

Problema 1.1

Escribe la ecuación de movimiento de un *péndulo simple* (masa puntual m suspendida de una cuerda de longitud ℓ , sin masa, sometida a la acción de la gravedad \vec{g} , sin amortiguamiento).

- Perturbado alrededor del equilibrio estable (figura 1(a)), ¿cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones armónicas?
- Aplicación numérica: con un cuerda de 0.5 m, ¿qué masa m debo escoger para construir un péndulo de periodo $T = 2$ s?

Problema 1.2

Considera una varilla rígida de masa m y longitud ℓ suspendida de uno de sus extremos y sometida a la acción de la gravedad.

- Perturbada alrededor del equilibrio estable (figura 1(b)), ¿cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones armónicas? Aplicación numérica: para una varilla de longitud $\ell = 0,5$ m, ¿qué masa m debo escoger para construir un “péndulo” de periodo $T = 2$ s?
- Si adhiero una masa puntual m' al extremo inferior de la varilla, ¿cuánto debe valer m' para que la frecuencia natural de oscilación del nuevo sistema sea idéntica a la anterior?

Problema 1.3

Considera una varilla rígida de masa m y longitud ℓ suspendida a distancia ℓ_0 de uno de sus extremos y sometida a la acción de la gravedad .

- Perturbada alrededor del equilibrio estable (figura 1(c)), ¿cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones armónicas?
- Aplicación numérica: para una varilla de longitud $\ell = 0,5$ m, suspendida con $\ell_0 = 0,4$ m, ¿qué masa m debo escoger para construir un “péndulo” de periodo $T = 2$ s?
- ¿Qué ocurre cuando $\ell_0 \rightarrow \ell/2$?

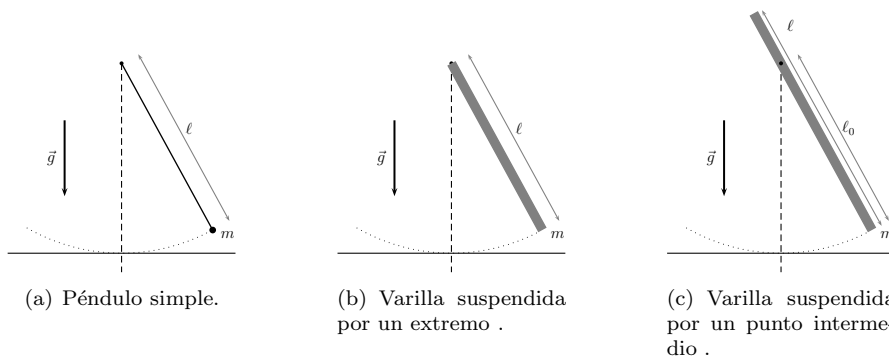


Figura 1: Problemas 1, 2 y 3.

Problema 1.4

Demuestra que al perturbar un circuito LC como el de la figura 2(a) en equilibrio, evoluciona como un oscilador armónico. ¿Cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones?

Problema 1.5

Demuestra que al perturbar un circuito RLC como el de la figura 2(b) en equilibrio, evoluciona como un oscilador amortiguado.

- ¿Cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones?
- ¿Cuál es el tiempo característico del amortiguamiento?
- Aplicación numérica: calcula los valores anteriores para un circuito con $R = 2 \Omega$, $C = 10^{-3} \text{ F}$, $L = 0,1 \text{ H}$.

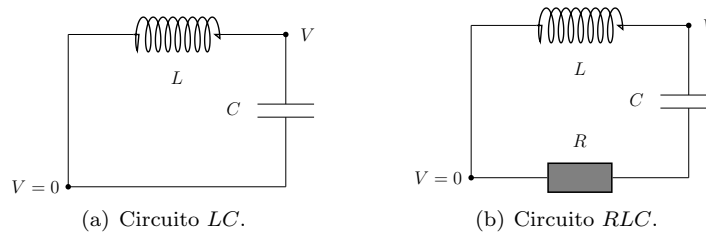


Figura 2: Problemas 4 y 5.

Problema 1.6

Considera un sistema con un grado de libertad x , con inercia dada por μ , cuya energía potencial es

$$V(x) = \frac{E_0}{a^4} (x^4 + 4 a x^3 - 8 a^2 x^2) ,$$

siendo a una escala característica (en x) del sistema (ver figura 3).

- ¿Para qué valores de x puede encontrarse el sistema en equilibrio?
- ¿Qué equilibrios del sistema son estables?
- ¿Cuál es la frecuencia natural de oscilación del sistema alrededor de cada equilibrio estable?
- Alrededor de cada equilibrio estable, ¿para qué escala de desplazamientos en x falla la aproximación armónica?

Problema 1.7

Considera un disco homogéneo de masa M y radio R .

- ¿Cuál es la frecuencia de sus oscilaciones pequeñas cuando se suspende de un punto a distancia R del centro? (Figura 4(a))
- ¿Cuál es la frecuencia de sus oscilaciones pequeñas cuando se suspende de un punto a distancia $R/2$ del centro? (Figura 4(b))

- Particulariza los resultados anteriores al caso de un “plato” de masa 0,4 kg y de radio 25 cm.

Problema 1.8

Considera una esfera homogénea de radio R y masa M , y un (pequeño) túnel que la atraviesa a lo largo de un diámetro. Se deja caer una masa m en ese túnel sin velocidad inicial. Considerando la atracción gravitatoria, escribe la ecuación de movimiento de la masa m . ¿Cuál es la frecuencia natural de sus oscilaciones? Particulariza al caso de la Tierra con $R = 6,4 \times 10^6$ m, $M = 6 \times 10^{24}$ kg (constante de gravitación universal $G = 6,67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻²). (Figura 5(a))

Problema 1.9

Considera de nuevo el problema 1.6; ¿qué ocurre si en lugar de una esfera homogénea tenemos una esfera “hueca”, i.e. con densidad nula para $R_0 < R$? (Figura 5(b))

Problema 1.10

Considera un oscilador amortiguado libre. Demuestra que si el sistema está sobreamortiguado o si el amortiguamiento es crítico, el sistema atraviesa la posición de equilibrio o bien en *una* o bien en *ninguna* ocasión.

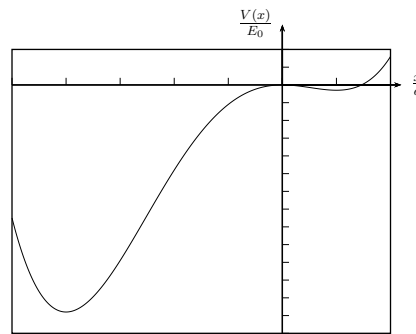


Figura 3: Potencial, problema 6.

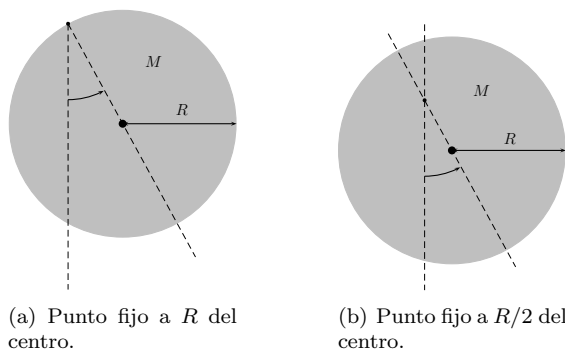


Figura 4: Disco homogéneo, problema 7.

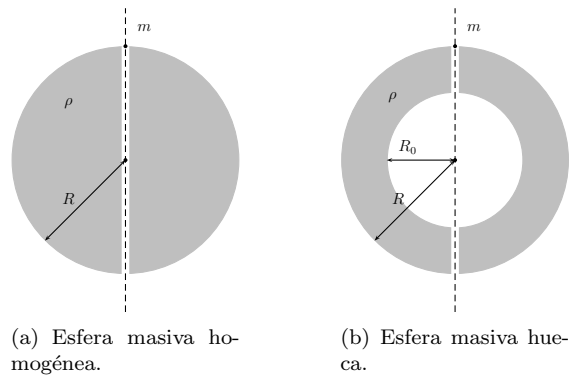


Figura 5: Problemas 5 y 6.