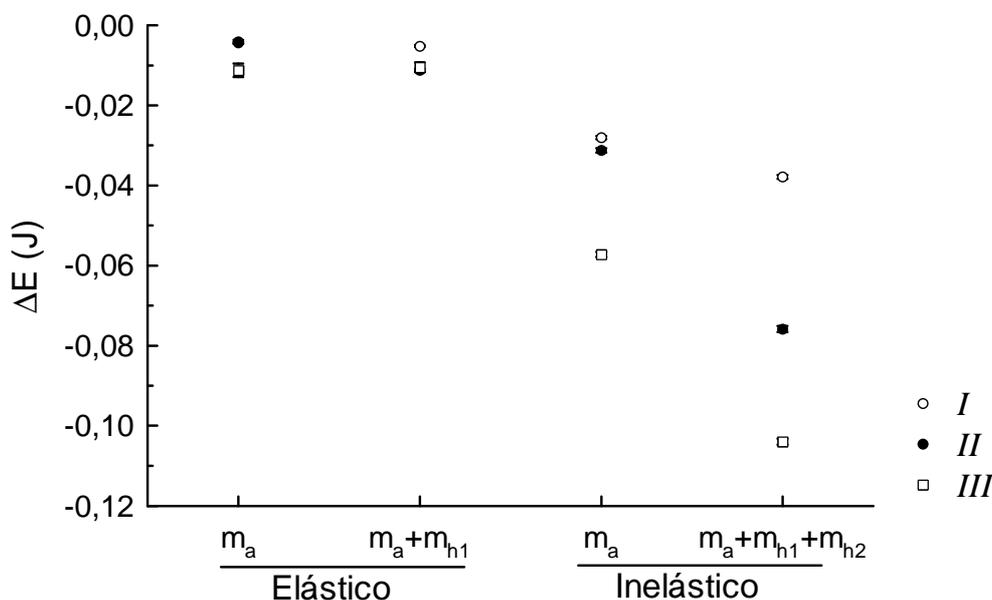
		I	II	III
$m_a$	$p$ (Ns)	0,1518 $\pm$ 0,0008	0,1595 $\pm$ 0,0010	0,2263 $\pm$ 0,0010
	$p'$ (Ns)	0,1351 $\pm$ 0,0007	0,1412 $\pm$ 0,0008	0,2138 $\pm$ 0,0007
	$\Delta p$ (Ns)	-0,0167 $\pm$ 0,0011	-0,0183 $\pm$ 0,0013	-0,0125 $\pm$ 0,0013
	$E$ (J)	0,0461 $\pm$ 0,0004	0,0509 $\pm$ 0,0005	0,1024 $\pm$ 0,0006
	$E'$ (J)	0,01803 $\pm$ 0,00017	0,0197 $\pm$ 0,0002	0,0452 $\pm$ 0,0002
	$\Delta E$ (Ns)	-0,0280 $\pm$ 0,0004	-0,0312 $\pm$ 0,0006	-0,0572 $\pm$ 0,0006
	$e$	<b>-0,003 <math>\pm</math> 0,004</b>	<b>-0,003 <math>\pm</math> 0,004</b>	<b>0,0001 <math>\pm</math> 0,0019</b>
$m_a + m_{h1}$	$p$ (Ns)	0,1528 $\pm$ 0,0010	0,2185 $\pm$ 0,0012	0,2553 $\pm$ 0,0011
	$p'$ (Ns)	0,1339 $\pm$ 0,0009	0,2000 $\pm$ 0,0009	0,2317 $\pm$ 0,0010
	$\Delta p$ (Ns)	-0,019 $\pm$ 0,0013	-0,0185 $\pm$ 0,0015	-0,024 $\pm$ 0,002
	$E$ (J)	0,0467 $\pm$ 0,0005	0,0955 $\pm$ 0,0008	0,1303 $\pm$ 0,0007
	$E'$ (J)	0,00880 $\pm$ 0,00011	0,0196 $\pm$ 0,0002	0,0264 $\pm$ 0,0002
	$\Delta E$ (Ns)	-0,0379 $\pm$ 0,0005	-0,0759 $\pm$ 0,0008	-0,1040 $\pm$ 0,0008
	$e$	<b>-0,0007 <math>\pm</math> 0,0023</b>	<b>0,0009 <math>\pm</math> 0,0017</b>	<b>-0,0005 <math>\pm</math> 0,0016</b>

Los valores de la tabla indican que el choque ha sido inelástico, pues el coeficiente de restitución es compatible con cero. Esto sucede en todos los casos y se obtiene un valor medio con su error de dispersión:

$$e_{m_{inel}} = -0,0010 \pm 0,0011 \leftrightarrow e_{m_{elas}} = 0,870 \pm 0,017 ; \leftrightarrow e_{m_{elas2}} = 0,924 \pm 0,013$$

Si comparamos con el valor obtenido en el choque elástico, se observa que se trata de extremos opuestos, puesto que el coeficiente debe variar entre cero y uno. Por tanto, se verifica que en este caso se trata de un choque inelástico, mientras que en el anterior caso era un choque casi elástico.

En cuanto al momento lineal, se repiten los problemas indicados en los apartados anteriores: los valores son sistemáticamente negativos. En cuanto a la energía cinética perdida, se observa que los valores son mucho mayores en este caso, el inelástico que en el elástico, entre tres y diez veces mayor, como se comprueba visualmente en la siguiente gráfica:



**Figura 7** – Comparación de la pérdida de energía cinética en el choque elástico e inelástico.

Se aprecia claramente que la pérdida de energía es mayor en el caso inelástico que en el elástico, donde los valores son cercanos a cero. Además, se aprecia una tendencia de mayor pérdida de energía cuanto mayor es la velocidad inicial.

## CONCLUSIÓN

En esta práctica hemos estudiado las leyes de conservación de la energía y el momento lineal en choques de carritos a partir de la medida de sus velocidades antes y después del choque. Se ha determinado el coeficiente de restitución en un choque de un carrito contra un extremo fijo, se ha hecho chocar dos carritos elásticamente y también inelásticamente. En todos los casos se han obtenido valores para el coeficiente de restitución, el momento y la energía a fin de verificar las leyes de conservación.

Los resultados obtenidos no han sido los ideales, pues en nuestro modelo hemos despreciado el rozamiento del coche con el carril, factor que ha influido considerablemente en nuestros resultados, además de otros elementos como puede ser la inelasticidad del muelle, el rozamiento con el aire o el tratar el carro como una partícula puntual. Los valores obtenidos para la variación de momento antes y después del choque han sido sistemáticamente negativos, con lo que no hemos podido verificar la ley de conservación al no darse las condiciones necesarias de ausencia de fuerzas externas. Esta limitación se ha visto incrementada por un error en el procedimiento experimental, al medirse velocidades relativamente lejanas al choque, valores que variaban mucho respecto a la velocidad justo antes y después del mismo. Además, sería más conveniente tomar tres puntos de la velocidad, calcular su media y el error de dispersión en lugar de realizar un ajuste por mínimos cuadrados en la gráfica de la posición. En este ajuste, el error de la pendiente era muy pequeño, lo que propiciaba que los resultados finales no fuesen compatibles con cero al haber subestimado los errores. De haber tenido en cuenta el error de dispersión, y dados los efectos diversos que hemos despreciado, un aumento del intervalo de incertidumbre habría estado justificado, los valores habrían sido compatibles y habríamos podido verificar las leyes aunque la precisión de nuestros valores fuese menor. Esta observación se ve confirmada por el anexo del choque elástico, donde se han repetido las medidas utilizando el método de medir la velocidad directamente (con errores experimentales mucho mayores que se corresponden con las limitaciones de nuestro montaje).

Una forma de mejorar el procedimiento experimental consistiría en sustituir el carril de aluminio por un carril de aire a fin de reducir al máximo el rozamiento y poder evaluar los resultados sin factores perturbadores. Un experimento interesante sería comparar los valores de ambos montajes experimentales y observar cómo influye el rozamiento en los resultados finales.

En cuanto a los coeficientes de restitución, hemos podido comprobar que en el choque casi elástico era cercano a uno, mientras que en el inelástico era cero. Esta comparación de coeficientes, que da cuenta de la energía cinética que se ha transformado en calor, ruido y deformación, coincide con la comparación de energía pérdida durante el choque, que es mayor cuanto mayor es la velocidad y la masa.

En resumen, podemos concluir que el experimento ha cumplido el objetivo de estudiar los choques inelásticos y elásticos, y pese a no haber podido verificar con seguridad las leyes de conservación del momento y la energía, hemos identificado dónde están las limitaciones del método experimental y cómo se podría mejorar el montaje y las medidas para obtener unos valores compatibles con los modelos teóricos, como queda patente en la repetición de las medidas especificadas en el anexo.

### Bibliografía:

- Tipler-Mosca, 5ª Ed. 2005.; Ed. Reverté; Vol. IA.
- Guión de prácticas del Laboratorio de Mecánica y Ondas, 2º de Física, UVEG