Problema 3.*1*

Considera el sistema de la figura 1 (sin amortiguamiento).

- Obtén las frecuencias propias y los modos de oscilación del sistema.
- Calcula la solución explícita $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v$, $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$.

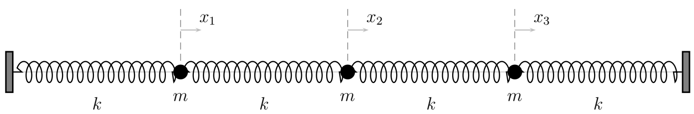

Figura 1: Osciladores acoplados del problema 1.

Problema 3.*2*

Considera el sistema de la figura 2 (sin amortiguamiento).

- Demuestra que la descripción de una cadena de muelles formada por n masas idénticas m y $n+1$ muelles idénticos de constante k (con extremos fijos) es análoga a la de una cuerda discreta.
- Aplica lo anterior a la obtención de las frecuencias propias y modos normales del sistema de la figura 2.

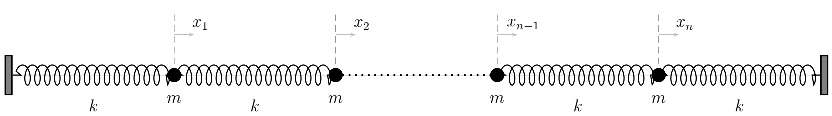

Figura 2: Cadena de osciladores acoplados del problema 2.

Problema 3.*3*

Considera el sistema de la figura 3 (sin amortiguamiento).

- Obtén las frecuencias propias y los modos normales del mismo.
- Calcula $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = v$, $\dot{x}_2(0) = 0$.

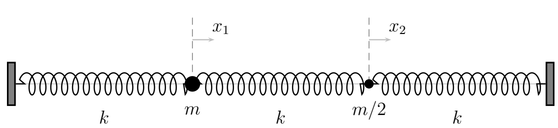

Figura 3: Osciladores acoplados del problema 3.

Problema 3.*4*

Considera el sistema de la figura 4 (sin amortiguamiento).

- Obtén las frecuencias propias y los modos normales del mismo.
- Calcula $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

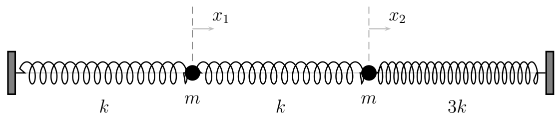

Figura 4: Osciladores acoplados del problema 4.

Problema 3.*5*

Considera el sistema de la figura 5 (sin amortiguamiento).

- Obtén las frecuencias propias y los modos normales del mismo.
- Calcula $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ dadas las condiciones iniciales $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = -a$, $\dot{x}_i(0) = 0$.

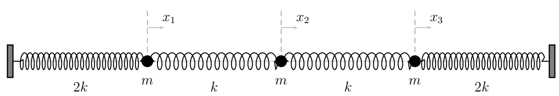

Figura 5: Osciladores acoplados del problema 5.

Problema 3.*6*

Considera la cuerda discreta (con n masas) y demuestra que

- en el modo normal de menor frecuencia, todos los desplazamientos tienen el mismo signo,
- en el modo normal de mayor frecuencia, los desplazamientos de dos masas consecutivas tienen signo opuesto.

Problema 3.*7*

Considera el sistema (en equilibrio estable) de la figura 6, formado por un disco homogéneo de masa $\frac{m}{2}$ y radio R, una masa puntual m y dos muelles ideales (el muelle de constante $2k$ une la masa m a un punto del disco a distancia $R/2$ del centro).

- Escribe las ecuaciones de movimiento del sistema perturbado alrededor del equilibrio.
- Obtén las frecuencias propias y los modos normales del sistema.

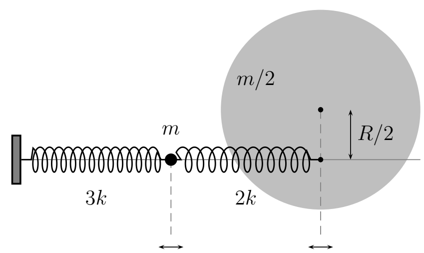

Figura 6: Sistema del problema 7.

N.B. El disco tan solo puede rotar, suspendido, alrededor de su centro – en un plano –, y tanto la masa como los muelles tan solo se pueden mover a lo largo de la línea indicada en la figura.

Problema 3.*8*

El sistema de la figura 7 se encuentra sometido a una fuerza armónica que actua sobre las dos masas de idéntica forma,

$$\vec{F}\,\cos(\omega\,t) = F_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega\,t)\ .$$

El coeficiente de amortiguamiento, idéntico para ambas masas, es $\Gamma = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

- ¿Cuáles son las soluciones estacionarias $x_{1\,[p]}(t)$ y $x_{2\,[p]}(t)$? Comenta el resultado.
- Compara la amplitud de las oscilaciones estacionarias para las frecuencias de la fuerza externa $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$. Comenta el resultado.

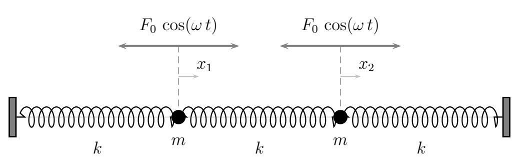

Figura 7: Osciladores acoplados del problema 8.

Problema 3.*9*

Deseamos estudiar el sistema de la figura 8, compuesto por muelles y masas ideales. Tan solo conocemos $m = 1$ kg y la escala global de las constantes de recuperación de los muelles $k = 1\ \mathrm{N\,m^{-1}}$, y queremos obtener los valores de α, β, γ y δ. El amortiguamiento es idéntico para todas las masas ($\propto \dot{x}_i$).

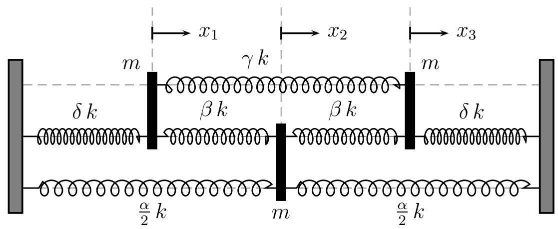

Figura 8: Osciladores acoplados del problema 9.

- Escribe las ecuaciones de movimiento de los tres grados de libertad del sistema $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
- Considerando la simetría del sistema, ¿es posible obtener un modo normal del mismo?
- Forzamos sucesivamente cada uno de los grados de libertad mediante una fuerza externa $F_0\, \cos(\omega\, t)$ y medimos la energía media alcanzado el régimen estacionario. Variando la frecuencia ω obtenemos las curvas: 9(a) al forzar x_1 – fuente $F_0\, \cos(\omega\, t)\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ –, y *también* al forzar x_3 – fuente $F_0\, \cos(\omega\, t)\, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ –, 9(b) al forzar x_2 – fuente $F_0\, \cos(\omega\, t)\, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ –.
- Obtén las frecuencias propias y los modos normales del sistema[1].

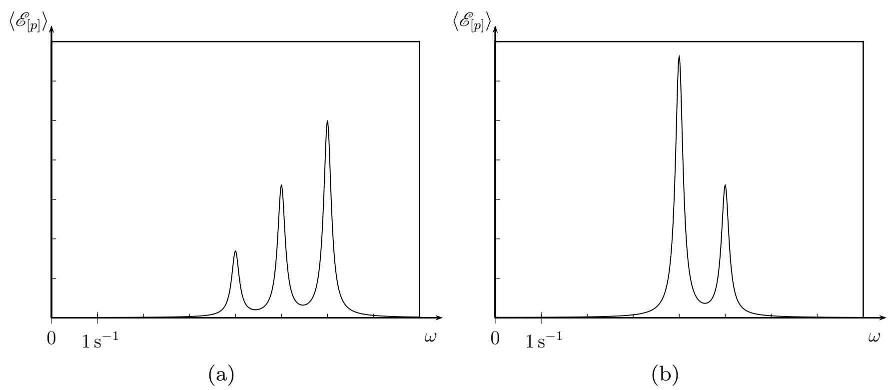

Figura 9: Energía media $\langle \mathscr{E}_{[p]} \rangle$, problema 9.

[1] N.B. Considera cantidades “sencillas” (por ejemplo enteros y raíces cuadrados de enteros) al determinar frecuencias propias y modos normales.