Problema 5.*1*

Considera una cuerda continua infinita cuyas perturbaciones describe la ecuación de onda inhomogénea $[\partial_{tt} - v^2\partial_{xx}]y(x,t) = F(x,t)$. Para unas condiciones iniciales

$$y(x,0) = 0\,, \quad \partial_t y(x,0) = 0\,,$$

y una fuente

$$F(x,t) = f_0\,\delta(x)\,\frac{T^2}{T^2+t^2}\,, \quad \text{con } f_0,\, T \text{ constantes.}$$

- Comenta y representa la forma de la fuente $F(x,t)$.
- Obtén $y(x,t)$.

Problema 5.*2*

Considera una cuerda continua infinita cuyas perturbaciones describe la ecuación de onda homogénea $[\partial_{tt} - v^2\partial_{xx}]y(x,t) = 0$. Para unas condiciones iniciales

$$y(x,0) = 0\,, \qquad \partial_t y(x,0) = \begin{cases} v_0\cos\left(\frac{\pi\,x}{2\,\ell}\right)\,, & x \in [-\ell;\ell]\,, \\ 0\,, & x \notin [-\ell;\ell]\,, \end{cases}$$

con v_0 y ℓ constantes.

- Representa $\partial_t y(x,0)$.
- Obtén $y(x,t)$.
- Aplicación numérica: para $\ell = 3$ m, $v = 9$ m·s^{-1} y $v_0 = 4$ m·s^{-1}, ¿en qué instante pasamos de tener $y(3\ell,t) = 0$ a tener $y(3\ell,t) \neq 0$?

Problema 5.*3*

Consideremos una cuerda continua infinita cuyas perturbaciones describe la ecuación de onda homogénea $[\partial_{tt} - v^2\partial_{xx}]y(x,t) = 0$, y una perturbación

$$y(x,0) = \frac{y_0}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}\,, \qquad \partial_t y(x,0) = 0\;.$$

Calcula $y(x,t)$ mediante transformadas de Fourier y comprueba que coincide con la solución de d'Alembert.

Problema 5.*4*

Una cuerda continua semi-infinita tiene un extremo fijo en $x = 0$; la velocidad de propagación de las perturbaciones transversales $y(x,t)$ de la cuerda es $v = 1$ m·s^{-1}. En dirección al punto fijo se propaga una onda

$$f(x - v\,t) = y_0\,e^{-\frac{((x-v\,t)-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{con} \quad x_0 = -5\text{m},\ \sigma = 0{,}5\text{m}.$$

- Representa $f(x - vt)$ para $t = 0$.
- Obtén $y(x,t)$.
- Calcula y representa $y(x,t)$ para $t = 5$s; comenta el resultado.

Problema 5.5

Dos cuerdas continuas semi-infinitas están unidas en el punto $x = 0$; la velocidad de propagación de las perturbaciones transversales $y(x,t)$ en la primera ($x < 0$), es $v_1 = 1$ m·s^{-1}, mientras en la segunda ($x > 0$), es $v_2 = 2$ m·s^{-1}. En dirección al punto fijo se propaga una onda

$$f(x - v_1\, t) = y_0\, e^{-\frac{((x-v_1\, t)-x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad \text{con} \quad x_0 = -5\text{m}, \ \sigma = 0{,}5\text{m}.$$

- Obtén $y(x,t)$.
- Calcula y representa $y(x,t)$ para $t = 5$s y para $t = 10$s.