

Oscilaciones acopladas

Apuntes de clase

Índice

1. Acoplamiento de dos osciladores	3
1.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento	3
1.2. Ecuaciones desacopladas	4
1.3. Modos simétrico y antisimétrico	7
1.4. Acoplamiento débil	8
1.5. Amortiguamiento	9
1.6. Movimiento forzado	14
2. Teoría general	20
2.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento	20
2.2. Ecuaciones de movimiento desacopladas	22
2.3. Modos normales y soluciones	23
2.4. Lagrangiana y modos normales	25
2.5. Modos normales: interpretación y aclaraciones	26
2.6. Amortiguamiento	28
2.7. Oscilaciones forzadas	30
2.8. Energía del sistema	31
2.9. Degeneración	34
3. Molécula triatómica lineal	36
3.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento	36
3.2. Frecuencias propias y modos normales	38
3.3. Solución general	40
3.4. Modos normales y lagrangiana	44
3.5. * Comentario sobre los modos normales	45
3.6. Ejemplos	45
4. La cuerda discreta	49
4.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento	49
4.2. Frecuencias propias y modos normales	50
4.3. Solución general	54
4.4. Cuerda discreta, ejemplos	56
5. Comentario general	60
6. Animaciones	61

A. * Cuerda discreta, ortonormalidad de los vectores propios	63
B. * Degeneración y simetría	66
B.1. Planteamiento	66
B.2. Solución	68
B.3. Simetría	72
B.4. Animaciones	80

En los temas precedentes hemos estudiado las oscilaciones libres, amortiguadas y forzadas, de sistemas físicos con *un* único grado de libertad. Si bien nos ha permitido descubrir y describir fenómenos físicos como la resonancia, multitud de sistemas pueden requerir un tratamiento diferente por el simple hecho de poseer *más* de un grado de libertad; si no existe interacción entre los grados de libertad del sistema, nos encontramos simplemente con un sistema que se comporta como una colección de sistemas independientes, cada uno con un único grado de libertad: nada nuevo. En cambio, cuando los distintos grados de libertad interaccionan, nos encontramos con una situación en apariencia más compleja: ese es el objetivo central de este tema, el estudio de las *oscilaciones acopladas* de un sistema. Seguimos el siguiente recorrido. En el apartado 1 estudiamos el acoplamiento de dos osciladores mecánicos para descubrir que determinados movimientos *colectivos* del sistema, los *modos normales*, se comportan como simples osciladores armónicos. Armados con ese resultado, exploramos los efectos del amortiguamiento y de fuerzas externas armónicas sobre el sistema. En el apartado 2 formulamos de modo general el estudio de sistemas con grados de libertad acoplados. Dedicamos el apartado 3 al estudio de una molécula lineal compuesta por tres “átomos”, que nos permite aplicar varios conceptos del apartado anterior. En el apartado 4 nos ocupamos de la cuerda discreta. Además de ilustrar todo lo anterior, la cuerda discreta abre la puerta al estudio de sistemas con un gran número de grados libertad, y la transición a una descripción en términos de grados de libertad continuos. Dedicamos el apartado 5 a una serie final de reflexiones sobre lo aprendido a lo largo del tema. En el apartado 6 comentamos algunas animaciones que ilustran aspectos de los apartados anteriores.

1. Acoplamiento de dos osciladores

Iniciamos el estudio de sistemas con grados de libertad acoplados a través de un caso sencillo, un sistema formado por dos osciladores “conectados”. A lo largo de este apartado estudiaremos el comportamiento del sistema incorporando distintos ingredientes (términos de amortiguamiento, una fuerza externa) tal como hicimos en el estudio de un sistema con un único grado de libertad.

1.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento

Consideremos dos masas idénticas conectadas mediante tres muelles de constantes recuperadoras k y k_{12} según indica la figura 1. Si las longitudes de los muelles en equilibrio (i.e. con energía potencial mínima) son, respectivamente, ℓ y L , la lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - \ell)^2 - \frac{1}{2} k_{12} (x_2 - x_1 - L)^2 - \frac{1}{2} k (x_2 - L - \ell)^2 . \quad (1)$$

Como es habitual, resulta más que conveniente acudir a coordenadas relativas a la posición de equilibrio, $y_1 \equiv x_1 - \ell$, $y_2 \equiv x_2 - \ell - L$, para las que tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k y_1^2 - \frac{1}{2} k_{12} (y_2 - y_1)^2 - \frac{1}{2} k y_2^2 . \quad (2)$$

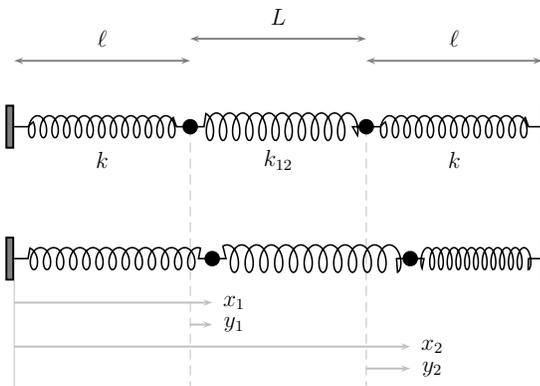


Figura 1: Osciladores acoplados.

Las ecuaciones de Euler–Lagrange proporcionan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 &= -k y_1 + k_{12} (y_2 - y_1) , \\ m \ddot{y}_2 &= -k y_2 - k_{12} (y_2 - y_1) . \end{aligned} \quad (3)$$

En ecs. (3) tenemos dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden *acopladas*: la segunda derivada temporal de y_1 , \ddot{y}_1 , *depende* de y_2 ; si bien esto ya basta para que la evolución de y_1 y de y_2 no sea independiente, tenemos además que \ddot{y}_2 *depende* también de y_1 . Podemos escribir matricialmente ec. (3) de la siguiente forma:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} . \quad (4)$$

De modo aún más compacto,

$$m \ddot{\vec{y}} + A \vec{y} = \vec{0} , \quad \text{con } \vec{y} \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ y } A \equiv \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix} . \quad (5)$$

Es importante señalar que la matriz A es *simétrica*. Por otra parte la ecuación anterior no debería asustarnos en especial, tiene la forma típica de la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple, $m\ddot{x} + kx = 0$, ... con una significativa diferencia, los “coeficientes” de cada término en la ecuación diferencial han pasado a ser *matrices* y el grado de libertad ha pasado a ser un *conjunto* de grados de libertad, un *vector*.

1.2. Ecuaciones desacopladas

Para resolver las ecuaciones de movimiento ec. (5) de los osciladores seguimos una estrategia sencilla, introducimos un cambio de variables capaz de “separar” el problema en dos problemas individuales *desacoplados*, que *sí* sabemos resolver. Esta idea es *fundamental*, aunque en apartados posteriores abordemos casos más elaborados desde un punto de vista matemático, la estrategia para resolverlos será esencialmente la misma. Explícitamente, introducimos

$$\vec{\eta} = S \vec{y} , \quad (\text{con } S \text{ una matriz constante e invertible}),$$

tal que, de ec. (5), obtengamos

$$m S \ddot{\vec{y}} = -S A \vec{y} = -S A S^{-1} S \vec{y} \Leftrightarrow m \ddot{\vec{\eta}} = -(S A S^{-1}) \vec{\eta} . \quad (6)$$

Si escogemos S de modo que $S A S^{-1} \equiv A_d$ sea una matriz diagonal, $A_d = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} , \quad (7)$$

con λ_j los valores propios de A . La ecuación (7) no es más que el par de ecuaciones desacopladas

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \frac{\lambda_1}{m} \eta_1 &= 0 , \\ \ddot{\eta}_2 + \frac{\lambda_2}{m} \eta_2 &= 0 , \end{aligned}$$

que tienen soluciones armónicas inmediatas. Esta característica será recurrente en el estudio de las oscilaciones acopladas de un sistema: determinadas combinaciones lineales de los grados de libertad de un sistema se comportan de forma sencilla alrededor del equilibrio: como simples osciladores armónicos. El cambio de variables $\vec{y} \mapsto \vec{\eta} = S \vec{y}$ es, sencillamente, el correspondiente a la diagonalización de A . Con A *simétrica*, S será *ortogonal*, i.e. $S^{-1} = S^T$. Para obtener S debemos determinar los valores propios de A y los vectores propios asociados. Obtenemos los valores propios de A como raíces de su polinomio característico $\det(A - \lambda \mathbf{1})$,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} k + k_{12} - \lambda & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (k + k_{12} - \lambda)^2 - k_{12}^2 = (k + 2k_{12} - \lambda)(k - \lambda) . \end{aligned}$$

Introduciendo frecuencias angulares ω_1, ω_2 , los valores propios son

$$\lambda_1 \equiv m \omega_1^2 = k + 2k_{12} , \quad \lambda_2 \equiv m \omega_2^2 = k .$$

Los correspondientes vectores propios, obtenidos resolviendo el sistema lineal de ecuaciones $(A - \lambda_j \mathbf{1}) \vec{v}_j = \vec{0}$ en términos de las componentes $(\vec{v}_j)_k$, adecuadamente normalizados, son

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Con los vectores propios construimos la matriz del cambio de base S : habiendo escrito $S A S^{-1} = A_d$, la matriz S tiene por *filas* los vectores propios (normalizados y ordenados del mismo modo que sus correspondientes valores propios),

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \quad (9)$$

Nótese que la matriz del cambio de base S , según señalamos anteriormente, es constante, i.e. es *independiente del tiempo*. Tenemos pues

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + \eta_2) , \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_2 - \eta_1) , \quad (10)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) , \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) . \quad (11)$$

Las ecuaciones *desacopladas* son

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 &= 0 , \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}} , \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 &= 0 , \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} . \end{aligned} \quad (12)$$

Las soluciones $\eta_i(t)$ son

$$\eta_1(t) = \eta_1(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) , \quad (13)$$

$$\eta_2(t) = \eta_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) . \quad (14)$$

Las combinaciones de grados de libertad η_j se denominan *modos normales* (de oscilación del sistema). Como indica ec. (10), el movimiento $y_i(t)$ de cada masa será por tanto una combinación lineal de dos movimientos armónicos simples:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] , \\ y_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] . \end{aligned} \quad (15)$$

Ahora bien, las ecuaciones anteriores involucran condiciones iniciales para $\eta_j(t)$, no para los grados de libertad $y_j(t)$: introducimos las condiciones iniciales $y_j(0)$, $\dot{y}_j(0)$ recurriendo a ec. (11), y obtenemos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{2} (y_1(0) - y_2(0)) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2\omega_1} (\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0)) \sin(\omega_1 t) + \\ &\frac{1}{2} (y_1(0) + y_2(0)) \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2\omega_2} (\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0)) \sin(\omega_2 t) , \\ y_2(t) &= \frac{1}{2} (y_2(0) - y_1(0)) \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2\omega_1} (\dot{y}_2(0) - \dot{y}_1(0)) \sin(\omega_1 t) + \\ &\frac{1}{2} (y_1(0) + y_2(0)) \cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2\omega_2} (\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0)) \sin(\omega_2 t) . \end{aligned} \quad (16)$$

En términos de las condiciones iniciales $y_i(0)$, $\dot{y}_i(0)$, *el problema está resuelto*, conocemos la trayectoria del sistema $\{y_1(t), y_2(t)\}$; la estrategia para obtenerla resulta clara:

- (0) – planteadas las ecuaciones de movimiento, obtenemos las frecuencias propias del sistema ω_1^2 , ω_2^2 y los modos normales del mismo η_1 , η_2 ;
- (1) – resolvemos $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ explícitamente, manteniendo la dependencia en las condiciones iniciales $\{\eta_1(0), \dot{\eta}_1(0)\}$, $\{\eta_2(0), \dot{\eta}_2(0)\}$;

- (2) – expresamos $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en términos de los modos normales $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, empleando $\vec{y} = S^{-1}\vec{\eta}$;
- (3) – expresamos las condiciones iniciales para los modos normales $\{\eta_1(0), \dot{\eta}_1(0)\}$, $\{\eta_2(0), \dot{\eta}_2(0)\}$ en términos de las condiciones iniciales para los grados de libertad y_j , $\{y_1(0), y_2(0), \dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)\}$ mediante $\vec{\eta} = S\vec{y}$;
- (4) – sustituimos las condiciones iniciales del punto (3) en las trayectorias $y_i(t)$ del punto (2).

Pasemos ahora a la interpretación física de $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$.

1.3. Modos simétrico y antisimétrico

Veamos en primer lugar qué clase de movimiento corresponde a una solución con $\eta_1(t) \neq 0$ y $\eta_2(t) = 0$. Para tener $\eta_2(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, necesitamos $y_1(t) = -y_2(t)$; en términos de las condiciones iniciales necesitamos $y_1(0) = -y_2(0) = y_0, \dot{y}_1(0) = -\dot{y}_2(0) = v_0$. Las sustituimos en ec. (16),

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 \cos(\omega_1 t) + \frac{v_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) , \\ y_2(t) &= -y_0 \cos(\omega_1 t) - \frac{v_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) , \end{aligned}$$

(como debe ser $y_1(t) = -y_2(t)$) y vemos que las dos masas oscilan en oposición de fase con frecuencia ω_1 . Este modo de oscilación se conoce como *modo antisimétrico*. Que $\eta_2(t) = 0$ equivalga a $y_1(t) = -y_2(t)$ es inmediato; pasar por la forma explícita de las soluciones nos permite ver que ambas masas oscilan con frecuencia angular ω_1 , la correspondiente a η_1 . Análogamente, el movimiento asociado a una solución con $\eta_1(t) = 0$ y $\eta_2(t) \neq 0$ tendrá $y_1(t) = y_2(t) = \eta_2(t)/\sqrt{2}$; es el *modo simétrico* de oscilación:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) , \\ y_2(t) &= y_0 \cos(\omega_2 t) + \frac{v_0}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) . \end{aligned}$$

1.3.1. Ejemplos

Ilustramos con varios ejemplos lo desarrollado hasta ahora.

- Ejemplo 1: modo simétrico. Escogemos las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = A, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, con lo que

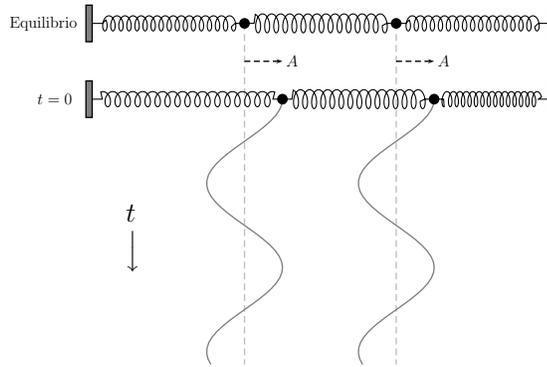
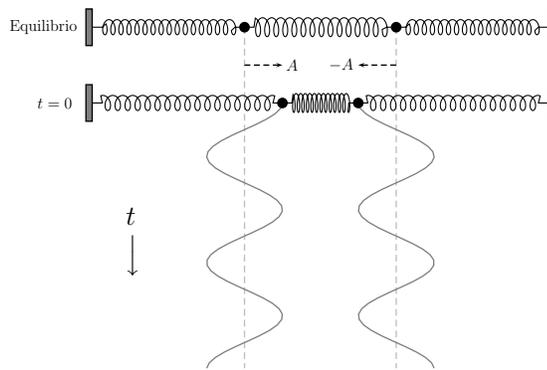
$$y_1(t) = y_2(t) = A \cos(\omega_2 t) .$$

La figura 2 ilustra la evolución temporal del sistema.

- Ejemplo 2: modo antisimétrico. Escogemos las condiciones iniciales $y_1(0) = -y_2(0) = A, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, con lo que

$$y_1(t) = -y_2(t) = A \cos(\omega_1 t) .$$

La figura 3 ilustra la evolución temporal del sistema.

Figura 2: Ejemplo 1, *modo simétrico*.Figura 3: Ejemplo 2, *modo antisimétrico*.

- **Ejemplo 3.** Escogemos las condiciones iniciales $y_1(0) = A$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$, con lo que

$$y_1(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) .$$

$$y_2(t) = -\frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) .$$

La figura 4 ilustra la evolución temporal del sistema.

1.4. Acoplamiento débil

Siguiendo con el análisis del acoplamiento de dos osciladores idénticos, en este apartado abordamos un límite interesante: $k_{12} \ll k$, la situación en que el acoplamiento es *débil*. Con $k_{12} \ll k$, desarrollamos las frecuencias propias

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \quad \text{con } \omega_0 \simeq \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}}, \quad \Delta\omega \simeq \omega_0 \frac{k_{12}}{k + k_{12}} .$$

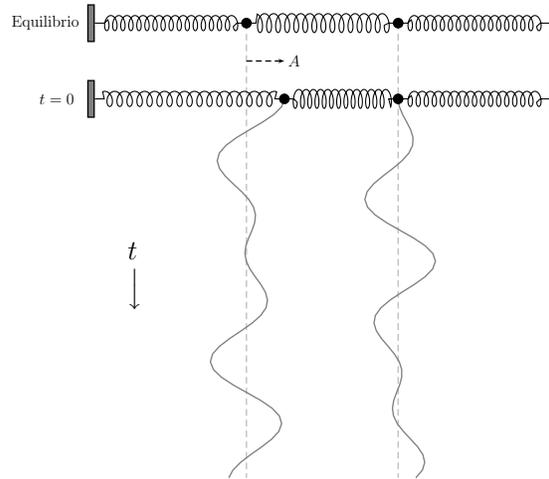


Figura 4: Ejemplo 3.

Si consideramos ahora el movimiento del ejemplo 3 anterior,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) , \\ y_2(t) &= -\frac{A}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\omega_2 t) , \end{aligned}$$

desarrollando tanto $\cos(\omega_1 t) = \cos(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t/2) - \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t/2)$ como $\cos(\omega_2 t) = \cos(\omega_0 t) \cos(\Delta\omega t/2) + \sin(\omega_0 t) \sin(\Delta\omega t/2)$, tendremos

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\omega_0 t) , \\ y_2(t) &= A \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \sin(\omega_0 t) . \end{aligned} \tag{17}$$

Tenemos por tanto oscilaciones de frecuencia angular ω_0 con una *modulación* de frecuencia angular $\frac{\Delta\omega}{2}$; en otras palabras, tenemos una oscilación “rápida” con una amplitud que varía de forma “lenta”. Encontraremos de nuevo (y lo estudiaremos de forma más detallada) este mismo fenómeno en un capítulo posterior. La energía, inicialmente en el oscilador 1 (salvo el término subdominante de energía potencial correspondiente al muelle intermedio), pasa de un oscilador al otro con frecuencia (angular) $\frac{\Delta\omega}{2}$. La figura 5 ilustra la situación.

1.5. Amortiguamiento

Veamos qué ocurre cuando introducimos términos de amortiguamiento en el sistema formado por dos osciladores acoplados. Lo haremos de la forma más sencilla, retomando las ecuaciones de movimiento (3) e incluyendo un término de amortiguamiento proporcional a la velocidad en cada una de ellas (de forma análoga a lo realizado en el estudio del oscilador armónico simple):

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + \gamma \dot{y}_1 + (k + k_{12}) y_1 - k_{12} y_2 &= 0 , \\ m \ddot{y}_2 + \gamma \dot{y}_2 + (k + k_{12}) y_2 - k_{12} y_1 &= 0 . \end{aligned} \tag{18}$$

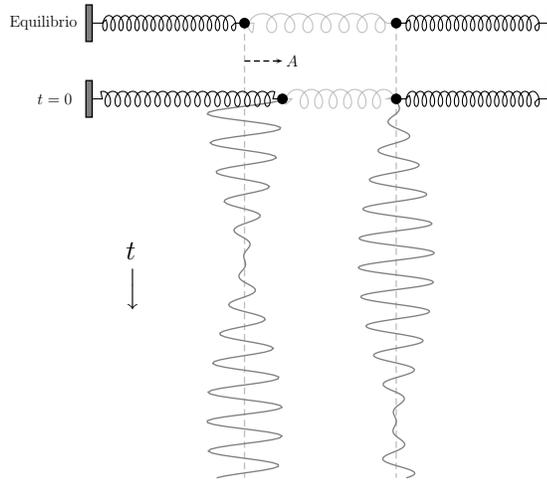


Figura 5: Acoplamiento débil.

Introducimos $2\Gamma \equiv \frac{\gamma}{m}$ y reescribimos las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + 2\Gamma \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Observando la ecuación anterior constatamos que el término de amortiguamiento que hemos añadido no invalida la estrategia seguida inicialmente para abordar el problema de los dos osciladores acoplados, puesto que no introduce nuevos términos de acoplamiento en las ecuaciones de movimiento; dicho de otra forma, en la escritura matricial de las ecuaciones – ec. (19) –, el término que involucra Γ es proporcional a la identidad. Multiplicamos ec. (19) por $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e introducimos $\vec{\eta} = S\vec{y}$ para obtener

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + 2\Gamma \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1 + 2\Gamma \dot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + 2\Gamma \dot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0 \end{cases}. \quad (20)$$

Nos encontramos con la ecuación de un oscilador armónico amortiguado *para cada modo normal* η_i ; la constante de amortiguamiento 2Γ es común a ambos porque hemos introducido el mismo término de amortiguamiento para los grados de libertad y_1 e y_2 . Según tratamos en su momento, el tipo de solución de

$$\ddot{\eta}_j + 2\Gamma \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0$$

depende de la relación entre Γ y ω_j ,

- con $\omega_j > \Gamma$ tenemos un movimiento oscilatorio amortiguado con frecuencia $\sqrt{\omega_j^2 - \Gamma^2}$,
- con $\omega_j = \Gamma$ tenemos amortiguamiento crítico, el sistema no oscila, tiende al equilibrio,

- con $\omega_j < \Gamma$ tenemos sobreamortiguamiento, el sistema no oscila, tiende al equilibrio.

Ahora bien, estamos considerando un sistema con *dos* modos normales, la distinción se aplicará para cada uno de ellos; según hemos etiquetado las frecuencias propias asociadas a los modos, $\omega_1 > \omega_2$, y tendremos que distinguir varias situaciones:

- $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$, solución oscilatoria para ambos modos,
- $\Gamma = \omega_2 < \omega_1$, solución oscilatoria para el modo η_1 (recordemos, el modo antisimétrico), solución con amortiguamiento crítico para el modo η_2 (simétrico),
- $\omega_2 < \Gamma < \omega_1$, solución oscilatoria para el modo η_1 , solución sobreamortiguada para el modo η_2 ,
- $\omega_2 < \Gamma = \omega_1$, solución con amortiguamiento crítico para el modo η_1 , solución sobreamortiguada para el modo η_2 ,
- $\omega_2 < \omega_1 < \Gamma$, solución sobreamortiguada para ambos modos.

¿Cómo se escribirán entonces las soluciones $y_i(t)$? Las soluciones $y_i(t)$ se obtienen siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado 1.2 (saltando directamente al paso (1)):

- (1) – resolvemos $\eta_1(t), \eta_2(t)$ en términos de las condiciones iniciales $\{\eta_1(0), \dot{\eta}_1(0)\}, \{\eta_2(0), \dot{\eta}_2(0)\}$;
- (2) – expresamos $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en términos de los modos normales $\eta_1(t), \eta_2(t)$, con $\vec{y} = S^{-1}\vec{\eta}$;
- (3) – expresamos las condiciones iniciales para los modos normales $\{\eta_1(0), \dot{\eta}_1(0)\}, \{\eta_2(0), \dot{\eta}_2(0)\}$ en términos de las condiciones iniciales para los grados de libertad de partida, $\{y_1(0), y_2(0), \dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)\}$, con $\vec{\eta} = S\vec{y}$;
- (4) – sustituimos las condiciones iniciales del punto (3) en las trayectorias $y_i(t)$ del punto (2).

La única dificultad que surge es el tener que considerar tres tipos distintos de solución para cada modo normal en el paso (1) (aunque, teniendo en cuenta que $\omega_1 > \omega_2$, ya hemos visto que tan solo hay *cinco* situaciones diferentes), según $\omega_i > \Gamma$, $\omega_i = \Gamma$ o $\omega_i < \Gamma$: al seguir los pasos anteriores, esto tan solo se manifestará en el paso (1). A modo de ejemplo, veamos de forma detallada $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para dos circunstancias diferentes, cuando $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$ (solución oscilatoria para ambos modos normales) y cuando $\omega_2 < \Gamma < \omega_1$ (solución oscilatoria para el modo η_1 , solución sobreamortiguada para el modo η_2).

1.5.1. Ejemplos

Ejemplo: $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$

(1) – Con $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$ las soluciones $\eta_i(t)$ a considerar son

$$\begin{aligned}\eta_1(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right], \\ \eta_2(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\eta_2(0) \cos(\hat{\omega}_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\hat{\omega}_2} \sin(\hat{\omega}_2 t) \right],\end{aligned}\quad (21)$$

con $\hat{\omega}_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \Gamma^2}$ y $\hat{\omega}_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \Gamma^2}$.

(2) – Llevamos las expresiones anteriores a

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1(t) + \eta_2(t)), \quad y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_2(t) - \eta_1(t)), \\ y_1(t) &= \frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right] \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) \cos(\hat{\omega}_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\hat{\omega}_2} \sin(\hat{\omega}_2 t) \right], \\ y_2(t) &= -\frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right] \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) \cos(\hat{\omega}_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\hat{\omega}_2} \sin(\hat{\omega}_2 t) \right].\end{aligned}\quad (22)$$

(3) – Tenemos

$$\eta_1(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{\sqrt{2}}, \quad \eta_2(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{\sqrt{2}}.$$

(4) – Sustituimos las expresiones del punto (3) en el punto (2),

$$\begin{aligned}y_1(t) &= e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_1 t) \\ &+ e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \\ &+ e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) + y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_2 t) \\ &+ e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{2\hat{\omega}_2} \sin(\hat{\omega}_2 t),\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}y_2(t) &= -e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_1 t) \\ &- e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \\ &+ e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) + y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_2 t) \\ &+ e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{2\hat{\omega}_2} \sin(\hat{\omega}_2 t),\end{aligned}\quad (24)$$

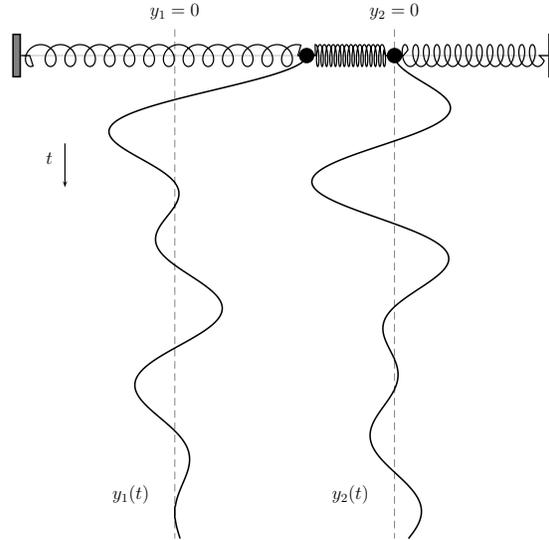


Figura 6: Dos osciladores acoplados con amortiguamiento, $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$, y condiciones iniciales $y_1(0) \neq 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.

La figura 6 ilustra la evolución del sistema dadas unas condiciones iniciales $y_1(0) \neq 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.

Ejemplo: $\omega_2 < \Gamma < \omega_1$

(1) – Con $\omega_2 < \Gamma < \omega_1$ las soluciones $\eta_i(t)$ a considerar son

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right], \\ \eta_2(t) &= \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left[\eta_2(0) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t} \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{2} \left[\eta_2(0) - \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t}. \end{aligned} \quad (25)$$

(2) – Sustituimos en $y_1(t)$, $y_2(t)$,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right] \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t} \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) - \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= -\frac{e^{-\Gamma t}}{\sqrt{2}} \left[\eta_1(0) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \frac{\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0)}{\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \right] \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) + \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t} \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{2}} \left[\eta_2(0) - \frac{\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t}. \quad (27)
\end{aligned}$$

(3) – Una vez más,

$$\eta_1(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{\sqrt{2}}, \quad \eta_2(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{\sqrt{2}}.$$

(4) – Sustituimos las expresiones del punto (3) en el punto (2),

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_1 t) \quad (28) \\
&+ e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \left[y_1(0) + y_2(0) + \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t} \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \left[y_1(0) + y_2(0) - \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= -e^{-\Gamma t} \frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \cos(\hat{\omega}_1 t) \quad (29) \\
&- e^{-\Gamma t} \frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \sin(\hat{\omega}_1 t) \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \left[y_1(0) + y_2(0) + \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t} \\
&+ \frac{e^{-\Gamma t}}{4} \left[y_1(0) + y_2(0) - \frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2}} \right] e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_2^2} t},
\end{aligned}$$

La figura 7 ilustra la evolución del sistema dadas unas condiciones iniciales $y_1(0) \neq 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.

1.6. Movimiento forzado

En el apartado anterior hemos analizado el comportamiento del sistema formado por dos osciladores acoplados al incluir términos de amortiguamiento. Para completar el estudio del sistema, de forma análoga a cómo fuimos añadiendo ingredientes al estudio de un oscilador armónico simple, en este apartado vamos a analizar el comportamiento del sistema al incluir el efecto de una fuerza externa. Consideremos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + 2\Gamma \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k+k_{12}}{m} & -\frac{k_{12}}{m} \\ -\frac{k_{12}}{m} & \frac{k+k_{12}}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

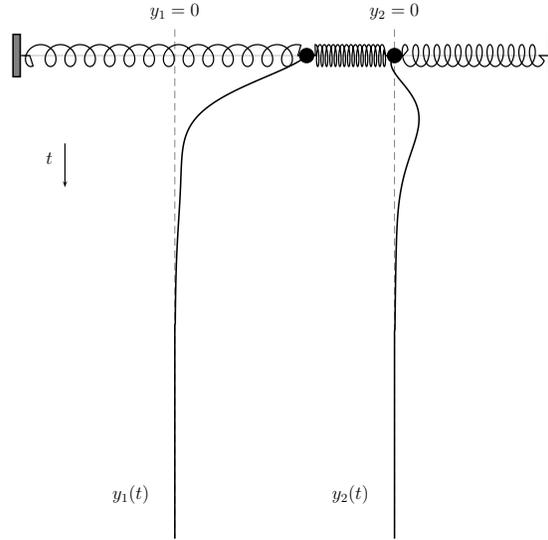


Figura 7: Dos osciladores acoplados con amortiguamiento, $\omega_2 < \Gamma < \omega_1$, y condiciones iniciales $y_1(0) \neq 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$.

Describen el sistema formado por dos osciladores acoplados, con amortiguamiento, en el cual el *primer* grado de libertad está sometido a la acción de una *fuerza externa* armónica $F_0 \cos(\omega_F t)$. ¿Qué ocurrirá al reescribir la ecuación (30) en términos de los modos normales η_1 y η_2 ? En términos de los modos normales del sistema ya hemos estudiado en los apartados precedentes qué ocurre con el miembro izquierdo de (30): resultan dos ecuaciones independientes que describen sendos osciladores armónicos con amortiguamiento, una por modo normal. La cuestión se reduce por tanto a ver qué ocurre con el miembro derecho, $\begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Al aplicar el cambio de base S ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{F_0}{\sqrt{2} m} \cos(\omega_F t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

con lo que las ecuaciones de movimiento para el sistema pasan a ser

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + 2\Gamma \dot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 &= \frac{F_0}{\sqrt{2} m} \cos(\omega_F t), \\ \ddot{\eta}_2 + 2\Gamma \dot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 &= \frac{F_0}{\sqrt{2} m} \cos(\omega_F t). \end{aligned} \quad (32)$$

Al forzar el movimiento de uno de los grados de libertad, y_1 , nos encontramos con que, en términos de los modos normales, tanto η_1 como η_2 se encuentran forzados por una fuerza externa (armónica) de idéntica frecuencia angular ω_F . Llegados a este punto, recordamos el tratamiento desarrollado para estudiar las oscilaciones forzadas de un único grado de libertad x :

- La trayectoria del sistema $x(t)$ tiene dos contribuciones, $x(t) = x_{[h]}(t) + x_{[p]}(t)$, con $x_{[h]}(t)$ el término transitorio, solución de la ecuación diferen-

cial homogénea, y $x_{[p]}(t)$ el término estacionario, solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea.

- $x_{[h]}(t)$ decrece típicamente como $e^{-\Gamma t}$ de modo que para tiempos superiores a $\frac{1}{\Gamma}$ podemos ignorar completamente el término transitorio.
- $x_{[p]}(t)$ se puede expresar en forma armónica $a(\omega_F) \cos(\omega_F t - \delta(\omega_F))$, con la misma frecuencia angular que la fuerza externa, con una amplitud $a(\omega_F)$ y un desfase $\delta(\omega_F)$ que dependen de ω_F . Recordemos, en particular, que en determinadas condiciones se da el fenómeno de resonancia: la amplitud de la solución estacionaria es “grande”. Este fenómeno se da, cuando $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$, para una frecuencia externa $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$ (siendo ω_0 la frecuencia natural de oscilación de x).

¿Qué ocurre al aplicar todo ello al sistema con dos grados de libertad acoplados forzados según ec. (32)? La estrategia general no se ve fundamentalmente alterada, seguiremos los mismos pasos que anteriormente, modificando, naturalmente, las soluciones $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ a considerar, que pasarán a tener una parte transitoria y una estacionaria. Explícitamente,

- (1) – las soluciones $\eta_j(t)$, $j = 1, 2$, a considerar tienen dos partes,

$$\eta_j(t) = \eta_{j[h]}(t) + \eta_{j[p]}(t) .$$

La solución estacionaria $\eta_{j[p]}(t)$ es única (para cada modo normal),

$$\eta_{j[p]}(t) = a_j \cos(\omega_F t - \delta_j) = a_j^{(e)} \cos(\omega_F t) + a_j^{(i)} \sin(\omega_F t) , \quad (33)$$

con

$$a_j = \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2}} , \quad \delta_j = \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma \omega_F}{\omega_j^2 - \omega_F^2} \right] , \quad (34)$$

y

$$a_j^{(e)} = \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{\omega_j^2 - \omega_F^2}{(\omega_j^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} ,$$

$$a_j^{(i)} = \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{2\Gamma \omega_F}{(\omega_j^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} .$$

La solución transitoria depende, como se ha recordado al introducir los términos de amortiguamiento, de la relación entre cada ω_j y Γ . Cabe señalar que las condiciones iniciales $\{\eta_j(0), \dot{\eta}_j(0)\}$ tan solo aparecen en la solución transitoria. Con respecto al estudio del caso amortiguado sin fuerza externa, como se hizo en el estudio del oscilador forzado con un solo grado de libertad, bastará la siguiente sustitución en las condiciones iniciales de la solución que teníamos sin fuerza externa, que ahora es sencillamente el término transitorio, $\eta_j(0) \mapsto \eta_j(0) - \eta_{j[p]}(0)$, para escribir $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$ al completo.

- (2) – Expresamos una vez más $y_1(t)$ e $y_2(t)$ en términos de $\eta_1(t)$ y $\eta_2(t)$.

- (3) – Expresamos las condiciones iniciales para los modos normales $\{\eta_1(0), \dot{\eta}_1(0)\}$, $\{\eta_2(0), \dot{\eta}_2(0)\}$ en términos de las condiciones iniciales para los grados de libertad de partida, $\{y_1(0), y_2(0), \dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)\}$, según $\vec{\eta} = S\vec{y}$.
- (4) – Sustituimos las condiciones iniciales del punto (3) en las trayectoria $y_i(t)$ del punto (2).

De los distintos pasos a seguir, apenas ha cambiado el primero, que pasa ahora a recoger el carácter forzado de la oscilaciones de los modos normales. Del mismo modo que con un grado de libertad nos encontramos con una amplitud y un desfase dependientes de la frecuencia externa ω_F , que pueden llegar a manifestar el fenómeno de resonancia, ahora nos encontramos con que lo mismo puede ocurrir para cada uno de los modos normales. Cuando hay resonancia en uno de los modos, es una determinada combinación de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ la que se ve “amplificada”.

1.6.1. Ejemplos

A modo de ilustración retomamos paso a paso el ejemplo del apartado anterior con $\Gamma < \omega_2 < \omega_1$.

- (1) – Modos normales $\eta_j(t)$ (con $\hat{\omega}_j \equiv \sqrt{\omega_j^2 - \Gamma^2}$),

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\eta_1(0) - \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{\omega_1^2 - \omega_F^2}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \cos(\hat{\omega}_1 t) \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{\hat{\omega}_1} \left[\dot{\eta}_1(0) + \Gamma \eta_1(0) - \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{2\Gamma(\omega_1^2 + \omega_F^2)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \sin(\hat{\omega}_1 t) \\ &+ \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\eta_2(0) - \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{\omega_2^2 - \omega_F^2}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \cos(\hat{\omega}_2 t) \\ &+ \frac{e^{-\Gamma t}}{\hat{\omega}_2} \left[\dot{\eta}_2(0) + \Gamma \eta_2(0) - \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{2\Gamma(\omega_2^2 + \omega_F^2)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \sin(\hat{\omega}_2 t) \\ &+ \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \frac{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

- (2) – Una vez más,

$$y_1(t) = \frac{\eta_1(t) + \eta_2(t)}{\sqrt{2}}, \quad y_2(t) = \frac{\eta_2(t) - \eta_1(t)}{\sqrt{2}},$$

(pero en este caso nos ahorramos la reescritura intermedia explícita de $y_1(t)$ e $y_2(t)$).

- (3) – Otra vez más,

$$\eta_1(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{\sqrt{2}}, \quad \eta_2(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{\sqrt{2}}.$$

(4) – Reuniendo todo lo anterior,

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{-\Gamma t} \left[\frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \right] \cos(\hat{\omega}_1 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \left[\frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \right] \sin(\hat{\omega}_1 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \left[\frac{y_1(0) + y_2(0)}{2} \right] \cos(\hat{\omega}_2 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \left[\frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{2\hat{\omega}_2} \right] \sin(\hat{\omega}_2 t) \\
&- e^{-\Gamma t} \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_1^2 - \omega_F^2) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \Gamma(\omega_1^2 + \omega_F^2)\hat{\omega}_1^{-1} \sin(\hat{\omega}_1 t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&- e^{-\Gamma t} \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_2^2 - \omega_F^2) \cos(\hat{\omega}_2 t) + \Gamma(\omega_2^2 + \omega_F^2)\hat{\omega}_2^{-1} \sin(\hat{\omega}_2 t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&+ \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_1^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&+ \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_2^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right]. \quad (37)
\end{aligned}$$

De la extensa expresión anterior de $y_1(t)$ resultan de especial interés los términos que corresponden al régimen estacionario, i.e. los que aparecen en las dos últimas líneas y carecen del factor $e^{-\Gamma t}$. Tenemos dos contribuciones, una asociada a cada modo normal, con la dependencia en ω_F típica de una oscilación forzada. Por completitud, escribimos también la evolución de $y_2(t)$.

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= -e^{-\Gamma t} \left[\frac{y_1(0) - y_2(0)}{2} \right] \cos(\hat{\omega}_1 t) \\
&- e^{-\Gamma t} \left[\frac{\dot{y}_1(0) - \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) - y_2(0))}{2\hat{\omega}_1} \right] \sin(\hat{\omega}_1 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \left[\frac{y_1(0) + y_2(0)}{2} \right] \cos(\hat{\omega}_2 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \left[\frac{\dot{y}_1(0) + \dot{y}_2(0) + \Gamma(y_1(0) + y_2(0))}{2\hat{\omega}_2} \right] \sin(\hat{\omega}_2 t) \\
&+ e^{-\Gamma t} \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_1^2 - \omega_F^2) \cos(\hat{\omega}_1 t) + \Gamma(\omega_1^2 + \omega_F^2)\hat{\omega}_1^{-1} \sin(\hat{\omega}_1 t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&- e^{-\Gamma t} \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_2^2 - \omega_F^2) \cos(\hat{\omega}_2 t) + \Gamma(\omega_2^2 + \omega_F^2)\hat{\omega}_2^{-1} \sin(\hat{\omega}_2 t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&- \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_1^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right] \\
&+ \frac{F_0}{2m} \left[\frac{(\omega_2^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} \right]. \quad (38)
\end{aligned}$$

Las figuras 8(a)–8(d) ilustran el comportamiento del sistema descrito por las ecuaciones (37) y (38) para distintos valores de la frecuencia de la fuerza externa:

$\omega_F^2 = \omega_1^2 - 2\Gamma^2$ (frecuencia de resonancia del modo 1), $\omega_F^2 = \omega_2^2 - 2\Gamma^2$ (frecuencia de resonancia del modo 2), $\omega_2^2 < \omega_F^2 < \omega_1^2 - 2\Gamma^2$ (frecuencia intermedia), $\omega_F > \omega_1$ (frecuencia superior a la natural de ambos modos). Cabe subrayar que en los dos primeros casos, con ω_F la frecuencia de resonancia de uno de los modos, una vez llegados al régimen estacionario, el movimiento del sistema corresponde muy aproximadamente al del modo asociado: antisimétrico en 8(a), simétrico en 8(b). En los siguientes casos, con ω_F “lejos” de las frecuencias de resonancia de uno y otro modo normal, observamos – como cabe esperar – que la amplitud de las oscilaciones es netamente inferior y la forma del movimiento no se asemeja a ninguno de los modos. Para ilustrar ambos aspectos representamos en la figura 9 las amplitudes de las soluciones estacionarias de ambos modos y el valor de la frecuencia ω_F de cada uno de los ejemplos de la figura 8.

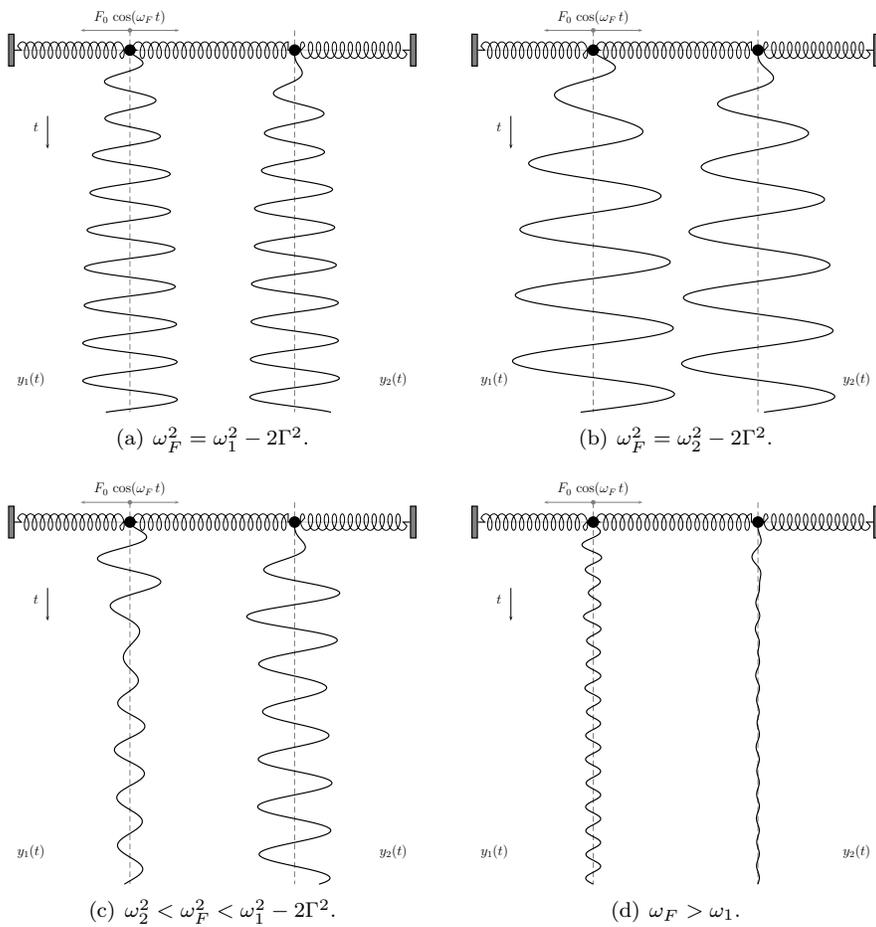


Figura 8: Movimiento forzado de dos osciladores acoplados.

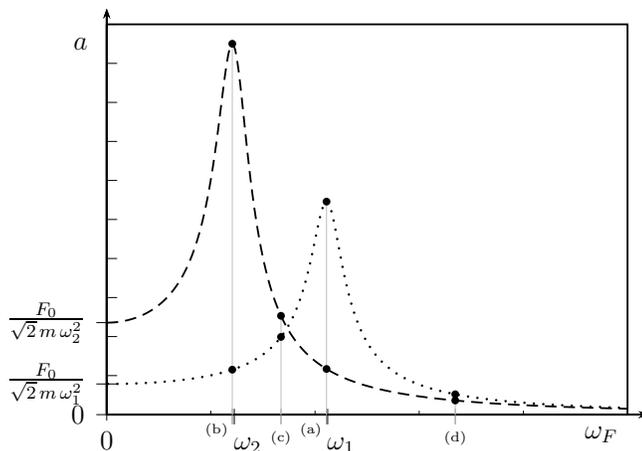


Figura 9: Amplitudes de las soluciones estacionarias asociadas a los dos modos normales, ecuaciones (32) y (34).

2. Teoría general

2.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento

Tras el estudio del sistema formado por dos osciladores acoplados, abordamos ahora el análisis *general* de las oscilaciones acopladas. Consideremos un sistema con n grados de libertad \hat{q}_i , $i = 1, \dots, n$. Está en equilibrio estable para $\hat{q}_j = q_j^0$: analizaremos las oscilaciones del sistema alrededor de ese equilibrio. Separemos en primer lugar las coordenadas \hat{q}_i en valores en el equilibrio q_i^0 y desplazamientos con respecto a los mismos q_i :

$$\hat{q}_i = q_i^0 + q_i .$$

La energía potencial del sistema es $\mathcal{V}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n)$; desarrollando¹ alrededor del punto de equilibrio q_i^0 ,

$$\mathcal{V}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n) = \mathcal{V}(q_1^0, \dots, q_n^0) + q_i \left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \hat{q}_i} \right|_{\vec{\hat{q}}=\vec{q}^0} + \frac{1}{2} q_i q_j \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \hat{q}_i \partial \hat{q}_j} \right|_{\vec{\hat{q}}=\vec{q}^0} + \dots \quad (39)$$

Ahora bien, siendo q_i^0 una posición de equilibrio, $\left. \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \hat{q}_i} \right|_{\vec{\hat{q}}=\vec{q}^0} = 0$; si además el equilibrio es estable, el determinante de la matriz \mathbf{V} de elementos

$$V_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \hat{q}_i \partial \hat{q}_j} \right|_{\vec{\hat{q}}=\vec{q}^0} ,$$

es positivo y la energía potencial resulta

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j . \quad (40)$$

¹Para no sobrecargar las siguientes expresiones omitimos en lo sucesivo los sumatorios necesarios en los índices repetidos i, j , que se sobrentienden a menos que se especifique lo contrario.

\mathbf{V} es *simétrica* y *positiva*². En cuanto a la energía cinética, consideramos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \dot{\hat{q}}_1, \dots, \dot{\hat{q}}_n) &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_{ij}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \dot{\hat{q}}_1, \dots, \dot{\hat{q}}_n) \dot{\hat{q}}_i \dot{\hat{q}}_j = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_{ij}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \dot{\hat{q}}_1, \dots, \dot{\hat{q}}_n) \dot{q}_i \dot{q}_j . \end{aligned}$$

Desarrollando alrededor del equilibrio $\vec{q} = \vec{q}^0$, $\dot{\vec{q}} = \vec{0}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{ij}(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n, \dot{\hat{q}}_1, \dots, \dot{\hat{q}}_n) &= \\ &= \mathcal{T}_{ij}(q_1^0, \dots, q_n^0, 0, \dots, 0) + q_k \left. \frac{\partial \mathcal{T}_{ij}}{\partial \dot{q}_k} \right|_{\vec{q}=\vec{q}^0, \dot{\vec{q}}=\vec{0}} + \dots \end{aligned}$$

Despreciando términos $\dot{q}_i \dot{q}_j q_k$ en \mathcal{T} (y órdenes superiores),

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j , \quad (41)$$

siendo \mathbf{T} , matriz de elementos $T_{ij} = \mathcal{T}_{ij}(q_1^0, \dots, q_n^0)$, también *simétrica* y *positiva*³. Con ec. (40) y ec. (41), la lagrangiana \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j . \quad (42)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento acudiremos a las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$ con⁴

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} T_{ij} (\delta_{ik} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jk}) = \frac{1}{2} (T_{kj} \dot{q}_j + T_{ik} \dot{q}_i) = T_{kj} \dot{q}_j , \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_k} = -\frac{1}{2} V_{ij} (\delta_{ik} q_j + q_i \delta_{jk}) = -\frac{1}{2} (V_{kj} q_j + V_{ik} q_i) = -V_{kj} q_j , \end{aligned}$$

donde hemos empleado la simetría de T_{ij} y V_{ij} . Tendremos por tanto las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\boxed{T_{ij} \ddot{q}_j + V_{ij} q_j = 0 \Leftrightarrow \mathbf{T} \ddot{\vec{q}} + \mathbf{V} \vec{q} = \vec{0}} , \quad (43)$$

con \mathbf{T} y \mathbf{V} las matrices simétricas ya definidas y $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Las ecuaciones (43) son un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, de segundo orden, con coeficientes constantes y *acopladas*.

²Por *positiva* hacemos referencia a que sea de determinante positivo.

³Si T_{ij} no fuese simétrica, siempre podríamos escribir $T_{ij} = T_{ij}^S + T_{ij}^A$ con $T_{ij}^S = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ y $T_{ij}^A = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$, i.e. siempre podríamos escribir T_{ij} como combinación de un término simétrico y de uno antisimétrico. En $T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ la contribución de $T_{ij}^A \dot{q}_i \dot{q}_j$ es *nula*, quedaría únicamente $\mathcal{T} = \frac{1}{2} T_{ij}^S \dot{q}_i \dot{q}_j$. Por tanto, de modo absolutamente general, consideramos que \mathbf{T} es simétrica; que sea positiva corresponde, como con \mathbf{V} , a que su determinante sea positivo.

⁴Utilizamos $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ dado que las coordenadas q son independientes.

2.2. Ecuaciones de movimiento desacopladas

Una vez obtenidas las ecuaciones de movimiento acopladas de ec. (43), el primer paso para encontrar soluciones de las mismas es encontrar las ecuaciones *desacopladas* equivalentes (i.e., que contienen la misma información sobre el sistema estudiado). Reescribamos primero ec. (43) multiplicando por \mathbf{T}^{-1} (por la izquierda),

$$\text{ec. (43)} \Leftrightarrow \ddot{\vec{q}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} \vec{q} = \vec{0}. \quad (44)$$

Queremos encontrar una matriz A invertible tal que

$$A \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} A^{-1} = \mathbf{W}_D, \text{ con } \mathbf{W}_D \text{ diagonal,}$$

de modo que las ecuaciones de movimiento se reescriban

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} \vec{q} = \ddot{\vec{q}} + A^{-1} \mathbf{W}_D A \vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow A \ddot{\vec{q}} + \mathbf{W}_D A \vec{q} = \vec{0}.$$

Bastará entonces introducir $\vec{\eta} = A \vec{q}$ para tener las ecuaciones *desacopladas*

$$\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{W}_D \vec{\eta} = \vec{0}.$$

Si $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ es simétrica, el procedimiento es conceptualmente sencillo (aunque pueda resultar laborioso según el número de grados de libertad del sistema):

- (1) se determinan los valores propios y los vectores propios de $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$,
- (2) se construye la matriz A que tiene por filas los vectores propios de $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$; si estos están adecuadamente normalizados (a uno), $A^{-1} = A^T$ y la transformación de coordenadas mediante la matriz ortogonal A desacopla las ecuaciones de movimiento.

Hemos encontrado precisamente esta situación en el apartado anterior con el estudio de los dos osciladores acoplados.

Ahora bien, aunque \mathbf{T} y \mathbf{V} son simétricas, $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ *no lo es en general* y tenemos que esforzarnos un poco más para construir A . La estrategia a seguir consistirá en convertir la diagonalización de $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$, *no simétrica*, en *dos diagonalizaciones* de matrices *simétricas*. Antes de exponer el paso clave, conviene señalar que *sí* podemos diagonalizar \mathbf{T} (de hecho lo necesitamos para obtener \mathbf{T}^{-1}), mediante una transformación ortogonal S ,

$$S \mathbf{T} S^{-1} = \mathbf{T}_D, \quad S^{-1} = S^T.$$

Esto nos permite introducir⁵

$$\mathbf{T}^{1/2} = S^{-1} \mathbf{T}_D^{1/2} S,$$

con $\mathbf{T}_D^{1/2}$ la matriz diagonal cuyos elementos son las raíces cuadradas de los valores propios de \mathbf{T} . Esto nos permite reescribir

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1/2} (\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2}) \mathbf{T}^{1/2},$$

de modo que $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ queda escrita como un producto de matrices simétricas ($\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2}$ y $\mathbf{T}^{\pm 1/2}$) que podemos diagonalizar ortogonalmente. Ya hemos

⁵Esto no es más que un caso particular de la definición general de una función de una matriz en términos de la función de sus valores propios y de la matriz que la diagonaliza.

introducido S tal que $S \mathbf{T} S^{-1} = \mathbf{T}_D$, debemos ahora considerar la diagonalización de $\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2} \equiv \mathbf{W}$. \mathbf{W} es simétrica y positiva; si U es la matriz ortogonal que la diagonaliza, i.e.

$$U \mathbf{W} U^{-1} = \mathbf{W}_D, \quad U^{-1} = U^T, \quad (45)$$

entonces podemos reescribir⁶

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1/2} U^T \mathbf{W}_D U \mathbf{T}^{1/2} = A^{-1} \mathbf{W}_D A, \quad (46)$$

con $A = U \mathbf{T}^{1/2}$, $A^{-1} = \mathbf{T}^{-1/2} U^T$. Es importante subrayar que:

- (1) *A no es ortogonal* (tenemos $A A^T = U \mathbf{T} U^T$ y $A^T A = \mathbf{T}$),
- (2) para construir A son necesarias la diagonalización de \mathbf{T} (para obtener $\mathbf{T}^{1/2}$) y de \mathbf{W} (para obtener U).

Llegados a este punto, las ecuaciones acopladas ec. (44) se reescriben, como pretendíamos,

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} \vec{q} = \ddot{\vec{q}} + A^{-1} \mathbf{W}_D A \vec{q} = \vec{0}, \quad (47)$$

y podemos pasar a resolverlas.

2.3. Modos normales y soluciones

Con las ecuaciones de movimiento de la ec. (44) reescritas según la ec. (47), obtener las soluciones resulta sencillo. Multiplicando por la izquierda por A ,

$$A \ddot{\vec{q}} + \mathbf{W}_D A \vec{q} = \vec{0}.$$

Introducimos unas nuevas variables $\vec{\eta}(t) = A \vec{q}(t)$ y tenemos las ecuaciones de movimiento desacopladas

$$\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{W}_D \vec{\eta} = \vec{0}, \quad (48)$$

con $\mathbf{W}_D = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$. Las cantidades $\eta_j(t)$ son las combinaciones de coordenadas iniciales $q_k(t)$ que tienen una evolución temporal *independiente* (i.e. desacoplada): son los *modos normales* del sistema. Las soluciones armónicas $\eta_j(t)$ de ec. (48) son las habituales,

$$\boxed{\eta_j(t) = \eta_j(0) \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\eta}_j(0)}{\omega_j} \sin(\omega_j t)}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (49)$$

Cuando las condiciones iniciales sean $\eta_i(0) = \dot{\eta}_i(0) = 0$, salvo para un determinado modo k , es decir, cuando tan solo se excite *uno* de los modos normales, para todo tiempo t seguiremos teniendo $\eta_i(t) = \dot{\eta}_i(t) = 0, \forall i \neq k$, mientras $\eta_k(t)$ evoluciona de acuerdo con ec. (49).

⁶ $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ y $\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2}$ tienen idénticos valores propios puesto que $\det(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{1}) = \det(\mathbf{T}^{-1/2} (\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2} - \omega^2 \mathbf{1}) \mathbf{T}^{1/2}) = \det(\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2} - \omega^2 \mathbf{1})$, i.e. tienen el mismo polinomio característico.

Para obtener las soluciones $\vec{q}(t)$, recordamos que $\vec{q} = A^{-1}\vec{\eta}$ y $\dot{\vec{q}} = A\dot{\vec{q}}$ para expresar⁷ las soluciones $q_j(t)$ en términos de condiciones iniciales $\vec{q}(0)$, $\dot{\vec{q}}(0)$:

$$\begin{aligned}
 q_j(t) &= \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{jk} \eta_k(t) = \\
 &\sum_{k=1}^n (A^{-1})_{jk} \eta_k(0) \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1}^n (A^{-1})_{jk} \frac{\dot{\eta}_k(0)}{\omega_k} \sin(\omega_k t) = \\
 &\sum_{k,\ell=1}^n (A^{-1})_{jk} A_{k\ell} q_\ell(0) \cos(\omega_k t) + \sum_{k,\ell=1}^n (A^{-1})_{jk} A_{k\ell} \frac{\dot{q}_\ell(0)}{\omega_k} \sin(\omega_k t) = \\
 &\sum_{k,\ell=1}^n (A^{-1})_{jk} \cos(\omega_k t) A_{k\ell} q_\ell(0) + \sum_{k,\ell=1}^n (A^{-1})_{jk} \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} A_{k\ell} \dot{q}_\ell(0). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (50) son la solución del problema, la trayectoria $q_j(t)$ de todos los grados de libertad acoplados.

Podemos reescribir (50) de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{q}(t) = A^{-1} \cos(\Omega t) A \vec{q}(0) + A^{-1} \Omega^{-1} \sin(\Omega t) A \dot{\vec{q}}(0)}, \quad (51)$$

con

$$\Omega \equiv \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n) = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \omega_n \end{pmatrix},$$

y, por tanto,

$$f(\Omega) \equiv \text{diag}(f(\omega_1), \dots, f(\omega_n)) = \begin{pmatrix} f(\omega_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & f(\omega_n) \end{pmatrix}.$$

Podemos “leer” el miembro derecho de ec. (51) de derecha a izquierda.

- A lleva las condiciones iniciales $\vec{q}(0)$, $\dot{\vec{q}}(0)$ a la base $\vec{\eta}$ en la evolución temporal es sencilla.
- $\cos(\Omega t)$ y $\Omega^{-1} \sin(\Omega t)$ introducen la evolución temporal, en esa base, de $A\vec{q}(0)$, $A\dot{\vec{q}}(0)$.
- A^{-1} devuelve el estado del sistema en la base $\vec{\eta}$ a tiempo t , $\cos(\Omega t) A \vec{q}(0) + \Omega^{-1} \sin(\Omega t) A \dot{\vec{q}}(0)$, a la base \vec{q} .

⁷En este caso escribimos explícitamente los sumatorios en índices mudos.

2.4. Lagrangiana y modos normales

Armados con $\vec{\eta} = A\vec{q}$ podemos regresar a la lagrangiana de ec. (42) y reexpresarla en términos de $\vec{\eta}$. Para evitar la proliferación descontrolada de subíndices mudos emplearemos notación matricial, empezando por

$$\text{ec. (42)} \Leftrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \mathbf{T} \dot{\vec{q}} - \frac{1}{2} \vec{q}^T \mathbf{V} \vec{q}.$$

Introducimos $\vec{q} = A^{-1} \vec{\eta}$ para obtener

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T (A^{-1})^T \mathbf{T} A^{-1} \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^T (A^{-1})^T \mathbf{V} A^{-1} \vec{\eta}.$$

Mediante las propiedades de las matrices A , \mathbf{T} y \mathbf{V} podremos simplificar notablemente \mathcal{L} . Recordemos primero que

$$A^T A = \mathbf{T}, \quad \text{con lo que } \mathbf{T} A^{-1} = A^T,$$

que simplificará el primer término puesto que $(A^{-1})^T \mathbf{T} A^{-1} = (A^{-1})^T A^T = \mathbf{1}$. Para afrontar el término del potencial, recordemos

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} = A^{-1} \mathbf{W}_D A, \quad \text{con lo que } \mathbf{V} A^{-1} = \mathbf{T} A^{-1} \mathbf{W}_D = A^T \mathbf{W}_D.$$

Con ello, en el segundo término $(A^{-1})^T \mathbf{V} A^{-1} = (A^{-1})^T A^T \mathbf{W}_D = \mathbf{W}_D$. La lagrangiana se ha reducido a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^T \mathbf{W}_D \vec{\eta}. \quad (52)$$

Reintroduciendo los índices,

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\dot{\eta}_j^2 - \omega_j^2 \eta_j^2)}. \quad (53)$$

La lagrangiana anterior, en términos de los modos normales, resume perfectamente como el cambio de coordenadas a modos normales convierte el estudio del sistema con n grados de libertad acoplados en el estudio de n grados de libertad independientes (y un cambio de base $\vec{q} \rightarrow \vec{\eta}$, por supuesto): es sencillamente la suma de n lagrangianas individuales, cada una asociada a un oscilador armónico, un modo normal.

Para concluir este apartado, reflexionemos sobre lo siguiente: en la lagrangiana inicial, ec. (42), los grados de libertad q tienen las dimensiones que correspondan a su naturaleza (longitud, carga, corriente eléctrica, la que sea), y los elementos de las matrices \mathbf{T} y \mathbf{V} aquellas que dan dimensiones de energía a \mathcal{T} y \mathcal{V} . En un sistema como el del apartado 1, los grados de libertad tienen dimensiones $[y_j] = (\text{Longitud})$, los elementos de \mathbf{T} (simplemente las masas m) tienen dimensiones de (Masa) y los elementos de \mathbf{V} (las constantes k y k_{12}) dimensiones de (Masa) \times (Tiempo) $^{-2}$. En cambio en ec. (53) ha desaparecido cualquier parámetro dimensional, los modos normales tienen dimensiones de (Energía) $^{1/2} \times$ (Tiempo), es decir $[\eta_j] = (\text{Masa})^{1/2} \times (\text{Longitud})$. La matriz del cambio de base A no es, en general, adimensional (veremos un ejemplo en el apartado 3). El caso más amable en que $A = U$ es ortogonal ($\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ simétrica),

puede plantearnos alguna duda: si $U^{-1} = U^T$, debe ser adimensional, ¿cómo puede entonces un cambio de base adimensional hacer desaparecer constantes dimensionales de la lagrangiana? De hecho no lo hace: al haber llevado el problema de la diagonalización a una sola matriz simétrica $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$, “hemos” escondido la dimensionalidad de \mathbf{T} al haber escrito las ecuaciones de movimiento sin coeficientes dimensionales acompañando a $\ddot{\vec{q}}$, y en ese caso los modos normales tendrán dimensiones $[\eta_j] = (\text{Masa})^{1/2} \times (\text{Longitud}) \times [\mathbf{T}]^{-1/2}$ (véase el sistema del apartado 1, la matriz \mathbf{T} no es más que $m\mathbf{1}$ y los modos normales tienen simplemente dimensiones de (Longitud)).

2.5. Modos normales: interpretación y aclaraciones

Para concluir esta perspectiva general del análisis de las oscilaciones acopladas de un sistema, vamos a regresar a un detalle no trivial. En el estudio de un sistema de dos osciladores realizado en la sección 1, los desplazamientos x_1 y x_2 de las masas cuando se excita un único modo normal obedecen la proporcionalidad entre las componentes del correspondiente vector propio, viendo ec. (8),

$$\begin{aligned} \text{Modo antisimétrico: } \vec{v}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 : x_2 = 1 : -1, \\ \text{Modo simétrico: } \vec{v}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 : x_2 = 1 : 1. \end{aligned}$$

Con “leer” las componentes de los vectores propios ortogonales es inmediato reconocer la relación entre los desplazamientos x_i que caracteriza un modo normal, i.e. su “forma” en (x_1, x_2) . Cuando estudiamos un sistema que requiere la diagonalización de una matriz simétrica para obtener el cambio de base $\vec{q} \rightarrow \vec{\eta}$, este cambio de coordenadas se realiza mediante una matriz ortogonal. Es decir, si tenemos

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{W} \vec{q} = \vec{0} \quad \text{con } \mathbf{W} \text{ simétrica,}$$

$\mathbf{W} = U^T \mathbf{W}_D U$, y la matriz U , con filas iguales a los vectores propios (normalizados) de \mathbf{W} , proporciona el cambio de base $\vec{\eta} = U \vec{q}$. Si consideramos una perturbación del estado del sistema (unas condiciones iniciales) $\vec{q}(0)$, $\dot{\vec{q}}(0)$ de la siguiente forma particular

$$\begin{aligned} \vec{q}(0) &= a_0 \vec{v}_j, \quad \dot{\vec{q}}(0) = b_0 \vec{v}_j, \\ &(\vec{v}_j \text{ vector propio de } \mathbf{W} \text{ asociado al valor propio } \omega_j^2), \end{aligned}$$

es decir, una perturbación en la que la relación entre las distintas coordenadas q_k y velocidades iniciales \dot{q}_k es

$$q_1 : q_2 : \dots : q_n = \dot{q}_1 : \dot{q}_2 : \dots : \dot{q}_n = (\vec{v}_j)_1 : (\vec{v}_j)_2 : \dots : (\vec{v}_j)_n, \quad (54)$$

entonces, con el cambio de base $\vec{\eta} = U \vec{q}$,

$$\dot{\vec{\eta}}(0) = a_0 U \vec{v}_j, \quad \dot{\vec{\eta}}(0) = b_0 U \vec{v}_j.$$

Como las filas de U son los vectores propios normalizados,

$$(U \vec{v}_j)_i = \delta_{ij},$$

y tendremos automáticamente

$$\eta_k(0) = 0, \dot{\eta}_k(0) = 0, \quad \forall k \neq j; \quad \eta_j(0) = a_0, \dot{\eta}_j(0) = b_0,$$

con lo que

$$\eta_k(t) = 0, \quad \forall k \neq j; \quad \eta_j(t) = a_0 \cos(\omega_j t) + \frac{b_0}{\omega_j} \sin(\omega_j t).$$

En términos de $\vec{q}(t)$,

$$\vec{q}(t) = U^T \vec{\eta}(t) \Rightarrow q_k(t) = (U^T \vec{\eta}(t))_k,$$

con tan solo $\eta_j(t) \neq 0$ y los vectores \vec{v}_i como columnas de U^T ,

$$q_k(t) = (\vec{v}_j)_k \left[a_0 \cos(\omega_j t) + \frac{b_0}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right] \quad (\text{sin suma en } j),$$

con lo que

$$q_1(t) : q_2(t) : \dots : q_n(t) = \dot{q}_1(t) : \dot{q}_2(t) : \dots : \dot{q}_n(t) = (\vec{v}_j)_1 : (\vec{v}_j)_2 : \dots : (\vec{v}_j)_n, \quad (55)$$

y la proporcionalidad en las distintas perturbaciones recogida en ec. (54) *se mantiene para todo tiempo*, ec. (55); expresado de otro modo, si la *forma* de la perturbación es precisamente un modo normal, oscila “sin deformarse”, armónicamente.

Con la matriz U ortogonal el pequeño análisis anterior no ha revestido gran dificultad, como $U^T = U^{-1}$, tan solo nos hemos preocupado de un conjunto de vectores, vistos como filas de U o como columnas de U^T , para “leer” la forma del modo normal. ¿Qué ocurre en cambio en el caso general en que el cambio que lleva el sistema a la base de modos normales no es ortogonal (en la notación habitual de los anteriores apartados, A)? En otras palabras, conocida la matriz A , en el modo normal j , siguen los desplazamientos q_k la proporcionalidad dictada por ¿las filas de A ? ¿las columnas de A ? ¿tal vez filas o columnas de A^{-1} ? El caso anterior nos indica el camino: cuando en el sistema se excita un único modo normal, la amplitud de todos los demás permanece nula. Consideremos pues una perturbación

$$\vec{q}(0) = \alpha_0 \vec{z}, \quad \dot{\vec{z}}(0) = \beta_0 \vec{z},$$

en la que desplazamientos y velocidades guardan la proporción indicada por el vector \vec{z} , que queremos escoger para que en el sistema tan solo se excite un único modo normal. Con el cambio de base $\vec{\eta} = A\vec{q}$ esto nos lleva a

$$\vec{\eta}(0) = \alpha_0 A \vec{z}, \quad \dot{\vec{\eta}}(0) = \beta_0 A \vec{z}.$$

Si ahora queremos

$$\eta_k(0) = 0, \dot{\eta}_k(0) = 0, \quad \forall k \neq j; \quad \eta_j(0) = \alpha_0, \dot{\eta}_j(0) = \beta_0,$$

\vec{z} debe cumplir

$$(A \vec{z})_k \propto \delta_{jk}.$$

La solución es sencilla: si \vec{z} es el vector formado por los elementos de la columna j de A^{-1} , la igualdad anterior no es más que la columna j en la identidad del miembro derecho de $AA^{-1} = \mathbf{1}$ (con el factor de proporcionalidad igual a uno). En ese caso

$$\eta_k(0) = 0, \quad \dot{\eta}_k(0) = 0, \quad \forall k \neq j; \quad \eta_j(0) = \alpha_0, \quad \dot{\eta}_j(0) = \beta_0,$$

y de nuevo

$$\eta_k(t) = 0, \quad \forall k \neq j; \quad \eta_j(t) = \alpha_0 \cos(\omega_j t) + \frac{\beta_0}{\omega_j} \sin(\omega_j t).$$

Con ello,

$$q_i(t) = (A^{-1}\vec{\eta}(t))_i = (A^{-1})_{ij} \left[\alpha_0 \cos(\omega_j t) + \frac{\beta_0}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \right],$$

y los desplazamientos $q_i(t)$ mantienen las proporciones

$$q_1(t) : q_2(t) : \dots : q_n(t) = (A^{-1})_{1j} : (A^{-1})_{2j} : \dots : (A^{-1})_{nj},$$

las del vector columna j de A^{-1} , mientras oscilan de forma armónica con frecuencia ω_j . Resumiendo todo lo anterior, podemos “leer” la forma del modo normal j en la columna j de A^{-1} con A la matriz del cambio de base $\vec{\eta} = A\vec{q}$. Podríamos, de hecho, construir A^{-1} disponiendo los vectores propios de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$ en columnas *con normalización arbitraria*; bastaría entonces calcular A , inversa de A^{-1} (las trayectorias $\vec{q}(t)$ son, en cualquier caso, las mismas, no dependen de la elección de A^{-1} : la arbitrariedad en la elección de la normalización de las columnas de A^{-1} queda compensada por A en ec. (51)). La forma en que hemos construido A y A^{-1} diagonalizando matrices simétricas nos ha permitido obtener de forma relativamente sencilla tanto A como A^{-1} . Cuando $A = U$ es ortogonal, las columnas de A^{-1} no son más que las filas de la propia U . Leyendo la diagonalización de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$, es sencillo ver que los vectores propios de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$ son (proporcionales a) las columnas de A^{-1} .

2.6. Amortiguamiento

A lo largo de los apartados anteriores hemos resuelto cómo describir la evolución de un sistema acoplado descrito por unas ecuaciones de movimiento

$$\mathbf{T}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{V}\vec{q} = \vec{0}, \quad (43)$$

en términos de un conjunto de osciladores armónicos. El siguiente paso es incluir en las ecuaciones de movimiento términos de amortiguamiento (y analizar en qué condiciones no arruinan toda la labor anterior). Empezamos incluyendo de forma general términos de amortiguamiento “proporcionales” a la velocidad $\dot{\vec{q}}$... pero del mismo modo que en los otros dos términos, al pasar de un simple oscilador a un conjunto de los mismos, tenemos que entender “proporcionales” como *lineales*, el coeficiente que los controla será una matriz, γ . Empezamos entonces con las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\mathbf{T}\ddot{\vec{q}} + \gamma\dot{\vec{q}} + \mathbf{V}\vec{q} = \vec{0}. \quad (56)$$

Procediendo como en el caso $\gamma = \mathbf{0}$,

$$\ddot{\vec{q}} + \mathbf{T}^{-1} \gamma \dot{\vec{q}} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} \vec{q} = \vec{0}, \quad (57)$$

como cabía esperar, la situación se complica. Notablemente. Ya no tenemos *una única* matriz que diagonalizar, ahora tenemos *dos matrices*, además de $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$, tenemos $\mathbf{T}^{-1} \gamma$. En general la transformación A que diagonaliza $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}$ está completamente determinada. ¿En qué condiciones quedará diagonalizada $\mathbf{T}^{-1} \gamma$ al emplear $A \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} A^{-1} = \mathbf{W}_D$? Bastará que γ sea una combinación lineal de \mathbf{T} y \mathbf{V} , si

$$\gamma = a \mathbf{T} + b \mathbf{V},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \ddot{\vec{q}} + (a \mathbf{T} + b \mathbf{V}) \dot{\vec{q}} + \mathbf{V} \vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow \\ \mathbf{T} \left[\ddot{\vec{q}} + (a \mathbf{1} + b \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}}_{A^{-1} \mathbf{W}_D A}) \dot{\vec{q}} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{V}}_{A^{-1} \mathbf{W}_D A} \vec{q} \right] = \vec{0}, \end{aligned} \quad (58)$$

con lo que

$$\mathbf{T} A^{-1} [A \ddot{\vec{q}} + (a \mathbf{1} + b \mathbf{W}_D) A \dot{\vec{q}} + \mathbf{W}_D A \vec{q}] = \vec{0}, \quad (59)$$

y las ecuaciones están desacopladas. Introducimos $\eta = A \vec{q}$ para obtener el conjunto de n ecuaciones independientes

$$\boxed{\ddot{\eta}_j + (a + b \omega_j^2) \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (60)$$

Cada una de ellas es sencillamente la ecuación de un oscilador amortiguado

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

de frecuencia natural $\omega_0 \rightarrow \omega_j$ y de coeficiente de amortiguamiento $2\Gamma \rightarrow a + b\omega_j^2$, que ya sabemos resolver. Conviene discutir un par de aspectos. Con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ cada modo normal tiene un coeficiente de amortiguamiento diferente. Ahora bien, b proviene del término $b\mathbf{V}$ en γ , que es un tanto peculiar, corresponde a términos de amortiguamiento relacionados con la forma del término asociado al potencial, nos contentaremos en lo sucesivo con considerar $b = 0$, de modo que todo el amortiguamiento corresponde a términos de forma análoga a los asociados al cinético. Al margen de ser razonable desde un punto de vista físico, simplifica notablemente las expresiones anteriores (y muchas más), al dejarnos con ecuaciones de movimiento para los modos normales que comparten el mismo término de amortiguamiento:

$$\boxed{\ddot{\eta}_j + 2\Gamma \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = 0}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (61)$$

Las ecuaciones anteriores describen, para cada modo normal, un oscilador amortiguado, amortiguado críticamente o sobreamortiguado según ω_j sea mayor, igual o menor que Γ , según estudiamos anteriormente. Sabiendo cómo se resuelven estas ecuaciones, tan solo resta llevar las soluciones a la evolución de los grados de libertad $\vec{q}(t)$ y aplicar las condiciones iniciales $\{\vec{q}(0), \dot{\vec{q}}(0)\}$ (exactamente como en el punto 2.3). Una vez estudiado, pasamos otro aspecto, cómo tratar la respuesta del sistema a fuerzas externas.

2.7. Oscilaciones forzadas

Tal como hicimos con el oscilador con un único grado de libertad, el siguiente ingrediente a abordar es el estudio de las oscilaciones forzadas del sistema mediante una fuente armónica. Con la experiencia de los apartados anteriores y el ejemplo del oscilador mecánico del apartado 1.5, no ha de presentar en principio mayor dificultad. En primer lugar debemos concretar cómo las fuerzas externas actúan sobre los grados de libertad. Retomando ec. (56) (con $\boldsymbol{\gamma} = 2\Gamma \mathbf{T}$),

$$\mathbf{T} \ddot{\vec{q}} + 2\Gamma \mathbf{T} \dot{\vec{q}} + \mathbf{V} \vec{q} = \vec{F} \cos(\omega t) . \quad (62)$$

\vec{F} indica sobre qué grados de libertad q_j y con qué amplitud actúa la fuerza externa. Por ejemplo, si tan solo se aplica una fuerza armónica de amplitud F_0 al grado de libertad q_1 , tan solo será diferente de cero la primera componente, $\vec{F} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$; en general, $\vec{F} \rightarrow \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Factorizamos \mathbf{T} e introducimos el cambio de base A que diagonaliza $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V}$,

$$\mathbf{T} A^{-1} [A \ddot{\vec{q}} + 2\Gamma A \dot{\vec{q}} + \mathbf{W}_D A \vec{q}] = \vec{F} \cos(\omega t) . \quad (63)$$

Basta ahora multiplicar por $A\mathbf{T}^{-1}$ e introducir $\vec{\eta} = A\vec{q}$,

$$\ddot{\vec{\eta}} + 2\Gamma \dot{\vec{\eta}} + \mathbf{W}_D \vec{\eta} = A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \cos(\omega t) , \quad (64)$$

para obtener las ecuaciones independientes para las oscilaciones forzadas de los modos normales,

$$\boxed{\ddot{\eta}_j + 2\Gamma \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = f_j \cos(\omega t)} . \quad (65)$$

La amplitud de la fuente para el modo j , f_j , es

$$f_j = (A \mathbf{T}^{-1} \vec{F})_j .$$

Las soluciones $\eta_j(t)$ tienen una parte transitoria, solución de la ecuación homogénea, y una parte estacionaria, solución particular de la ecuación inhomogénea. Las soluciones estacionarias para los modos normales son

$$\eta_{j [p]}(t) = a_j^{(e)} \cos(\omega t) + a_j^{(i)} \sin(\omega t) , \quad (66)$$

con

$$a_j^{(e)} = f_j \frac{\omega_j^2 - \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} , \quad a_j^{(i)} = f_j \frac{2\Gamma \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} , \quad (67)$$

o equivalentemente

$$\eta_{j [p]}(t) = \frac{f_j}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}} \cos(\omega t - \delta_j) , \quad \delta_j = \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma \omega}{\omega_j^2 - \omega^2} \right] . \quad (68)$$

Llevando ec. (68) a $\vec{q} = A^{-1}\vec{\eta}$ para obtener el término estacionario en cada $q_i(t)$, $q_{i [p]}(t)$,

$$q_{i [p]}(t) = (A^{-1})_{ij} (A \mathbf{T}^{-1} \vec{F})_j \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} . \quad (69)$$

Restauramos los sumatorios implícitos para mayor claridad:

$$q_{i[p]}(t) = \sum_{j,k,\ell=1}^n (A^{-1})_{ij} \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} A_{jk} (\mathbf{T}^{-1})_{k\ell} (\vec{F})_\ell . \quad (70)$$

Podemos ilustrar estas expresiones generales a través de los resultados obtenidos en el apartado 1.6. En el acoplamiento de los dos osciladores mecánicos,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix},$$

la matriz del cambio de base A es (ec. (9))

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y la fuerza externa considerada en ec. (30)

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con todo lo anterior,

$$A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \\ \frac{F_0}{\sqrt{2}m} \end{pmatrix},$$

de acuerdo con ec. (31) y ec. (32). Aplicamos ahora ec. (70) con el resultado anterior para obtener

$$\begin{aligned} y_{1[p]}(t) &= + \frac{F_0}{2m} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} \\ &\quad + \frac{F_0}{2m} \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}, \\ y_{2[p]}(t) &= - \frac{F_0}{2m} \frac{(\omega_1^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} \\ &\quad + \frac{F_0}{2m} \frac{(\omega_2^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\Gamma \omega \sin(\omega t)}{(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}, \end{aligned}$$

en perfecta coincidencia con la parte estacionaria de $y_1(t)$ en ec. (37) y de $y_2(t)$ en ec. (38) (allí $\omega \rightarrow \omega_F$).

Sabiendo cómo resolver la evolución del sistema en presencia de una fuerza externa armónica, el tratamiento de una fuerza externa periódica, conforme ya hemos estudiado, tan solo requiere introducir el desarrollo de la misma en una serie de Fourier. No aportando nada nuevo a esta discusión, pasamos al siguiente apartado.

2.8. Energía del sistema

Para completar una perspectiva general sobre el comportamiento de un sistema con grados de libertad acoplados, en este apartado analizamos la energía

del sistema. Siguiendo lo expuesto en el apartado 2.4, la energía $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$ del sistema será

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\dot{\eta}_j^2 + \omega_j^2 \eta_j^2) , \quad (71)$$

con lo que

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{j=1}^n \dot{\eta}_j (\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j) . \quad (72)$$

Encontramos, de forma análoga a lo obtenido en el estudio de las oscilaciones con *un* grado de libertad, un factor $(\dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j)$ en el término correspondiente a cada modo normal; como en aquel caso, lo reescribimos empleando las ecuaciones de movimiento. Hacemos esto considerando la ecuación de movimiento general con amortiguamiento y una fuente armónica

$$\ddot{\eta}_j + 2\Gamma \dot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \cos(\omega t) . \quad (73)$$

Para los casos particulares (que comentaremos brevemente): (a) en que no hay fuerza externa, bastará tomar el límite $\vec{F} \rightarrow \vec{0}$, (b) no hay fuerza ni amortiguamiento, bastará tomar los límites $\vec{F} \rightarrow \vec{0}$ y $\Gamma \rightarrow 0$ (siempre y cuando ω no coincida con la frecuencia ω_j de algún modo normal). Tenemos

$$\ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j = \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \cos(\omega t) - 2\Gamma \dot{\eta}_j , \quad (74)$$

con lo que, de forma completamente general

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{j=1}^n \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \dot{\eta}_j \cos(\omega t) - 2\Gamma \dot{\eta}_j^2 \right] = \\ \sum_{j=1}^n \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \dot{\eta}_j \cos(\omega t) \right] - 4\Gamma \mathcal{T} . \end{aligned} \quad (75)$$

El primer término corresponde a la potencia suministrada por la fuerza externa, el segundo, como cabía esperar, corresponde al ritmo de disipación de energía a causa del amortiguamiento, proporcional a Γ y a la energía cinética \mathcal{T} . Ignorando los términos transitorios, i.e. para $t \gg 1/\Gamma$, tenemos

$$\eta_j(t) = a_j^{(e)} \cos(\omega t) + a_j^{(i)} \sin(\omega t) , \quad (76)$$

$$\dot{\eta}_j(t) = -\omega a_j^{(e)} \sin(\omega t) + \omega a_j^{(i)} \cos(\omega t) , \quad (77)$$

con

$$a_j^{(e)} = \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \times \frac{\omega_j^2 - \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} , \quad (78)$$

$$a_j^{(i)} = \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \times \frac{2\Gamma \omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} . \quad (79)$$

En general, con todo lo anterior, tal como ocurría con un único grado de libertad,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \neq 0 .$$

La energía del sistema no es constante; ahora bien, si integramos la variación de la energía a lo largo de un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \int_0^T dt \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \int_0^T dt \left\{ -\omega a_j^{(e)} \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \omega a_j^{(i)} \cos^2(\omega t) \right\} \\ &\quad - 2\Gamma \int_0^T dt \left\{ \omega^2 [a_j^{(e)}]^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 [a_j^{(i)}]^2 \cos^2(\omega t) \right\} \\ &\quad - 2\Gamma \int_0^T dt \left\{ 2\omega^2 a_j^{(e)} a_j^{(i)} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right\} . \end{aligned} \quad (80)$$

Con las integrales básicas

$$\int_0^T dt \sin^2(\omega t) = \int_0^T dt \cos^2(\omega t) = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T dt \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0,$$

simplificamos

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^T dt \frac{d\mathcal{E}}{dt} = T \sum_{j=1}^n \left\{ \left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \frac{1}{2} \omega a_j^{(i)} - 2\Gamma \omega^2 \frac{[a_j^{(e)}]^2 + [a_j^{(i)}]^2}{2} \right\} . \quad (81)$$

Ahora bien, por una parte

$$\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \frac{1}{2} \omega a_j^{(i)} = \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \right]^2 \times \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2},$$

mientras

$$2\Gamma \omega^2 \frac{[a_j^{(e)}]^2 + [a_j^{(i)}]^2}{2} = \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \right]^2 \times \frac{\Gamma \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2},$$

de modo que

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^T dt \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 .$$

A lo largo de un periodo la energía total del sistema *no cambia* (como cabe esperar, teniendo, en el régimen estacionario, un movimiento periódico): todo el trabajo realizado por la fuerza externa se disipa merced al amortiguamiento, de forma análoga al caso de un simple oscilador forzado. Para completar este apartado, veamos finalmente qué valor medio $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$ tiene la energía del sistema en el régimen estacionario,

$$\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{E}_{[p]}, \quad \mathcal{E}_{[p]} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\dot{\eta}_j^2 + \omega_j^2 \eta_j^2] . \quad (82)$$

Recordando la forma de las soluciones $\eta_{j[p]}(t)$

$$\eta_{j[p]}(t) = \frac{\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}} \cos(\omega t - \delta_j), \quad \delta_j = \tan^{-1} \left[\frac{2\Gamma \omega}{\omega_j^2 - \omega^2} \right], \quad (68)$$

$$\dot{\eta}_{j [p]}(t) = -\omega \frac{\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j}{\sqrt{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}} \sin(\omega t - \delta_j).$$

Por tanto

$$\mathcal{E}_{[p]} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \right]^2 \frac{\omega_j^2 \cos^2(\omega t - \delta_j) + \omega^2 \sin^2(\omega t - \delta_j)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}, \quad (83)$$

que reescribimos

$$\mathcal{E}_{[p]} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \right]^2 \frac{\omega_j^2 + \omega^2 + (\omega_j^2 - \omega^2) \cos(2(\omega t - \delta_j))}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2}. \quad (84)$$

Podemos leer inmediatamente la energía media del sistema

$$\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j^2 + \omega^2}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} \left[\left(A \mathbf{T}^{-1} \vec{F} \right)_j \right]^2. \quad (85)$$

Como cabía esperar es la suma de la energía media de cada uno de los modos normales forzados.

2.9. Degeneración

A lo largo de este tema no hemos planteado en ningún momento si la aparición de frecuencias propias repetidas, “degeneradas”, (i.e. raíces del polinomio característico de multiplicidad mayor que uno) requiere consideración especial. En este apartado analizamos la cuestión, y lo hacemos porque en múltiples sistemas físicos ocurre; a menudo el origen de la degeneración es alguna simetría del sistema, en ocasiones la degeneración es simplemente accidental.

Consideremos la diagonalización de \mathbf{W} en ec. (45). Si una frecuencia propia, ω_j^2 , tiene multiplicidad d_j , en lugar de un único vector propio, tendrá asociado un subespacio propio de dimensión d_j . Escogiendo una base ortonormal de vectores $\vec{v}_j^{(k)}$, $k = 1, \dots, d_j$, construimos la matriz U ortogonal del cambio de base que diagonaliza \mathbf{W} . Ahora bien, la elección de la base $\{\vec{v}_j^{(k)}\}$ es arbitraria: podemos escoger otra base ortonormal $\{\vec{w}_j^{(k)}\}$ de ese subespacio propio. Es decir, en lugar de los modos normales

$$\eta_j^{(k)} = \vec{v}_j^{(k)} \cdot \vec{q},$$

podemos escoger los modos normales

$$\eta_j^{\prime(k)} = \vec{w}_j^{(k)} \cdot \vec{q}.$$

La evolución temporal tanto de unos, $\eta_j^{(k)}$, como de otros, $\eta_j^{\prime(k)}$, está dada por la frecuencia propia ω_j .

¿Cómo cambia entonces la matriz U que diagonaliza \mathbf{W} ? Un vector $\vec{v} = \sum_k \alpha_k \vec{v}_j^{(k)}$ del subespacio propio que nos ocupa tiene componentes $(\alpha_1, \dots, \alpha_{d_j})$ en la base $\{\vec{v}_j^{(k)}\}$. Para obtener las componentes en la base $\{\vec{w}_j^{(k)}\}$, aplicamos el proyector

$$P_j = \sum_{m=1}^{d_j} \vec{w}_j^{(m)} \vec{w}_j^{(m)T},$$

que actua como la identidad en ese subespacio, y obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{v} = P_j \vec{v} &= \sum_{m=1}^{d_j} \vec{w}_j^{(m)} \vec{w}_j^{(m)T} \sum_{k=1}^{d_j} \alpha_k \vec{v}_j^{(k)} = \\ &= \sum_{m=1}^{d_j} \left(\sum_{k=1}^{d_j} \vec{w}_j^{(m)} \cdot \vec{v}_j^{(k)} \alpha_k \right) \vec{w}_j^{(m)} = \sum_{m=1}^{d_j} \beta_m \vec{w}_j^{(m)} . \end{aligned}$$

Las componentes β_m en la base $\{\vec{w}_j^{(k)}\}$ son

$$\beta_m = \sum_{k=1}^{d_j} \vec{w}_j^{(m)} \cdot \vec{v}_j^{(k)} \alpha_k$$

Introduciendo la matriz $d_j \times d_j$ del cambio de base, \mathcal{S}_j ,

$$(\mathcal{S}_j)_{ab} = \vec{w}_j^{(a)} \cdot \vec{v}_j^{(b)} = \sum_{k=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(a)})_k (\vec{v}_j^{(b)})_k ,$$

tenemos inmediatamente

$$\beta_m = \sum_{k=1}^{d_j} (\mathcal{S}_j)_{mk} \alpha_k .$$

\mathcal{S}_j es ortogonal. Veamos,

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_j \mathcal{S}_j^T)_{ab} &= \sum_{c=1}^{d_j} (\mathcal{S}_j)_{ac} (\mathcal{S}_j^T)_{cb} = \sum_{c=1}^{d_j} (\mathcal{S}_j)_{ac} (\mathcal{S}_j)_{bc} = \\ &= \sum_{c=1}^{d_j} \sum_{r=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(a)})_r (\vec{v}_j^{(c)})_r \sum_{s=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(b)})_s (\vec{v}_j^{(c)})_s = \\ &= \sum_{r=1}^{d_j} \sum_{s=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(a)})_r (\vec{w}_j^{(b)})_s \sum_{c=1}^{d_j} (\vec{v}_j^{(c)})_r (\vec{v}_j^{(c)})_s . \end{aligned}$$

La completitud de la base $\{\vec{v}_j^{(c)}\}$ en el subespacio asociado a ω_j es

$$\sum_{c=1}^{d_j} (\vec{v}_j^{(c)})_r (\vec{v}_j^{(c)})_s = \delta_{rs}$$

con ello y la completitud de la base $\{\vec{w}_j^{(c)}\}$ en el mismo subespacio, la expresión anterior se reduce a

$$(\mathcal{S}_j \mathcal{S}_j^T)_{ab} = \sum_{r=1}^{d_j} \sum_{s=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(a)})_r (\vec{w}_j^{(b)})_s \delta_{rs} = \sum_{s=1}^{d_j} (\vec{w}_j^{(a)})_s (\vec{w}_j^{(b)})_s = \delta_{ab} ,$$

i.e.

$$\mathcal{S}_j \mathcal{S}_j^T = \mathbf{1}_{d_j} .$$

por tres átomos, dos con masa m y uno con masa M , conectados por “muelles” de constante de recuperación k , según recoge la figura 10. Ignoramos el amortiguamiento. Con x_{0i} las posiciones de los átomos y b las separaciones entre los mismos en el equilibrio, los términos cinético y potencial de la lagrangiana son

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{01}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_{02}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_{03}^2 ,$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} k ((x_{02} - x_{01} - b)^2 + (x_{03} - x_{02} - b)^2) .$$

Introduciendo como coordenadas los desplazamientos relativos a la posición de equilibrio,

$$x_1 = x_{01} , \quad x_2 = x_{02} - b , \quad x_3 = x_{03} - 2b ,$$

la lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ resulta

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (m \dot{x}_1^2 + M \dot{x}_2^2 + m \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2} ((x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2) . \quad (86)$$

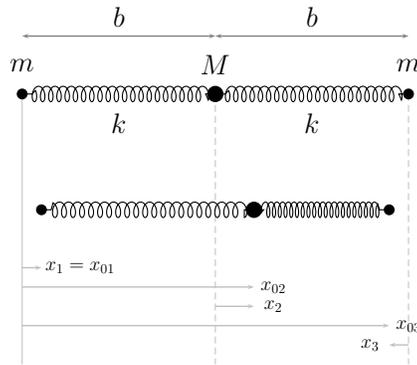


Figura 10: Molécula lineal triatómica.

Las ecuaciones de movimiento $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}$ son por tanto

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 + k (x_1 - x_2) &= 0 , \\ M \ddot{x}_2 + k (-x_1 + 2x_2 - x_3) &= 0 , \\ m \ddot{x}_3 + k (-x_2 + x_3) &= 0 . \end{aligned} \quad (87)$$

En este punto podemos proceder siguiendo las líneas del análisis general del apartado 2; antes de hacerlo, no obstante, vamos a obtener las frecuencias propias y los modos normales directamente. Primero reescribimos ec. (87) dividiendo por las masas⁸:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) &= 0 , \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{M} (-x_1 + 2x_2 - x_3) &= 0 , \\ \ddot{x}_3 + \frac{k}{m} (-x_2 + x_3) &= 0 . \end{aligned} \quad (88)$$

⁸Este es el paso equivalente a multiplicar por \mathbf{T}^{-1} según la notación del apartado 2.

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

i.e.

$$\ddot{\vec{x}} + \hat{\mathbf{W}} \vec{x} = \vec{0}.$$

3.2. Frecuencias propias y modos normales

Estudiando $\hat{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}$ obtendremos tanto los modos normales como sus correspondientes frecuencias de oscilación. Veamos en primer lugar las frecuencias propias, valores propios de $\hat{\mathbf{W}}$, encontrando las raíces del polinomio característico $P(\omega^2) \equiv \det(\hat{\mathbf{W}} - \omega^2 \mathbf{1})$, i.e. las soluciones de $P(\omega^2) = 0$:

$$\begin{aligned} \det(\hat{\mathbf{W}} - \omega^2 \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{m^2 M} \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - M\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{m^2 M} \left[(k - m\omega^2)((2k - M\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2) + k(-k)(k - m\omega^2) \right] = \\ &= \frac{1}{m^2 M} (k - m\omega^2) \left[mM\omega^4 - k(M + 2m)\omega^2 + 2k^2 - 2k^2 \right] = \\ &= \frac{1}{m^2 M} (k - m\omega^2) \omega^2 (mM\omega^2 - k(M + 2m)) = \\ &= \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \omega^2 \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M} \right) \right) = 0. \quad (90) \end{aligned}$$

Las tres frecuencias propias son por tanto

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M} \right)}.$$

Observando estos valores podemos anticipar varios resultados. Dado que $\omega_1 = 0$, un modo normal **no** corresponderá de hecho a una oscilación, tendremos una ecuación de movimiento $\ddot{\eta}_1 = 0$, que tiene como solución un movimiento rectilíneo uniforme en η_1 . En términos de $x_i(t)$, teniendo en cuenta que, tal como hemos planteado el análisis, la molécula es libre de trasladarse globalmente, no es extraño que aparezca un modo correspondiente al desplazamiento global de la misma. Por otra parte, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *no depende de M*, con lo que cabría esperar que en el modo η_2 la masa central M permanezca estática. Finalmente poco podemos anticipar del tercer modo normal así que pasamos a obtener explícitamente los correspondientes vectores propios $\vec{v}(\omega_i)$ recordando que $(\hat{\mathbf{W}} - \omega_i^2 \mathbf{1})\vec{v}(\omega_i) = \vec{0}$.

- Para $\omega_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{W}} - \omega_1^2 \mathbf{1}) \vec{v}(\omega_1) = \vec{0} &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\omega_1)_1 \\ v(\omega_1)_2 \\ v(\omega_1)_3 \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} \frac{k}{m}(v(\omega_1)_1 - v(\omega_1)_2) \\ \frac{k}{M}(2v(\omega_1)_2 - v(\omega_1)_1 - v(\omega_1)_3) \\ \frac{k}{m}(v(\omega_1)_3 - v(\omega_1)_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (91)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{v}(\omega_1) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (92)$$

con lo que en este modo normal todas las masas tienen el mismo desplazamiento; como anticipábamos corresponde a un movimiento de traslación global, según ilustra la figura 11(a).

- Para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{W}} - \omega_2^2 \mathbf{1}) \vec{v}(\omega_2) = \vec{0} &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2\frac{k}{M} - \frac{k}{m} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\omega_2)_1 \\ v(\omega_2)_2 \\ v(\omega_2)_3 \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} -\frac{k}{m}v(\omega_2)_2 \\ -\frac{k}{M}(v(\omega_2)_1 + v(\omega_2)_3) + (2\frac{k}{M} - \frac{k}{m})v(\omega_2)_2 \\ -\frac{k}{m}v(\omega_2)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (93)
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{v}(\omega_2) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

En este modo normal, los desplazamientos de las masas m son *opuestos* mientras la masa M permanece estática como también anticipamos e ilustra la figura 11(b).

- Para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathbf{W}} - \omega_3^2 \mathbf{1}) \vec{v}(\omega_3) = \vec{0} &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} -2\frac{k}{M} & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{M} \\ 0 & -\frac{k}{m} & -2\frac{k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\omega_3)_1 \\ v(\omega_3)_2 \\ v(\omega_3)_3 \end{pmatrix} = \\
 \begin{pmatrix} -2\frac{k}{M}v(\omega_3)_1 - \frac{k}{m}v(\omega_3)_2 \\ -\frac{k}{M}(v(\omega_3)_1 + v(\omega_3)_3) - \frac{k}{m}v(\omega_3)_2 \\ -2\frac{k}{M}v(\omega_3)_3 - \frac{k}{m}v(\omega_3)_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (95)
 \end{aligned}$$

De la primera y tercera ecuaciones, $v(\omega_3)_1 = v(\omega_3)_3$; la segunda ecuación indica entonces $v(\omega_3)_2 = v(\omega_3)_1 \left(\frac{-2\frac{k}{M}}{\frac{k}{m}} \right)$; por tanto

$$\vec{v}(\omega_3) \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

En este caso las masas m se desplazan de igual manera mientras la masa central M lo hace en dirección opuesta con una amplitud relativa que depende de la relación entre las masas, como ilustra la figura 11(c).

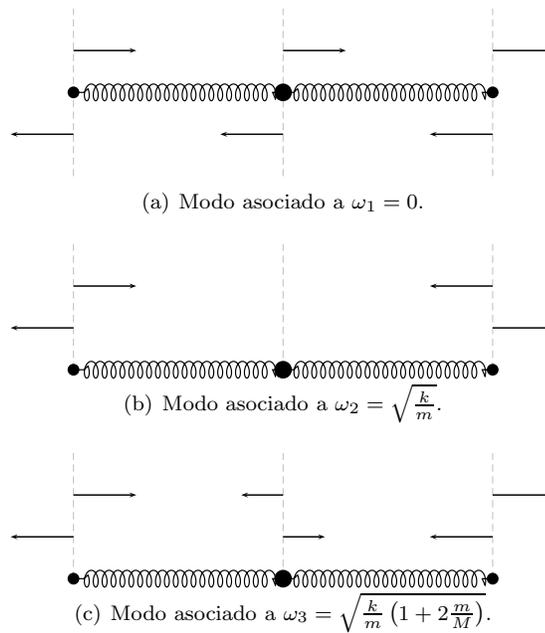


Figura 11: Modos normales de la molécula lineal triatómica (simétrica).

Como la matriz $\hat{\mathbf{W}}$ no es simétrica, los vectores propios $\vec{v}_i(\omega_i)$ no son ortogonales y no podemos completar la diagonalización inmediatamente. Para ello retomamos, como anticipábamos, el problema según las líneas del análisis general del apartado 2.

3.3. Solución general

Tenemos

$$\mathbf{T} \ddot{\vec{x}} + \mathbf{V} \vec{x} = \vec{0}, \quad (97)$$

con

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}. \quad (98)$$

La sencillez del término cinético, ya diagonal, permite obtener inmediatamente

$$\mathbf{T}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{M} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{M}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Por otra parte,

$$\mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{V} \mathbf{T}^{-1/2} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} \end{pmatrix}, \quad (100)$$

que debemos diagonalizar. En primer lugar obtenemos los valores propios como raíces del polinomio característico $\det(\mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{1})$,

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 2\frac{k}{M} - \omega^2 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{m^2 M} \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k\sqrt{\frac{m}{M}} & 0 \\ -k\sqrt{\frac{M}{m}} & 2k - M\omega^2 & -k\sqrt{\frac{M}{m}} \\ 0 & -k\sqrt{\frac{m}{M}} & k - m\omega^2 \end{vmatrix},$$

donde en la última expresión hemos extraído un factor $\frac{1}{M}$ de la segunda fila y un factor $\frac{1}{m}$ de las filas primera y tercera. Desarrollamos ahora por la primera fila,

$$\det(\mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{1}) = \frac{1}{m^2 M} \left[(k - m\omega^2) \left((2k - M\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 \right) - k^2(k - m\omega^2) \right],$$

expresión *idéntica* a $\det(\hat{\mathbf{W}} - \omega^2 \mathbf{1})$ en ec. (90) (los valores propios de \mathbf{W} son los mismos que valores propios de $\hat{\mathbf{W}}$, ω_i), con lo que automáticamente obtenemos las frecuencias propias

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M} \right)}. \quad (101)$$

Busquemos los correspondientes vectores propios de \mathbf{W} , que ahora llamamos simplemente $\vec{v}_i \equiv \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ v_{i3} \end{pmatrix}$.

- Para $\omega_1 = 0$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{W} - \omega_1^2 \mathbf{1}) \vec{v}_1 &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ &\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 2\frac{k}{M} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{m}} \left(\frac{v_{11}}{\sqrt{m}} - \frac{v_{12}}{\sqrt{M}} \right) \\ \frac{k}{\sqrt{M}} \left(2\frac{v_{12}}{\sqrt{M}} - \frac{v_{11} + v_{13}}{\sqrt{m}} \right) \\ \frac{k}{\sqrt{m}} \left(\frac{v_{13}}{\sqrt{m}} - \frac{v_{12}}{\sqrt{M}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (102)$$

Tenemos $v_{11} = v_{13} = \sqrt{\frac{m}{M}} v_{12}$, por tanto,

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{M + 2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{m} \\ \sqrt{M} \\ \sqrt{m} \end{pmatrix}. \quad (103)$$

- Para $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{W} - \omega_2^2 \mathbf{1}) \vec{v}_2 = \vec{0} &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & \frac{2k}{M} - \frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} &= \\
 \begin{pmatrix} -\frac{k}{\sqrt{mM}}(v_{21} + v_{23}) + \left(2\frac{k}{M} - \frac{k}{m}\right)v_{22} \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}}v_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (104)
 \end{aligned}$$

Con lo que $v_{22} = 0$ y $v_{23} = -v_{21}$,

$$\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (105)$$

- Para $\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + 2\frac{m}{M}\right)}$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{W} - \omega_3^2 \mathbf{1}) \vec{v}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow \\
 \begin{pmatrix} -\frac{2k}{M} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ -\frac{k}{\sqrt{mM}} & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & -\frac{k}{\sqrt{mM}} & -\frac{2k}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} &= \\
 \begin{pmatrix} -\frac{k}{\sqrt{M}} \left(\frac{2v_{31}}{\sqrt{M}} + \frac{v_{32}}{\sqrt{m}}\right) \\ -\frac{k}{\sqrt{m}} \left(\frac{v_{31} + v_{33}}{\sqrt{M}} + \frac{v_{32}}{\sqrt{m}}\right) \\ -\frac{k}{\sqrt{M}} \left(\frac{2v_{33}}{\sqrt{M}} + \frac{v_{32}}{\sqrt{m}}\right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (106)
 \end{aligned}$$

Con lo que $v_{31} = v_{33} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}v_{32}$ y tenemos

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{M} \\ -2\sqrt{m} \\ \sqrt{M} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

Los tres vectores propios de \mathbf{W} son ortogonales (en las ecuaciones anteriores los hemos normalizado de modo que $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$), y podemos construir

$$\begin{aligned}
 U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M+2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M+2m}} & \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{M+2m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}\sqrt{M+2m}} & -\frac{2\sqrt{m}}{\sqrt{2}\sqrt{M+2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2}\sqrt{M+2m}} \end{pmatrix} &= \\
 \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{M+2m}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{m} & \sqrt{2}\sqrt{M} & \sqrt{2}\sqrt{m} \\ \sqrt{M+2m} & 0 & -\sqrt{M+2m} \\ \sqrt{M} & -2\sqrt{m} & \sqrt{M} \end{pmatrix}. \quad (108)
 \end{aligned}$$

Con $U^{-1} = U^T$, la diagonalización de \mathbf{W} es

$$U \mathbf{W} U^T = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} + 2\frac{k}{M} \end{pmatrix},$$

con lo que podemos finalmente construir la diagonalización de $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{W}\mathbf{T}^{1/2}$,

$$A \mathbf{T}^{-1} \mathbf{V} A^{-1} = \mathbf{W}_D, \quad A = U \mathbf{T}^{1/2}.$$

La matriz A y su inversa A^{-1} son

$$A = \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{2m+M}} & \frac{M}{\sqrt{2m+M}} & \frac{m}{\sqrt{2m+M}} \\ \sqrt{\frac{m}{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{m}{2}} \\ \frac{\sqrt{mM}}{\sqrt{2}\sqrt{2m+M}} & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{mM}}{\sqrt{2m+M}} & \frac{\sqrt{mM}}{\sqrt{2}\sqrt{2m+M}} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & -\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{M}\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \end{pmatrix}.$$

Podemos por tanto reescribir ec. (97)

$$\ddot{\vec{x}} + A^{-1} \mathbf{W}_D A \vec{x} = \vec{0}.$$

Introducimos $\vec{\eta} = A\vec{x}$ de modo que multiplicando por la izquierda por A las ecuaciones de movimiento se convierten en $\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{W}_D \vec{\eta} = \vec{0}$, y tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\eta}_1 + \omega_1^2 \eta_1 = 0 \\ \ddot{\eta}_2 + \omega_2^2 \eta_2 = 0 \\ \ddot{\eta}_3 + \omega_3^2 \eta_3 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ec. (101)}} \left\{ \begin{array}{l} \eta_1(t) = \eta_1(0) + \dot{\eta}_1(0) t \\ \eta_2(t) = \eta_2(0) \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{\eta}_2(0)}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ \eta_3(t) = \eta_3(0) \cos(\omega_3 t) + \frac{\dot{\eta}_3(0)}{\omega_3} \sin(\omega_3 t) \end{array} \right\},$$

donde hemos expresado los modos normales en términos de condiciones iniciales $\eta_i(0)$ y $\dot{\eta}_i(0)$. Para obtener las soluciones $x_i(t)$ en términos de condiciones iniciales $x_i(0)$ y $\dot{x}_i(0)$, bastará sustituir – como hicimos en el apartado 2 para obtener ec. (50) –,

$$\vec{x}(t) = A^{-1} \vec{\eta}(t) \Leftrightarrow \eta(0) = A \vec{x}(0), \quad \dot{\eta}(0) = A \dot{\vec{x}}(0)$$

$$\vec{x}(t) = A^{-1} \vec{\eta}(t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \frac{\eta_1(t)}{\sqrt{2m+M}} + \frac{\eta_2(t)}{\sqrt{2m}} + \frac{\sqrt{M}\eta_3(t)}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \\ x_2(t) = \frac{\eta_1(t)}{\sqrt{2m+M}} - \frac{\sqrt{2m}\eta_3(t)}{\sqrt{M}\sqrt{2m+M}} \\ x_3(t) = \frac{\eta_1(t)}{\sqrt{2m+M}} - \frac{\eta_2(t)}{\sqrt{2m}} + \frac{\sqrt{M}\eta_3(t)}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \end{array} \right\}. \quad (109)$$

$$\vec{\eta}(t) = A \vec{x}(t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} (m x_1(t) + M x_2(t) + m x_3(t)) \\ \eta_2(t) = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1(t) - x_3(t)) \\ \eta_3(t) = \frac{\sqrt{mM}}{\sqrt{2}\sqrt{2m+M}} (x_1(t) - 2x_2(t) + x_3(t)) \end{array} \right\}. \quad (110)$$

Las trayectorias $x_i(t)$ son

$$x_1(t) = \left[\frac{m x_1(0) + M x_2(0) + m x_3(0)}{2m + M} + \frac{m \dot{x}_1(0) + M \dot{x}_2(0) + m \dot{x}_3(0)}{2m + M} t \right] \\ + \left[\frac{x_1(0) - x_3(0)}{2} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_3(0)}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] \\ + \left[\frac{M(x_1(0) - 2x_2(0) + x_3(0))}{2(2m + M)} \cos(\omega_3 t) + \frac{M(\dot{x}_1(0) - 2\dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0))}{2(2m + M)\omega_3} \sin(\omega_3 t) \right], \quad (111)$$

$$x_2(t) = \left[\frac{m x_1(0) + M x_2(0) + m x_3(0)}{2m + M} + \frac{m \dot{x}_1(0) + M \dot{x}_2(0) + m \dot{x}_3(0)}{2m + M} t \right] \\ - \left[\frac{m(x_1(0) - 2x_2(0) + x_3(0))}{2m + M} \cos(\omega_3 t) + \frac{m(\dot{x}_1(0) - 2\dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0))}{(2m + M)\omega_3} \sin(\omega_3 t) \right], \quad (112)$$

$$x_3(t) = \left[\frac{m x_1(0) + M x_2(0) + m x_3(0)}{2m + M} + \frac{m \dot{x}_1(0) + M \dot{x}_2(0) + m \dot{x}_3(0)}{2m + M} t \right] \\ - \left[\frac{x_1(0) - x_3(0)}{2} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_3(0)}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right] \\ + \left[\frac{M(x_1(0) - 2x_2(0) + x_3(0))}{2(2m + M)} \cos(\omega_3 t) + \frac{M(\dot{x}_1(0) - 2\dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0))}{2(2m + M)\omega_3} \sin(\omega_3 t) \right]. \quad (113)$$

3.4. Modos normales y lagrangiana

Para completar el análisis de la molécula triatómica lineal e ilustrar el papel de los modos normales, consideremos de nuevo la lagrangiana de la ecuación (86):

$$\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i) = \frac{1}{2} (m \dot{x}_1^2 + M \dot{x}_2^2 + m \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2} ((x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2). \quad (86)$$

Si introducimos $\vec{\eta}$ en \mathcal{L} sustituyendo $\vec{x} = A^{-1}\vec{\eta}$ y desarrollando, obtenemos

$$\mathcal{L}(\eta_i, \dot{\eta}_i) = \frac{\dot{\eta}_1^2}{2} + \frac{\dot{\eta}_2^2}{2} + \frac{\dot{\eta}_3^2}{2} - \frac{k\eta_2^2}{2m} - \frac{k\eta_3^2}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right), \quad (114)$$

separable según hemos visto en el análisis general, en lagrangianas desacopladas para cada modo normal,

$$\mathcal{L}(\eta_i, \dot{\eta}_i) = \mathcal{L}_1(\dot{\eta}_1) + \mathcal{L}_2(\eta_2, \dot{\eta}_2) + \mathcal{L}_3(\eta_3, \dot{\eta}_3),$$

con

$$\mathcal{L}_1(\dot{\eta}_1) = \frac{1}{2} \dot{\eta}_1^2, \\ \mathcal{L}_2(\eta_2, \dot{\eta}_2) = \frac{1}{2} \dot{\eta}_2^2 - \frac{1}{2} \frac{k}{m} \eta_2^2, \\ \mathcal{L}_3(\eta_3, \dot{\eta}_3) = \frac{1}{2} \dot{\eta}_3^2 - \frac{1}{2} \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M} \right) \eta_3^2.$$

Las ecuaciones de movimiento resultantes, $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\eta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \eta_i} = 0$, son, como corresponde, las resueltas anteriormente.

3.5. * Comentario sobre los modos normales

En el apartado 3.2 hemos obtenido, al margen de los valores propios de $\hat{\mathbf{W}}$, sus vectores propios; la figura 11 ilustra de hecho las características de los modos normales. Siguiendo la discusión del apartado 2.5, las relaciones entre desplazamientos $x_1 : x_2 : x_3$ que caracterizan cada modo normal pueden “leerse” en las columnas de A^{-1} . Veámoslo, con

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & -\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{M}\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \end{pmatrix},$$

- columna 1,

$$\vec{v}(\omega_1) \propto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

- columna 2,

$$\vec{v}(\omega_2) \propto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2m}} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

- columna 3,

$$\vec{v}(\omega_3) \propto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \\ -\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{M}\sqrt{2m+M}} \\ \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2m}\sqrt{2m+M}} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para completar este comentario sobre la forma de los modos normales en términos de los desplazamientos x_i , observando las ecuaciones $x_i(t)$ (ec. (111)-(113)), es manifiesto que un estado con componentes dadas por $\vec{v}(\omega_i)$ excita únicamente el modo i (el resto se mantiene nulo) y mantiene la “forma” $x_1(t) : x_2(t) : x_3(t)$ (i.e. los tamaños relativos de las componentes) con independencia del tiempo. Por otra parte, puesto que en este caso \mathbf{T} es diagonal, de $A^T A = \mathbf{T}$, podíamos obtener sencillamente $A^{-1} = \mathbf{T}^{-1} A^T$, en otras palabras, “leer” los modos normales de las filas de A , divididas por los elementos de la diagonal de \mathbf{T} : primera y tercera columnas divididas por m , segunda columna dividida por M .

3.6. Ejemplos

Ejemplo 1

Para un primer ejemplo del movimiento de la molécula lineal triatómica, adoptamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = d, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0.$$

Cabe observar que las condiciones iniciales sitúan el centro de masas de la molécula en $x_2 = \frac{md}{2m+M}$, con lo que las posiciones de equilibrio que corresponden a las coordenadas iniciales son $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{md}{2m+M}$, en lugar de $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, a causa de la libertad de traslación que tiene la molécula. El primer término de las ecuaciones (111–113) recoge esta particularidad. En ausencia de velocidades iniciales, el centro de masas no se mueve en función del tiempo y cada átomo oscila alrededor de esa posición de equilibrio. Con $x_1(0) \neq 0$ y $x_2(0) = x_3(0) = 0$ (además de $\dot{x}_i(0) = 0$), se excitan los modos normales con frecuencias ω_2 y ω_3 . La figura 12 ilustra el movimiento.

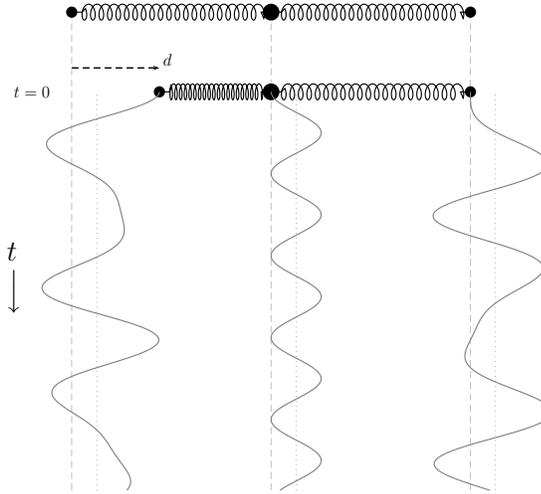


Figura 12: Movimiento del ejemplo 1.

Ejemplo 2

Como segundo ejemplo, consideremos el movimiento determinado por las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = -x_3(0) = d, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0 .$$

En este caso la posición del centro de masas y las posiciones de equilibrio se mantienen (en $x_2 = 0$, y en $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ respectivamente) y tampoco hay movimiento global de traslación. Las condiciones iniciales corresponden claramente a excitar únicamente el modo normal antisimétrico, y tendremos $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = -x_1(t)$, $\forall t$. La figura 13 ilustra el movimiento.

Ejemplo 3

Para el tercer y último ejemplo, adoptamos las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0 .$$

En este caso, en el instante inicial la molécula está en equilibrio con $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, pero la primera masa tiene velocidad v . De acuerdo con las ecuaciones (111–113) observamos que cada una de las masas tendrá un movimiento oscilatorio “alrededor” de la traslación global $\frac{m}{2m+M} vt$: además del modo traslacional, las condiciones iniciales excitan los modos oscilatorios de frecuencias (angulares) ω_2 y ω_3 . La figura 14 ilustra el movimiento.

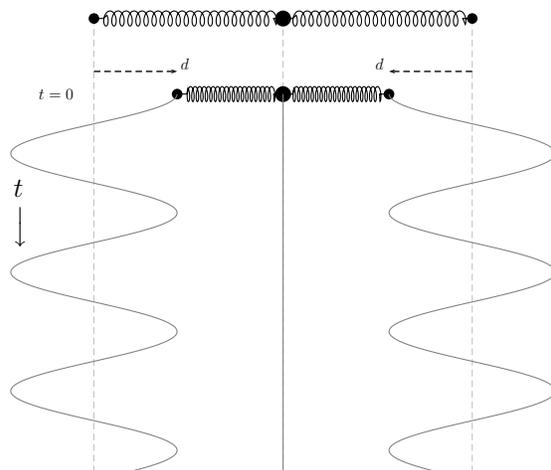


Figura 13: Movimiento del ejemplo 2.

Con los ejemplos anteriores concluimos el análisis de la molécula lineal triatómica. De haber introducido amortiguamiento o fuerzas externas, bastaría proceder según las líneas del análisis general del apartado 2. Tan solo cabría ampliar nuestra descripción por una particularidad de este sistema: el modo normal η_1 asociado a la traslación rectilínea uniforme.

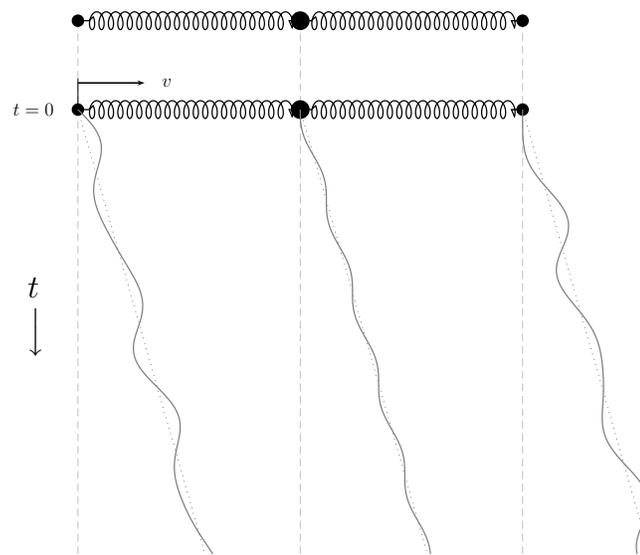


Figura 14: Movimiento del ejemplo 3.

4. La cuerda discreta

4.1. Planteamiento y ecuaciones de movimiento

Del estudio de la molécula lineal triatómica pasamos ahora al estudio de un sistema de n masas idénticas m unidas por una cuerda no masiva de tensión τ . Ignoramos términos de amortiguamiento. El equilibrio corresponde a todas las masas dispuestas a lo largo de una recta a intervalos regulares ℓ , según ilustra la figura 15.

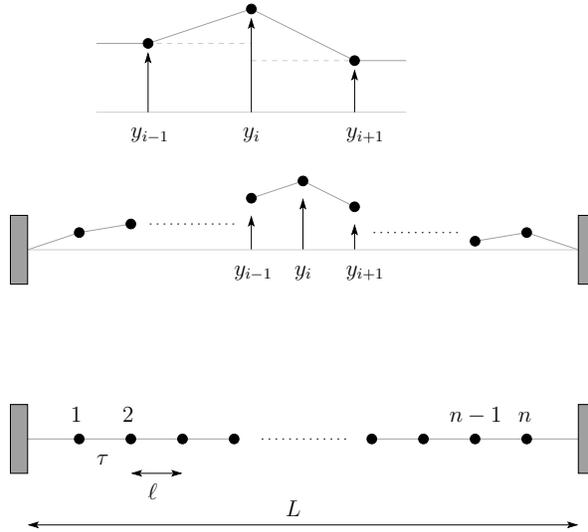


Figura 15: Cuerda discreta.

El desplazamiento transversal de la i -ésima masa con respecto a la posición de equilibrio es y_i y consideramos que todos los desplazamientos y_i están restringidos al mismo plano). La energía cinética del sistema es por tanto

$$\mathcal{T} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{y}_i^2 . \quad (115)$$

Para obtener la energía potencial consideremos la contribución del elemento de cuerda que conecta las masas $i - 1$ e i : es el trabajo realizado para producir la elongación del mismo. Según la figura 15, no es más que

$$V_{\{i-1\} \rightarrow \{i\}} = \tau \left(\sqrt{\ell^2 + (y_i - y_{i-1})^2} - \ell \right) . \quad (116)$$

Considerando desplazamientos pequeños, desarrollamos $\sqrt{\ell^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ y resulta

$$V_{\{i-1\} \rightarrow \{i\}} = \frac{\tau}{2\ell} (y_i - y_{i-1})^2 . \quad (117)$$

Podemos introducir $y_0(t) \equiv 0$ e $y_{n+1}(t) \equiv 0$, “desplazamientos” de los extremos *fijos* para reescribir más cómodamente la energía potencial del sistema

$$\mathcal{V} = \frac{\tau}{2\ell} \sum_{i=1}^n ((y_i - y_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_i)^2) . \quad (118)$$

Desarrollando el determinante por la primera fila, tenemos

$$\det \mathbf{U}_n(u) = u \det \mathbf{U}_{n-1}(u) - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & u & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & u & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & 1 & u & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & u & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & u \end{vmatrix}}_{(n-1) \times (n-1)} .$$

Desarrollando ahora el segundo determinante por la primera columna,

$$\det \mathbf{U}_n(u) = u \det \mathbf{U}_{n-1}(u) - \det \mathbf{U}_{n-2}(u) . \tag{124}$$

Reescribiendo en términos de $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u)$, que es la cantidad que aparece en $\det(\mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{1})$,

$$[(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u)] = -u [(-1)^{n-1} \det \mathbf{U}_{n-1}(u)] - [(-1)^{n-2} \det \mathbf{U}_{n-2}(u)] . \tag{125}$$

Deseamos obtener las soluciones $\omega^2 = \frac{\tau}{m\ell}(u + 2)$ de $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) = 0$; la recurrencia de la ecuación anterior (ec. (125)) proporciona un camino para ello, aunque no sencillo. Dado que involucra los términos n , $n - 1$ y $n - 2$ (el término n en función de los *dos* anteriores), podemos obtener $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u)$ en términos de, por ejemplo, $\det \mathbf{U}_2(u) = u^2 - 1$ y $\det \mathbf{U}_3(u) = u^3 - 2u$; por comodidad introducimos, siguiendo ec. (124), $\det \mathbf{U}_0(u) = 1$ y $\det \mathbf{U}_1(u) = u$ (aunque desde el punto de vista de la matriz $\mathbf{U}_n(u)$ no tenga mucho sentido el caso de rango 0, \mathbf{U}_0 , lo que ahora nos ocupa es resolver la recurrencia). Hecho esto querríamos ser capaces de identificar las soluciones u de $\det \mathbf{U}_n(u) = 0$ para obtener las correspondientes frecuencias propias ω^2 . Para atacar la relación de recurrencia ec. (124) acudimos a un par de relaciones trigonométricas: consideramos $\sin(n\theta)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ arbitrario y lo desarrollamos empleando $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ de dos modos distintos, por una parte separando $n \rightarrow (n - 1) + 1$ seguido de $n - 1 \rightarrow (n - 2) + 1$, por otra parte separando directamente $n \rightarrow (n - 2) + 2$:

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \sin((n - 1)\theta) \cos \theta + \cos((n - 1)\theta) \sin \theta = \\ &= \sin((n - 1)\theta) \cos \theta + \sin \theta [\cos((n - 2)\theta) \cos \theta - \sin((n - 2)\theta) \sin \theta] = \\ &= \sin((n - 1)\theta) \cos \theta - \sin((n - 2)\theta) \sin^2 \theta + \cos((n - 2)\theta) \cos \theta \sin \theta , \end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \sin((n - 2)\theta) \cos(2\theta) + \cos((n - 2)\theta) \sin(2\theta) = \\ &= \sin((n - 2)\theta) [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] + 2 \cos((n - 2)\theta) \cos \theta \sin \theta . \end{aligned} \tag{127}$$

Observamos ahora que podemos cancelar los términos $\cos((n - 2)\theta)$ combinando $2 \times$ (ec. (126)) - ec. (127) para obtener

$$\sin(n\theta) = 2 \cos \theta \sin((n - 1)\theta) - \sin((n - 2)\theta) [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2 \sin^2 \theta] , \tag{128}$$

i.e.

$$\sin(n\theta) = 2 \cos \theta \sin((n-1)\theta) - \sin((n-2)\theta) . \quad (129)$$

En términos de n , ec. (129) supone una relación de recurrencia *muy* similar a ec. (124); si requerimos $u = -2 \cos \theta$ tenemos de hecho la *misma relación* (θ es simplemente una cantidad auxiliar que determinaremos posteriormente). Aunque esto supone un paso decisivo, todavía hay que afinar un par de detalles para llegar a la solución. Si bien funciones proporcionales a $\sin(n\theta)$ verifican la relación, esto es cierto tanto para $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) \propto \sin(n\theta)$ como para cualquier $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) \propto \sin(m\theta)$ con $m \neq n$; por otra parte hay que recordar que además necesitamos fijar correctamente *dos* términos iniciales. La primera de estas dos cuestiones puede reformularse constatando que en la obtención de ec. (129) podríamos haber empezado con $\sin(n\theta + \delta)$ en lugar de $\sin(n\theta)$; en ese caso, en lugar de ec. (129), obtendríamos

$$\sin(n\theta + \delta) = 2 \cos \theta \sin((n-1)\theta + \delta) - \sin((n-2)\theta + \delta) , \quad (130)$$

que generaliza el resultado anterior de forma muy conveniente puesto que si ahora probamos soluciones

$$(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) = \alpha \sin(n\theta + \delta) ,$$

podemos emplear las dos constantes α y δ para fijar los dos términos iniciales correctamente y obtener, ahora sí, la solución. Escogiendo los más sencillos, $\det \mathbf{U}_0(u) = 1$ y $\det \mathbf{U}_1(u) = u$, tenemos

$$\det \mathbf{U}_0(u) = 1 = \alpha \sin \delta , \quad -\det \mathbf{U}_1(u) = -u = 2 \cos \theta = \alpha \sin(\theta + \delta) .$$

De la primera relación $\alpha = 1/\sin \delta$; desarrollamos $\sin(\theta + \delta) = \sin \theta \cos \delta + \cos \theta \sin \delta$ en la segunda relación y sustituimos $\alpha = 1/\sin \delta$ para obtener

$$-\det \mathbf{U}_1(u) = -u = 2 \cos \theta = \alpha \sin(\theta + \delta) \Leftrightarrow 2 \cos \theta = \cos \theta + \sin \theta \frac{\cos \delta}{\sin \delta} ,$$

es decir

$$\tan \delta = \tan \theta .$$

Con la solución inmediata $\delta = \theta$ obtenemos

$$(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} , \quad u = -2 \cos \theta . \quad (131)$$

Podemos regresar ahora a nuestro problema original, encontrar las soluciones de $\det \mathbf{U}_n(u) = 0$. Empleando la ecuación (131), las soluciones θ_j se obtienen inmediatamente:

$$(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_j = \frac{\pi j}{n+1} .$$

En términos de $u = -2 \cos \theta$,

$$u_j = -2 \cos \theta_j = -2 \cos \left(\frac{\pi j}{n+1} \right) ,$$

y en términos de $\omega^2 = \frac{\tau}{m\ell}(u + 2)$,

$$\omega_j^2 = \frac{\tau}{m\ell} (2 - 2 \cos \theta_j), \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\omega_j^2 = 4 \frac{\tau}{m\ell} \sin^2 \left(\frac{\theta_j}{2} \right), \quad \theta_j = \frac{\pi j}{n+1}}. \quad (132)$$

Teniendo los autovalores de la ecuación anterior, podemos ahora abordar los vectores propios $\vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ \vdots \\ v_{jn} \end{pmatrix}$ correspondientes, que verifican

$$(\mathbf{W} - \omega_j^2 \mathbf{1}) \vec{v}_j = \vec{0}. \quad (133)$$

Explícitamente (recordemos que $\frac{2\tau}{m\ell} - \omega_j^2 = \frac{\tau}{m\ell} 2 \cos \theta_j$),

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{m\ell} (2 \cos \theta_j v_{j1} - v_{j2}) &= 0, \\ \frac{\tau}{m\ell} (-v_{j1} + 2 \cos \theta_j v_{j2} - v_{j3}) &= 0, \\ &\dots \\ \frac{\tau}{m\ell} (-v_{jn-2} + 2 \cos \theta_j v_{jn-1} - v_{jn}) &= 0, \\ \frac{\tau}{m\ell} (-v_{jn-1} + 2 \cos \theta_j v_{jn}) &= 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Afortunadamente la gimnasia trigonométrica que nos ha conducido a la obtención de los valores propios nos va a llevar, *mutatis mutandis*, a obtener los vectores propios, puesto que las ecs. (134) no son más que una torre de relaciones

$$-v_{jm-1} + 2 \cos \theta_j v_{jm} - v_{jm+1} = 0,$$

con el añadido $v_{j0} = v_{jn+1} = 0$ (que no hace más que reflejar que los extremos de nuestra cuerda discreta están *fixos*). Esas relaciones son idénticas a la recurrencia (ec. (124)) que hemos resuelto para encontrar $(-1)^n \det \mathbf{U}_n(u)$. Veamos por tanto si $v_{jm} = A \sin(m\theta_j)$ son soluciones⁹ de las ecs. (134),

$$\begin{aligned} -v_{jm-1} + 2 \cos \theta_j v_{jm} - v_{jm+1} &= \\ A (-\sin((m-1)\theta_j) + 2 \cos \theta_j \sin(m\theta_j) - \sin((m+1)\theta_j)) &= \\ A \left(-[\cos \theta_j \sin(m\theta_j) - \sin \theta_j \cos(m\theta_j)] + \right. & \\ \quad 2 \cos \theta_j \sin(m\theta_j) - & \\ \quad \left. [\cos \theta_j \sin(m\theta_j) + \sin \theta_j \cos(m\theta_j)] \right) &= 0. \end{aligned} \quad (135)$$

Como cabía esperar, las relaciones se satisfacen perfectamente. El vector propio asociado a ω_j es por tanto

$$\vec{v}_j = \begin{pmatrix} v_{j1} \\ v_{j2} \\ v_{j3} \\ \vdots \\ v_{jn-2} \\ v_{jn-1} \\ v_{jn} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \sin(3\theta_j) \\ \vdots \\ \sin((n-2)\theta_j) \\ \sin((n-1)\theta_j) \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}, \quad \theta_j = \frac{j\pi}{n+1}. \quad (136)$$

⁹En principio, para satisfacer la relación de recurrencia, bastaría $v_{jm} \propto \sin(m'\theta_j)$, las condiciones de contorno obligan sin embargo a $m' = m$.

Para visualizar y entender mejor a qué corresponde el vector propio anterior – i.e. el modo normal j –, introduzcamos las coordenadas x_i a lo largo de la cuerda, tomando el punto fijo de la izquierda como origen. Con ℓ las separaciones en equilibrio, la longitud total de la cuerda discreta es $L = (n + 1)\ell$; la posición de la r -ésima masa es $x_r = r\ell$. Recuperando $v_{jr} = A \sin(r\theta_j) = A \sin\left(\frac{r j \pi}{n+1}\right)$ podemos reemplazar

$$v_{jr} = A \sin\left(\frac{r j \pi}{n+1}\right) = A \sin\left(\frac{x_r}{L} j \pi\right) . \quad (137)$$

Recordemos que v_{jr} es la componente r -ésima del modo normal \vec{v}_j asociado a ω_j , i.e. el desplazamiento de la masa r -ésima con respecto a la posición de equilibrio; según pone de manifiesto ec. (137), en el modo de oscilación j todas las masas se sitúan sobre la curva $y(x) = A \sin\left(\frac{x}{L} j \pi\right)$, en los puntos de coordenadas $(x_1, A \sin\left(\frac{x_1}{L} j \pi\right))$, $(x_2, A \sin\left(\frac{x_2}{L} j \pi\right))$, \dots , $(x_n, A \sin\left(\frac{x_n}{L} j \pi\right))$. La figura 16 muestra los modos normales de un sistema con $n = 10$. En cuanto a las frecuencias propias $\omega_j = 2\sqrt{\frac{\tau}{m\ell}} \sin\left(\frac{j}{n+1} \frac{\pi}{2}\right)$; con $j = 1, \dots, n$, la figura 17 ilustra el espectro de frecuencias propias, también para $n = 10$.

Conociendo valores y vectores propios, estamos en condiciones de proceder a la diagonalización de ec. (121), i.e. a *desacoplar* las ecuaciones. Para ello será necesario normalizar adecuadamente los vectores propios de modo que la obtención de la transformación ortogonal que diagonaliza \mathbf{W} sea inmediata. En el apéndice A figuran los detalles de dos cálculos, la comprobación de la ortogonalidad de vectores propios diferentes $\vec{v}_i, \vec{v}_j, i \neq j$, y la normalización de cualquiera de ellos. Recogemos directamente el resultado:

$$\begin{aligned} \text{valores propios } \omega_j &= 2\sqrt{\frac{\tau}{m\ell}} \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) , \quad \theta_j = \frac{j\pi}{n+1} , \\ \text{vectores propios } \vec{v}_j &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin((n-1)\theta_j) \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix} , \\ &\text{con ortonormalidad } \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} . \end{aligned} \quad (138)$$

4.3. Solución general

Si escribimos ahora

$$\mathbf{W} = U^{-1} \mathbf{W}_D U , \quad U^{-1} = U^T ,$$

la matriz ortogonal de la diagonalización U tiene como filas los vectores propios de \mathbf{W} , i.e.

$$U = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \sin(2\theta_1) & \cdots & \sin((n-1)\theta_1) & \sin(n\theta_1) \\ \sin \theta_2 & \sin(2\theta_2) & \cdots & \sin((n-1)\theta_2) & \sin(n\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin(2\theta_n) & \cdots & \sin((n-1)\theta_n) & \sin(n\theta_n) \end{pmatrix} , \quad U^{-1} = U^T . \quad (139)$$

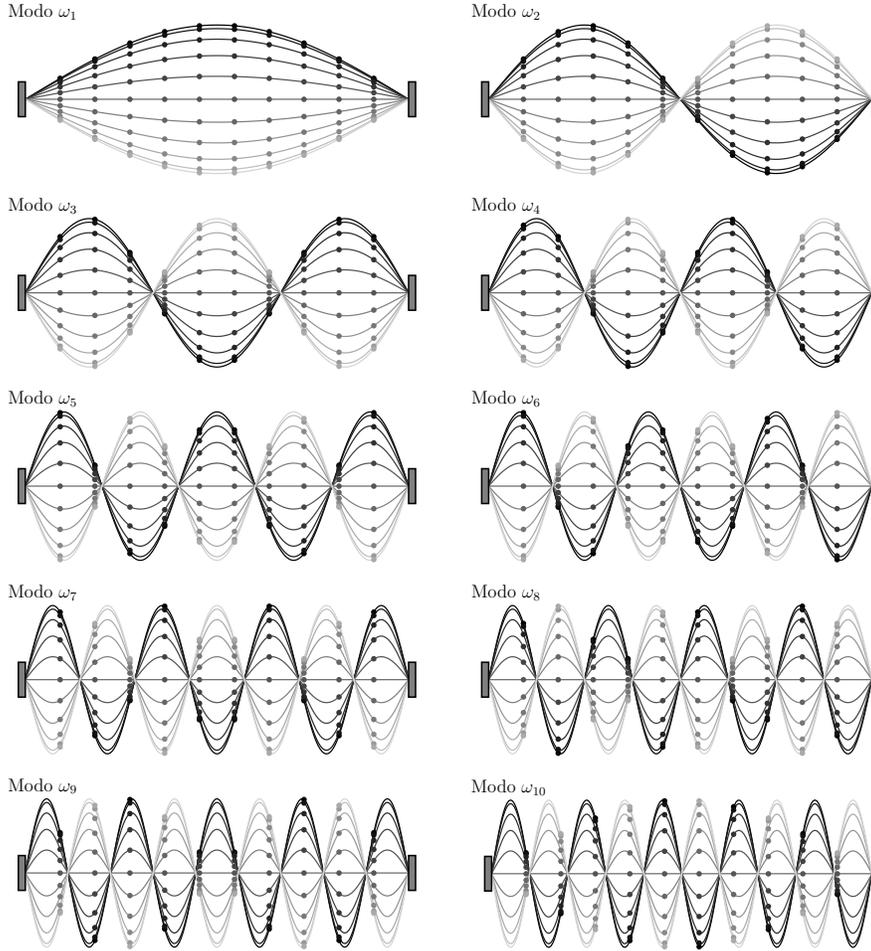


Figura 16: Modos normales de oscilación de una cuerda discreta ($n = 10$).

Regresando a las ecuaciones de movimiento ec. (121), tenemos

$$\ddot{\vec{y}} + \mathbf{W} \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \ddot{\vec{y}} + U^{-1} \mathbf{W}_D U \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow U \ddot{\vec{y}} + \mathbf{W}_D U \vec{y} = \vec{0} .$$

Introducimos $\vec{\eta} = U \vec{y}$ y obtenemos finalmente las ecuaciones desacopladas

$$\ddot{\vec{\eta}} + \mathbf{W}_D \vec{\eta} = \vec{0}, \text{ con } \mathbf{W}_D = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2) . \quad (140)$$

Las soluciones de las ecuaciones (140), expresadas en términos de condiciones iniciales $\eta_k(0)$, $\dot{\eta}_k(0)$, son

$$\eta_j(t) = \eta_j(0) \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\eta}_j(0)}{\omega_j} \sin(\omega_j t) . \quad (141)$$

En términos de los desplazamientos $y_j(t)$, bastará emplear la transformación U^{-1} para pasar de $\vec{\eta}(t)$ a $\vec{y}(t)$ y la transformación U para expresar $\vec{\eta}(0)$, $\dot{\vec{\eta}}(0)$ en

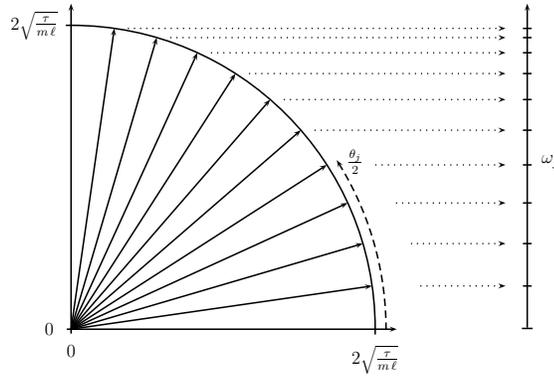


Figura 17: Frecuencias de oscilación de los modos normales de una cuerda discreta.

términos de $\vec{y}(0)$, $\dot{\vec{y}}(0)$, como ya vimos en el planteamiento general. Escribiendo explícitamente los sumatorios en índices mudos,

$$\begin{aligned}
 y_j(t) &= \sum_{a=1}^n \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin(j\theta_a) \eta_a(t) = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{a=1}^n \sin(j\theta_a) \left[\eta_a(0) \cos(\omega_a t) + \frac{\dot{\eta}_a(0)}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right] = \\
 &= \frac{2}{n+1} \sum_{a=1}^n \sin(j\theta_a) \sum_{b=1}^n \sin(b\theta_a) \left[y_b(0) \cos(\omega_a t) + \frac{\dot{y}_b(0)}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right]. \quad (142)
 \end{aligned}$$

Como ya apuntamos anteriormente, el índice j desempeña el papel de la coordenada x ; leyendo en la ecuación (142) el término $\sin(j\theta_a)$ en términos de la coordenada x_j de la j -ésima masa, $\sin(j\theta_a) = \sin\left(\frac{x_j a \pi}{L}\right)$, todas las masas se encuentran sobre la curva

$$y(x, t) = \frac{2}{n+1} \sum_{a=1}^n \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \sum_{b=1}^n \sin(b\theta_a) \left[y_b(0) \cos(\omega_a t) + \frac{\dot{y}_b(0)}{\omega_a} \sin(\omega_a t) \right]. \quad (143)$$

A continuación, armados con las ecuaciones (142) y (143), ilustramos los resultados obtenidos mediante un par de ejemplos.

4.4. Cuerda discreta, ejemplos

Ejemplo 1. El primer ejemplo que consideramos tiene como condiciones iniciales

$$y_j(0) = 0 \quad \forall j \neq 1, \quad \dot{y}_j(0) = 0 \quad \forall j.$$

El movimiento resultante está representado en la figura 18 (página 58), mostrando el estado de todas las masas sobre la cuerda en distintos instantes. Además de las posiciones de las masas, indicadas por los puntos \bullet , la curva gris es la función $y(x, t)$ (según ec. (143)), mientras los segmentos rectilíneos que unen las

masas representan la propia cuerda. El primer diagrama corresponde a $t = 0$: empleando ec. (143),

$$y(x, 0) = \frac{2 y_1(0)}{n+1} \sum_{a=1}^n \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \sin(\theta_a) ,$$

mientras en un instante t

$$y(x, t) = \frac{2 y_1(0)}{n+1} \sum_{a=1}^n \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) \sin(\theta_a) \cos(\omega_a t) .$$

Ejemplo 2. El segundo ejemplo que consideramos tiene como condiciones iniciales

$$y_j(0) = 0 \quad \forall j \neq 5, 6; \quad y_5(0) = y_6(0); \quad \dot{y}_j(0) = 0 \quad \forall j.$$

El movimiento resultante está representado en la figura 19 (página 59); las indicaciones anteriores relativas a la figura 18 también se aplican a la figura 19. En cuanto a $y(x, t)$, tenemos ahora

$$y(x, t) = \frac{2 y_5(0)}{n+1} \sum_{a=1}^n \sin\left(\frac{a\pi x}{L}\right) (\sin(5\theta_a) + \sin(6\theta_a)) \cos(\omega_a t) .$$

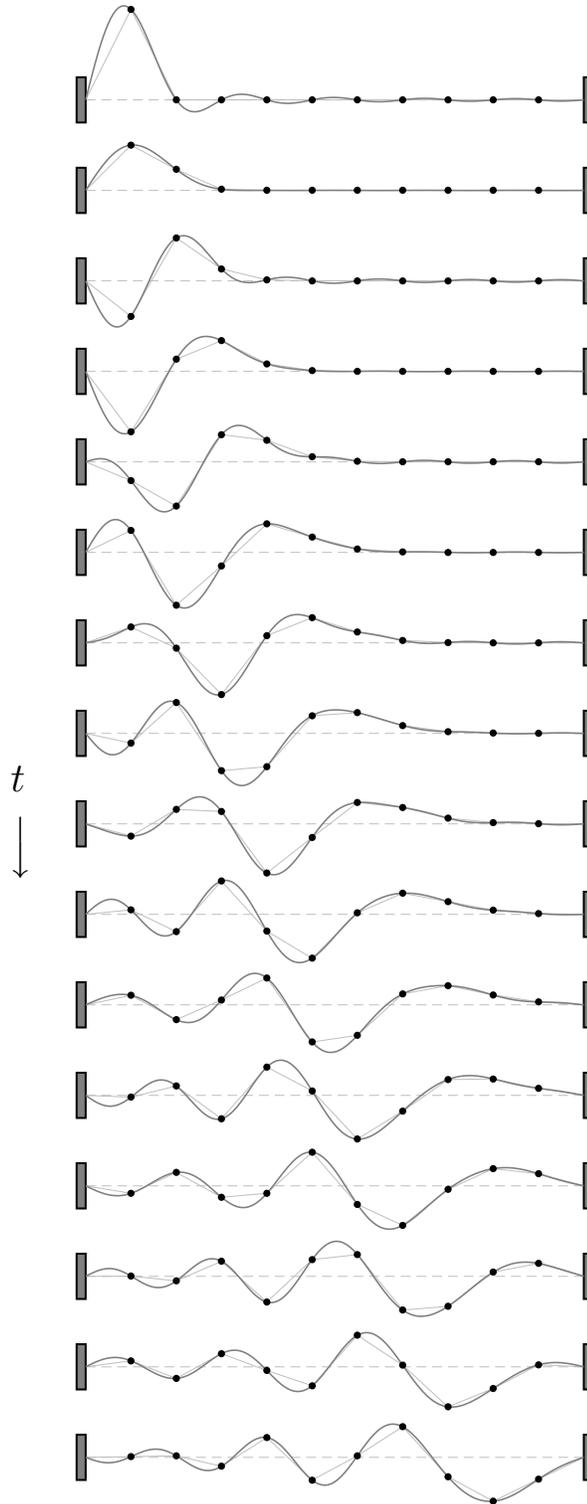


Figura 18: Cuerda discreta, ejemplo 1.

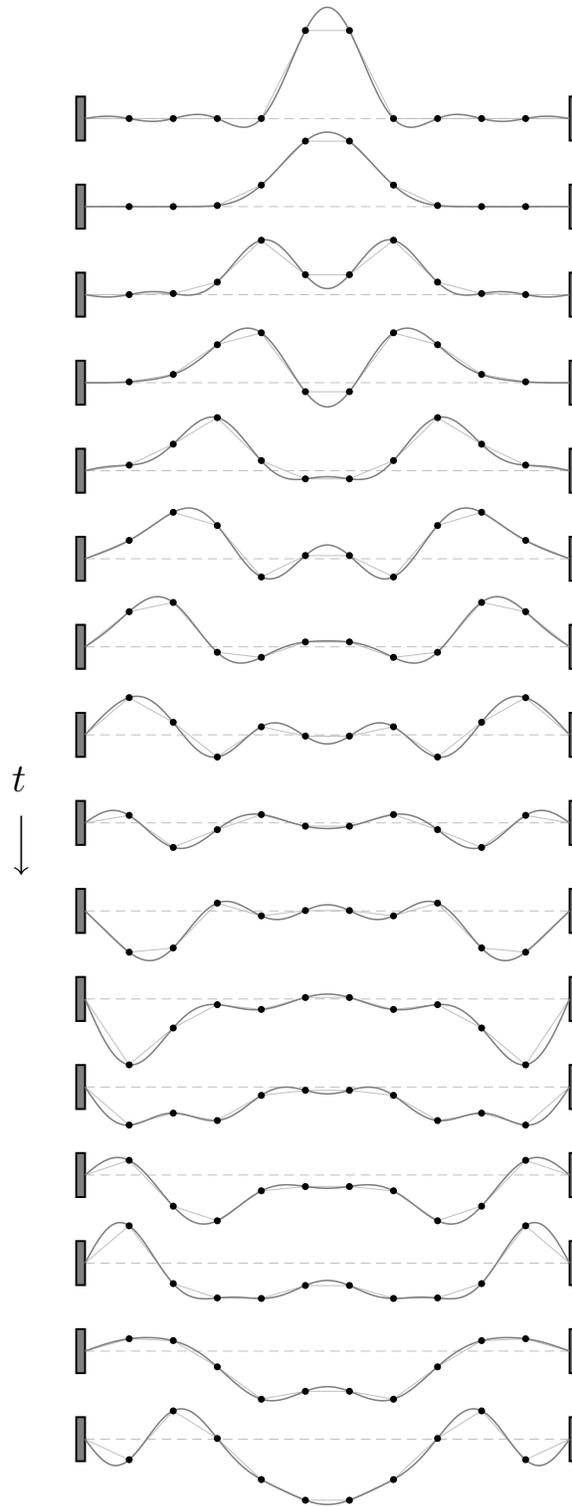


Figura 19: Cuerda discreta, ejemplo 2.

5. Comentario general

Teniendo en cuenta la importancia de gran parte de los conceptos abordados en este tema, merece la pena reflexionar sobre varios aspectos. Nuestro objetivo ha sido en todo momento estudiar la evolución de sistemas alrededor del equilibrio. En el estudio de un sistema con un único grado de libertad, la solución al problema no presenta gran dificultad, ya sea en la descripción más sencilla del sistema (libre y sin amortiguamiento) o en un escenario más elaborado (en presencia de amortiguamiento y fuerzas externas). Al pasar a considerar un sistema con $n > 1$ grados de libertad acoplados, la situación cambia, en principio, de forma notable: no somos capaces de resolver directamente la evolución de cada grado de libertad. Como hemos analizado, la solución pasa por resolver un problema de álgebra frecuente: diagonalizar una matriz. Con esa diagonalización obtenemos lo que hemos denominado *frecuencias propias* y *modos normales* del sistema. Pese a la aparente banalidad del concepto, tiene una interpretación profunda. Hemos sido capaces de reformular un problema con n grados de libertad acoplados como un problema con n grados de libertad, en el que cada uno de ellos evoluciona de forma independiente. Matemáticamente un modo normal no es más que un vector propio de una matriz que describe la dinámica de un sistema. Desde un punto de vista físico un modo normal es un *estado colectivo del sistema*. No es el estado de cualquiera de los grados de libertad originales, es un estado particular del conjunto de todos ellos. Su evolución es la de un simple oscilador armónico (en su caso amortiguado y/o forzado). Un procedimiento en principio sencillo como plantear un problema de álgebra y resolver ecuaciones de movimiento desacopladas para los modos normales resultantes, permite resolver completamente la evolución del sistema.

6. Animaciones

A continuación la lista de animaciones que ilustran distintos aspectos de los apartados anteriores.

- Dos osciladores acoplados, modos normales.
 - T03_DosOsciladores_ModoSimetrico.avi
 - T03_DosOsciladores_ModoAntisimetrico.avi
 - T03_DosOsciladores_ModoSimetrico_Amortiguado.avi
 - T03_DosOsciladores_ModoAntisimetrico_Amortiguado.avi
- Dos osciladores acoplados, ejemplos.
 - T03_DosOsciladores_Ejemplo01.avi
 - T03_DosOsciladores_Ejemplo02.avi
 - T03_DosOsciladores_Ejemplo01_Amortiguado.avi
 - T03_DosOsciladores_Ejemplo02_Amortiguado.avi
- Acoplamiento débil de dos osciladores.
 - T03_DosOsciladores_AcoplamientoDebil.avi
- Dos osciladores acoplados forzados, ejemplos.
 - T03_DosOsciladores_Forzado01.avi
 - T03_DosOsciladores_Forzado02.avi
 - T03_DosOsciladores_Forzado03.avi
 - T03_DosOsciladores_Forzado04.avi
- Molécula lineal triatómica, modos normales.
 - T03_Molecula_Modo2.avi
 - T03_Molecula_Modo3.avi
- Molécula lineal triatómica, ejemplos.
 - T03_Molecula_Ejemplo01.avi
 - T03_Molecula_Ejemplo02.avi
- Cuerda discreta ($n = 10$), modos normales.
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_01.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_02.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_03.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_04.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_05.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_06.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Modo_07.avi

- T03_CuerdaDiscreta_Modo_08.avi
- T03_CuerdaDiscreta_Modo_09.avi
- T03_CuerdaDiscreta_Modo_10.avi
- Cuerda discreta ($n = 10$), ejemplos.
 - T03_CuerdaDiscreta_Ejemplo01.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Ejemplo01_Amortiguada.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Ejemplo02.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_Ejemplo02_Amortiguada.avi
- Cuerda discreta ($n = 10$), ejemplos de oscilaciones forzadas.
 - T03_CuerdaDiscreta_ForzadaModo01.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_ForzadaModo05.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_ForzadaModo10.avi
 - T03_CuerdaDiscreta_ForzadaAltaFrecuencia.avi

La lista de animaciones correspondientes al apéndice B se encuentra en el propio apéndice.

Claves del tema

- Ecuaciones de movimiento acopladas.
- Diagonalización y ecuaciones de movimiento desacopladas.
- Modos normales de un sistema.

A. * Cuerda discreta, ortonormalidad de los vectores propios

En este apéndice comprobamos la ortogonalidad de los vectores propios de \mathbf{W} en ec. (121),

$$\vec{v}_j = N_j \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix},$$

con N_j las constantes de normalización a determinar. Ortonormalidad de los \vec{v}_j significa $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \delta_{jk}$. Calculemos $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$, con $j \neq k$:

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = N_j N_k \sum_{a=1}^n \sin(a\theta_j) \sin(a\theta_k).$$

Empleando la identidad

$$\sin p \sin q = \frac{1}{2}(\cos(p - q) - \cos(p + q)),$$

reescribimos

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \frac{N_j N_k}{2} \left[\sum_{a=1}^n \cos(a(\theta_j - \theta_k)) - \sum_{a=1}^n \cos(a(\theta_j + \theta_k)) \right]. \quad (144)$$

Veamos ahora cómo calcular estas sumas. En primer lugar,

$$\sum_{a=1}^n \cos(a\delta) = \cos \delta + \cos(2\delta) + \dots + \cos(n\delta) = \text{Re} \left[\sum_{a=1}^n e^{ia\delta} \right].$$

Definimos $S_\delta \equiv e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{in\delta}$, con lo que

$$\begin{aligned} S_\delta &= e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{in\delta}, \\ e^{-i\delta} S_\delta &= 1 + e^{i\delta} + \dots + e^{i(n-1)\delta}. \end{aligned}$$

Restando ambas relaciones,

$$e^{in\delta} - 1 = (1 - e^{-i\delta}) S_\delta.$$

Multiplicamos ahora por $1 - e^{i\delta}$ para obtener

$$e^{in\delta} - e^{i(n+1)\delta} + e^{i\delta} - 1 = (2 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}) S_\delta = 2(1 - \cos \delta) S_\delta,$$

y ya estamos en condiciones de tomar la parte real

$$\cos(n\delta) - \cos((n+1)\delta) + \cos \delta - 1 = 2(1 - \cos \delta) \text{Re}[S_\delta],$$

de donde llegamos al resultado para las sumas que nos interesan,

$$\text{Re}[S_\delta] = \frac{\cos(n\delta) - \cos((n+1)\delta)}{2(1 - \cos \delta)} - \frac{1}{2}.$$

Tendremos por tanto

$$\sum_{a=1}^n \cos(a(\theta_j \pm \theta_k)) = \frac{\cos(n(\theta_j \pm \theta_k)) - \cos((n+1)(\theta_j \pm \theta_k))}{2(1 - \cos(\theta_j \pm \theta_k))} - \frac{1}{2}.$$

Con $\theta_j = j \frac{\pi}{n+1}$,

$$\cos((n+1)(\theta_j \pm \theta_k)) = \cos((j \pm k)\pi) = (-1)^{j \pm k} = (-1)^{j-k} = (-1)^{j+k}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \cos(n(\theta_j \pm \theta_k)) &= \cos\left((n+1-1)\frac{(j \pm k)\pi}{n+1}\right) = \\ &= \cos\left((j \pm k)\pi - \frac{(j \pm k)\pi}{n+1}\right) = \\ &= \underbrace{\cos((j \pm k)\pi)}_{(-1)^{j \pm k}} \cos\left(\frac{(j \pm k)\pi}{n+1}\right) + \underbrace{\sin((j \pm k)\pi)}_0 \sin\left(\frac{(j \pm k)\pi}{n+1}\right) = \\ &= (-1)^{j \pm k} \cos(\theta_j \pm \theta_k). \end{aligned}$$

Con estos dos últimos resultados parciales,

$$\sum_{a=1}^n \cos(a(\theta_j \pm \theta_k)) = \frac{(-1)^{j \pm k} \cos(\theta_j \pm \theta_k) - (-1)^{j \pm k}}{2(1 - \cos(\theta_j \pm \theta_k))} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} (1 + (-1)^{j \pm k}),$$

y podemos regresar a

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = \frac{N_j N_k}{2} \left[-\frac{1}{2} (1 + (-1)^{j-k}) + \frac{1}{2} (1 + (-1)^{j+k}) \right] = 0.$$

Los vectores \vec{v}_j son ortogonales. Veamos ahora la normalización adecuada. Regresando al inicio,

$$\begin{aligned} \vec{v}_j \cdot \vec{v}_j &= N_j^2 \sum_{a=1}^n \sin^2(a\theta_j) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n [1 - \cos(2a\theta_j)] = \\ N_j^2 \left\{ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \cos(2a\theta_j) \right\} &= N_j^2 \left\{ \frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(2n\theta_j) - \cos(2(n+1)\theta_j)}{4(1 - \cos(2\theta_j))} \right\}. \end{aligned} \quad (145)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \cos(2(n+1)\theta_j) &= 1, \\ \cos(2n\theta_j) &= \cos(2(n+1)\theta_j) \cos(2\theta_j) + \sin(2(n+1)\theta_j) \sin(2\theta_j) = \cos(2\theta_j), \end{aligned}$$

con lo que

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(2n\theta_j) - \cos(2(n+1)\theta_j)}{4(1 - \cos(2\theta_j))} = \frac{n+1}{2},$$

y la normalización de los estados es

$$\vec{v}_j \cdot \vec{v}_j = N_j^2 \frac{n+1}{2}.$$

Con $N_j = \sqrt{\frac{2}{n+1}}$ los vectores propios debidamente ortonormales son

$$\vec{v}_j = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{pmatrix} \sin \theta_j \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}. \quad (146)$$

los desplazamientos x_i alrededor de la posición de equilibrio (x_i es el desplazamiento de la masa i a lo largo del correspondiente eje, $x_i > 0$ cuando la masa se *aleja* de O). Al perturbar el sistema alrededor del equilibrio, la energía cinética del sistema es la energía cinética de las masas,

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) . \quad (147)$$

La energía potencial del sistema es la acumulada en los muelles. La correspondiente a los muelles que conectan las masas con O es

$$\frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) . \quad (148)$$

Veamos ahora cuál es la energía potencial asociada a los muelles que conectan las masas entre sí. Tomemos por ejemplo el muelle que conecta las masas 1 y 2. En reposo tiene longitud $\sqrt{2}\ell$. Con desplazamientos x_1 y x_2 de las masas, su longitud es

$$\sqrt{(\ell + x_1)^2 + (\ell + x_2)^2} ,$$

con lo que su estiramiento o contracción es

$$\Delta_{(12)} = \sqrt{(\ell + x_1)^2 + (\ell + x_2)^2} - \sqrt{2}\ell . \quad (149)$$

Desarrollamos la raíz al orden más bajo en x_1 y x_2 ,

$$\begin{aligned} \sqrt{(\ell + x_1)^2 + (\ell + x_2)^2} &= \sqrt{2\ell^2 + 2\ell(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2} = \\ &= \sqrt{2\ell^2 \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{\ell} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2\ell^2} \right)} = \\ &= \sqrt{2}\ell \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x_1 + x_2}{\ell} + \dots \right) = \sqrt{2}\ell + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}(x_i^2) + \dots \end{aligned}$$

de modo que

$$\Delta_{(12)} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} + \dots \quad (150)$$

La correspondiente energía potencial, al orden más bajo en los desplazamientos, es $\frac{1}{2}k\Delta_{(12)}^2 = \frac{k}{4}(x_1 + x_2)^2$. Por tanto la energía potencial asociada a los muelles que conectan las masas entre sí es

$$\frac{k}{4} \left((x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1)^2 \right) . \quad (151)$$

La energía potencial es por tanto

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \right) . \quad (152)$$

La lagrangiana del sistema es $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}k \left(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \right) . \end{aligned} \quad (153)$$

Las ecuaciones de movimiento $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ son

$$\ddot{\vec{x}} + \mathbf{W} \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{pmatrix} + \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (154)$$

B.2. Solución

La matriz \mathbf{W} en ec. (154) es simétrica. Procedemos como ya es habitual: obtenemos las frecuencias propias ω^2 calculando las raíces del polinomio característico $\det(\mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{1})$. Con $\omega^2 = \lambda \frac{k}{2m}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m}{k}\right)^4 \det(\mathbf{W} - \omega^2 \mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \\ (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \\ (4 - \lambda)^2 [(4 - \lambda)^2 - 1] - (4 - \lambda)^2 - [(4 - \lambda)^2 - 1] - 1 - 1 - (4 - \lambda)^2 + 1 &= \\ = (4 - \lambda)^4 - 4(4 - \lambda)^2 = (4 - \lambda)^2((4 - \lambda)^2 - 4) = (4 - \lambda)^2(6 - \lambda)(2 - \lambda). & \quad (155) \end{aligned}$$

Las frecuencias propias son por tanto

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 2 \frac{k}{m}, \quad \omega_3^2 = 3 \frac{k}{m}.$$

Nótese que ω_2^2 tiene multiplicidad 2, mientras ω_1^2 y ω_3^2 tienen multiplicidad 1. Obtenemos los correspondientes vectores propios resolviendo $(\mathbf{W} - \omega_j^2 \mathbf{1}) \vec{v}_j = \vec{0}$.

Para ω_1^2 , $(\mathbf{W} - \omega_1^2 \mathbf{1}) \vec{v}_1 = \vec{0}$ es

$$\frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \end{pmatrix} = \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 2v_{11} + v_{12} + v_{14} \\ v_{11} + 2v_{12} + v_{13} \\ v_{12} + 2v_{13} + v_{14} \\ v_{11} + v_{13} + 2v_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (156)$$

con lo que el vector propio (normalizado) es

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para ω_2^2 , $(\mathbf{W} - \omega_2^2 \mathbf{1}) \vec{v}_2 = \vec{0}$ es

$$\frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{24} \end{pmatrix} = \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} v_{22} + v_{24} \\ v_{21} + v_{23} \\ v_{22} + v_{24} \\ v_{21} + v_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (157)$$

con lo que, siendo ω_2^2 de multiplicidad 2, el subespacio propio es

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

Podemos, por ejemplo, escoger la base, adecuadamente normalizada,

$$\vec{v}_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que la libertad para elegir la base en el subespacio propio asociado a ω_2^2 nos permite elegir libremente otra base, como por ejemplo

$$\vec{w}_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

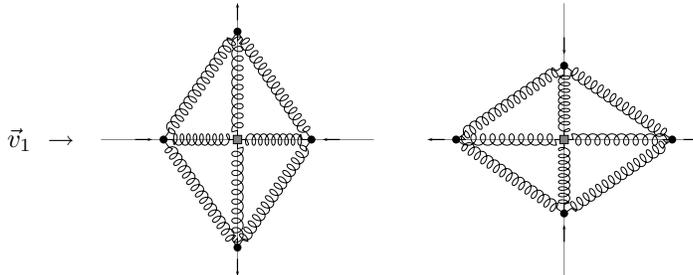
Para ω_3^2 , $(\mathbf{W} - \omega_3^2 \mathbf{1})\vec{v}_3 = \vec{0}$ es

$$\frac{k}{2m} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ v_{34} \end{pmatrix} = \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} -2v_{31} + v_{32} + v_{34} \\ v_{31} - 2v_{32} + v_{33} \\ v_{32} - 2v_{33} + v_{34} \\ v_{31} + v_{33} - 2v_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{158}$$

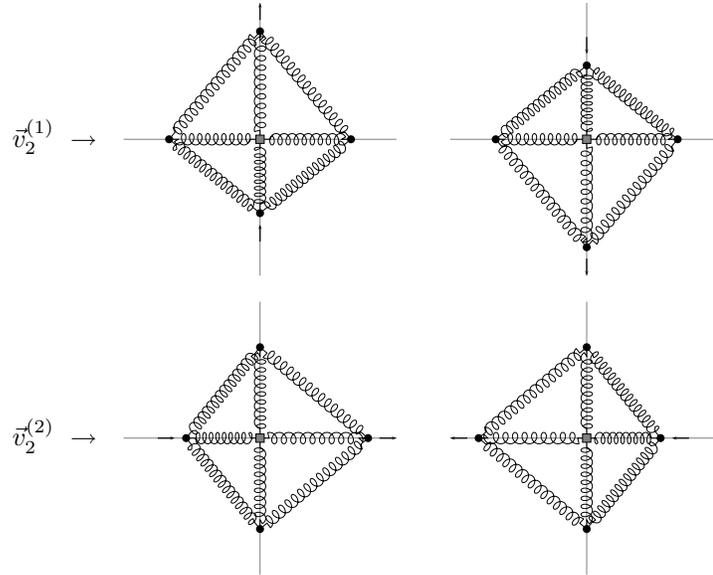
con lo que el vector propio (normalizado) es

$$\vec{v}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

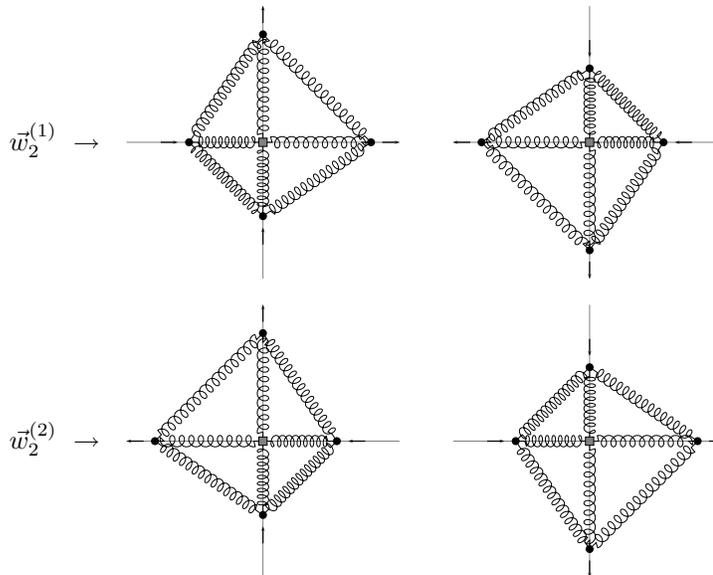
El primer modo normal tiene la siguiente forma,



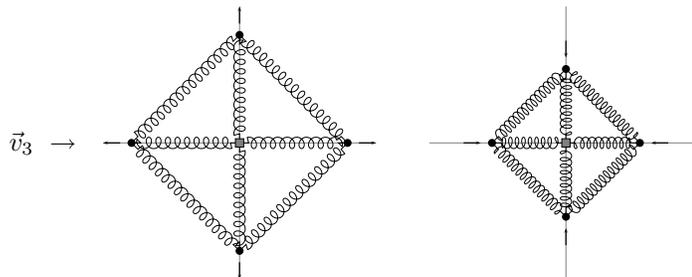
Para los dos modos normales asociados a la segunda frecuencia propia tenemos



Con otra elección de base tendríamos por ejemplo



Finalmente, el modo asociado a ω_3^2 :



Con lo anterior, la matriz (ortogonal) del cambio de base que diagonaliza \mathbf{W} ,

$$U \mathbf{W} U^T = \mathbf{W}_D = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}, \quad (159)$$

es (escogiendo $\vec{v}_2^{(1)}$ y $\vec{v}_2^{(2)}$ para el subespacio asociado a ω_2^2)

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (160)$$

Las soluciones $\vec{x}(t)$ (ec. (51)) son

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \frac{x_1(0) - x_3(0)}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_3(0)}{2} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \\ & + \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)}{4} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) + \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \\ & + \frac{x_1(0) - x_2(0) + x_3(0) - x_4(0)}{4} \cos(\omega_3 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) - \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3}, \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = & \frac{x_2(0) - x_4(0)}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_2(0) - \dot{x}_4(0)}{2} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \\ & + \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)}{4} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) + \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \\ & + \frac{x_2(0) - x_1(0) + x_4(0) - x_3(0)}{4} \cos(\omega_3 t) + \frac{\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) + \dot{x}_4(0) - \dot{x}_3(0)}{4} \frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3}, \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = & \frac{x_3(0) - x_1(0)}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_3(0) - \dot{x}_1(0)}{2} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \\ & + \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)}{4} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) + \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \\ & + \frac{x_1(0) - x_2(0) + x_3(0) - x_4(0)}{4} \cos(\omega_3 t) + \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) - \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3}, \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = & \frac{x_4(0) - x_2(0)}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}_4(0) - \dot{x}_2(0)}{2} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \\ & + \frac{x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) + x_4(0)}{4} \cos(\omega_2 t) + \frac{\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(0) + \dot{x}_4(0)}{4} \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \\ & + \frac{x_2(0) - x_1(0) + x_4(0) - x_3(0)}{4} \cos(\omega_3 t) + \frac{\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) + \dot{x}_4(0) - \dot{x}_3(0)}{4} \frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3}. \end{aligned} \quad (164)$$

Hemos resuelto el movimiento del sistema empleando los métodos habituales. Veamos ahora otro enfoque.

B.3. Simetría

El sistema considerado posee un alto grado de simetría: si observamos el sistema (figura 20), la lagrangiana \mathcal{L} o las ecuaciones de movimiento, no es difícil convencerse de ello. En este apartado analizamos el sistema a partir de sus simetrías (i.e. olvidamos completamente que ya hemos resuelto completamente la trayectoria del sistema en el apartado anterior). Empezamos obteniendo las simetrías presentes y viendo que dan lugar a una estructura algebraica bien conocida, un *grupo*. Analizando su acción sobre los grados de libertad x_i , vamos a obtener los modos normales del sistema, y por tanto las soluciones. Adicionalmente, utilizaremos estos resultados para resolver sin dificultad la dinámica de varios sistemas semejantes al estudiado.

B.3.1. Simetrías del sistema

Empezamos recordando la lagrangiana en ec. (153)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2) - \frac{1}{2}k(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1), \quad (153)$$

y las ecuaciones de movimiento en ec. (154),

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{2m}(4x_1 + x_2 + x_4) &= 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{2m}(4x_2 + x_1 + x_3) &= 0, \\ \ddot{x}_3 + \frac{k}{2m}(4x_3 + x_2 + x_4) &= 0, \\ \ddot{x}_4 + \frac{k}{2m}(4x_4 + x_1 + x_3) &= 0, \end{aligned} \quad (154)$$

¿Qué ocurre si intercambiamos simultáneamente $x_1 \mapsto x_3$ y $x_3 \mapsto x_1$? La lagrangiana es *invariante*, i.e.

$$\mathcal{L}(x_3, x_2, x_1, x_4, \dot{x}_3, \dot{x}_2, \dot{x}_1, \dot{x}_4) = \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4),$$

mientras las ecuaciones de movimiento cambian a

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{k}{2m}(4x_1 + x_2 + x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{2m}(4x_2 + x_1 + x_3) &= 0 \\ \ddot{x}_3 + \frac{k}{2m}(4x_3 + x_2 + x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_4 + \frac{k}{2m}(4x_4 + x_1 + x_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \mapsto \left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_3 + \frac{k}{2m}(4x_3 + x_2 + x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{2m}(4x_2 + x_1 + x_3) &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \frac{k}{2m}(4x_1 + x_2 + x_4) &= 0 \\ \ddot{x}_4 + \frac{k}{2m}(4x_4 + x_1 + x_3) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

i.e. se intercambia el orden de la primera y la tercera, pero las ecuaciones son *idénticas*. La transformación $\left\{ \begin{smallmatrix} x_1 \mapsto x_3 \\ x_3 \mapsto x_1 \end{smallmatrix} \right\}$ es una simetría del sistema. Corresponde a intercambiar los grados de libertad x_1 y x_3 , o sencillamente los índices 1 y 3 con los que hemos etiquetado los grados de libertad x_i . No es más que una permutación (de hecho una trasposición) de los índices 1 y 3, el *ciclo* (13); los índices 2 y 4 permanecen inalterados. La transformación completa es

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\} \mapsto \left\{ \begin{array}{c} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{array} \right\},$$

i.e., además de (13) tenemos los ciclos triviales (2) y (4), pero como es habitual, en lugar de escribir (13)(2)(4) al completo, escribimos sencillamente (13). La identidad, también simetría (trivial) del sistema, es $e = (1)(2)(3)(4)$. No son las únicas. No es difícil comprobar (por inspección y/o combinando reiteradamente las que vayamos descubriendo) que las siguientes permutaciones también son simetrías del sistema:

$$\{(24), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (1234), (1432)\} .$$

Tenemos por tanto un conjunto de transformaciones que son simetrías del sistema, y que corresponden a permutaciones de los índices de los grados de libertad. Son

$$\{e, (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (1234), (1432)\} .$$

Ahora bien, este conjunto de transformaciones tiene una estructura: estas permutaciones, con el producto habitual de las mismas, forman un *grupo*. Es decir, cumplen las siguientes propiedades: el producto de dos elementos también pertenece al conjunto, el producto es *asociativo* – i.e. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ –, existe un elemento *neutro* – la identidad –, y todo elemento tiene inverso. Desde un punto de vista físico resulta completamente natural que las simetrías del sistema tengan, como estructura, la de un grupo. El cuadro 1 recoge la estructura completa de nuestro grupo.

e	(13)	(24)	(13)(24)	(12)(34)	(14)(23)	(1234)	(1432)
(13)	e	(13)(24)	(24)	(1234)	(1432)	(12)(34)	(14)(23)
(24)	(13)(24)	e	(13)	(1432)	(1234)	(14)(23)	(12)(34)
(13)(24)	(24)	(13)	e	(14)(23)	(12)(34)	(1432)	(1234)
(12)(34)	(1432)	(1234)	(14)(23)	e	(13)(24)	(24)	(13)
(14)(23)	(1234)	(1432)	(12)(34)	(13)(24)	e	(13)	(24)
(1234)	(14)(23)	(12)(34)	(1432)	(13)	(24)	(13)(24)	e
(1432)	(12)(34)	(14)(23)	(1234)	(24)	(13)	e	(13)(24)

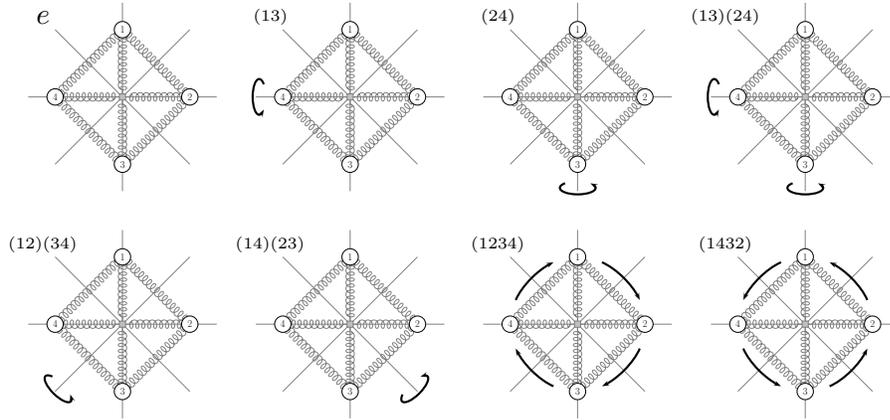
Cuadro 1: Tabla de composición: en la posición ij figura el producto del elemento i por el elemento j (calculando de derecha a izquierda) con los elementos i, j ordenados según la primera fila o la primera columna.

Este grupo tiene nombre: D_4 , el grupo diédrico 4. No es más que el conjunto de simetrías de un cuadrado según ilustra la figura 21 (página 74).

Ya conocemos las simetrías del sistema; nos interesa, no obstante, lo que ocurre con los grados de libertad x_i . El primer paso es detallar la acción de las simetrías sobre el espacio de los grados de libertad x_i : bastará asociar a cada elemento $g \in D_4$ una matriz $D[g]$ que realice la acción de la correspondiente permutación de índices sobre el vector \vec{x} . Por ejemplo, al elemento (13) le corresponderá la siguiente matriz $D[(13)]$,

$$D[(13)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

Escribiremos explícitamente el resto de matrices cuando sea necesario.

Figura 21: Permutaciones y D_4 .

Dado $g \in D_4$, las ecuaciones de movimiento de los grados de libertad transformados por $D[g]$, es decir, las ecuaciones de movimiento de $D[g] \vec{x}$, son

$$D[g] \ddot{\vec{x}} + \mathbf{W} D[g] \vec{x} = \vec{0} .$$

Ahora bien, hemos visto al inicio de esta sección para (13) en particular, y es cierto para todas las transformaciones del grupo, que aplicando la transformación $D[g]$ a $\ddot{\vec{x}} + \mathbf{W} \vec{x} = \vec{0}$, lo que conseguimos es reordenar las ecuaciones de movimiento según g y tenemos sencillamente

$$D[g] (\ddot{\vec{x}} + \mathbf{W} \vec{x}) = \vec{0}, \rightarrow D[g] \ddot{\vec{x}} + D[g] \mathbf{W} \vec{x} = \vec{0} .$$

Comparando ambas obtenemos algo interesante, $\mathbf{W} D[g] = D[g] \mathbf{W}$; \mathbf{W} conmuta con la matriz que representa cualquiera de las simetrías de la tabla 1. Trivialmente,

$$\mathbf{W} D[g] = D[g] \mathbf{W} \Leftrightarrow D[g] \mathbf{W} D[g]^{-1} = \mathbf{W}, \quad \forall g \in D_4 .$$

Matemáticamente, que el sistema estudiado sea simétrico bajo transformaciones de D_4 , significa que \mathbf{W} conmuta con todas las $D[g]$, que representan las transformaciones de D_4 actuando en el espacio (vectorial) de los grados de libertad del sistema; podemos decir, equivalentemente, que al transformar \mathbf{W} con cualquier $D[g]$, i.e. $W \mapsto D[g] \mathbf{W} D[g]^{-1}$, \mathbf{W} es *invariante*. ¿Qué tiene de especial el que \mathbf{W} y $D[g]$ conmuten? Contestar esta pregunta requiere una pequeña excursión algebraica que no es particular de nuestro problema: consideremos dos matrices A y B que conmutan, $AB = BA$. Si \vec{v} es un vector propio de A asociado al valor propio α ,

$$A \vec{v} = \alpha \vec{v} .$$

Tenemos entonces $BA \vec{v} = B \alpha \vec{v}$, que no es más que

$$AB \vec{v} = \alpha B \vec{v} \text{ i.e. } A(B \vec{v}) = \alpha (B \vec{v}) . \quad (165)$$

Leamos la ecuación ec. (165) con detenimiento. Si \vec{v} es propio de A asociado al valor propio α , entonces $B \vec{v}$ también lo es: $B \vec{v}$ pertenece al mismo subespacio

propio de A que \vec{v} . Si \vec{v} es propio de A con multiplicidad 1, entonces, necesariamente, $B\vec{v} \propto \vec{v}$, i.e., $B\vec{v} = \beta\vec{v}$, con lo que \vec{v} es *también* propio de B . Si en cambio \vec{v} es propio de A con multiplicidad mayor que 1, B transforma \vec{v} en otro vector del mismo subespacio propio de A : es posible realizar un cambio de base que afecta tan solo a ese subespacio propio, con el cual $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$ de modo que \vec{v}' sea propio de B también. Esta pequeña discusión nos permite concluir que, si A y B conmutan, entonces es posible encontrar una base de vectores que son propios *tanto de A como de B* . Si no hay valores propios degenerados, el resultado es inmediato; en caso de existir degeneración en alguno de los subespacios propios, requerirá una elección adecuada de base en esos subespacios. Regresando a nuestro problema, ¿en qué medida nos es útil lo anterior? Puesto que para cualquier $g \in D_4$ tenemos $D[g]\mathbf{W} = \mathbf{W}D[g]$, podemos escoger un elemento $g \in D_4$ y diagonalizar simultáneamente $D[g]$ y \mathbf{W} . Ahora bien, si $D[g]$ tiene valores propios degenerados, lo que de entrada conseguiremos será diagonalizar \mathbf{W} *por bloques* (reduciendo el problema a la diagonalización de una matriz menor), aunque avanza en la buena dirección, lo que necesitamos es diagonalizar \mathbf{W} completamente. La discusión anterior nos lo va a permitir: si en lugar de un único elemento de D_4 consideramos distintos $g \in D_4$, y encontramos vectores propios de las $D[g]$ con multiplicidad 1, serán automáticamente propios de \mathbf{W} . Es más, si encontramos un vector propio tanto de $D[g_1]$ como de $D[g_2]$, y la multiplicidad de los valores propios correspondientes es mayor que 1 para ambos, pero ese vector propio genera el único subespacio común a los subespacios propios considerados de $D[g_1]$ y $D[g_2]$, *también* será propio de \mathbf{W} (como hemos visto, \mathbf{W} transforma el vector propio de $D[g_1]$ en otro del mismo subespacio y si eso ocurre también para $D[g_2]$ y tan solo tienen en común un espacio de dimensión uno, entonces el vector propio también es, necesariamente, propio de \mathbf{W}). Analizando los subespacios propios de todas las $D[g]$ esperamos obtener vectores propios de \mathbf{W} con los que diagonalizar y resolver el movimiento del sistema. Veamos por tanto qué valores y vectores propios tienen las matrices $D[g]$. Las siguientes ecuaciones muestran las matrices $D[g]$, los valores propios λ , sus multiplicidades d_λ y los vectores/espacios propios \vec{v}_λ .

$$D[(13)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 3 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ 0 \\ -\alpha_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (166)$$

$$D[(24)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 3 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_4 \\ 0 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (167)$$

$$D[(13)(24)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_3 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (168)$$

$$D[(12)(34)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (169)$$

$$D[(14)(23)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 2 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \\ -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (170)$$

$$D[(1234)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = i \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -i\alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ i\alpha_3 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -i \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ i\alpha_4 \\ -\alpha_4 \\ -i\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (171)$$

$$D[(1432)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = i \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ i\alpha_3 \\ -\alpha_3 \\ -i\alpha_3 \end{pmatrix}, \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -i \\ d_\lambda = 1 \end{array} \right\}, \vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ -i\alpha_4 \\ -\alpha_4 \\ i\alpha_4 \end{pmatrix}, \quad (172)$$

Conocidos los vectores y valores propios de las distintas $D[g]$, pasamos a buscar la base ortonormal que nos permitirá diagonalizar \mathbf{W} . En ec. (166) tenemos un primer vector (normalizado), asociado a un subespacio con $d_\lambda = 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Continuamos con ec. (167), que nos proporciona un segundo vector asociado a un subespacio con $d_\lambda = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, ec. (171) nos proporciona los dos vectores restantes¹⁰,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ordenamos los vectores obtenidos de la siguiente forma,

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y obtenemos la matriz del cambio de base U disponiéndolos por filas,

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$U \mathbf{W} U^T = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leemos directamente las frecuencias propias $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$, $\omega_2^2 = 2\frac{k}{m}$ y $\omega_3^2 = 3\frac{k}{m}$. Con esta información (modos normales en la matriz U y frecuencias correspondientes ω_i^2) queda resuelto el problema (hemos ordenado los vectores propios de modo que todo coincida con lo obtenido siguiendo el procedimiento habitual del apartado B.2). Resumimos en qué modo la simetría del problema nos ha permitido resolver su evolución.

- Hemos identificado las simetrías del sistema, concluyendo que para cualquier g del conjunto, la matriz que representa su acción sobre los grados de libertad, $D[g]$, cumple $\mathbf{W}D[g] = D[g]\mathbf{W}$.
- Hemos analizado qué implica que se verifique esta propiedad de conmutación: es posible obtener los vectores propios de \mathbf{W} (i.e. los modos normales) estudiando el problema de valores propios para las distintas $D[g]$.
- Analizados los valores y vectores propios de las $D[g]$, hemos construido el cambio de base ortogonal que diagonaliza \mathbf{W} y hemos obtenido las frecuencias propias. Al margen de la invariancia de \mathbf{W} bajo las transformaciones $D[g]$, no hemos resuelto el problema estudiando \mathbf{W} sino sus simetrías: en otras palabras, la simetría del problema es suficiente para resolverlo completamente.

¹⁰Puede resultar sorprendente que tanto $D[(1234)]$ como $D[(1432)]$ tengan valores y vectores propios *complejos*, ahora bien, mientras el resto de matrices $D[g]$ son simétricas, ni $D[(1234)]$ ni $D[(1432)]$ lo son. Son matrices *normales* y se diagonalizan mediante una transformación unitaria en lugar de mediante una transformación ortogonal. Los vectores propios complejos en ec. (171) y en ec. (172) son, sin embargo, propios de \mathbf{W} , y esto nos indica que \mathbf{W} tiene necesariamente un subespacio propio con multiplicidad $d_\lambda > 1$.

Puede parecer que para resolver un problema que no es especialmente difícil, en lugar de hacerlo de la forma habitual (como en el apartado B.2), nos hemos embarcado en un recorrido mucho más complicado para llegar a la misma solución. Los beneficios de haber recorrido “el camino de la simetría” van más allá de lo inmediato. Consideremos los sistemas de la figura 22 que difieren del estudiado en varios detalles.

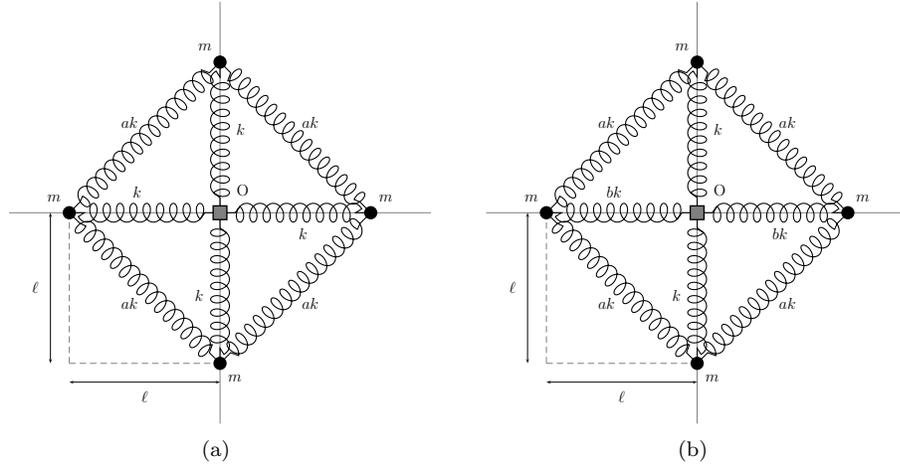


Figura 22: Modificaciones del sistema de la figura 20.

- En el sistema de la figura 22(a), las constantes de recuperación de los muelles que interconectan las masas son idénticas, pero diferentes a las de los muelles que conectan las masas con el centro O (la constante adimensional a parametriza la modificación).
- En el sistema de la figura 22(b), además de la modificación anterior, la constante de recuperación de dos de los muelles interiores también se ha modificado (según indica la nueva constante adimensional b).

Para resolver estas variantes del problema, modificamos ec. (152), que pasa a ser

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}k \left((a+1)(x_1^2 + x_3^2) + (a+b)(x_2^2 + x_4^2) + a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1) \right). \quad (173)$$

Con b genérico, \mathcal{V} corresponde al sistema de la figura 22(b); con $b = 1$ obtenemos el sistema de la figura 22(a) (y con $a = b = 1$ recuperamos el sistema original).

La matriz \mathbf{W} en $\ddot{\vec{x}} + \mathbf{W}\vec{x} = \vec{0}$ pasa a ser $\mathbf{W}(a, b)$ con

$$\mathbf{W}(a, b) = \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 2(a+1) & a & 0 & a \\ a & 2(a+b) & a & 0 \\ 0 & a & 2(a+1) & a \\ a & 0 & a & 2(a+b) \end{pmatrix}. \quad (174)$$

Siguiendo el procedimiento habitual deberíamos obtener los valores propios de $\mathbf{W}(a, b)$, los correspondientes vectores propios, etc, i.e. resolver de nuevo el problema desde el principio. El esfuerzo invertido en analizar de las simetrías nos permite en cambio acercarnos rápidamente a la solución.

- En el primer caso, el sistema de la figura 22(a) ¡mantiene la simetría completa del problema original! Los modos normales son por tanto los mismos y conocemos automáticamente el cambio de base ortogonal que diagonaliza $\mathbf{W}(a, b = 1)$. Lo único que cambia son las frecuencias propias, que obtenemos inmediatamente calculando explícitamente la matriz (diagonal) en la base de los modos normales o, equivalentemente, calculando la acción de $\mathbf{W}(a, b = 1)$ sobre los vectores propios. Las frecuencias propias son

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = (1 + a)\frac{k}{m} \text{ (doble)}, \quad \omega_3^2 = (1 + 2a)\frac{k}{m},$$

y la trayectoria del sistema tiene idéntica forma a la del problema original, tan solo es necesario cambiar los valores de las frecuencias propias en ecs. (161)–(164).

- En el segundo caso, el sistema de la figura 22(b) **no** mantiene la simetría completa del problema original pero sí mantiene una parte de la misma (un *subgrupo* de D_4), la dada por $\{e, (13), (24), (13)(24)\}$. Observando ec. (166) y ec. (167) tenemos dos modos normales

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, la simetría ya no nos puede indicar más: separando los subespacios asociados a esos modos normales, el subespacio de dimensión 2 restante es propio de $D[e]$, $D[(13)]$, $D[(24)]$ y $D[(13)(24)]$ con multiplicidad 2. Escogiendo una base para ese subespacio,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cambiamos $\mathbf{W}(a, b)$ de base,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{k}{2m} \begin{pmatrix} 2(a+1) & a & 0 & a \\ a & 2(a+b) & a & 0 \\ 0 & a & 2(a+1) & a \\ a & 0 & a & 2(a+b) \end{pmatrix} \times \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & a & a+b \end{pmatrix}. \quad (175) \end{aligned}$$

Empleando la simetría del sistema modificado, hemos obtenido *dos* modos normales y sus correspondientes frecuencias propias. Aunque no nos conduce a la solución completa, sí nos permite reducir el problema a uno mucho más sencillo: tan solo resta diagonalizar $\frac{k}{m} \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$ para ello (cosa que no haremos aquí).

B.4. Animaciones

Las siguientes animaciones ilustran los modos del sistema de la figura 20 y un par de ejemplos de su evolución, dadas unas condiciones iniciales.

- Modos normales de sistema.
 - T03_Simetria_Modo1.avi
 - T03_Simetria_Modo2_v21.avi
 - T03_Simetria_Modo2_v22.avi
 - T03_Simetria_Modo2_w21.avi
 - T03_Simetria_Modo2_w22.avi
 - T03_Simetria_Modo3.avi
- Ejemplos.
 - T03_Simetria_Ejemplo1.avi
 - T03_Simetria_Ejemplo2.avi