

Ondas

Apuntes de clase

Índice

1. Solución de d'Alembert	2
1.1. Solución de d'Alembert libre	2
1.2. Reflexión	6
1.2.1. Reflexión: extremo fijo	6
1.2.2. Reflexión: extremo libre	7
1.3. Refracción y reflexión	9
1.4. Energía	11
1.5. Solución de d'Alembert con fuente	13
1.6. Efecto Doppler	18
1.6.1. Fuente $F_0 \delta(x) \sin(\omega t)$	19
1.6.2. Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 < v$	20
1.6.3. Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 > v$	22
1.6.4. * Fuente $F_0 \delta(x - vt) \sin(\omega t)$	24
2. Ecuación de onda y ondas planas	27
2.1. Ondas planas	27
2.2. Solución mediante ondas planas	29
2.3. Dispersión	31
2.3.1. Dos ondas planas	31
2.3.2. Paquete de ondas: velocidades de fase y grupo	34
2.4. Perturbaciones estacionarias	35
2.5. Refracción de ondas planas	36
2.6. Teorema del ancho de banda	37
3. * Comentarios adicionales	41
A. Animaciones	42

En los temas anteriores nos hemos ocupado del estudio de sistemas perturbados alrededor del equilibrio: sistemas con un único grado de libertad (discreto) y su evolución, tanto libre como forzada, sistemas con varios grados de libertad (discretos) acoplados y el papel fundamental desempeñado por los modos normales para reformular y resolver la dinámica, y finalmente sistemas continuos en los que de nuevo los modos normales tienen la mayor importancia. Al abordar el estudio de sistemas continuos nos hemos encontrado con una ecuación en derivadas parciales, la ecuación de onda, en lugar de las ecuaciones diferenciales ordinarias (acopladas o no) que describen sistemas discretos. En la ecuación de onda (unidimensional) aparecen en pie de igualdad la coordenada espacial x y la coordenada temporal t , hecho reflejado en la forma armónica tanto de la dependencia espacial como de la dependencia temporal de la evolución temporal de los modos normales. Ahora bien, el considerar sistemas limitados espacialmente y por tanto sometidos a unas determinadas condiciones de contorno rompe esa equivalencia entre x y t a la hora de resolver el movimiento de un sistema. En este tema abordamos el estudio de la ecuación de onda sin ese tipo de restricción. Como el propio nombre indica (y no hemos justificado en absoluto), la ecuación *de onda* tiene soluciones con características que no se manifiestan en los sistemas acotados de los temas anteriores: *ondas*, i.e. perturbaciones que al evolucionar en el *tiempo* se propagan, evolucionan, también en el *espacio*, como cabría esperar de la mencionada “equivalencia” con que aparecen espacio y tiempo en la ecuación diferencial. Seguimos el siguiente recorrido. En el primer apartado nos ocupamos de la solución de la ecuación de onda de *d’Alembert*, que nos permite, además de un primer contacto con perturbaciones que se propagan libremente, una primera descripción de fenómenos ondulatorios como la reflexión, el efecto Doppler o un ejemplo muy simplificado de una onda de choque. En el segundo apartado abandonamos la solución de *d’Alembert* para volver a resolver la ecuación de onda con una estrategia análoga a la empleada en los temas anteriores: obteniendo una familia de soluciones básicas de la ecuación de onda, las *ondas planas*, construimos soluciones combinando o superponiendo adecuadamente estas. Yendo más allá de la propia ecuación de onda, el uso de ondas planas nos va a permitir tratar superficialmente fenómenos como la *dispersión*. Completamos ese segundo apartado con una propiedad relevante, recogida en el *teorema del ancho de banda*. En el apartado 3 nos limitamos a comentar la validez de lo desarrollado en los apartados anteriores al considerar sistemas en dos o tres dimensiones espaciales y al considerar *otras* ecuaciones de onda. Finalmente, en el apéndice A, comentamos algunas animaciones que ilustran aspectos de los apartados anteriores.

1. Solución de d’Alembert

1.1. Solución de d’Alembert libre

Iniciamos el estudio de las ondas con la solución de *d’Alembert* de la ecuación de onda libre (homogénea) que describe las perturbaciones de un sistema como la cuerda unidimensional homogénea de tensión τ y densidad lineal de masa ρ ,

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 . \quad (1)$$

A lo largo del tema anterior no prestamos mayor atención a la omnipresente cantidad $\frac{v}{\rho}$: tiene dimensiones de (velocidad)² y es constante, con lo que podemos otorgar nombre propio a esta velocidad, $v \equiv \frac{v}{\rho}$, anticipando el papel que desempeñará en lo sucesivo. Reescribimos por tanto ec. (1)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial (vt)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} . \quad (2)$$

Las variables vt y x aparecen en pie de igualdad en la ecuación de onda (2). Veamos qué ocurre si en lugar de emplear esas variables, reescribimos la ecuación de onda en términos de dos combinaciones lineales independientes y sencillas de las mismas:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_+ = x + vt \\ z_- = x - vt \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{z_+ + z_-}{2} \\ t = \frac{z_+ - z_-}{2v} \end{array} \right\} . \quad (3)$$

¿Cómo cambian las derivadas parciales?

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial z_+}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial z_-}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_-} = v \left[\frac{\partial}{\partial z_+} - \frac{\partial}{\partial z_-} \right] , \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial z_+}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial z_-}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z_-} = \left[\frac{\partial}{\partial z_+} + \frac{\partial}{\partial z_-} \right] , \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= v^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_-^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} \right] , \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_-^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} \right] . \end{aligned}$$

Tenemos por tanto

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] = -4v^2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} , \quad (4)$$

con lo que, en términos de z_- y z_+ , con $y(z_+, z_-) \equiv y(x, t)$, la ecuación de onda no es más que

$$-4v^2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} y(z_+, z_-) = 0 . \quad (5)$$

¿Qué soluciones tiene esta (peculiar) ecuación diferencial? Empecemos por “leer” detenidamente la ecuación:

$$-4v^2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} y(z_+, z_-) = 0 \Leftrightarrow -4v^2 \frac{\partial}{\partial z_+} \left(\frac{\partial}{\partial z_-} y(z_+, z_-) \right) = 0 . \quad (6)$$

Vemos que $\left(\frac{\partial}{\partial z_-} y(z_+, z_-) \right)$ es, necesariamente, una función que no depende de z_+ . Ahora bien, también podemos escribir

$$-4v^2 \frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} y(z_+, z_-) = 0 \Leftrightarrow -4v^2 \frac{\partial}{\partial z_-} \left(\frac{\partial}{\partial z_+} y(z_+, z_-) \right) = 0 , \quad (7)$$

y observar que entonces $\left(\frac{\partial}{\partial z_+} y(z_+, z_-) \right)$ es, necesariamente, una función que no depende de z_- . La única solución posible es

$$y(z_+, z_-) = \xi(z_-) + \psi(z_+) , \quad (8)$$

con ξ y ψ dos funciones arbitrarias. Recuperando las variables (x, t) , esto es

$$y(x, t) = \xi(x - vt) + \psi(x + vt) .$$

Reflexionemos un momento: para cualesquiera funciones de una variable ξ y ψ ,

$$y(x, t) = \xi(x - vt) + \psi(x + vt) \quad (9)$$

es solución de la ecuación de onda

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y(x, t) = 0 . \quad (10)$$

Ahora bien, si queremos encontrar la solución que cumple unas determinadas condiciones iniciales

$$y(x, 0) = f(x), \quad \partial_t y(x, 0) = g(x) , \quad (11)$$

las funciones ξ y ψ no pueden ser arbitrarias. En primer lugar, para $t = 0$,

$$f(x) = \xi(x) + \psi(x) . \quad (12)$$

Para la segunda condición inicial,

$$\partial_t \xi(x - vt) = \xi'(x - vt) \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v \xi'(x - vt) , \quad (13)$$

y de forma análoga $\partial_t \psi(x + vt) = v \psi'(x + vt)$. A tiempo $t = 0$,

$$g(x) = -v \xi'(x) + v \psi'(x) . \quad (14)$$

Si somos capaces de invertir las relaciones (12) y (14) para escribir tanto ξ como ψ en términos de f y g , tendremos la solución general de la ecuación de onda que cumple las condiciones dadas, es decir, la solución $y(x, t)$ que buscamos. Como primer paso, intentamos deshacernos de las derivadas en ec. (14): reetiquetamos el argumento de las funciones, $x \rightarrow z$, e integramos entre z_1 y z_2 genéricos, que después trataremos de elegir inteligentemente:

$$\int_{z_1}^{z_2} dz g(z) = v \int_{z_1}^{z_2} dz [-\xi'(z) + \psi'(z)] = v [-\xi(z_2) + \xi(z_1) + \psi(z_2) - \psi(z_1)] . \quad (15)$$

En ec. (12) tenemos ξ y ψ con argumento x ; ahora bien, como en la solución general en ec. (9) aparecen con argumentos $x - vt$ y $x + vt$ respectivamente, consideremos

$$\begin{aligned} f(x - vt) &= \xi(x - vt) + \psi(x - vt) \quad \text{y} \\ f(x + vt) &= \xi(x + vt) + \psi(x + vt) . \end{aligned} \quad (16)$$

Si de hecho combinamos ambas,

$$f(x - vt) + f(x + vt) = \xi(x - vt) + \xi(x + vt) + \psi(x - vt) + \psi(x + vt) , \quad (17)$$

pero en la solución (9) tan solo tenemos el primer término y el último, $\xi(x - vt)$ y $\psi(x + vt)$. ¿Podemos emplear ec. (15) para deshacernos de los otros dos

términos? Dado que necesitamos $x \pm vt$ como argumento de ξ y ψ , la elección de z_1 y z_2 parece clara¹, $z_1 = x - vt$, $z_2 = x + vt$. La relación (15) es entonces

$$\int_{x-vt}^{x+vt} dz g(z) = v [-\xi(x + vt) + \xi(x - vt) + \psi(x + vt) - \psi(x - vt)] . \quad (18)$$

Podemos finalmente combinar ec. (17) y ec. (18) para obtener

$$y(x, t) = \xi(x - vt) + \psi(x + vt) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dz g(z) . \quad (19)$$

La ecuación anterior, (19), completa la solución de *d'Alembert* con condiciones iniciales $y(x, 0) = f(x)$ y $\partial_t y(x, 0) = g(x)$. Podemos “interpretar” la solución del modo siguiente. A la perturbación y en el punto de coordenada x en el instante t contribuye

- la perturbación inicial, f , en un punto $x - vt$ (la perturbación se ha propagado de $x - vt$ a x en un tiempo t a velocidad $+v$),
- la perturbación inicial, f , en un punto $x + vt$ (la perturbación se ha propagado de $x + vt$ a x en un tiempo t a velocidad $-v$),
- la velocidad inicial de la perturbación, g , promediada en el intervalo $[x - vt; x + vt]$ (todo el intervalo que se encuentra a una distancia inferior o igual a vt del punto x).

Equivalentemente, podemos “leer” la solución de otra forma,

- una perturbación inicial $f(x)$ se separa en dos partes, $\frac{1}{2}f(x - vt)$ y $\frac{1}{2}f(x + vt)$ que no son más que la “forma” de $f(x)$ desplazándose a velocidades, respectivamente, $+v$ y $-v$,
- un segundo término correspondiente al perfil de velocidades inicial $g(x)$ que contribuye sobre un intervalo en x que crece con velocidad v en ambas direcciones.

Resumiendo:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y(x, t) = 0 \quad \text{con} \quad y(x, 0) = f(x), \quad \partial_t y(x, 0) = g(x),$$

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dz g(z) . \quad (20)$$

¹La otra posibilidad, $z_1 = x + vt$, $z_2 = x - vt$ es equivalente, tan solo cambia un signo global en ec. (15).

1.2. Reflexión

La solución de d'Alembert en ec. (20) nos permite estudiar la *reflexión*. En el tema anterior estudiamos repetidas veces sistemas con condiciones de contorno de dos tipos: extremos fijos en los que la perturbación se anula y extremos libres en los que la derivada *espacial* de la perturbación se anula. Además de condiciones de contorno los sistemas considerados tienen *tantas* condiciones de contorno como para ser *finitos* a lo largo de cualquier dirección espacial, y esto encaja mal con la solución para un sistema infinito de ec. (20). Limitándonos a una única dimensión, hemos pasado de un sistema con *dos* condiciones de contorno (y típicamente una extensión L en x) a un sistema con *cero* condiciones de contorno: ¿qué ocurre en el caso intermedio? Es decir, ¿qué ocurre al considerar un sistema infinito en una dirección a la par que sometido a una de las condiciones de contorno estudiadas? Tiene especial interés estudiar lo que ocurre con una onda que evoluciona en dirección al punto en que se debe cumplir la condición de contorno. Concretemos: en términos de una cuerda infinita en la dirección $x < 0$ con (a), un extremo fijo en $x = 0$ o, (b), un extremo libre en $x = 0$, queremos determinar qué ocurre con una perturbación $f(x - vt)$ que avanza hacia el punto fijo desde $x < 0$, según ilustran las figuras 1(a) y 1(b). N.B. Situamos la condición de contorno en $x = 0$ para mayor simplicidad, de situarla en otro punto, al margen de detalles algebraicos adicionales, la conclusión física sería idéntica.

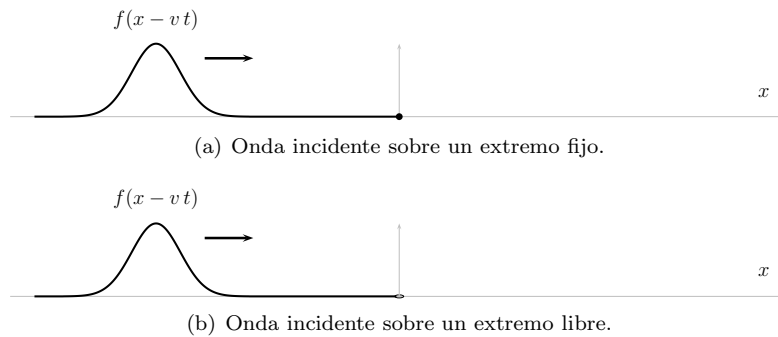


Figura 1: Cuerda semi-infinita.

1.2.1. Reflexión: extremo fijo

Considerando la situación ilustrada en la figura 1(a), que la perturbación $f(x - vt)$ alcance $x = 0$ y que en $x = 0$ tengamos un punto fijo resultan incompatibles. ¿Cómo salvamos esta incompatibilidad? La solución es sencilla, introducimos un nuevo término, llamémoslo $h(x, t)$, en $y(x, t)$, inicialmente *virtual*, en la región “no física” del problema, $x > 0$, de modo que $y(x, t)$ siga siendo solución de la ecuación de onda y tal que la condición $y(0, t) = 0$ se cumpla automáticamente para todo t . Para que esto sea posible para todo tiempo, la perturbación virtual debe propagarse con velocidad $-v$. Consideramos pues una solución $y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$, y exigimos la condición de contorno

$$y(0, t) = 0,$$

$$y(0, t) = 0 \Leftrightarrow f(-vt) + g(vt) = 0, \quad (21)$$

con lo que $g(vt) = -f(-vt)$: como cabía esperar, la perturbación “virtual” g está muy directamente relacionada con la perturbación “real” f . Ahora bien, en la solución completa el argumento de g es $x + vt$; no supone mayor dificultad, la relación $g(vt) = -f(-vt)$, válida para todo tiempo t , nos indica que para un argumento z , $g(z)$ vale lo mismo que $-f$ evaluada en el punto $-z$, para $g(x + vt)$ tenemos entonces

$$g(x + vt) = -f(-x - vt) \quad (22)$$

La perturbación “virtual” es sencillamente $-f(-x - vt)$, según ilustra la figura 2, y la solución completa

$$y(x, t) = f(x - vt) - f(-x - vt). \quad (23)$$

Tenemos, automáticamente, $y(0, t) = f(-vt) - f(-vt) = 0$, y conforme crece

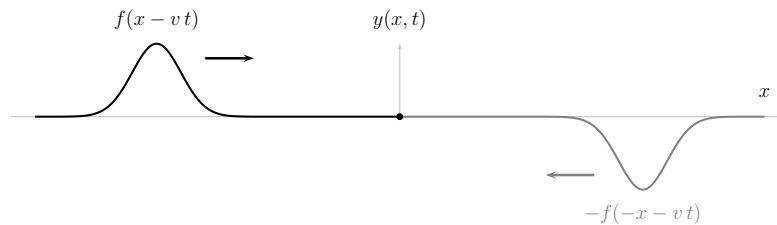


Figura 2: Onda incidente y un extremo fijo, perturbaciones “real” y “virtual”.

t la solución “real” se acerca al extremo fijo desde $x < 0$ con velocidad $+v$ mientras la solución “virtual” lo hace desde $x > 0$ con velocidad $-v$. Según ambas soluciones pasan por $x = 0$, cambian de papel, la solución “real” pasa a ser “virtual” y la solución “virtual” pasa a ser “real”. De ese modo, considerando tan solo la solución en la cuerda “real”, la incidencia de la perturbación en el extremo fijo se traduce en una *reflexión* que cambia el signo de la perturbación y la dirección de propagación. La figura 3 ilustra la situación.

1.2.2. Reflexión: extremo libre

Pasemos ahora a considerar la situación ilustrada en la figura 1(b), la perturbación $f(x - vt)$ alcanza $x = 0$, extremo *libre* de la cuerda semi-infinita. Según hemos visto en el caso de un extremo fijo, para obtener la solución $y(x, t)$ introducimos un término “virtual” $h(-x - vt)$ (esta vez escogemos el argumento $-x - vt$) para mayor simplicidad posterior):

$$y(x, t) = f(x - vt) + h(-x - vt). \quad (24)$$

La derivada con respecto a x es

$$\partial_x y(x, t) = f'(x - vt) - h'(-x - vt), \quad (25)$$

de modo que al imponer la condición de contorno asociada al extremo libre, $\partial_x y(0, t) = 0$,

$$\partial_x y(0, t) = f'(-vt) - h'(-vt) = 0 \Leftrightarrow f'(-vt) = h'(-vt), \quad (26)$$

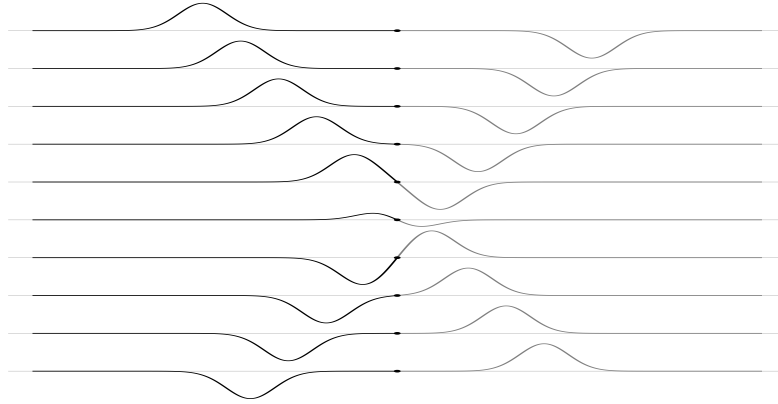


Figura 3: Onda incidente sobre un extremo fijo y *reflexión*.

que se debe cumplir para todo t . Tenemos necesariamente

$$h(z) = f(z) + \text{Cte} , \quad (27)$$

con z un argumento genérico, i.e., salvo constante, la función h debe de hecho ser la misma función f . Podemos fijar la constante conociendo o imponiendo el valor de $y(0, 0)$; por ejemplo, si a tiempo $t = 0$ al extremo corresponde una perturbación nula $y(0, 0) = 0$, automáticamente $h(z) = f(z) - 2f(0)$; en particular, si a $t = 0$, la perturbación $f(x)$ es despreciable en el origen, $f(0) \rightarrow 0$ y sencillamente $h(z) = f(z)$. La solución completa es entonces

$$y(x, t) = f(x - vt) + f(-x - vt) . \quad (28)$$

La figura 4 ilustra las perturbaciones “real” y “virtual” para un instante t , la figura 5 ilustra la *reflexión* por el extremo libre: en este caso, a diferencia del extremo fijo, la onda reflejada tiene *el mismo signo* que la onda incidente.

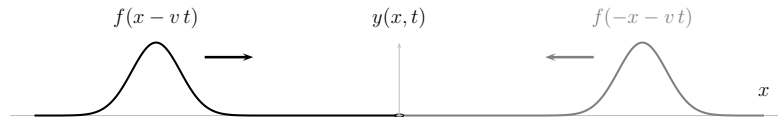


Figura 4: Onda incidente y un extremo libre, perturbaciones “real” y “virtual”.

En los dos subapartados anteriores hemos analizado cómo adaptar la solución de la ecuación de onda libre a una cuerda semi-infinita sometida a determinadas condiciones de contorno. Podríamos extender el análisis a un sistema bien conocido: una cuerda de longitud finita L . Ya hemos resuelto su dinámica recurriendo a los modos normales de la misma. Para “conectar” ambas descripciones bastaría en principio acudir a un conjunto de perturbaciones de tipo $f(x - vt)$ incidentes desde $x < 0$ y a un segundo conjunto de perturbaciones de tipo $\pm f(x + vt)$ (según las condiciones de contorno correspondieran a extremos fijos o libres), de modo tal que la superposición de ambos tipos de perturbaciones diera lugar a los modos normales ya conocidos. Abordar esta descripción

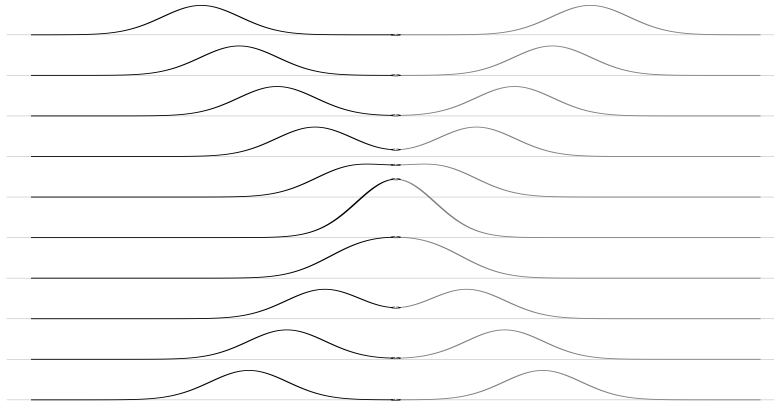


Figura 5: Onda incidente sobre un extremo libre y reflexión.

mediante la solución de d'Alembert no merece el esfuerzo, máxime cuando en el apartado 2, empleando *ondas planas*, podremos realizarlo de forma mucho más sencilla. Con esta puntualización cerramos el análisis de las soluciones para una cuerda semi-infinita con condiciones de contorno y pasamos a otra situación instructiva: el análisis de las soluciones al considerar un sistema formado por la unión de dos cuerdas semi-infinitas.

1.3. Refracción y reflexión

Consideremos *dos* cuerdas semi-infinitas unidas en el punto $x = 0$. Las cuerdas tienen características diferentes, resumidas en velocidades de propagación diferentes, v_1 en la cuerda nº1, situada en $x < 0$, v_2 en la cuerda nº2, situada en $x > 0$. Conocemos las soluciones de la ecuación de onda correspondientes a las perturbaciones libres de una u otra cuerda: nos ocupamos ahora de las soluciones cuando las dos cuerdas están unidas. Tiene especial interés analizar lo que ocurre con una perturbación que incide en el punto de unión (las ondas que se alejan del punto de unión no aportan nada de interés), según ilustra la figura 6. ¿Qué clase de solución $y(x, t)$ debemos considerar? En la cuerda 1

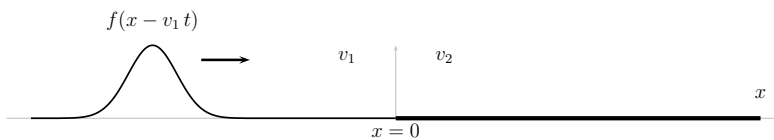


Figura 6: Onda incidente sobre la separación entre dos cuerdas semi-infinitas.

tenemos $f(x - v_1 t)$ que se propaga en dirección a $x = 0$, la solución completa involucrará también una perturbación propagándose en la dirección opuesta, $g(x + v_1 t)$. En la cuerda 2 tenemos en principio dos perturbaciones, una propagándose con velocidad $+v_2$ (se aleja de $x = 0$), otra con velocidad $-v_2$. Esta última queda descartada dada la situación considerada. Analizamos por tanto

una solución

$$y(x, t) = \begin{cases} f(x - v_1 t) + g(x + v_1 t), & x < 0. \\ h(x - v_2 t), & x > 0. \end{cases} \quad (29)$$

¿Qué condiciones debe cumplir $y(x, t)$? En $x = 0$ tanto $y(x, t)$ como las primeras derivadas $\partial_x y(x, t)$ y $\partial_t y(x, t)$ deben ser continuas. A través de esas condiciones queremos expresar las funciones g y h en términos de f y las características del sistema, v_1 y v_2 . Para $y(x, t)$ tenemos

$$f(-v_1 t) + g(v_1 t) = h(-v_2 t). \quad (30)$$

Para $\partial_x y(x, t)$, con $\partial_x f(x - v_1 t) = f'(x - v_1 t)$, $\partial_x g(x + v_1 t) = g'(x + v_1 t)$ y $\partial_x h(x - v_2 t) = h'(x - v_2 t)$,

$$f'(-v_1 t) + g'(v_1 t) = h'(-v_2 t). \quad (31)$$

Para $\partial_t y(x, t)$, con $\partial_t f(x - v_1 t) = -v_1 f'(x - v_1 t)$, $\partial_x g(x + v_1 t) = v_1 g'(x + v_1 t)$ y $\partial_x h(x - v_2 t) = -v_2 h'(x - v_2 t)$,

$$-v_1 f'(-v_1 t) + v_1 g'(v_1 t) = -v_2 h'(-v_2 t). \quad (32)$$

Combinamos ec. (31) y ec. (32) para obtener

$$g'(v_1 t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f'(-v_1 t), \quad h'(-v_2 t) = \frac{2v_1}{v_2 + v_1} f'(-v_1 t). \quad (33)$$

Reetiquetamos $t \rightarrow t'$ e integramos entre $t' = 0$ y un tiempo arbitrario $t' = t$,

$$\begin{aligned} \int_0^t dt g'(v_1 t) &= \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1 t} d(v_1 t) g'(v_1 t) = \frac{1}{v_1} (g(v_1 t) - g(0)) = \\ &= \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \int_0^t dt f'(-v_1 t) = \frac{1}{v_1} \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} (f(-v_1 t) - f(0)), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t dt h'(-v_2 t) &= \frac{1}{v_2} (h(-v_2 t) - h(0)) = \\ &= \frac{2v_1}{v_2 + v_1} \int_0^t dt f'(-v_1 t) = \frac{2}{v_2 + v_1} (f(-v_1 t) - f(0)), \end{aligned} \quad (35)$$

Las constantes de integración $f(0)$, $g(0)$ y $h(0)$ quedan determinadas por las condiciones iniciales del sistema y no son independientes, puesto que, según ec. (31), $f(0) + g(0) = h(0)$. Para simplificar la discusión consideramos que, para $t = 0$, en $x = 0$, son despreciables i.e. $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ de modo que ec. (34) y ec. (35) nos dejan

$$h(-v_2 t) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f(-v_1 t) \Rightarrow h(x - v_2 t) = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f\left(\frac{v_1}{v_2}(x - v_2 t)\right), \quad (36)$$

$$g(v_1 t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f(-v_1 t) \Rightarrow g(x + v_1 t) = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f\left(-(x + v_1 t)\right). \quad (37)$$

La solución completa es por tanto

$$y(x, t) = \begin{cases} f(x - v_1 t) + \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} f\left(-(x + v_1 t)\right), & x < 0. \\ \frac{2v_2}{v_2 + v_1} f\left(\frac{v_1}{v_2}(x - v_2 t)\right), & x > 0. \end{cases} \quad (38)$$

Leamos con detenimiento el resultado obtenido.

- En $x < 0$, el término $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} f\left(-\left(x+v_1 t\right)\right)$ es una perturbación *reflejada* por el punto de unión entre las dos cuerdas. Tiene la forma de la onda incidente multiplicada por un factor $\left|\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}\right|$. Si $v_1 > v_2$ esta onda reflejada tiene de hecho el signo *contrario*.
- En $x > 0$, el término $\frac{2v_2}{v_2+v_1} f\left(\frac{v_1}{v_2}\left(x-v_2 t\right)\right)$ es ligeramente más complicado. Por una parte tiene la forma de la onda incidente f “reescalada” en x merced al factor $\frac{v_1}{v_2}$ en su argumento, y “reescalada” en y merced al factor $\frac{2v_2}{v_2+v_1}$ (mayor o menor que 1 según sea $v_2 > v_1$ o $v_2 < v_1$). Limitado a una dimensión, este fenómeno es la familiar *refracción*.

Dos límites particulares nos permiten recuperar situaciones ya conocidas:

- Para $v_1 = v_2$, la separación entre dos cuerdas diferentes es completamente ficticia puesto que las perturbaciones se propagan a la misma velocidad en ambas mitades, ec. (38) nos indica entonces $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} f\left(-\left(x+v_1 t\right)\right) \rightarrow 0$ y $\frac{2v_2}{v_2+v_1} f\left(\frac{v_1}{v_2}\left(x-v_2 t\right)\right) \rightarrow f\left(x-v_1 t\right)$: no hay reflexión y la onda en $x > 0$ es exactamente la que proviene de $x < 0$.
- Para $v_1 \rightarrow \infty$, en $x > 0$ no hay propagación de ondas en comparación con $x < 0$, ec. (38) nos indica $\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1} f\left(-\left(x+v_1 t\right)\right) \rightarrow -f\left(x+v_1 t\right)$ mientras $\frac{2v_2}{v_2+v_1} f\left(\frac{v_1}{v_2}\left(x-v_2 t\right)\right) \rightarrow 0$, i.e. la solución correspondiente a la reflexión por un extremo fijo.

La figura 7 ilustra la solución ec. (38) cuando $v_1 > v_2$; la figura 8 ilustra ec. (38) cuando $v_1 < v_2$.

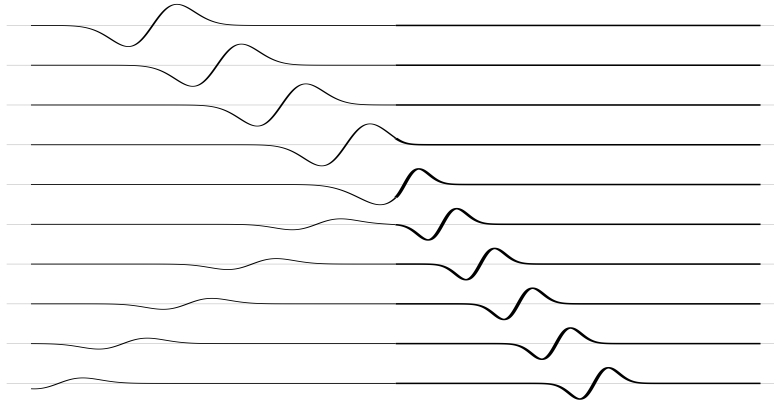


Figura 7: Onda incidente sobre la separación entre dos cuerdas semi-infinitas, $v_1 > v_2$, *reflexión* y *refracción*.

1.4. Energía

La solución de d’Alembert nos ha permitido comprender cómo la ecuación de onda describe la propagación de perturbaciones en un sistema sencillo, las *ondas*.

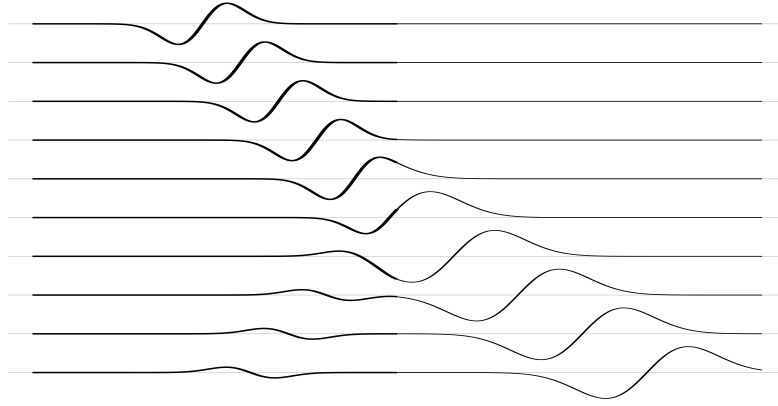


Figura 8: Onda incidente sobre la separación entre dos cuerdas semi-infinitas, $v_1 < v_2$, reflexión y refracción.

Cuando describimos la “propagación de ondas” no hacemos más que describir la evolución de una perturbación $y(x, t)$ con respecto al equilibrio $y(x, t) = 0$, en toda la extensión del sistema, para todo tiempo. En los temas anteriores analizamos repetidas veces una característica muy importante de estas perturbaciones: la energía. La variación en el espacio de la perturbación, $\partial_x y(x, t)$, está asociada a la energía potencial; la variación en el tiempo de la perturbación lo está en cambio a la energía cinética. Al discutir la energía de sistemas continuos acotados o de sistemas discretos, nos hemos referido en todo momento a la energía global del sistema considerado. La cuerda infinita proporciona sin embargo un ingrediente adicional en cuanto al estudio de la energía del sistema. Dejando los detalles para un apartado posterior en que acudiremos al uso de ondas planas, la solución de d’Alembert nos permite inmediatamente constatar un aspecto fundamental de las ondas, la transmisión de energía. Si una perturbación inicial $y(x, 0) = f(x)$ se encuentra localizada en una región espacial de tamaño Δ y es completamente despreciable fuera de la misma, la solución de d’Alembert (suponemos por simplicidad que la perturbación inicial tiene $\partial_t y(x, 0) = 0$)

$$y(x, t) = \frac{1}{2} f(x - vt) + \frac{1}{2} f(x + vt) \quad (39)$$

nos indica que al cabo de un tiempo t la perturbación se encontrará localizada en dos regiones, cada una de tamaño Δ (obviamos discutir si no ha pasado un tiempo suficiente para que esas dos regiones no tengan solapamiento, etc). Tomando por ejemplo la correspondiente al término $f(x - vt)$, tendremos una densidad de energía

$$\epsilon = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} f(x - vt) \right)^2 + \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} f(x - vt) \right)^2, \quad (40)$$

Con $\frac{\tau}{\rho} = v^2$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x - vt) = f'(x - vt)$, $\frac{\partial}{\partial t} f(x - vt) = -v f'(x - vt)$,

$$\epsilon = \frac{1}{4} \rho v^2 [f'(x - vt)]^2. \quad (41)$$

La ecuación anterior nos permite ver que la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la derivada de la función f que describe la onda, pero lo realmente importante, conforme se deduce de nuestros comentarios anteriores, es que la densidad de energía ϵ también se propaga a velocidad v . La segunda mitad de la perturbación, $\frac{1}{2}f(x + vt)$, también tiene asociada una densidad de energía, que se propaga a velocidad $-v$. Este análisis superficial nos ha permitido completar la reflexión: si las ondas son perturbaciones locales que se propagan, y a una perturbación está asociada una densidad de energía, las ondas transportan energía.

1.5. Solución de d'Alembert con fuente

Hasta el momento nos hemos ocupado de la ecuación de onda homogénea, que describe la evolución *libre* tanto en el espacio como en el tiempo de perturbaciones. En esta sección nos ocuparemos de resolver la ecuación de onda en presencia de un término forzante, i.e. la ecuación de onda inhomogénea con un fuente $F(x, t)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y(x, t) = F(x, t) . \tag{42}$$

Resolviendo esta ecuación inhomogénea, al margen de ampliar el abanico de sistemas físicos que somos capaces de describir, podremos por ejemplo abordar una descripción simplificada (al fin y al cabo seguimos confinados en nuestra descripción de un sistema unidimensional) de fenómenos conocidos o familiares como son el efecto Doppler o una onda de choque. Como es habitual dada la linealidad de la ecuación sin fuente, la solución que queremos encontrar constará de dos partes, $y_h(x, t)$ solución de la ecuación homogénea que ya conocemos – ec. (20) –, y una solución particular $y_p(x, t)$:

$$y(x, t) = y_h(x, t) + y_p(x, t) .$$

Con una fuente general $F(x, t)$ no parece en absoluto sencillo dar con la solución particular $y_p(x, t)$. Observando la solución $y_h(x, t)$, llama la atención el término asociado a la velocidad inicial $\partial_t y(x, 0)$ de la perturbación,

$$\frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dz \ g(z) .$$

Una velocidad inicial contribuye a la solución a través de una integral sobre toda la región del espacio desde la que, a velocidades comprendidas entre $-v$ y v , se puede alcanzar el punto x en el tiempo transcurrido, t . Leyendo la ecuación ec. (42) podemos ver que la fuente desempeña el papel de una fuerza, contribuyendo (de forma externa al sistema) a la aceleración. Ahora bien, a diferencia de la velocidad inicial, la fuente actúa, a priori, para todo valor. ¿Es posible encontrar la solución $y_p(x, t)$ integrando la acción de la fuente no solo en el espacio como ocurre con la velocidad inicial sino también en el tiempo? Ahora bien, de forma análoga a lo que tenemos con la velocidad, si planteamos una integral de la fuente tanto en el espacio como en el tiempo, para que contribuya a la solución en un punto (x, t) , parece razonable limitar la integración al conjunto de puntos – la región – tales que, desde que empieza a actuar la fuente, el punto (x, t) se puede alcanzar con una velocidad comprendida entre $-v$ y v . El

diagrama 9 permite visualizar con sencillez qué región sería la considerada. A tiempo $t' < t$ (¡la fuente respeta causalidad!), en el punto x' , la fuente $F(x', t')$ podrá contribuir a la perturbación $y(x, t)$ si se cumple:

- para $x' < x$, que la diferencia de posiciones $x - x'$ es inferior a $v(t - t')$, i.e. al desplazamiento máximo que puede recorrer una perturbación con velocidad v en un tiempo $t - t'$,

$$x - x' < v(t - t') \Leftrightarrow x - v(t - t') < x' ;$$

- para $x' > x$, que la diferencia de posiciones $x' - x$ es inferior a $-v(t - t')$, i.e. al desplazamiento máximo que puede recorrer una perturbación con velocidad $-v$ en un tiempo $t - t'$,

$$x' - x < -v(t - t') \Leftrightarrow x' < x + v(t - t') .$$

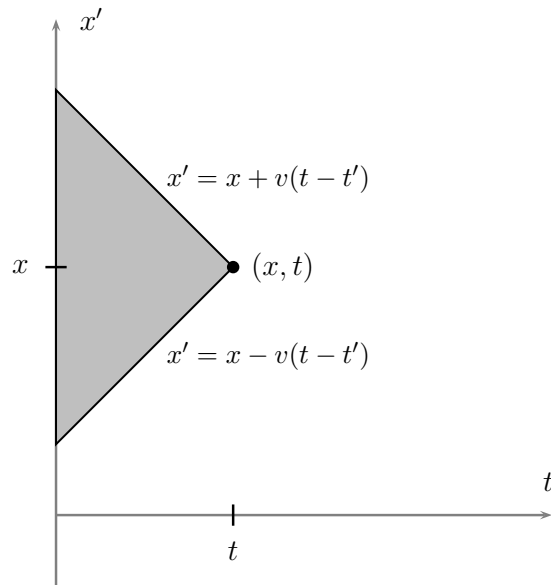


Figura 9: Región de integración de la fuente.

Guiados por estas reflexiones, la región de interés es la región sombreada de la figura 9 y consideramos la integral²

$$\frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') , \quad (43)$$

y calculamos

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\} =? . \quad (44)$$

²Hemos supuesto que la fuente es nula para tiempos $t < 0$, de ahí el límite inferior de integración en dt' : de no ser el caso, tendríamos que extender el límite inferior de integración cuanto fuera necesario.

Conviene recordar que, para una función arbitraria h ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} dz h(z, x) = b'(x) h(b(x), x) - a'(x) h(a(x), x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial h(z, x)}{\partial x} dz,$$

de modo que, escribiendo explícitamente todos los términos para mayor claridad,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t') \right\} = \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} t \right) \times \underbrace{\int_{x-v(t-t)}^{x+v(t-t)} F(x', t)}_{\rightarrow 0} - \left(\frac{\partial}{\partial t} 0 \right) \times \underbrace{\int_{x-v(t-0)}^{x+v(t-0)} F(x', 0)}_{\rightarrow 0} \\ + \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t') \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Tan solo queda el último término, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t') \right\} = v F(x + v(t - t'), t') + v F(x - v(t - t'), t') \\ + \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} F(x', t')}_{\rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (46)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t') \right\} = \\ v \int_0^t dt' F(x + v(t - t'), t') + v \int_0^t dt' F(x - v(t - t'), t'), \end{aligned} \quad (47)$$

y debemos derivar una vez más para obtener el primer término en ec. (44),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t') \right\} = \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^t dt' F(x + v(t - t'), t') + \int_0^t dt' F(x - v(t - t'), t') \right\} = \\ \frac{1}{2} F(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t} F(x + v(t - t'), t') + \frac{1}{2} F(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t} F(x - v(t - t'), t'). \end{aligned} \quad (48)$$

Podemos reescribir las derivadas

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x \pm v(t - t'), t') = \pm v \left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x \pm v(t-t')}$$

para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\} = F(x, t) \\ + \frac{v}{2} \int_0^t dt' \left(\left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x+v(t-t')} - \left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x-v(t-t')} \right). \quad (49) \end{aligned}$$

Dejamos este primer término de ec. (44) y analizamos el segundo,

$$v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\},$$

más sencillo de calcular, puesto que x tan solo aparece en los límites de la integral en x' :

$$\begin{aligned} v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\} = \\ \frac{v}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^t dt' \left(F(x+v(t-t'), t') - F(x-v(t-t'), t') \right) \right\} = \\ \frac{v}{2} \int_0^t dt' \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x+v(t-t'), t') - \frac{\partial}{\partial x} F(x-v(t-t'), t') \right). \quad (50) \end{aligned}$$

También aquí podemos reescribir las derivadas de la siguiente forma,

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x \pm v(t-t'), t') = \left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x \pm v(t-t')},$$

para obtener

$$\begin{aligned} v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\} = \\ \frac{v}{2} \int_0^t dt' \left(\left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x+v(t-t')} - \left[\frac{\partial}{\partial z} F(z, t') \right]_{z=x-v(t-t')} \right). \quad (51) \end{aligned}$$

Reunimos los resultados en ec. (49) y ec. (51) para obtener

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left\{ \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F(x', t') \right\} = F(x, t). \quad (52)$$

Hemos por tanto comprobado que la integral en ec. (43) es en efecto la solución particular $y_p(x, t)$ de la ecuación de onda inhomogénea.

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y(x, t) &= F(x, t) \quad \text{con} \quad y(x, 0) = f(x), \quad \partial_t y(x, 0) = g(x), \\
 \Rightarrow y(x, t) &= y_h(x, t) + y_p(x, t), \\
 y_h(x, t) &= \frac{1}{2} (f(x + vt) + f(x - vt)) + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dz g(z), \\
 y_p(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} F(x', t').
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

Ilustramos lo anterior con un ejemplo. Consideremos una fuente $F(x, t)$ de la siguiente forma:

$$F(x, t) = f_0 \delta(t) \frac{a^2}{a^2 + x^2}, \tag{54}$$

con f_0 y a constantes. La figura 10 ilustra la dependencia espacial de la fuente, $f_0 \frac{a^2}{a^2+x^2}$, que actua en un único instante, $t = 0$, conforme impone $\delta(t)$. La solución particular correspondiente es³

$$\begin{aligned}
 y_p(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} f_0 \delta(t') \frac{a^2}{a^2 + x'^2} = \\
 &= \frac{f_0}{2v} \int_{-\infty}^t dt' \delta(t') \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} \frac{a^2}{a^2 + x'^2} dx'.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Podemos integrar inmediatamente en x' ,

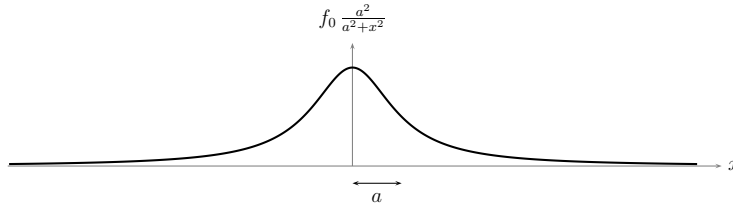


Figura 10: Forma de la fuente en ec. (54).

$$\begin{aligned}
 \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} \frac{a^2}{a^2 + x'^2} dx' &= a \left[\arctan \left(\frac{x'}{a} \right) \right]_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} = \\
 &= a \arctan \left(\frac{x + v(t-t')}{a} \right) - a \arctan \left(\frac{x - v(t-t')}{a} \right),
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

³Según comentado con anterioridad, cambiamos explícitamente el límite inferior de integración en t' de modo que incluya completamente la acción de la fuente, aunque bastaría sencillamente cambiar $0 \rightarrow c < 0$, nos curamos en salud con $0 \rightarrow -\infty$.

para obtener

$$y_p(x, t) = \frac{a f_0}{2v} \int_{-\infty}^t dt' \delta(t') \left[\arctan \left(\frac{x + v(t - t')}{a} \right) - \arctan \left(\frac{x - v(t - t')}{a} \right) \right] = \frac{a f_0}{2v} \left[\arctan \left(\frac{x + vt}{a} \right) - \arctan \left(\frac{x - vt}{a} \right) \right]. \quad (57)$$

¿Cómo es la solución obtenida? La función $\arctan(\)$ se puede ver como una función escalón “suavizada”, nuestra solución tiene pues dos “escalones” de signo opuesto propagándose en direcciones opuestas. Las figuras 11(a) y 11(b) ilustran ambos términos; la figura 12 ilustra la evolución de la solución completa.

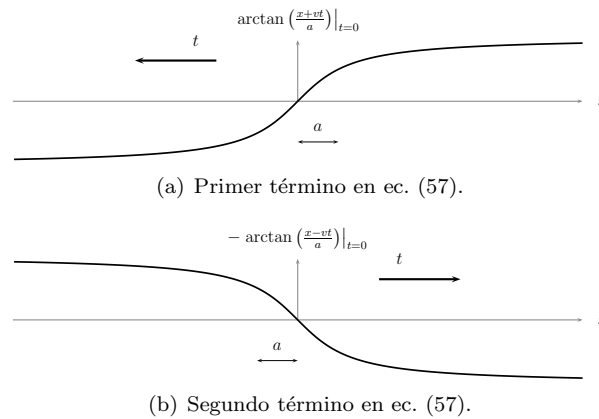


Figura 11: Funciones en ec. (57).

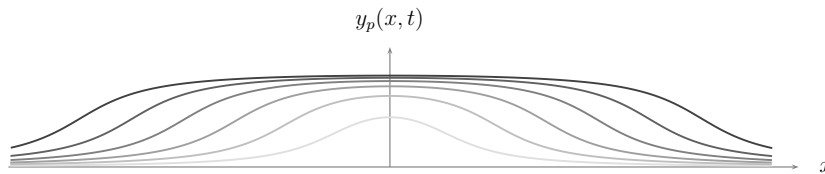


Figura 12: $y_p(x, t)$ en ec. (57).

1.6. Efecto Doppler

La solución de la ecuación de onda inhomogénea de la sección anterior nos permite estudiar, de forma detallada, un efecto bien conocido, el *efecto Doppler*, asociado al movimiento de una fuente que perturba un medio. En los siguientes subapartados, estudiaremos la solución de la ecuación de onda en presencia de una fuente $F(x, t)$ en tres casos. En todos ellos consideramos una perturbación inicial nula, $y(x, 0) = 0$, $\partial_t y(x, 0) = 0$, de modo que la solución completa es directamente la solución particular al ser nula la solución homogénea.

- Como caso de referencia, la fuente actua siempre en el mismo punto (el origen $x = 0$ por comodidad) y perturba el sistema de forma armónica (frecuencia angular ω), i.e.

$$F(x, t) = F_0 \delta(x) \sin(\omega t) . \quad (58)$$

- La fuente se desplaza a velocidad v_0 (encontrándose a $t = 0$ en el origen) y perturba el sistema de forma armónica (frecuencia angular ω); la velocidad v_0 es *inferior* a la de propagación de las ondas en el medio, i.e.

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t) , \quad v_0 < v . \quad (59)$$

- La fuente se desplaza a velocidad v_0 (encontrándose a $t = 0$ en el origen) y perturba el sistema de forma armónica (frecuencia angular ω); la velocidad v_0 es *superior* a la de propagación de las ondas en el medio, i.e.

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t) , \quad v_0 > v . \quad (60)$$

En cualquiera de estos tres casos nuestro interés se centra en $y(x, t)$ considerada en una posición x fija, es decir, nos concentramos en analizar qué función, únicamente del tiempo t , describe la perturbación $y(x, t)$ para un x fijo, en particular será interesante compararla con la función armónica $\sin(\omega t)$ de la fuente.

1.6.1. Fuente $F_0 \delta(x) \sin(\omega t)$

Para obtener $y(x, t)$ debemos tan solo calcular, según ec. (53),

$$y(x, t) = \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x') \sin(\omega t') . \quad (61)$$

La primera (y prácticamente única) dificultad aparece al evaluar la integral en x' merced a $\delta(x')$: si el intervalo de integración $x' \in [x - v(t - t'); x + v(t - t')]$ incluye $x' = 0$, tenemos una contribución no nula e inmediata de evaluar; si en cambio $0 \notin [x - v(t - t'); x + v(t - t')]$, la integral en x' será nula. Los diagramas en Figura 13 permiten visualizar la situación de forma sencilla.

- Para $t < x/v$, $x - vt > 0$ y por tanto, con $t' > 0$, $x - v(t - t') > 0$, con lo cual

$$\int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' \delta(x') = 0 \Rightarrow y(x, t) = 0 . \quad (62)$$

En el diagrama 13(a) es inmediato observar que para $t < x/v$ la fuente no se encuentra en ningún momento en la región sobre la que se integra, la formada, según discutido anteriormente, por los puntos desde los cuales se puede alcanzar el punto (x, t) a velocidad inferior o igual a v .

- Para $t > x/v$, en el diagrama 13(b), el recorrido de la fuente sí se encuentra parcialmente en el dominio de integración: podremos integrar trivialmente en x' para los valores de t' correspondientes al segmento indicado en negro

del recorrido de la fuente, i.e. para valores de t' entre $t' = 0$ y t' tal que $x' = x - v(t - t') = 0$, que es $t' = t - x/v$. Resulta entonces

$$y(x, t) = \frac{F_0}{2v} \int_0^{t - \frac{x}{v}} \sin(\omega t') dt' = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_0^{t - \frac{x}{v}} = \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos \left(\omega t - \omega \frac{x}{v} \right) \right) . \quad (63)$$

Con x fijo, $y(x, t)$ es sencillamente una función armónica de frecuencia ω , como la fuente (podemos notar, adicionalmente, que tanto $y(x, t)$ como $\partial_t y(x, t)$ son continuas en $t = x/v$).

Reuniendo ec. (62) y ec. (63) representamos $y(x, t)$ como función de t para x fijo en la figura 14.

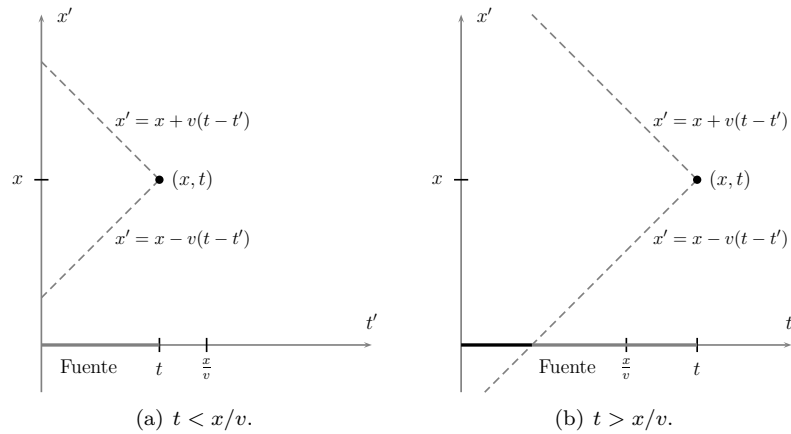


Figura 13: Fuente $F_0 \delta(x) \sin(\omega t)$.

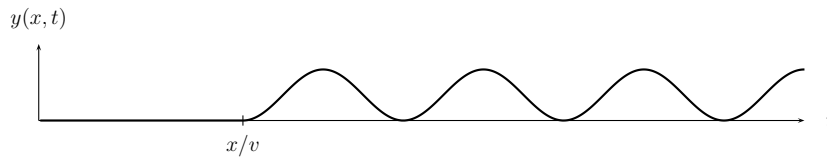


Figura 14: $y(x, t)$ para x fijo, fuente $F_0 \delta(x) \sin(\omega t)$.

1.6.2. Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 < v$

El apartado anterior nos ha permitido calcular la perturbación $y(x, t)$ causada por una fuente oscilante estática, veamos ahora qué ocurre cuando consideramos una fuente oscilante que se mueve a velocidad v_0 , con $v_0 < v$ (tiene una velocidad inferior a la de propagación de las perturbaciones):

$$F(x, t) = F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t) .$$

- Para $t < x/v$, $x - v(t - t') > vt' > v_0t'$, de modo que los límites de integración en x' no incluyen $x' = v_0t'$, posición en que se anula el argumento de $\delta(\)$, y tenemos

$$\int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' \delta(x') = 0 \Rightarrow y(x, t) = 0 . \quad (64)$$

El diagrama 15(a) permite visualizar cómo para $t > x/v$ la fuente no se encuentra en la región de integración.

- Para $x/v_0 > t > x/v$, la fuente recorre el segmento en negro indicado en el diagrama 15(b), a lo largo del cual $x' - v_0t' = 0$ y podemos integrar directamente $\delta(x - v_0t)$; los extremos de ese segmento son $t' = 0$ y el valor de t' para el cual $x' = v_0t' = x - v(t - t')$. Este último límite es $t' = \frac{vt-x}{v-v_0}$. Tenemos por tanto

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x' - v_0t') \sin(\omega t') = \\ &= \frac{F_0}{2v} \int_0^{\frac{vt-x}{v-v_0}} dt' \sin(\omega t') = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_0^{\frac{vt-x}{v-v_0}} = \\ &= \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos \left(\frac{\omega(vt-x)}{v-v_0} \right) \right) . \quad (65) \end{aligned}$$

Para interpretar con claridad el resultado anterior introducimos una nueva frecuencia $\omega' = \omega \frac{v}{v-v_0} > \omega$ y una diferencia de fase $\varphi(x) = \frac{\omega}{v-v_0}x$ tales que

$$y(x, t) = \frac{F_0}{2\omega v} (1 - \cos(\omega' t - \varphi(x))) , \quad \frac{x}{v_0} > t > \frac{x}{v} . \quad (66)$$

La perturbación $y(x, t)$ es una oscilación armónica de frecuencia ω' superior a la de la fuente! El desfase $\varphi(x)$ es tal que en $t = x/v$, tanto $y(x, t)$ como $\partial_t y(x, t)$ son continuas.

- Finalmente, para $t > x/v_0$, la fuente recorre el segmento en negro indicado en el diagrama 16, a lo largo del cual $x' - v_0t' = 0$ y podemos integrar directamente $\delta(x - v_0t)$; los extremos de ese segmento son $t' = 0$ y el valor de t' para el cual $x' = v_0t' = x + v(t - t')$. Este último límite es $t' = \frac{vt+x}{v+v_0}$. Tenemos por tanto

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x' - v_0t') \sin(\omega t') = \\ &= \frac{F_0}{2v} \int_0^{\frac{vt+x}{v+v_0}} dt' \sin(\omega t') = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_0^{\frac{vt+x}{v+v_0}} = \\ &= \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos \left(\frac{\omega(vt+x)}{v+v_0} \right) \right) . \quad (67) \end{aligned}$$

Reescribimos el resultado introduciendo otra frecuencia, $\omega'' = \omega \frac{v}{v+v_0} < \omega$, y una nueva diferencia de fase $\phi(x) = -\frac{\omega}{v+v_0}x$ tales que

$$y(x, t) = \frac{F_0}{2\omega v} (1 - \cos(\omega'' t - \phi(x))) , \quad t > \frac{x}{v_0} . \quad (68)$$

La perturbación $y(x, t)$ es una oscilación armónica de frecuencia ω'' inferior a la de la fuente! El desfase $\phi(x)$ es tal que en $t = x/v_0$, $y(x, t)$ es continua, si bien $\partial_t y(x, t)$ no lo es.

Recapitulando lo obtenido en ec. (64), ec. (66) y ec. (68), antes de $t = x/v$ no hay perturbación alguna en x , entre $t = x/v$ y $t = x/v_0$, i.e. cuando la fuente se acerca al punto x , la perturbación en x tiene una frecuencia ω' superior a la de la fuente; para $t > x/v_0$, i.e. cuando la fuente se aleja del punto x , la perturbación en x tiene una frecuencia ω'' inferior a la de la fuente. Es el muy familiar efecto Doppler. Representamos $y(x, t)$ como función de t para x fijo en la figura 17.

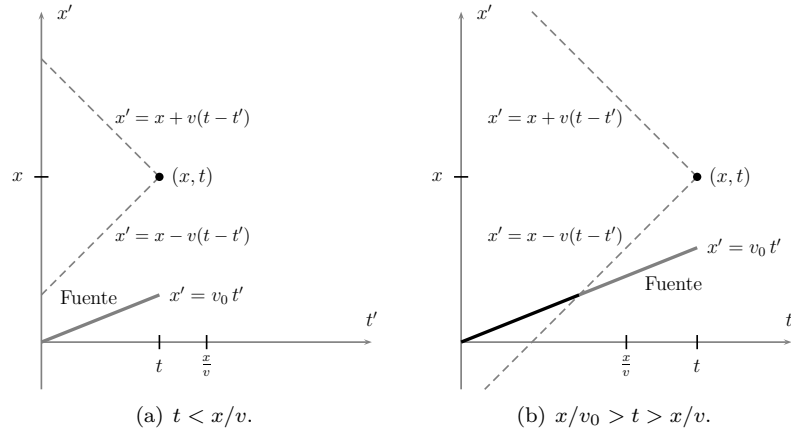


Figura 15: Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v > v_0$.

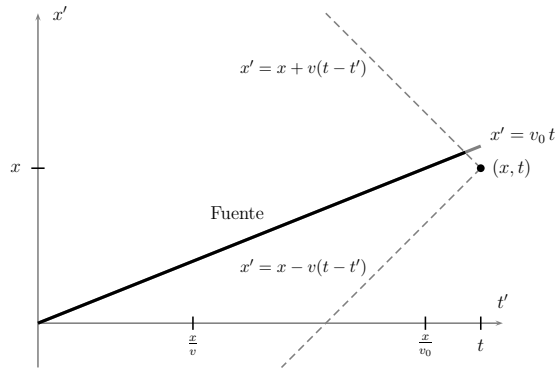


Figura 16: Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v > v_0$, $t > x/v_0$.

1.6.3. Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 > v$

Para completar nuestro análisis consideramos en este apartado una fuente que se desliza a velocidad v_0 mayor que la de propagación de las perturbaciones, v . Con respecto al caso anterior, para $v_0 > v$ tenemos que distinguir ahora

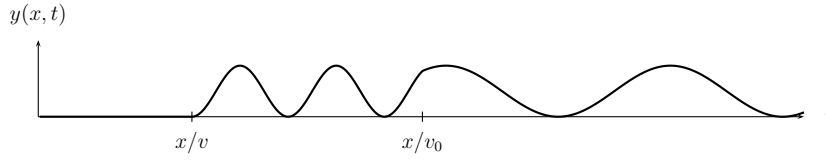


Figura 17: $y(x, t)$ para x fijo, fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v > v_0$.

$t < x/v_0$, $x/v > t > x/v_0$ y $t > x/v$, según recogen los diagramas de las figuras 18 y 19.

- Para $t < x/v_0$ (diagrama 18(a)), tenemos $y(x, t) = 0$.
- Para $x/v > t > x/v_0$, la fuente contribuye a lo largo del segmento negro del diagrama 18(b), lo que corresponde a unos límites de integración dados por

$$x' = x - v(t - t') = v_0 t' \Rightarrow t' = \frac{x - vt}{v_0 - v}$$

y

$$x' = x + v(t - t') = v_0 t' \Rightarrow t' = \frac{x + vt}{v_0 + v} .$$

Con ello,

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x' - v_0 t') \sin(\omega t') = \\ &= \frac{F_0}{2v} \int_{\frac{x-vt}{v_0-v}}^{\frac{x+vt}{v_0+v}} dt' \sin(\omega t') = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_{\frac{x-vt}{v_0-v}}^{\frac{x+vt}{v_0+v}} = \\ &= \frac{F_0}{2\omega v} \left(\cos\left(\frac{\omega(x-vt)}{v_0-v}\right) - \cos\left(\frac{\omega(x+vt)}{v_0+v}\right) \right) . \end{aligned} \quad (69)$$

El resultado anterior es una perturbación que corresponde a la superposición de dos oscilaciones, una de frecuencia superior y otra de frecuencia inferior a la de oscilación de la fuente: el efecto Doppler aparece de una forma particular. La fuente alcanza el punto x a tiempo x/v_0 ; a partir de ese momento, al punto x llegan simultáneamente la perturbación creada en posiciones $x' < x$ a tiempos $t' < x/v_0$, que produce el término con frecuencia *superior* a ω (efecto Doppler con la fuente que se acerca), y la perturbación creada en posiciones $x' > x$ a tiempos $t > t' > x/v_0$, que produce el término con frecuencia *inferior* a ω (efecto Doppler con la fuente que se aleja).

- Para $t > x/v$, la fuente contribuye a lo largo del segmento negro del diagrama 19, lo que corresponde a unos límites de integración dados por $t' = 0$ y

$$x' = x + v(t - t') = v_0 t' \Rightarrow t' = \frac{x + vt}{v_0 + v} .$$

Con ello

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x' - v_0 t') \sin(\omega t') = \\
 &= \frac{F_0}{2v} \int_0^{\frac{x+vt}{v_0+v}} dt' \sin(\omega t') = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_0^{\frac{x+vt}{v_0+v}} = \\
 &= \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos \left(\frac{\omega(x+vt)}{v_0+v} \right) \right). \quad (70)
 \end{aligned}$$

Para $t > x/v$, tan solo tenemos el término correspondiente a una perturbación de frecuencia inferior a ω , el correspondiente al efecto Doppler con la fuente que se aleja. Con respecto a ec. (69), el término correspondiente a la fuente que se acerca ha desaparecido: ha transcurrido tiempo suficiente (x/v) para que toda la perturbación creada por la fuente entre $x' = 0$ y $x' = x$, propagándose a velocidad v , haya ya superado el punto x .

Representamos $y(x, t)$ como función de t para x fijo en la figura 20.

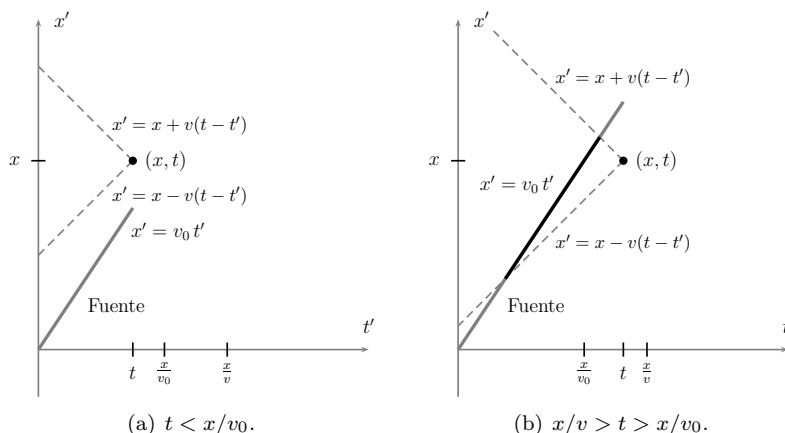


Figura 18: Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 > v$.

1.6.4. * Fuente $F_0 \delta(x - vt) \sin(\omega t)$

Acabamos de analizar la perturbación producida por una fuente que se mueve a velocidades inferiores o superiores a la velocidad de propagación de las perturbaciones, cosa que nos ha permitido “redescubrir” en detalle – dentro de las limitaciones de una descripción en tan solo *una* dimensión – el efecto Doppler. Hemos evitado explícitamente una situación bien particular: aquella en que la fuente se desplaza exactamente a velocidad $v_0 = v$. Veamos qué ocurre en ese caso. El análisis sigue la misma línea que los casos anteriores: tenemos que distinguir $t > x/v$ y $t < x/v$ conforme podemos ver en los diagramas 21(a) y 21(b).

- Para $t < x/v$, la fuente no se encuentra en la región de integración (diagrama 21(a)) y directamente obtenemos $y(x, t) = 0$.

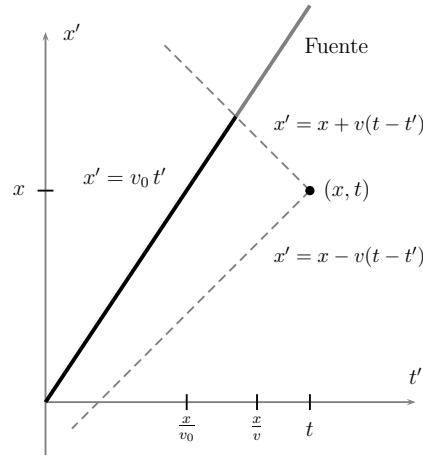


Figura 19: Fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 > v$, $t > x/v$.

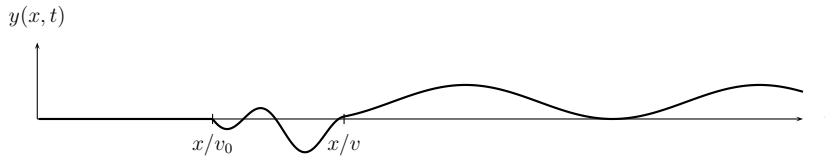


Figura 20: $y(x, t)$ para x fijo, fuente $F_0 \delta(x - v_0 t) \sin(\omega t)$, $v_0 > v$.

- Para $t > x/v$, la fuente recorre el segmento en negro del diagrama 21(b) en la región de integración; en t' sus extremos corresponden a $t' = 0$ y t' tal que $x' = x + v(t - t') = vt'$, es decir $t' = \frac{x+vt}{2v}$, con lo cual

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= \frac{1}{2v} \int_0^t dt' \int_{x-v(t-t')}^{x+v(t-t')} dx' F_0 \delta(x' - vt') \sin(\omega t') = \\
 &= \frac{F_0}{2v} \int_0^{\frac{x+vt}{2v}} dt' \sin(\omega t') = \frac{F_0}{2v} \left[-\frac{\cos(\omega t')}{\omega} \right]_0^{\frac{x+vt}{2v}} = \\
 &= \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos \left(\frac{\omega(x + vt)}{2v} \right) \right) . \quad (71)
 \end{aligned}$$

¿Qué añade la discusión del caso $v_0 \rightarrow v$ con respecto a los casos anteriores? Veamos en primer lugar qué ocurre en un instante particular, $t = x/v$. ¿Por qué es particular $t = x/v$? Al desplazarse la fuente a velocidad v , la perturbación creada por la fuente en un determinado punto se propaga a la misma velocidad que la propia fuente, de modo tal que la perturbación creada a lo largo de la trayectoria de la fuente *se superpone* precisamente en la posición instantánea ocupada por la fuente. Esta alcanza el punto (x, t) precisamente en el instante $t = x/v$. Para tiempos inferiores a x/v , $y(x, t) = 0$ de modo que

$$\lim_{t \rightarrow x/v, t < x/v} = 0 . \quad (72)$$

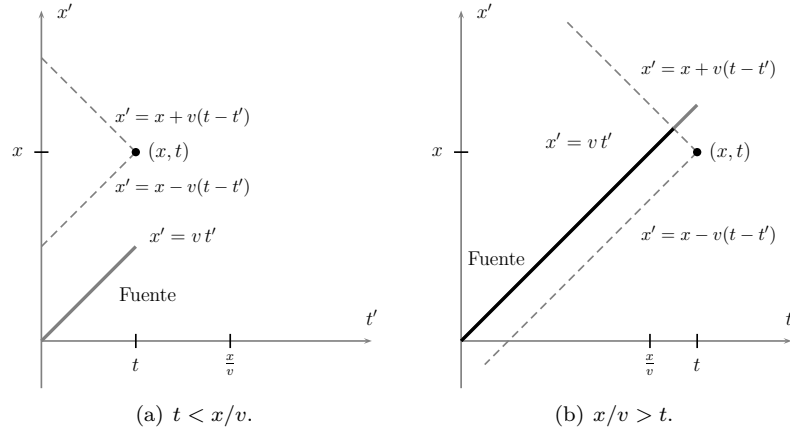


Figura 21: Fuente $F_0 \delta(x - vt) \sin(\omega t)$.

En cambio, si consideramos $t \rightarrow x/v$ para $t > x/v$, conforme a ec. (71),

$$\lim_{t \rightarrow x/v, t > x/v} = \frac{F_0}{2\omega v} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) \right) . \tag{73}$$

Salvo para valores particulares de ω o de x , ec. (72) y ec. (73) demuestran que $y(x, t)$ ¡es discontinua! Tenemos una *onda de choque*. Físicamente la discontinuidad en $y(x, t)$ es inconsistente: el problema radica sencillamente en la forma demasiado simple que hemos dado a nuestra fuente a través de la delta de Dirac. Obviando ese problema, descubrimos que la superposición de la perturbación creada a lo largo de la trayectoria de la fuente llega al punto (x, t) provocando una fuerte variación de $y(x, t)$. Esa es la onda de choque. La figura 22 muestra $y(x, t)$. Para $t > x/v$ nos encontramos de nuevo con el efecto Doppler con una frecuencia de oscilación $\omega' = \omega/2$. Nuestro sistema, de tan solo una dimensión,

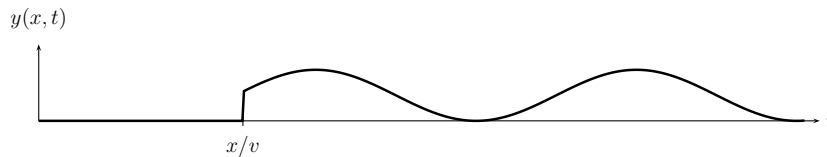


Figura 22: $y(x, t)$ para x fijo, fuente $F_0 \delta(x - vt) \sin(\omega t)$.

es ciertamente particular, de haber abordado el problema análogo en dos o tres dimensiones espaciales, encontraríamos – complicaciones matemáticas adicionales aparte –, que para velocidades de propagación de la fuente $v_0 \geq v$ (nótese que en una dimensión el caso $v_0 > v$ no produce una onda de choque) se forma un frente de ondas a lo largo del cual la perturbación producida por la fuente a lo largo de su trayectoria se superpone (interfiere) constructivamente, dando lugar a esa brusca variación de la magnitud descrita (en nuestro caso y). Ejemplos habituales de este fenómeno son el “boom” producido por aviones que se mueven a velocidades superiores a la del sonido, o el efecto Cherenkov producido por

partículas cargadas que se mueven a velocidades superiores a la de propagación de la luz en un medio.

2. Ecuación de onda y ondas planas

Hemos dedicado el apartado 1 al estudio de la solución de d'Alembert de la ecuación de onda homogénea y a la solución de la ecuación de onda con una fuente. Lo desarrollado no se parece en absoluto a los métodos empleados al describir una cuerda finita, a pesar de corresponder a la misma ecuación de onda. En este apartado abandonamos la solución de d'Alembert y acudimos a una estrategia similar a la empleada en temas anteriores: encontrar un conjunto de soluciones básicas sencillas de la ecuación de onda y construir la solución como superposición de estas soluciones básicas, las *ondas planas*.

2.1. Ondas planas

Retomamos la ecuación de onda ec. (1) y buscamos una solución separable $\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$,

$$\mathcal{X}(x) \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2} - v^2 \mathcal{T}(t) \frac{d^2 \mathcal{X}(x)}{dx^2} = 0 . \quad (74)$$

Dividiendo por $\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$,

$$\frac{1}{\mathcal{T}(t)} \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2} - v^2 \frac{1}{\mathcal{X}(x)} \frac{d^2 \mathcal{X}(x)}{dx^2} = 0 . \quad (75)$$

Con el primer término función de t y el segundo de x , ambos deben ser iguales a una constante. Con

$$\frac{1}{\mathcal{T}(t)} \frac{d^2 \mathcal{T}(t)}{dt^2} = -\omega^2 , \quad (76)$$

como en el estudio de la cuerda continua de longitud L , las soluciones $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ son

$$\mathcal{X}(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx) , \quad (77)$$

$$\mathcal{T}(t) = c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t) . \quad (78)$$

Las constantes ω y k obedecen la relación $\omega^2 = k^2 v^2$. Hasta este punto hemos repetido exactamente los pasos seguidos con la cuerda continua de longitud finita: la gran diferencia que ahora aparece es la ausencia de condiciones de contorno. En la cuerda continua estas imponían un conjunto de valores permitidos y en consecuencia un conjunto de frecuencias propias. Semejante restricción desaparece en la cuerda infinita: para cualquier valor de k o cualquier valor de ω , tenemos soluciones de la ecuación de onda; la única restricción, que se cumpla $\omega^2 = k^2 v^2$. Podemos considerar combinaciones *complejas* en lugar de combinaciones reales,

$$\mathcal{X}(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx} , \quad (79)$$

$$\mathcal{T}(t) = \gamma e^{i\omega t} + \delta e^{-i\omega t} , \quad (80)$$

que dan lugar a soluciones

$$\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t) = A e^{i(kx+\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)} + C e^{i(kx-\omega t)} + D e^{-i(kx-\omega t)} . \quad (81)$$

Con $\omega = kv$,

$$\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t) = A e^{ik(x+vt)} + B e^{-ik(x+vt)} + C e^{ik(x-vt)} + D e^{-ik(x-vt)}. \quad (82)$$

A pesar de haber buscado soluciones separables $\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$, aparecen naturalmente soluciones de tipo $\psi(x \pm vt)$, i.e. con la forma de la solución de d'Alembert: las ondas planas son de hecho las únicas soluciones separables que pueden dar lugar a ese tipo de dependencia en (x, t) . Las magnitudes importantes al describir ondas planas son las siguientes.

- La variable continua k es el *número de ondas*, que describe la frecuencia *espacial* de la onda plana.
- La *longitud de onda* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ es la *periodicidad espacial* de la onda plana.
- La frecuencia *angular* de la onda plana es ω , aunque es habitual emplear la *frecuencia* $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$.
- La *periodicidad temporal* – o sencillamente el periodo – es $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$.
- La velocidad v relaciona frecuencias espaciales y temporales,

$$\omega = kv \Leftrightarrow 2\pi\nu = kv \Leftrightarrow \lambda\nu = v \Leftrightarrow \lambda = vT. \quad (83)$$

Regresando a ec. (82), la expresión de $\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$ es, a priori, compleja, pero $\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$ describe una magnitud real: los coeficientes A, B, C y D no pueden ser independientes. Con

$$(\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t))^* = A^* e^{-ik(x+vt)} + B^* e^{ik(x+vt)} + C^* e^{-ik(x-vt)} + D^* e^{ik(x-vt)}, \quad (84)$$

basta requerir

$$A^* = B, \quad C^* = D, \quad (85)$$

para tener $(\mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t))^* = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$. Con k continua, una superposición de ondas planas se describe mediante una integral en dk con una función peso $f(k)$ asociada a cada onda plana de número de ondas k . Ahora bien, ¿qué valores de k debemos considerar? La ecuación de onda requiere $\omega^2 = k^2v^2$, pero en ec. (82) hemos empleado $\omega = kv$; esta elección (con $v > 0$), no obliga en absoluto a considerar exclusivamente $k > 0$ y $\omega > 0$. Según hemos discutido, al describir un sistema continuo sin condiciones de contorno que fijen un espectro discreto de frecuencias ω o números de ondas k , en lugar de una suma discreta, tendremos que considerar integrales en k . Observando ec. (82) vemos de hecho que considerando, por ejemplo, el término $A e^{ik(x+vt)}$ con $k < 0$ y $\omega < 0$, tenemos el mismo tipo de onda plana que en el término $B e^{-ik(x+vt)}$ para $k > 0$ y $\omega > 0$; de acuerdo con ec. (85), para describir una cantidad real, necesitamos $A^* = B$: podemos escoger de forma consistente $k \in]-\infty; +\infty[$ y tan solo ondas planas $e^{ik(x+vt)}$ y $e^{ik(x-vt)}$ para construir soluciones de la ecuación de onda. La elección de k en $] -\infty; +\infty[$ es particularmente ventajosa puesto que nos conduce al uso de la transformada de Fourier interpretada, sencillamente, como una superposición de ondas planas. Antes de analizar detalladamente cómo resolver la ecuación de onda con condiciones iniciales en términos de un desarrollo en

ondas planas, completamos la discusión anterior en lo tocante a los coeficientes del desarrollo para tener una función real. Consideremos

$$y(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) e^{i(kx + \omega t)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) e^{i(kx - \omega t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) e^{ik(x+vt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) e^{ik(x-vt)}. \quad (86)$$

Las funciones $f_{\pm}(k)$ son simplemente los “pesos” de las ondas planas $e^{ik(x \pm vt)}$ en la superposición $y(x, t)$. Calculamos

$$[y(x, t)]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [f_+(k)]^* e^{-ik(x+vt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [f_-(k)]^* e^{-ik(x-vt)}. \quad (87)$$

Cambiamos la variable de integración $k \rightarrow -k$ en ambas integrales para obtener

$$[y(x, t)]^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [f_+(-k)]^* e^{ik(x+vt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk [f_-(-k)]^* e^{ik(x-vt)}, \quad (88)$$

con lo que, para tener $y(x, t)$ real, bastará

$$[f_+(-k)]^* = f_+(k), \quad [f_-(-k)]^* = f_-(k). \quad (89)$$

2.2. Solución mediante ondas planas

En el apartado anterior hemos “descubierto” una familia de soluciones elementales de la ecuación de onda ec. (2); nuestro siguiente paso, de forma análoga a lo visto en temas anteriores, es construir una combinación lineal o superposición de estas soluciones que sea solución de la ecuación de onda cumpliendo unas condiciones iniciales $y(x, 0)$, $\partial_t y(x, 0)$ dadas. Consideremos una función $\psi(x, t)$ que sea superposición de ondas planas como en ec. (86),

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) e^{ik(x+vt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) e^{ik(x-vt)}. \quad (90)$$

Siendo una superposición de ondas planas, $\psi(x, t)$ es automáticamente solución de la ecuación de onda; ahora bien, para que sea *la* solución que cumple unas condiciones iniciales dadas $y(x, 0)$, $\partial_t y(x, 0)$, las funciones $f_{\pm}(k)$ (los “pesos” de las ondas planas) no pueden ser arbitrarias, deben ser tales que $\psi(x, 0) = y(x, 0)$ y $\partial_t \psi(x, 0) = \partial_t y(x, 0)$. Retomando ec. (90), veamos en primer lugar $\psi(x, 0)$,

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) e^{ikx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) e^{ikx}. \quad (91)$$

Puesto que nos interesan $f_{\pm}(k)$, tenemos que invertir la relación anterior: en este punto paga el haber establecido la analogía con la transformada de Fourier: calculemos la transformada inversa,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x, 0) e^{-ik'x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k-k')x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k-k')x}. \quad (92)$$

La ortogonalidad de las ondas planas,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k-k')x} = 2\pi \delta(k-k'), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i(x-x')k} = 2\pi \delta(x-x'), \quad (93)$$

permite reducir ec. (92) a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x,0) e^{-ikx} = f_+(k) + f_-(k). \quad (94)$$

Tenemos una primera ecuación que relaciona $f_{\pm}(k)$ con $\psi(x,0)$. Veamos ahora qué hacer con $\partial_t \psi(x,0)$. Con ec. (90),

$$\partial_t \psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) ikv e^{ikx} + \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) (-ikv) e^{ikx}. \quad (95)$$

Calculemos de nuevo la transformada inversa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_t \psi(x,0) e^{-ik'x} = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk ikv f_+(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k-k')x} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk ikv f_-(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k-k')x}. \end{aligned} \quad (96)$$

Usando de nuevo la ortogonalidad, ec. (93),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_t \psi(x,0) e^{-ikx} = ikv (f_+(k) - f_-(k)). \quad (97)$$

Las ecuaciones (94) y (97) permiten despejar

$$f_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x,0) e^{-ikx} \pm \frac{1}{ikv} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_t \psi(x,0) e^{-ikx} \right\}. \quad (98)$$

Según anticipamos en ec. (89), siendo $\psi(x,0)$ y $\partial_t \psi(x,0)$ reales, se cumple $[f_{\pm}(-k)]^* = f_{\pm}(k)$, como corresponde a $\psi(x,t)$ real. Con ec. (98) hemos resuelto cómo escoger la superposición de ondas planas tal que la función resultante sea la solución de la ecuación de onda que cumple las condiciones iniciales dadas, según recoge el cuadro (99).

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] y(x,t) = 0, \quad \text{condiciones iniciales } y(x,0), \partial_t y(x,0), \\ y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_+(k) e^{ik(x+vt)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f_-(k) e^{ik(x-vt)}, \\ f_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx y(x,0) e^{-ikx} \pm \frac{1}{ikv} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_t y(x,0) e^{-ikx} \right\}. \end{aligned} \quad (99)$$

2.3. Dispersión

La solución de la ecuación de onda, escrita à la *d'Alembert* – ec. (9) –, o escrita à la *Fourier*, asigna a la velocidad v un papel principal: cualquier perturbación se propaga a idéntica velocidad v . Conforme prescribe la propia ecuación de onda, la periodicidad en x y la periodicidad en t obedecen una proporcionalidad directa, $\omega = kv$. Si recordamos la cuerda *discreta*, con modos normales

$$v_{jr} \propto \sin\left(\frac{x_r j\pi}{L}\right), \Rightarrow \text{número de ondas del modo } j, k = \frac{j\pi}{L}, \quad (100)$$

mientras la frecuencia del modo normal j es

$$\omega_j = \frac{2}{\ell} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \sin\left(\ell \frac{j\pi}{2L}\right). \quad (101)$$

Es inmediato constatar que $\frac{\omega}{k}$ *no es constante*. La cuerda continua, con las simplificaciones que ha implicado, es más la excepción que la norma: lo habitual es encontrar sistemas físicos en que perturbaciones de diferente frecuencia tienen diferente velocidad de propagación. Este fenómeno es la *dispersión*, al que dedicamos este apartado.

2.3.1. Dos ondas planas

Una forma sencilla de introducir la dispersión y caracterizar en presencia de la misma la propagación de perturbaciones, es el análisis de la superposición de dos ondas planas de características similares. Por simplicidad consideramos la parte real de la superposición de dos ondas planas de idéntica amplitud, frecuencias ligeramente diferentes ω_1 y ω_2 , y números de onda ligeramente diferentes k_1 y k_2 .

$$y(x, t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x). \quad (102)$$

Introducimos

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad (103)$$

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}, \quad (104)$$

y reescribimos

$$\begin{cases} \omega_1 = \bar{\omega} - \Delta\omega, & k_1 = \bar{k} - \Delta k, \\ \omega_2 = \bar{\omega} + \Delta\omega, & k_2 = \bar{k} + \Delta k, \end{cases} \quad (105)$$

para obtener

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \cos(\omega_1 t - k_1 x) + A \cos(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= A \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x - (\Delta\omega t - \Delta k x)) + A \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x + (\Delta\omega t - \Delta k x)). \end{aligned} \quad (106)$$

Con $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ y $\Delta k \ll \bar{k}$. Desarrollamos $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ para obtener

$$y(x, t) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x). \quad (107)$$

Con $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ y $\Delta k \ll \bar{k}$, el factor $\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ tiene una variación *lenta* tanto en x como en t en comparación con el factor $\cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x)$: el primer factor se

comporta como una amplitud que modula la oscilación rápida del segundo factor. La figura 23 ilustra las dos ondas planas consideradas en ec. (102), mientras la figura 24 muestra tanto la superposición directa de las mismas como la reescritura en términos de una modulación de variación “lenta” $2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ de una oscilación “rápida” $\cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x)$. Ambas figuras corresponden a un instante fijo t ; la siguiente figura, 25, ilustra la evolución en el tiempo de la superposición. Al considerar la ecuación de onda ec. (2) y las soluciones en forma de ondas planas, la velocidad v tiene una interpretación directa: es la relación $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ entre el desplazamiento espacial Δx y el desplazamiento temporal Δt , tales que el argumento de la onda plana se mantenga constante (de forma completamente análoga a lo comentado para la solución de d’Alembert), y no es más que $v = \frac{\omega}{k}$. En general, para medios que presentan dispersión, incluso la superposición más sencilla que podemos considerar, la de dos ondas planas, la situación cambia. A cada una de ellas puede corresponder una velocidad diferente, $v_1 = \frac{\omega_1}{k_1}$, $v_2 = \frac{\omega_2}{k_2}$, con lo cual la velocidad de propagación de la modulación $\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$ y la velocidad de propagación de la oscilación rápida $\cos(\bar{\omega} t - \bar{k} x)$ pueden ser diferentes. Introduciendo por comodidad una velocidad media $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ y una diferencia $\Delta v = \frac{v_2 - v_1}{2}$, tenemos

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{v_2 k_2 - v_1 k_1}{k_2 - k_1} = v_1 + (v_2 - v_1) \frac{k_2}{k_2 - k_1} = v_2 + (v_2 - v_1) \frac{k_1}{k_2 - k_1}, \quad (108)$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \bar{v} + \Delta v \frac{\bar{k}}{\Delta k}, \quad (109)$$

mientras

$$\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{k_2 + k_1} = \frac{v_2 k_2 + v_1 k_1}{k_2 + k_1} = v_1 + (v_2 - v_1) \frac{k_2}{k_2 + k_1} = v_2 + (v_1 - v_2) \frac{k_1}{k_2 + k_1}, \quad (110)$$

$$\text{i.e.} \quad \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \bar{v} + \Delta v \frac{\Delta k}{\bar{k}}. \quad (111)$$

Queda por tanto claro que en general $\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \neq \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ (con $v_1 = v_2 = v$ recuperamos automáticamente el caso no dispersivo en que ambas velocidades son v). Aunque en el próximo apartado abordaremos la cuestión de forma más amplia, considerando un paquete de ondas en lugar de la superposición de tan solo dos ondas planas, este sencillo ejemplo es suficiente para introducir

- la velocidad de grupo, $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$, velocidad a la que se propaga la modulación de la amplitud,
- la velocidad de fase, $v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$, velocidad a la que se propaga una fase constante.

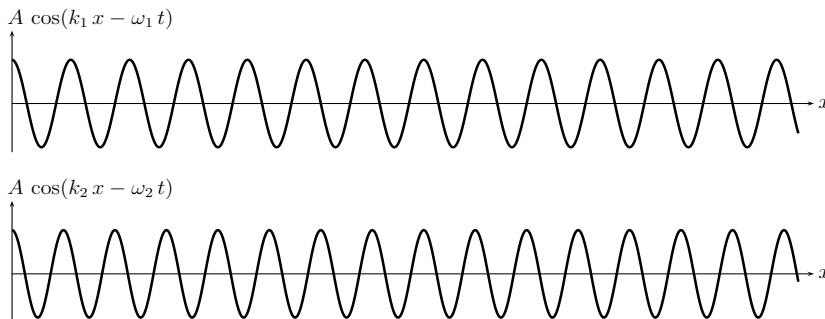


Figura 23: Dos ondas planas (parte real), ec. (102).

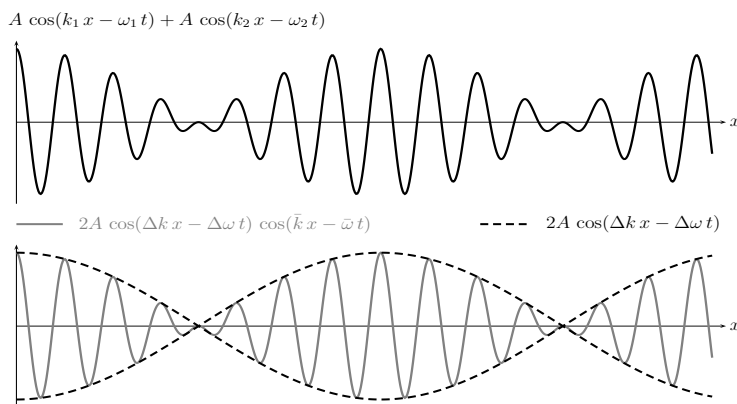


Figura 24: Superposición de dos ondas planas (parte real), ec. (107).

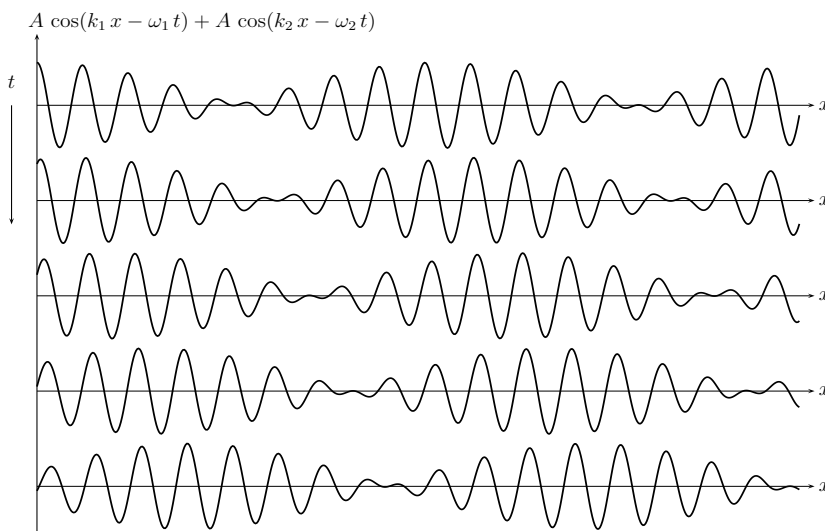


Figura 25: Evolución de la superposición de dos ondas planas (parte real), ec. (107).

2.3.2. Paquete de ondas: velocidades de fase y grupo

La superposición de dos ondas planas proporciona un primer ejemplo simple de lo que ocurre cuando un medio continuo es tal que la frecuencia angular asociada a una perturbación (onda plana) de número de ondas k es una función $\omega(k)$. En la cuerda unidimensional sin dispersión, tenemos sencillamente $\omega(k) = vk$. En general $\omega(k)$ es la *relación de dispersión*. En base a lo hecho con dos ondas planas, veamos cómo aparecen las velocidades de fase y de grupo al considerar un paquete de ondas. Consideremos por tanto un paquete de ondas (nos mantenemos como viene siendo habitual en una única dimensión espacial)

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathcal{A}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}, \quad (112)$$

i.e. una superposición de ondas planas $e^{i(kx - \omega(k)t)}$ pesadas por $\mathcal{A}(k)$, que, según ilustra la figura 26, se concentra alrededor de un valor k_0 .

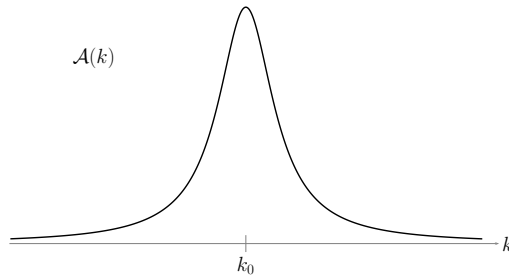


Figura 26: Paquete de ondas.

En esas condiciones desarrollamos $\omega(k)$,

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \omega'(k_0) + \dots \quad (113)$$

Llevando ec. (113) a ec. (112),

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathcal{A}(k) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} e^{i(k-k_0)(x - \omega'(k_0)t)} = \\ &e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathcal{A}(k) e^{i(k-k_0)(x - \omega'(k_0)t)}. \end{aligned} \quad (114)$$

La ecuación (114) describe, de forma análoga a lo visto para dos ondas planas, una oscilación “rápida” $e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$ modulada por una amplitud

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \mathcal{A}(k) e^{i(k-k_0)(x - \omega'(k_0)t)}.$$

La velocidad a la cual se propaga una fase de la oscilación rápida constante es, sencillamente $\frac{\omega(k_0)}{k_0}$. La velocidad a la cual se propaga constante la amplitud que la modula es en cambio $\omega'(k_0)$. Generalizando lo visto en el apartado anterior, dado un paquete de ondas planas concentrado alrededor de un número de ondas k_0 ,

- la velocidad de grupo, $v_g \equiv \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$, es la velocidad a la que se propaga “globalmente” el paquete de ondas, i.e. la velocidad a la que se propaga la amplitud modulada.
- la velocidad de fase, $v_f = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$, es la velocidad a la que la fase de la oscilación rápida (“dentro” de la amplitud modulada) se mantiene constante.

La figura 27 ilustra la diferencia entre propagación en un medio que no presenta dispersión (la forma de la onda se mantiene en la propagación) y la propagación en un medio que sí presenta dispersión.

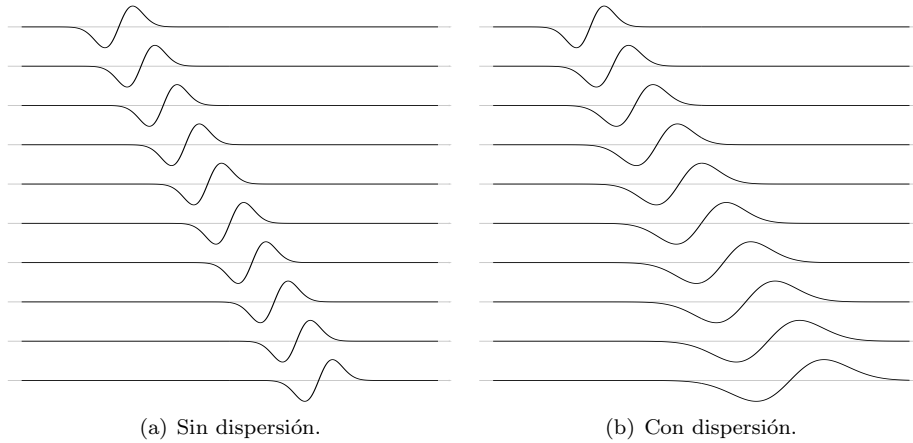


Figura 27: Propagación de una onda.

2.4. Perturbaciones estacionarias

Habiendo visto cómo construir una solución general como superposición de ondas planas, nos detenemos brevemente a analizar cómo aparecen entonces soluciones como las de la cuerda finita con extremos fijos, es decir soluciones estacionarias de la ecuación de onda. Consideremos la superposición real de dos ondas planas de idéntica frecuencia y dirección de propagación opuesta,

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t), \quad \omega = kv. \quad (115)$$

Desarrollamos

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A [\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t) + \sin(kx) \cos(\omega t) + \cos(kx) \sin(\omega t)] \\ &= 2A \sin(kx) \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (116)$$

La superposición considerada es precisamente de la forma separable que puede corresponder a una solución estacionaria. Si ahora imponemos $y(0, t) = 0$, $y(L, t) = 0$, obtenemos inmediatamente $k \rightarrow k_n = \frac{2\pi n}{L}$, $\omega_n = k_n v$ con $n = 1, \dots, \infty$. Los modos normales, soluciones estacionarias de la ecuación de onda, no son, al fin y al cabo, otra cosa que la superposición de ondas planas que tan solo difieren en la dirección de propagación.

2.5. Refracción de ondas planas

En el apartado 1.3, hemos analizado la refracción y la reflexión a través de la solución de d'Alembert de la ecuación de onda. Tiene de todos modos interés hacerlo considerando ondas planas individuales, puesto que el resultado nos puede permitir analizar la misma clase de situación en sistemas que presentan dispersión. Consideremos de nuevo la situación recogida en la figura 6, una onda incide sobre la separación de dos cuerdas semi-infinitas; en lugar de considerar una onda arbitraria $f(x - vt)$, consideramos una onda plana $A e^{i(k_1 x - \omega_1(k_1) t)}$. En la región $x < 0$, la solución completa a considerar tendrá una segunda onda plana de velocidad de propagación opuesta, $A R e^{-i(k_1 x + \omega_1(k_1) t)}$. En la región $x > 0$, la solución a considerar es una onda plana $T A e^{i(k_2 x - \omega_2(k_2) t)}$. Escribimos explícitamente $\omega_1(k_1)$ y $\omega_2(k_2)$ para subrayar que en cada zona podemos tener $\omega \neq k v$ (i.e. que podemos tener dispersión), y que la relación de dispersión puede de hecho ser diferente en cada zona. Resumiendo, consideramos una solución

$$y(x, t) \rightarrow \begin{cases} y_1(x, t) = A e^{i(k_1 x - \omega_1(k_1) t)} + R A e^{-i(k_1 x + \omega_1(k_1) t)}, & x < 0, \\ y_2(x, t) = T A e^{i(k_2 x - \omega_2(k_2) t)}, & x > 0. \end{cases} \quad (117)$$

Las condiciones a aplicar en $x = 0$ son

- (1) la continuidad de y para todo tiempo, i.e. $y_1(0, t) = y_2(0, t)$,
- (2) la continuidad de $\partial_t y$ para todo tiempo, i.e. $\partial_t y_1(0, t) = \partial_t y_2(0, t)$,
- (3) la continuidad de $\partial_x y$ para todo tiempo, i.e. $\partial_x y_1(0, t) = \partial_x y_2(0, t)$.

Explícitamente,

$$(1 + R) A e^{-i\omega_1(k_1) t} = T A e^{-i\omega_2(k_2) t}, \quad (118)$$

$$-i\omega_1(k_1) (1 + R) A e^{-i\omega_1(k_1) t} = -i\omega_2(k_2) T A e^{-i\omega_2(k_2) t}, \quad (119)$$

$$ik_1(1 - R) A e^{-i\omega_1(k_1) t} = ik_2 T A e^{-i\omega_2(k_2) t}. \quad (120)$$

Para que se cumpla ec. (118) para todo t (o bien comparando ec. (118) y ec. (119)), $\omega_1(k_1) = \omega_2(k_2)$, i.e. la frecuencia angular debe ser la misma en ambas regiones; con ello podemos eliminar exponenciales complejas dependientes de t , además de la amplitud global A , para obtener

$$(1 + R) = T, \quad k_1(1 - R) = k_2 T. \quad (121)$$

Despejando,

$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad T = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (122)$$

Las relaciones en ec. (122) proporcionan las amplitudes (relativas a la amplitud de la onda plana incidente) de la onda plana *reflejada*, R y de la onda plana *transmitida*, T . Cuando tanto en $x < 0$ como en $x > 0$ no haya dispersión, $\omega = k_1 v_1 = v_2 k_2$, con lo que $\frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}$ y podemos recuperar inmediatamente ec. (38).

2.6. Teorema del ancho de banda

Al obtener la solución ec. (99), la transformada de Fourier ha aparecido de forma natural en nuestro desarrollo; en este apartado nos ocupamos de una propiedad de la misma de gran importancia física. La solución ec. (99) describe una superposición de ondas planas en cualquier punto x , para todo tiempo t . Si en lugar de considerarla de forma global nos limitamos a considerar $y(x, t)$:

- (i) para un tiempo $t = t_0$ fijo, para todo el espacio x , estamos considerando una función únicamente de x

$$f(x) \equiv y(x, t_0) , \quad (123)$$

- (ii) para una posición $x = x_0$ fija, para todo tiempo t , estamos considerando una función únicamente de t

$$g(t) \equiv y(x_0, t) . \quad (124)$$

Introducimos la transformada de Fourier \hat{f} de f ,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) , \quad (125)$$

f es la transformada inversa de \hat{f} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \hat{f}(k) . \quad (126)$$

Análogamente, introducimos la transformada \hat{g} de g ,

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} g(t) , \quad (127)$$

g es la transformada inversa de \hat{g} :

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \hat{g}(\omega) . \quad (128)$$

Con f y g de cuadrado integrable, la identidad de Parseval es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\hat{f}(k)|^2 , \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dt |g(t)|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\hat{g}(\omega)|^2 . \end{aligned} \quad (129)$$

Para una función arbitraria $F(x)$, podemos emplear $f(x)$ para definir un *valor esperado* del siguiente modo:

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx F(x) |f(x)|^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 . \quad (130)$$

$\langle F(x) \rangle$ es la integral de $F(x)$ “pesada” con $|f(x)|^2$ y normalizada al “peso” total $\int dx |f(x)|^2$. Para una función arbitraria de t , $G(t)$, podemos proceder de forma análoga y definir un valor esperado $\langle G(t) \rangle$ como

$$\langle G(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(t) |g(t)|^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} dt |g(t)|^2 . \quad (131)$$

También para funciones de k o de ω podemos definir valores esperados,

$$\begin{aligned} \langle R(k) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk R(k) |\hat{f}(k)|^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\hat{f}(k)|^2 , \\ \langle S(\omega) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega R(\omega) |\hat{g}(\omega)|^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\hat{g}(\omega)|^2 . \end{aligned} \quad (132)$$

Valores esperados en el espacio k se pueden relacionar con integrales que involucran derivadas de f .

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \hat{f}^*(k) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \hat{f}(k) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' e^{-ik'x} \hat{f}^*(k') \int_{-\infty}^{+\infty} dk ik e^{ikx} \hat{f}(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \int_{-\infty}^{+\infty} dk \hat{f}^*(k') \hat{f}(k) ik \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ix(k-k')}}_{2\pi\delta(k-k')} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk' ik |\hat{f}(k)|^2 = i \langle k \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\hat{f}(k)|^2 . \end{aligned} \quad (133)$$

Considerando una derivada más,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\partial}{\partial x} f^*(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) = \langle k^2 \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\hat{f}(k)|^2 . \quad (134)$$

A través de ec. (133) y ec. (134) podemos reescribir integrales que involucran derivadas de $f(x)$ mediante valores esperados de k y k^2 , por ejemplo. Propiedades análogas con funciones de t y ω son inmediatas de obtener. Las utilizaremos en breve.

Caracterizamos alrededor de qué valor de x puede estar concentrada $f(x)$ con el valor esperado $\langle x \rangle$; una segunda característica de interés es una medida del tamaño “típico” de la región entorno a $\langle x \rangle$ en que $f(x)$ pueda estar concentrada. De forma completamente análoga a la empleada en estadística, del mismo modo que $\langle x \rangle$ es el valor esperado – la media –, tenemos la desviación estándar Δx , con $(\Delta x)^2$ la varianza

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle . \quad (135)$$

Podemos hacer lo propio con k ,

$$(\Delta k)^2 = \langle (k - \langle k \rangle)^2 \rangle . \quad (136)$$

En ec. (133) y ec. (134) hemos visto cómo $\langle k \rangle$ y $\langle k^2 \rangle$ están relacionadas con integrales de $f^* \partial_x f$ y $\partial_x f^* \partial_x f$: ¿implica esto alguna relación entre Δx y Δk ? Ese será precisamente el objeto del *teorema del ancho de banda*. Todo lo anterior es válido para t en lugar de x y ω en lugar de k (con lo que nos ahorramos reescribir las correspondientes ecuaciones).

Dicho todo lo anterior, consideramos (sin mayor justificación), la siguiente función:

$$\mathcal{F}(x) = \left((x - \langle x \rangle) - i\alpha \left(i \frac{\partial}{\partial x} - \langle k \rangle \right) \right) f(x). \quad (137)$$

Integrando $|\mathcal{F}(x)|^2$ y normalizando a la integral de $|f(x)|^2$, definimos la siguiente integral $I(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\mathcal{F}(x)|^2 / \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2. \quad (138)$$

Trabajémosla,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= (\Delta x)^2 + \alpha^2 (\Delta k)^2 \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left((x - \langle x \rangle) f^*(x) (-i\alpha) \left(i \frac{\partial}{\partial x} f(x) - \langle k \rangle f(x) \right) \right) / \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left((x - \langle x \rangle) f(x) (-i\alpha) \left(i \frac{\partial}{\partial x} f^*(x) - \langle k \rangle f^*(x) \right) \right) / \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 \\ &= (\Delta x)^2 + \alpha^2 (\Delta k)^2 + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \langle x \rangle) \left(f^*(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x} f^*(x) \right). \end{aligned} \quad (139)$$

La última integral es

$$\begin{aligned} \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \langle x \rangle) \left(f^*(x) \frac{\partial}{\partial x} f(x) + f(x) \frac{\partial}{\partial x} f^*(x) \right) = \\ \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \langle x \rangle) \frac{\partial}{\partial x} |f(x)|^2, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \langle x \rangle) \frac{\partial}{\partial x} |f(x)|^2 = \\ -\alpha [|f(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} + \alpha [x |f(x)|^2]_{-\infty}^{+\infty} - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2. \end{aligned} \quad (141)$$

Con f de cuadrado integrable,

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \langle x \rangle) \frac{\partial}{\partial x} |f(x)|^2 = -\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2, \quad (142)$$

así que, finalmente,

$$I(\alpha) = (\Delta x)^2 + \alpha^2 (\Delta k)^2 - \alpha. \quad (143)$$

Por construcción, ec. (138), $I(\alpha)$ no es negativa, siendo un polinomio de segundo grado en α y el coeficiente de α^2 positivo, ¿para qué valor de α tenemos el mínimo de $I(\alpha)$? Veamos,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = 2\alpha(\Delta k)^2 - 1, \quad \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2(\Delta k)^2}. \quad (144)$$

¿Qué vale $I(\alpha) \geq 0$ en ese mínimo?

$$I\left(\frac{1}{2(\Delta k)^2}\right) = (\Delta x)^2 + \frac{(\Delta k)^2}{4((\Delta k)^2)^2} - \frac{1}{2(\Delta k)^2} = (\Delta x)^2 - \frac{1}{4(\Delta k)^2} \geq 0. \quad (145)$$

Esto no es más que

$$\boxed{(\Delta x) (\Delta k) \geq \frac{1}{2}}. \quad (146)$$

Todo el desarrollo anterior nos ha llevado al (impactante) *teorema del ancho de banda* recogido en ec. (146): dada una función $f(x)$, si se encuentra concentrada en una región de extensión Δx , su descomposición en ondas planas *no puede* estar concentrada en una región en k menor que $\frac{1}{2\Delta x}$. Recíprocamente, una superposición de ondas planas concentrada en una región en k de tamaño Δk ocupa *necesariamente* una extensión en x mayor que $\frac{1}{2\Delta k}$. Este resultado tiene una conexión directa con el principio de incertidumbre de Heisenberg una vez, en el marco de la mecánica ondulatoria, se asocia el momento p al número de ondas k según $p = \hbar k$ (\hbar es la constante de Planck reducida) para obtener la famosa relación

$$(\Delta x) (\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Lo obtenido para x y k es inmediatamente trasladable a t y ω ,

$$\boxed{(\Delta t) (\Delta \omega) \geq \frac{1}{2}}. \quad (147)$$

La interpretación de esta última en términos de las magnitudes *temporales* t y ω es análoga a la interpretación en términos de las magnitudes *espaciales* x y k (en lugar de ondas planas nos referimos aquí a funciones armónicas de t): si una función $g(t)$ está concentrada en una región de duración Δt , su descomposición en funciones armónicas *no puede* estar concentrada en una región de frecuencias ω menor que $\frac{1}{2\Delta t}$. Recíprocamente, una superposición de armónicos concentrada en una región de frecuencias $\Delta \omega$ *no puede* dar lugar a una señal de duración inferior a $\frac{1}{2\Delta \omega}$. La figura 28 ilustra, esquemáticamente, el teorema del ancho de banda.

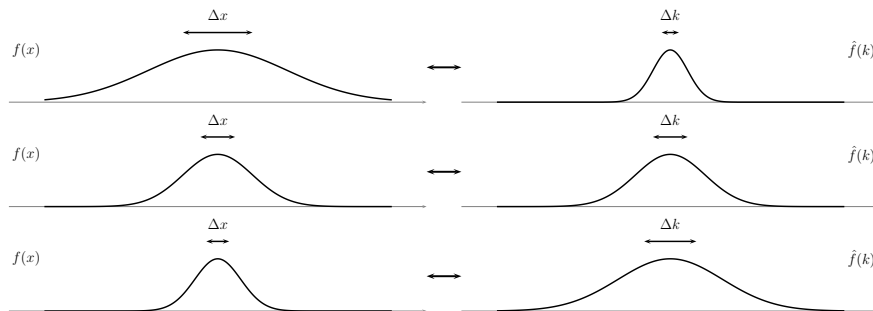


Figura 28: Teorema del ancho de banda.

3. * Comentarios adicionales

Claves del tema

- Solución de d'Alembert libre.
- Solución de d'Alembert en presencia de una fuente.
- Fenómenos ondulatorios: reflexión, refracción, efecto Doppler.
- Ondas planas.
- Solución de la ecuación de onda con ondas planas.
- Dispersión.

A. Animaciones

- Ejemplos de la solución libre de d'Alembert
 - T05_dAlembert_libre_1.avi
 - T05_dAlembert_libre_2.avi
 - T05_dAlembert_libre_3.avi
 - T05_dAlembert_libre_4.avi
- Reflexión
 - T05_reflexion_extremo_libre.avi
 - T05_reflexion_extremo_fijo.avi
- Refracción
 - T05_refraccion.avi
- Ejemplos de la solución de d'Alembert con fuente
 - T05_dAlembert_fuente_1.avi
 - T05_dAlembert_fuente_2.avi
- Efecto Doppler
 - T05_Doppler_1.avi
 - T05_Doppler_2.avi
 - T05_Doppler_3.avi
 - T05_Doppler_4.avi
- Ondas planas y dispersión
 - T05_dos_ondas_planas.avi
 - T05_paquete_ondas.avi