Problema 2.*1*

Un niño de 20 kg se balancea en un columpio de 2.5 metros de longitud. Para desplazamientos pequeños con respecto al equilibrio, el sistema es análogo a un péndulo simple.

- ¿Cuál es la frecuencia natural de las oscilaciones del mismo?
- Las oscilaciones del columpio no se prolongan indefinidamente, el sistema tiene, obviamente, amortiguamiento. Estima un valor razonable del mismo.
- ¿Cuál es entonces la frecuencia óptima para conseguir la mayor amplitud de balanceo forzando su movimiento con una fuerza externa armónica $\alpha_0 \cos(\omega\, t)$?
- Propón un valor razonable de α_0 y comenta el resultado del punto anterior.
- Si en lugar de una fuerza externa armónica consideramos la siguiente fuerza (más verosímil) $f(t)$,

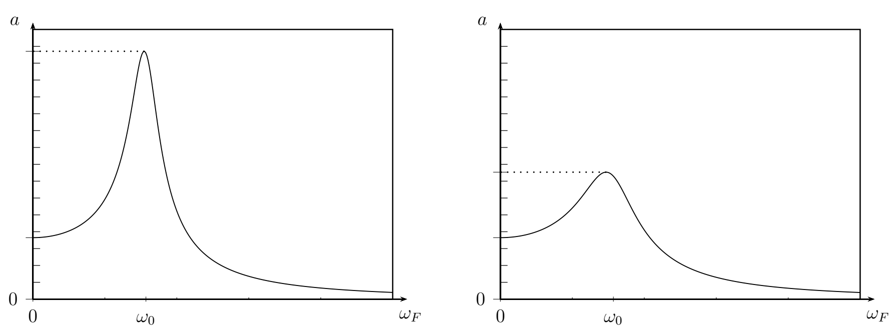
$$f(t) = \begin{cases} \alpha_0\,, & t \in [0; \frac{T}{4}]\ , \\ 0\,, & t \in]\frac{T}{4}; T]\ , \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t)\,,$$

  con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y ω la frecuencia del tercer apartado, compara la amplitud de del balanceo en este caso con el resultado de aquel apartado.

Problema 2.*2*

Observa las figuras 1(a) y 1(b), que representan la amplitud de la oscilación estacionaria de un sistema forzado de forma armónica ($\propto \cos(\omega_F t)$), y estima para cada oscilador el valor del factor de calidad ω_0/Γ, con Γ el coeficiente de amortiguamiento y ω_0 la frecuencia natural de oscilación de cada oscilador.



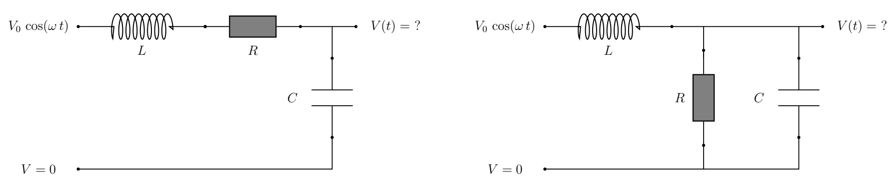
(a) Oscilador 1. (b) Oscilador 2.

Figura 1: Amplitud de la solución estacionaria $a(\omega_F)$ (problema 2).

Problema 2.*3*

Considera los circuitos RLC representados en la figura 2. Estamos interesados en la tensión de salida $V(t)$ cuando el circuito es forzado por una fuerza electromotriz armónica $V_0 \cos(\omega\, t)$.

- Demuestra que la frecuencia natural ω_0 de oscilación de $V(t)$ es idéntica en ambos casos.
- Demuestra que el producto de los factores de calidad ω_0/Γ de los dos montajes es constante (4).
- Considerando los valores $R = 1\ \Omega$, $C = 10^{-3}$ F, $L = 10^{-1}$ H, para una fuerza electromotriz con $V_0 = 10$ V, ¿es posible la resonancia en $V(t)$ en el caso (a)? ¿Y en el caso (b)?
- Si es posible tener resonancia en $V(t)$ en uno de los dos circuitos para una determinada ω, compara los voltajes máximos en ambos circuitos para esa misma ω externa.



(a) En serie. (b) R y C en paralelo.

Figura 2: Circuitos RLC, problema 3.

Problema 2.*4*

Una masa $m = 1$ kg unida a un muelle de constante de recuperación k tiene una frecuencia natural de oscilación $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$ s^{-1}. El sistema está amortiguado con $\Gamma = \frac{\omega_0}{4}$ y es forzado por $F_0 \cos(\omega\, t)$ con $F_0 = 2$ N.

- ¿Cuál es la amplitud del movimiento estacionario para $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$?
- ¿Cuál es la amplitud del movimiento estacionario para $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$?
- Compara los resultados anteriores con el desplazamiento que provocaría una fuerza constante F_0.
- ¿Cuál es la energía media del sistema en cada caso?

Problema 2.*5*

Un oscilador de frecuencia natural ω_0 y amortiguamiento $\Gamma = \omega_0/10$, inicialmente en reposo, es sometido a la fuerza externa $F_0 \cos(\omega\, t)$ para $t \in [0; 10\,\frac{2\pi}{\omega}[$, en $t = 10\,\frac{2\pi}{\omega}$, la fuerza externa deja de actuar.

- Para ω igual a la frecuencia de resonancia y las condiciones iniciales que desees, obtén la trayectoria del sistema $x(t)$.

Problema 2.*6*

Un oscilador no lineal libre obedece la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\Gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x + A\,x^{n+1} = 0,\ n \in \mathbb{N},\, n \geq 1.$$

Encuentra los posibles equilibrios del sistema y analiza su estabilidad

- empleando la ecuación de movimiento,
- empleando un potencial $V(x)$ apropiado.

Problema 2.*7*

Demuestra que la energía media, en el régimen estacionario, de un oscilador armónico forzado por una fuente $\propto \cos(\omega_F t)$, es máxima para una frecuencia ω_F mayor que la de resonancia (suponiendo que esta es posible) y menor que la natural del oscilador, ω_0.

Problema 2.*8*

Un péndulo simple ideal (masa puntual m y longitud ℓ) se encuentra suspendido de un punto que oscila horizontalmente de forma armónica (ver figura 3). Demuestra que para oscilaciones pequeñas, la ecuación de movimiento del péndulo corresponde a la de un oscilador armónico forzado. (N.B. Considera el amortiguamiento del sistema despreciable)

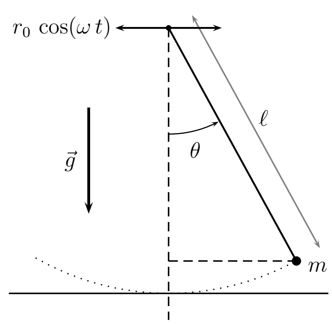


Figura 3: Péndulo simple con apoyo oscilante, problema 8.

Problema 2.*9*

En ausencia de amortiguamiento (i.e. cuando $\Gamma \to 0$) la descripción del oscilador forzado falla para $\omega_F \to \omega_0$: el objeto de este problema es abordar esa situación.

- Resuelve $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$ para unas condiciones iniciales $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ arbitrarias y comenta el resultado.
- Para unas condiciones $\{x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0\}$, ¿qué comportamiento, en función del tiempo, tiene la energía del oscilador?

Problema 2.*10*

Un sistema evoluciona con ecuación de movimiento $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$, con ω_0^2 y m conocidas (i.e. es un oscilador sin amortiguamiento, forzado a su frecuencia natural ω_0) y condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

- Obtén $x(t)$ (ver problema 9).
- Obtén F_0 y t_0 tales que $x(t_0) = 0$ y $\dot{x}(t_0) = 0$ (i.e. la fuerza externa ha "detenido" el sistema en $t = t_0$, si en t_0 dejara de actuar, el sistema permanecería en la posición de equilibrio). Representa $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ para ese valor de F_0.
- Con los valores anteriores de F_0 y t_0, calcula la energía suministrada por la fuente al sistema entre $t = 0$ y $t = t_0$. Comenta el resultado.