

# Oscilaciones forzadas

Apuntes de clase

## Índice

<b>1. Oscilador forzado: ecuación diferencial y soluciones</b>	<b>2</b>
<b>2. Términos transitorio y estacionario</b>	<b>5</b>
<b>3. Análisis de la solución estacionaria I</b>	<b>7</b>
3.1. Amplitud y resonancia . . . . .	7
3.2. Fase y resonancia . . . . .	11
<b>4. Análisis de la solución estacionaria II</b>	<b>13</b>
<b>5. Ejemplos</b>	<b>16</b>
<b>6. Energía del oscilador forzado en el régimen estacionario</b>	<b>17</b>
<b>7. Oscilador forzado con fuente periódica arbitraria</b>	<b>20</b>
7.1. Análisis de Fourier . . . . .	22
7.2. Solución en serie de Fourier . . . . .	26
7.3. Ejemplo . . . . .	27
7.4. * Fuente arbitraria . . . . .	33
<b>8. Oscilador no lineal</b>	<b>33</b>
8.1. Oscilador no lineal forzado I . . . . .	34
8.2. Oscilador no lineal forzado II, frecuencias de combinación . . . . .	39
8.3. * Oscilador no lineal libre . . . . .	40
<b>9. Ejemplos físicos</b>	<b>44</b>
9.1. Circuito eléctrico RLC forzado . . . . .	44
<b>10. Animaciones</b>	<b>45</b>
<b>A. * Fuente amortiguada</b>	<b>47</b>

---

*Departamento de Física Teórica – IFIC*  
*Universitat de València – CSIC*  
Miguel.Nebot@uv.es

[Versión 1.00]

En el tema anterior estudiamos detalladamente la evolución libre de un oscilador – en general, un sistema con un grado de libertad – alrededor de un equilibrio estable. Esa situación corresponde a perturbar el sistema en equilibrio mediante unas condiciones iniciales que lo separan del mismo y dejarlo evolucionar sin influencias externas. En este tema analizamos qué ocurre cuando la evolución del sistema no es libre, sobre el mismo actúa una fuerza externa de forma perdurable en el tiempo, es un oscilador *forzado*.

La estructura del tema es la siguiente. En el apartado 1 estudiamos la ecuación de movimiento cuando la fuerza externa es de tipo armónico. Veremos que el movimiento del sistema se describe en términos de dos contribuciones, una correspondiente a una solución *transitoria* que desaparece con el transcurso del tiempo y una correspondiente a una solución *estacionaria* que se mantiene indefinidamente, según detallamos en el apartado 2. Abordamos en detalle las características de la solución estacionaria, en especial el fenómeno de *resonancia*, en los apartados 3 y 4. El apartado 5 ilustra todo lo anterior a través de varios ejemplos. Completamos el análisis abordando la energía del sistema en el siguiente apartado, 6. En el apartado 7 extendemos el estudio de las oscilaciones forzadas considerando fuerzas externas más generales, que comparten sin embargo una característica con el caso armónico: la periodicidad. En el apartado 8 nos apartamos de la línea principal para explorar alguna característica de un oscilador *no lineal*. Tras la excursión no lineal, regresamos en el apartado 9 al hilo principal de la discusión ilustrando lo desarrollado con ejemplos de sistemas físicos forzados. Finalmente, en el apartado 10 comentamos algunas animaciones que ilustran aspectos de los apartados anteriores.

## 1. Oscilador forzado: ecuación diferencial y soluciones

Como primer paso en el estudio del comportamiento de un oscilador cuando se encuentra sometido a una fuerza externa, empezamos por analizar las ecuaciones que describen el sistema cuando esta es de tipo armónico. Explícitamente, consideramos la ecuación de movimiento

$$m \ddot{x} + \gamma \dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_F t) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)} . \quad (1)$$

La ecuación diferencial ya no es homogénea, tiene un término  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$  que es función de  $t$  e independiente de  $x$ , una *fente*<sup>1</sup>.

La solución general  $x(t)$  de la ecuación de movimiento se obtiene como combinación lineal de una solución general  $x_{[h]}(t)$  de la ecuación diferencial homogénea  $\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$  y una solución particular  $x_{[p]}(t)$  de la ecuación completa (inhomogénea)  $\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$ : como la ecuación sigue siendo lineal, rige el principio de superposición. Las soluciones de la ecuación homogénea son sencillamente las consideradas al estudiar el sistema amortiguado libre, y son de tres tipos diferentes, según los valores de  $\Gamma$  y  $\omega_0$ .

- Para  $\omega_0^2 > \Gamma^2$  (oscilaciones amortiguadas), con  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ ,

$$x_{[h]}(t) = e^{-\Gamma t} [\alpha \cos(\omega_1 t) + \beta \sin(\omega_1 t)] .$$

<sup>1</sup>Para subrayar que  $\omega_F$  es la frecuencia angular de la fuerza externa, i.e. no es una característica propia del sistema, mantendremos el subíndice  $F$  en los próximos apartados.

- Para  $\omega_0^2 = \Gamma^2$  (amortiguamiento crítico),

$$x_{[h]}(t) = (\alpha + \beta t) e^{-\Gamma t} .$$

- Para  $\omega_0^2 < \Gamma^2$  (sistema sobreamortiguado),

$$x_{[h]}(t) = e^{-\Gamma t} \left[ \alpha e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} + \beta e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} \right] .$$

En cada caso, las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  quedarán determinadas por las condiciones iniciales. Nótese que, al tener ahora un segundo término en la solución  $x(t)$ , el correspondiente a la solución particular  $x_{[p]}(t)$ , las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  no van a tener los valores, en función de las condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ , ya calculados en ausencia de fuerza externa: las condiciones iniciales se aplican a la solución completa  $x(t) = x_{[h]}(t) + x_{[p]}(t)$ , cuestión que abordaremos en detalle más adelante.

Para obtener una solución particular de forma sencilla, sustituimos una función de tipo  $\mathcal{A} e^{i\omega t}$  (con  $\mathcal{A}$  y  $\omega$  constantes,  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^+$ ) en la ecuación diferencial completa; si existen  $\mathcal{A}$  y  $\omega$  tales que la ecuación se cumple, bastará tomar la parte real de  $\mathcal{A} e^{i\omega t}$  para tener la solución particular deseada, cosa que demostramos a continuación:

$$\text{si } x_{\mathbb{C}}(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t}, \quad \text{Re}[x_{\mathbb{C}}] = \text{Re}[\mathcal{A}] \text{Re}[e^{i\omega t}] - \text{Im}[\mathcal{A}] \text{Im}[e^{i\omega t}],$$

$$\text{derivando, } \frac{d}{dt} \text{Re}[x_{\mathbb{C}}] = -\omega \text{Re}[\mathcal{A}] \text{Im}[e^{i\omega t}] - \omega \text{Im}[\mathcal{A}] \text{Re}[e^{i\omega t}],$$

$$\text{ahora bien, } \text{Re} \left[ \frac{dx_{\mathbb{C}}}{dt} \right] = \text{Re} [i \omega \mathcal{A} e^{i\omega t}] =$$

$$-\omega \text{Re}[\mathcal{A}] \text{Im}[e^{i\omega t}] - \omega \text{Im}[\mathcal{A}] \text{Re}[e^{i\omega t}] = \frac{d}{dt} \text{Re}[x_{\mathbb{C}}],$$

con lo que derivar  $x_{\mathbb{C}}(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t}$  con respecto al tiempo y tomar la parte real de  $x_{\mathbb{C}}(t)$  son operaciones que conmutan (se puede demostrar de forma análoga la misma propiedad para la parte imaginaria). Ahora bien, si mantenemos una fuente real  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$ , no conseguiremos una solución satisfactoria: extendemos también la fuerza al campo complejo de modo que tenga la parte real deseada, i.e. consideramos sencillamente una fuerza externa  $\frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}$ , puesto que  $\text{Re} \left[ \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} \right] = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$ . Una vez obtenidos los valores de  $\mathcal{A}$  y de  $\omega$  en la extensión *compleja* de la ecuación diferencial, tomaremos la parte real de  $x_{\mathbb{C}}(t) = \mathcal{A} e^{i\omega t}$ , solución de nuestro problema *real*. Explícitamente,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t) \rightarrow \ddot{x}_{\mathbb{C}} + 2\Gamma \dot{x}_{\mathbb{C}} + \omega_0^2 x_{\mathbb{C}} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}$$

y sustituimos  $x_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{A} e^{i\omega t}$ ,  $\dot{x}_{\mathbb{C}} \rightarrow i\omega \mathcal{A} e^{i\omega t}$ ,  $\ddot{x}_{\mathbb{C}} \rightarrow -\omega^2 \mathcal{A} e^{i\omega t}$  para obtener

$$\mathcal{A} (-\omega^2 + i2\Gamma\omega + \omega_0^2) e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t} . \quad (2)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla para todo  $t$  (recordemos, con  $\mathcal{A}$  y  $\omega$  constantes), es necesario que  $\omega = \omega_F$ . Sustituyendo  $\omega \rightarrow \omega_F$  podemos eliminar las exponenciales complejas de la ecuación anterior y despejar  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_F^2) + i2\Gamma\omega_F} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) - i2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2} . \quad (3)$$

Hemos obtenido  $\mathcal{A}$  y  $\omega$  tales que  $x_{\mathbb{C}}(t) = \mathcal{A}e^{i\omega t}$  es solución de ec. (2),  $\text{Re}[x_{\mathbb{C}}(t)]$  es por tanto solución de la ecuación (1). Resulta útil expresar la amplitud  $\mathcal{A}$ , compleja, tanto en forma rectangular como en forma polar. Podemos leer la forma rectangular directamente de la ec. (3),

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{Re}[\mathcal{A}] + i \text{Im}[\mathcal{A}], \quad \text{con} \\ \text{Re}[\mathcal{A}] &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \quad \text{Im}[\mathcal{A}] = \frac{F_0}{m} \frac{-2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Para expresarla en forma polar,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= a e^{-i\delta}, \quad \text{con } a = |\mathcal{A}| \text{ y } \delta = -\arg \mathcal{A}, \\ a &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}}, \quad \delta = \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Esto nos permite escribir dos formas equivalentes de la solución particular  $x_{[p]}(t) = \text{Re}[\mathcal{A}e^{i\omega_F t}]$ ,

$$\begin{aligned} x_{[p]}(t) &= \text{Re}[\mathcal{A}] \text{Re}[e^{i\omega_F t}] - \text{Im}[\mathcal{A}] \text{Im}[e^{i\omega_F t}], \\ x_{[p]}(t) &= \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma\omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x_{[p]}(t) &= \text{Re} \left[ a e^{i(\omega_F t - \delta)} \right] = a \cos(\omega_F t - \delta), \\ x_{[p]}(t) &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}} \cos \left( \omega_F t - \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Desde un principio podíamos haber buscado soluciones particulares de tipo  $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$  o bien de tipo  $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$ ; el resultado final hubiera sido el mismo. Al margen de estas consideraciones, nótese que las constantes  $\text{Re}[\mathcal{A}]$ ,  $\text{Im}[\mathcal{A}]$ ,  $a$  y  $\delta$  dependen tanto de las características del sistema ( $\omega_0$ ,  $m$  y  $\Gamma$  o equivalentemente  $k$ ,  $m$  y  $\Gamma$ ) como de las características de la fuerza externa ( $F_0$  y  $\omega_F$ ).

Por completitud (y para uso posterior), escribimos también de forma explícita la solución estacionaria  $y_{[p]}(t)$  cuando la dependencia armónica de la fuente involucra  $\sin(\omega_F t)$  en lugar de  $\cos(\omega_F t)$ :

$$\ddot{y} + 2\Gamma \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_F t). \quad (1')$$

Es

$$y_{[p]}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \sin(\omega_F t) - 2\Gamma\omega_F \cos(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \quad (6')$$

o, equivalentemente

$$y_{[p]}(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}} \sin \left( \omega_F t - \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right] \right). \quad (7')$$

## 2. Términos transitorio y estacionario

Según lo expuesto en el apartado anterior, la solución completa  $x(t)$  de la ecuación de movimiento con una fuente – ec. (1) –, tiene dos términos:

$$x(t) = x_{[h]}(t) + x_{[p]}(t) .$$

- El primero,  $x_{[h]}(t)$ , solución de la ecuación de movimiento *sin* fuente, corresponde a uno de los tipos de movimiento amortiguado, cuya amplitud decrece con un factor  $e^{-\Gamma t}$ ; al cabo de tiempos  $t \gg \Gamma^{-1}$ ,  $x_{[h]}(t)$  será completamente ignorable. El término  $x_{[h]}(t)$  es el término *transitorio*. La forma de  $x_{[h]}(t)$  varía según nos encontremos en el caso amortiguado, amortiguado críticamente o sobreamortiguado.
- El segundo,  $x_{[p]}(t)$ , solución particular de la ecuación de movimiento *con* fuente, corresponde a un movimiento oscilatorio cuya amplitud *es constante*, no decrece con el paso del tiempo. El término  $x_{[p]}(t)$  es el término *estacionario*. La forma de  $x_{[p]}(t)$  es independiente del caso, en cuanto al amortiguamiento, en que nos encontremos; además, está completamente fijada, no contiene constantes que dependan de condiciones iniciales.

Para especificar la solución completa en términos de unas condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$  basta entender dos aspectos: en primer lugar, las únicas constantes arbitrarias que las condiciones iniciales deben fijar están en el término transitorio  $x_{[h]}(t)$ ; en segundo lugar constatamos que, al aplicar las condiciones iniciales a la solución completa, obtenemos

$$x(0) = x_{[h]}(0) + x_{[p]}(0) , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_{[h]}(0) + \dot{x}_{[p]}(0) ,$$

que reescribimos trivialmente

$$x(0) - x_{[p]}(0) = x_{[h]}(0) , \quad \dot{x}(0) - \dot{x}_{[p]}(0) = \dot{x}_{[h]}(0) .$$

¿Qué nos permite este par de ecuaciones? Nos permite fijar las constantes arbitrarias de la solución transitoria,  $\{x_{[h]}(0), \dot{x}_{[h]}(0)\}$ , en términos de las *condiciones iniciales*  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$  y de los *valores iniciales de la solución estacionaria*  $\{x_{[p]}(0), \dot{x}_{[p]}(0)\}$  (puesto que, como ya hemos señalado, la solución estacionaria ya ha quedado *completamente fijada*). Este par de ecuaciones nos permite “leer” sin esfuerzo que para fijar las constantes del término transitorio basta recuperar las expresiones correspondientes al análisis del tema anterior (oscilador amortiguado en ausencia de una fuerza externa) y aplicar las sustituciones  $x(0) \mapsto x_{[h]}(0) = x(0) - x_{[p]}(0)$  y  $\dot{x}(0) \mapsto \dot{x}_{[h]}(0) = \dot{x}(0) - \dot{x}_{[p]}(0)$  con

$$\begin{aligned} x_{[p]}(0) &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} , \\ \dot{x}_{[p]}(0) &= \frac{F_0}{m} \frac{2\Gamma \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} . \end{aligned} \tag{8}$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} x_{[p]}(0) &= a \cos \delta , \\ \dot{x}_{[p]}(0) &= a \omega_F \sin \delta , \end{aligned} \tag{9}$$

con  $a$  y  $\delta$  dadas por ec. (5). Escribimos explícitamente cada uno de los casos (empleando las expresiones de  $x_{[p]}(0)$  y  $\dot{x}_{[p]}(0)$  con la dependencia explícita en las constantes del sistema).

- Para  $\omega_0^2 > \Gamma^2$  (oscilaciones amortiguadas), con  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ ,

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\Gamma t} & \left[ x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \cos(\omega_1 t) + \\ e^{-\Gamma t} \frac{1}{\omega_1} & \left[ \dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] \sin(\omega_1 t) + \\ & \frac{F_0}{m} \left[ \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right], \quad (10) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\Gamma t} & [x(0) - a \cos \delta] \cos(\omega_1 t) + \\ e^{-\Gamma t} \frac{1}{\omega_1} & [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] \sin(\omega_1 t) + \\ & a \cos(\omega_F t - \delta). \quad (11) \end{aligned}$$

- Para  $\omega_0^2 = \Gamma^2$  (amortiguamiento crítico),

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\Gamma t} & \left[ x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ t e^{-\Gamma t} & \left[ \dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ & \frac{F_0}{m} \left[ \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right], \quad (12) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-\Gamma t} & [x(0) - a \cos \delta] + \\ t e^{-\Gamma t} & [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\ & a \cos(\omega_F t - \delta). \quad (13) \end{aligned}$$

- Para  $\omega_0^2 < \Gamma^2$  (sistema sobreamortiguado),

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} & \left[ x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} & \left[ \dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} & \left[ x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ - \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} & \left[ \dot{x}(0) + \Gamma x(0) - \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma(\omega_0^2 + \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right] + \\ & \frac{F_0}{m} \left[ \frac{(\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} \right], \quad (14) \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [x(0) - a \cos \delta] + \\
 & \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\
 & \frac{e^{-\Gamma t}}{2} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [x(0) - a \cos \delta] + \\
 & - \frac{e^{-\Gamma t}}{2\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} [\dot{x}(0) + \Gamma x(0) - a(\Gamma \cos \delta + \omega_F \sin \delta)] + \\
 & a \cos(\omega_F t - \delta) . \quad (15)
 \end{aligned}$$

### 3. Análisis de la solución estacionaria I: amplitud y fase, resonancia

En el apartado anterior hemos obtenido la forma de la solución particular o estacionaria y hemos escrito la forma completa de las soluciones de las ecuaciones de movimiento. En este apartado analizaremos las características del término estacionario: tanto de la amplitud de la solución  $a$  como de la fase  $\delta$  (obtenidas al expresar  $\mathcal{A}$  en forma polar en el apartado 1) *en función* de la frecuencia angular de la fuente  $\omega_F$ . En el siguiente apartado analizaremos la solución estacionaria en términos de las amplitudes de los términos  $\cos(\omega_F t)$  y  $\sin(\omega_F t)$ .

#### 3.1. Amplitud y resonancia

Iniciamos el estudio de la amplitud  $a$  considerando dos límites particulares del comportamiento de la fuente  $F_0 \cos(\omega_F t)$ .

- Cuando  $\omega_F \rightarrow 0$ , es inmediato observar que  $a \rightarrow \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , constante. ¿Es esto esperable? ¿Qué interpretación física tiene? Cuando  $\omega_F \rightarrow 0$  la fuente externa *no oscila*, es constante<sup>2</sup>. La solución particular *tampoco* oscila. Sencillamente, una fuente *constante* ( $\frac{F_0}{m}$  en este caso) *desplaza* la posición de equilibrio a  $x_{eq} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  (según podemos leer directamente de la ecuación de movimiento).
- Cuando  $\omega_F \rightarrow +\infty$ , es también inmediato observar que  $a \rightarrow 0$ . ¿Qué ocurre en este caso? La fuente oscila tan rápido (en comparación con los tiempos “naturales” del sistema dados por  $\omega_0^{-1}$  y  $\Gamma^{-1}$ ) que su efecto medio en tiempos  $\sim \omega_0^{-1}, \Gamma^{-1}$  es nulo, tampoco hay oscilación.

---

<sup>2</sup>Considerando una fuente  $F_0 \sin(\omega_F t)$  no habríamos podido abordar este límite particular.

Al margen de estos dos límites, para estudiar la dependencia de  $a$  con  $\omega_F$ , veamos qué forma tiene  $\frac{da}{d\omega_F}$ :

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\omega_F} &= \\ & \frac{F_0}{m} \left( -\frac{1}{2} \right) [(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2]^{-\frac{3}{2}} (2(-2\omega_F)(\omega_0^2 - \omega_F^2) + 8\Gamma^2 \omega_F) = \\ & 2 \frac{F_0}{m} [(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2]^{-\frac{3}{2}} \omega_F (\omega_0^2 - 2\Gamma^2 - \omega_F^2) . \end{aligned} \quad (16)$$

Resolviendo  $\frac{da}{d\omega_F} = 0$  obtendremos las posiciones de los extremos locales de  $a(\omega_F)$ . Del mismo modo podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{d\omega_F^2} &= \\ & (-2) \frac{F_0}{m} \frac{[3\omega_F^2 - \omega_0^2 + 2\Gamma^2][(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2] - 6\omega_F^2(\omega_0^2 - \omega_F^2 + 2\Gamma^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2]^{5/2}} , \end{aligned} \quad (17)$$

que nos permitirá determinar si los extremos son mínimos o máximos. Según ec. (16), podemos tener  $\frac{da}{d\omega_F} = 0$  hasta para tres valores de  $\omega_F$ ,  $0, \omega^2 - 2\Gamma^2, \infty$ .

- El caso más interesante corresponde a  $\omega_F^2 = \omega_0^2 - 2\Gamma^2$ : si  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$ ,  $\exists \omega_F \in \mathbb{R}^+$  tal que, como acabamos de calcular,  $\frac{da}{d\omega_F} = 0$  se anula. Además,

$$\left. \frac{d^2a}{d\omega_F^2} \right|_{\omega_F^2 = \omega_0^2 - 2\Gamma^2} = -4 \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}{[4\Gamma^2(\omega_0^2 - \Gamma^2)]^{3/2}} < 0 .$$

Si  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$ , tenemos por tanto un *máximo* de la amplitud  $a$  en  $\omega_F^2 = \omega_R^2 \equiv \omega_0^2 - 2\Gamma^2$ , conocida como frecuencia de *resonancia*.

- Para  $\omega_F = 0$ ,

$$\left. \frac{d^2a}{d\omega_F^2} \right|_{\omega_F^2=0} = 2 \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}{\omega_0^6} .$$

Si  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$ , es decir, cuando existe la frecuencia de resonancia, para  $\omega_F = 0$  tenemos un *mínimo*; en cambio, cuando  $\omega_0^2 < 2\Gamma^2$  (no existe frecuencia de resonancia), para  $\omega_F = 0$  tenemos un *máximo*.

- Para  $\omega_F \rightarrow \infty$ ,  $a(\omega_F) \rightarrow 0$ , que es el mínimo absoluto de  $a(\omega_F)$ .

Para mayor claridad recogemos los distintos casos posibles según los valores de  $\omega_0^2$  y  $\Gamma^2$ .

- Cuando  $\omega_0^2 \leq 2\Gamma^2$ , la solución estacionaria oscila con frecuencia  $\omega_F$  y amplitud  $a(\omega_F)$ , decreciente con  $\omega_F$ . El sistema no presenta el fenómeno de resonancia. La amplitud  $a(\omega_F)$  tiene un *máximo* (global) para  $\omega_F = 0$  y tiende a cero para  $\omega_F \rightarrow +\infty$ .
- Cuando  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$ , el sistema puede presentar el fenómeno de resonancia: para  $\omega_R^2 = \omega_F^2 = \omega_0^2 - 2\Gamma^2$  la amplitud de la solución estacionaria presenta un *máximo* (global); también presenta un *mínimo* local para  $\omega_F = 0$  y el mínimo absoluto para  $\omega_F \rightarrow \infty$ . Conviene resaltar que en este caso  $\omega_0 > \omega_1 > \omega_R$ .



La figura 1 ilustra la dependencia de la amplitud de la oscilación estacionaria en función de  $\omega_F$  para distintos valores de  $\Gamma$ .

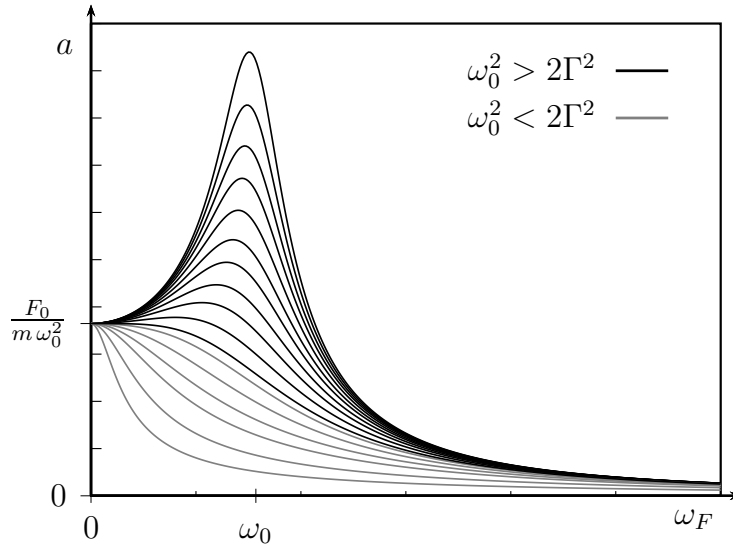


Figura 1: Amplitud de la solución estacionaria para distintos valores de  $\Gamma$ .

Estudiemos la amplitud  $a$  para  $\omega_F = \omega_R$  cuando  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$  y  $\omega_F = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$  (i.e. en la resonancia): la amplitud de la oscilación de la solución estacionaria es

$$\begin{aligned}
 a(\omega_R) &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_R^2)^2 + (2\Gamma\omega_R)^2}} = \\
 &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\Gamma^2))^2 + 4(\omega_0^2 - 2\Gamma^2)\Gamma^2}} = \\
 &= \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{4\Gamma^2(\omega_0^2 - \Gamma^2)}} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\Gamma\omega_1}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

$a(\omega_R)$  es proporcional a la magnitud de la fuerza externa (el factor  $\frac{F_0}{m}$ ), y a un factor multiplicador  $\frac{1}{2\Gamma\omega_1}$  que depende de las características del sistema. ¿Por qué cuando  $\omega_F \simeq \omega_R$  hemos hablado de *resonancia*? Viendo la figura 1 se observa que la amplitud  $a(\omega_R)$  puede ser *grande*. Ahora bien, como siempre que en física se hace referencia a una magnitud “grande” o *pequeña*, es fundamental saber *con respecto a qué*. En otras palabras,  $a(\omega_R) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\Gamma\omega_1}$  es “grande” *¿con respecto a qué?* Veamos, cuando la fuerza externa es constante  $F_0$ , la posición de equilibrio del sistema se desplaza a  $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$  (según podemos leer en la ecuación de movimiento o recordando el límite  $\omega_F \rightarrow 0$ ). Al aplicar una fuerza externa *oscilante* con frecuencia  $\omega_R$ ,  $F_0 \cos(\omega_R t)$ , de idéntico valor máximo  $F_0$ , la amplitud de la oscilación alrededor del equilibrio es  $a(\omega_R) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\Gamma\omega_1}$ . Con  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$ , se

cumple  $a(\omega_R) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\Gamma\omega_1} > \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ :

$$\begin{aligned}\omega_0^2 - 2\Gamma^2 > 0 &\Leftrightarrow (\omega_0^2 - 2\Gamma^2)^2 = \omega_0^4 - 4\Gamma^2\omega_0^2 + 4\Gamma^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \omega_0^4 > 4\Gamma^2(\omega_0^2 - \Gamma^2) > 0 \Rightarrow \omega_0^2 > 2\Gamma\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} = 2\Gamma\omega_1 .\end{aligned}$$

Es decir, la amplitud del movimiento forzado alrededor del equilibrio es siempre *mayor* que el desplazamiento con respecto al mismo equilibrio alcanzable mediante una fuerza constante (de magnitud igual al máximo de la fuerza oscilante considerada). Cuando  $\omega_F \simeq \omega_R$ , la respuesta del sistema a la fuerza externa está *amplificada* con respecto al tamaño del desplazamiento típico que *a priori* cabría esperar. Además de la amplitud máxima y su posición en términos de  $\omega_F$ , i.e.  $\omega_R$ , es interesante caracterizar el fenómeno de la resonancia en base a la “anchura” del máximo, es decir el intervalo de valores de  $\omega_F$  alrededor de  $\omega_R$  para el cual tenemos una amplificación significativa. ¿Cómo cuantificamos esta característica? Adoptando un criterio arbitrario *razonable*: el adoptado habitualmente en este caso es la diferencia entre las dos frecuencias, que denominaremos  $\omega_{\pm}$  y determinaremos a continuación, para las cuales la amplitud al cuadrado se reduce en un factor 2 con respecto al máximo. Explícitamente,

$$a^2(\omega_{\pm}) = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega_{\pm})^2 + (2\Gamma\omega_{\pm})^2} = \frac{a^2(\omega_R)}{2} = \frac{F_0^2}{m^2} \frac{1}{8\Gamma^2\omega_1^2} .$$

Tenemos por tanto

$$8\Gamma^2\omega_1^2 = (\omega_0 - \omega_{\pm})^2 + (2\Gamma\omega_{\pm})^2 ,$$

que podemos reescribir como

$$\omega_{\pm}^4 - \omega_{\pm}^2 \underbrace{(2\omega_0^2 - 4\Gamma^2)}_{2\omega_R^2} + \omega_0^4 - 8\Gamma^2\omega_1^2 = 0 .$$

Las raíces de esta ecuación de segundo grado en  $\omega_{\pm}$  son

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_R^2 \pm \sqrt{\omega_R^4 - (\omega_0^4 - 8\Gamma^2\omega_1^2)} .$$

Desarrollando el argumento de la raíz cuadrada,

$$\begin{aligned}\omega_R^4 - (\omega_0^4 - 8\Gamma^2\omega_1^2) &= (\omega_0 - 2\Gamma^2)^2 - (\omega_0^4 - 8\Gamma^2(\omega_0^2 - \Gamma^2)) = \\ &= 4\Gamma^2\omega_0^2 - 4\Gamma^4 = (2\Gamma\omega_1)^2 ,\end{aligned}$$

de modo que

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_R^2 \pm 2\Gamma\omega_1 .$$

Resulta entonces la diferencia entre los cuadrados de las frecuencias

$$\omega_+^2 - \omega_-^2 = 4\Gamma\omega_1 .$$

En términos de la diferencia entre frecuencias,

$$\omega_+ - \omega_- = \omega_R \left[ \sqrt{1 + \frac{2\Gamma\omega_1}{\omega_R^2}} - \sqrt{1 - \frac{2\Gamma\omega_1}{\omega_R^2}} \right] . \quad (19)$$

La figura 2 ilustra el concepto de *anchura* de la resonancia.

Cuando  $\Gamma \ll \omega_0$ , tanto  $\omega_1 \simeq \omega_0$  como  $\omega_R \simeq \omega_0$  y nos encontramos con

$$\omega_{\pm} \simeq \omega_0 \pm \Gamma, \quad \omega_+ - \omega_- \simeq 2\Gamma, \quad (\Gamma \ll \omega_0).$$

Nótese que en ese límite,  $\Gamma \ll \omega_0$ , el producto de la *anchura*  $\sim 2\Gamma$  y de la *altura*  $\sim \frac{1}{2\Gamma\omega_0}$  de la resonancia permanece constante ( $\frac{F_0}{m\omega_0}$  en concreto). Todas las características del sistema apenas estudiadas se pueden reexpresar en términos del factor de calidad  $Q \equiv \frac{\omega_0}{\Gamma}$  del oscilador: por ejemplo, la amplitud de la oscilación resonante es

$$a(\omega_R) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\Gamma\omega_1} = \frac{F_0}{2m\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}.$$

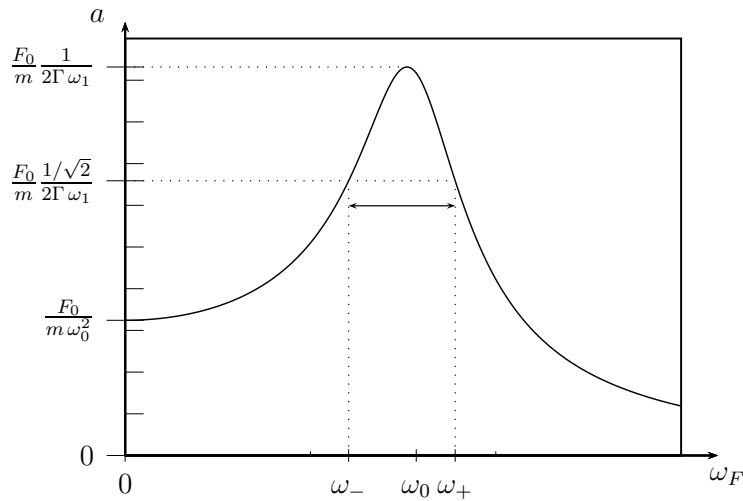


Figura 2: Anchura de la resonancia.

### 3.2. Fase y resonancia

Tras el análisis de la amplitud de la oscilación de la solución estacionaria, pasamos ahora a discutir la fase  $\delta$ . Señalamos en primer lugar que la fase  $\delta$  es sencillamente el *desfase* entre la oscilación de la fuerza externa  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega_F t)$  y la oscilación de la solución estacionaria, de idéntica frecuencia angular,  $a \cos(\omega_F t - \delta)$ . Recordando ec. (5),

$$\tan \delta = \frac{2\Gamma \omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}.$$

Veamos en primer lugar los dos casos extremos, en términos de  $\omega_F$ .

- Cuando  $\omega_F \rightarrow 0$ ,  $\tan \delta \rightarrow 0^+$ ; según lo analizado para la amplitud en esta situación, el sistema ni siquiera oscila (no tiene demasiado sentido hablar en este caso de diferencia de fase).
- Cuando  $\omega_F \rightarrow +\infty$ , tenemos  $\tan \delta \rightarrow 0^-$ .

El análisis de estos dos casos extremos tan solo nos indica que cuando  $\omega_F \rightarrow 0, +\infty$ ,  $\tan \delta \rightarrow 0$ . Estudiemos por tanto la variación de  $\delta$  en función de  $\omega_F$ . Empleando  $\delta = \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right]$  y recordando que  $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ ,

$$\frac{d\delta(\omega_F)}{d\omega_F} = \left( \frac{2\Gamma(\omega_0^2 - \omega_F^2) - 2\Gamma\omega_F(-2\omega_F)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2} \right) \frac{1}{1 + \left( \frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \right)^2} = 2\Gamma \frac{\omega_0^2 + \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}. \quad (20)$$

Para todo valor de  $\omega_F$ ,  $\frac{d\delta(\omega_F)}{d\omega_F} > 0$ , la diferencia de fase  $\delta$  es una función monótona creciente de  $\omega_F$ . Si ahora prestamos atención al argumento de  $\tan^{-1}$ ,  $\frac{2\Gamma\omega_F}{\omega_0^2 - \omega_F^2}$ , para  $\omega_F \in [0; \omega_0[$ , varía de forma monótona entre 0 y  $+\infty$ , el desfase  $\delta$  varía por tanto entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ . Para  $\omega_F \in ]\omega_0; +\infty[$ , el argumento varía entre  $-\infty$  y 0 (la función tangente es discontinua cuando su argumento es un múltiplo impar de  $\frac{\pi}{2}$ ), con lo que el desfase  $\delta$  varía entre  $\frac{\pi}{2}$  y  $\pi$ . Resumiendo, en función de  $\omega_F$ , el desfase  $\delta$  recorre el intervalo  $[0; \pi]$  y vale exactamente  $\frac{\pi}{2}$  cuando  $\omega_F = \omega_0$ , frecuencia natural de oscilación del sistema (ni amortiguado ni forzado). La figura 3 ilustra este aspecto. Nótese que esta propiedad *no depende* de la aparición del fenómeno de resonancia. Ahora bien, cuanto más pronunciado es el fenómeno de resonancia, más rápida es la transición, en términos de  $\omega_F$ , de valores  $\delta \sim 0$  a valores  $\delta \sim \pi$ . Por otra parte, cabe señalar que para  $\Gamma \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0, \pi$  (según  $\omega_F$  sea menor o mayor que  $\omega_0$ ), el término estacionario está *en fase* con la fuerza externa: como cabía imaginar, el amortiguamiento es el responsable del *desfase* entre fuerza externa y respuesta del sistema en el régimen estacionario.

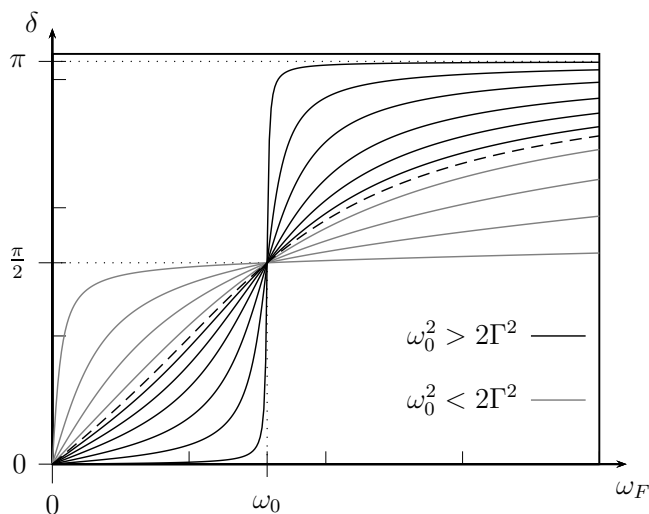


Figura 3: Desfase de la solución estacionaria con respecto a la fuente para distintos valores de  $\Gamma$ .

## 4. Análisis de la solución estacionaria II: amplitudes elástica e inelástica

Hemos dedicado el apartado anterior a analizar las características de la solución estacionaria dadas por la amplitud de la oscilación  $a$  y por la diferencia de fase  $\delta$  entre la oscilación de la fuerza externa y la propia solución estacionaria. Otra forma (equivalente) de la solución estacionaria es la siguiente

$$x_{[p]}(t) = a_e \cos(\omega_F t) + a_i \sin(\omega_F t), \quad (21)$$

donde

$$a_e = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}, \quad a_i = \frac{F_0}{m} \frac{2\Gamma\omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}. \quad (22)$$

Por motivos que quedarán claros a continuación,  $a_i$  y  $a_e$  se conocen como *amplitud inelástica* y *amplitud elástica* respectivamente. La relación entre  $\{a, \delta\}$  y  $\{a_e, a_i\}$  es inmediata:

$$a = \sqrt{a_e^2 + a_i^2}, \quad \tan \delta = \frac{a_i}{a_e}, \quad a_e = a \cos \delta, \quad a_i = a \sin \delta.$$

La primera característica reseñable al escribir la solución estacionaria según ec. (21) es la separación de un término que oscila *en fase* con la fuerza externa, el término  $\cos(\omega_F t)$  y uno que oscila con un desfase  $\frac{\pi}{2}$  – en “cuadratura” – con respecto a la fuerza externa<sup>3</sup>,  $\sin(\omega_F t)$ . Si bien la información contenida en  $a_e$  y  $a_i$  es necesariamente equivalente a la contenida en  $a$  y  $\delta$ , analizamos la dependencia tanto de  $a_e$  como de  $a_i$  con  $\omega_F$ .

- Amplitud  $a_e$ . Para  $\omega_F \rightarrow 0$ ,  $a_e$  tiende a  $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$ . Además,  $a_e > 0$  para  $\omega_F < \omega_0$ , se anula en  $\omega_F = \omega_0$  y  $a_e < 0$  para  $\omega_F > \omega_0$ . Para  $\omega_F \rightarrow \infty$ ,  $a_e \rightarrow 0$ . Tiene extremos locales para  $\frac{da_e}{d\omega_F} = 0$ ; calculamos

$$\begin{aligned} \frac{da_e}{d\omega_F} &= \frac{F_0}{m} \frac{-2\omega_F [(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2} + \\ &\quad \frac{F_0}{m} \frac{-(\omega_0^2 - \omega_F^2) [-4\omega_F(\omega_0^2 - \omega_F^2) + 8\Gamma^2\omega_F]}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2} = \\ &\quad \frac{F_0}{m} \frac{2\omega_F [(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 - 4\Gamma^2\omega_0^2]}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{da_e}{d\omega_F} = \frac{F_0}{m} \frac{2\omega_F(\omega_0^2 - 2\Gamma\omega_0 - \omega_F^2)(\omega_0^2 + 2\Gamma\omega_0 - \omega_F^2)}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2}.$$

Tenemos varias soluciones de  $\frac{da_e}{d\omega_F} = 0$  dependiendo de la relación entre  $\omega_0$  y  $\Gamma$  (no escribimos explícitamente  $\frac{d^2 a_e}{d\omega_F^2}$  aunque sí la empleamos para determinar la naturaleza de los extremos locales encontrados).

<sup>3</sup>Basta recordar que  $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$

- Si  $\omega_0 > 2\Gamma$ , tenemos un *mínimo* (local) de  $a_e$  para  $\omega_F = 0$ , un *máximo* (global) para  $\omega_F^2 = \omega_0(\omega_0 - 2\Gamma)$  y un *mínimo* (global) para  $\omega_F^2 = \omega_0(\omega_0 + 2\Gamma)$ . Nótese que con  $\omega_0 > 2\Gamma$  tenemos automáticamente resonancia.
- Si  $\omega_0 < 2\Gamma$ , tenemos un *máximo* (global) para  $\omega_F = 0$  y un *mínimo* (global) para  $\omega_F = \omega_0(\omega_0 + 2\Gamma)$ . Nótese que con  $\omega_0 < 2\Gamma$  podemos tener resonancia si  $\sqrt{2}\Gamma < \omega_0 < 2\Gamma$ .

La figura 4(a) ilustra la forma de  $a_e$  en función de  $\omega_F$  para distintos valores de  $\Gamma$ .

- Amplitud  $a_i$ . Para  $\omega_F \rightarrow 0$ ,  $a_i \rightarrow 0$ ; además, para todo  $\omega_F$  (positivo),  $a_i > 0$ . Cuando  $\omega_F \rightarrow \infty$ ,  $a_i \rightarrow 0$ . Calculamos  $\frac{da_i}{d\omega_F}$ :

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{d\omega_F} &= \frac{F_0}{m} 2\Gamma \frac{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2} - \\ &= \frac{F_0}{m} 2\Gamma \frac{\omega_F [-4\omega_F(\omega_0^2 - \omega_F^2) + 8\Gamma^2\omega_F]}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2} = \\ &= \frac{F_0}{m} 2\Gamma \frac{-3\omega_F^4 + 2(\omega_0^2 - 2\Gamma^2)\omega_F^2 + \omega_0^4}{[(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2]^2}. \end{aligned}$$

El numerador,  $-3\omega_F^4 + 2(\omega_0^2 - 2\Gamma^2)\omega_F^2 + \omega_0^4$ , tiene, como polinomio en  $\omega_F^2$ , dos raíces<sup>4</sup>

$$\frac{1}{3} \left[ \omega_0^2 - 2\Gamma^2 + 2\sqrt{\omega_0^4 + \Gamma^4 - \omega_0^2\Gamma^2} \right], \quad \frac{1}{3} \left[ \omega_0^2 - 2\Gamma^2 - 2\sqrt{\omega_0^4 + \Gamma^4 - \omega_0^2\Gamma^2} \right].$$

Observando que el coeficiente del término cuadrático  $(\omega_F^2)^2$  y del término constante  $\omega_0^4$  tienen distinto signo, sabemos, sin necesidad de entrar en detalles, que las dos raíces tienen signo opuesto, con lo que tenemos necesariamente una sola raíz positiva, en la que  $\frac{da_i}{d\omega_F} = 0$  (y  $a_i$  alcanza un máximo). La figura 4(b) ilustra la forma de  $a_i$  en función de  $\omega_F$  para distintos valores de  $\Gamma$ .

Para completar el estudio de  $a_i$ ,  $a_e$ ,  $a$  y  $\delta$ , representamos, en la figura 5,  $a_i$  vs.  $a_e$ , con  $\omega_F$  como parámetro implícito para distintos valores de  $\Gamma$ . También podemos “leer” la figura 5 como una representación de  $ae^{-i\delta}$  en el plano complejo. Cada curva empieza con  $\omega_F = 0$  en el punto  $(\frac{F_0}{m\omega_0^2}, 0)$ , cuando  $\omega_0^2 > 2\Gamma^2$  la resonancia aparece antes de cruzar al semiplano  $a_e < 0$ , cuando  $a_e = 0$  tenemos  $\omega_F = \omega_0$  (el punto en que cada curva cruza el eje de las ordenadas) y observamos cómo, cuando  $\Gamma$  se hace pequeño con respecto a  $\omega_0$ , el punto correspondiente a la resonancia se acerca al eje ordenado.

<sup>4</sup>Reescribiendo  $\omega_0^4 + \Gamma^4 - \omega_0^2\Gamma^2 = (\omega_0^2 - \Gamma^2)^2 + \omega_0^2\Gamma^2$  el argumento de la raíz cuadrada es necesariamente positivo y las dos raíces son necesariamente reales.

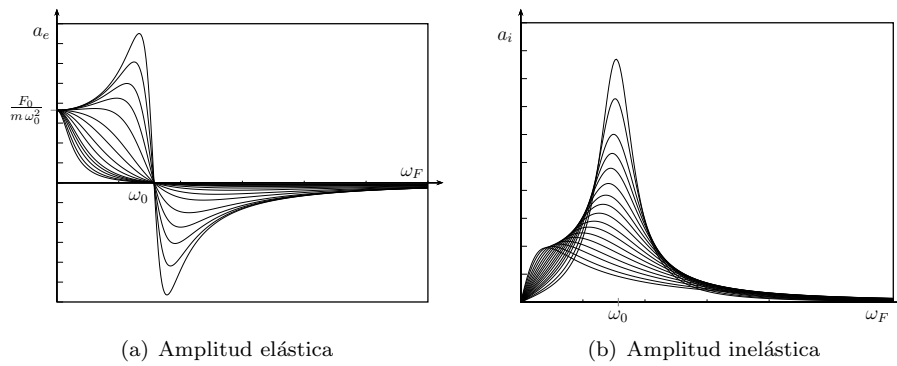


Figura 4: Amplitudes elástica e inelástica de la solución estacionaria para distintos valores de  $\Gamma$ .

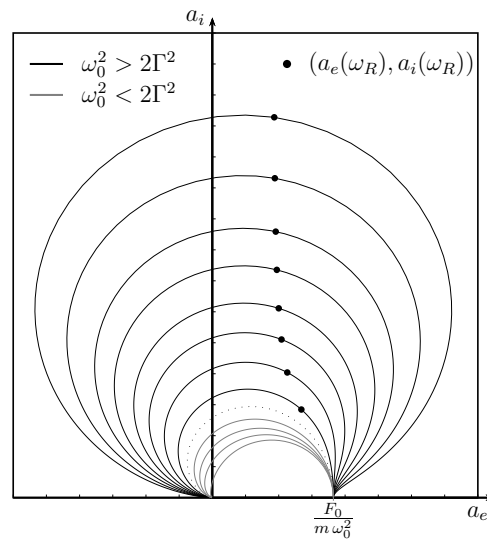


Figura 5: Amplitud inelástica vs. amplitud elástica de la solución estacionaria para distintos valores de  $\Gamma$  con  $\omega_F \in [0; +\infty[$ .

## 5. Ejemplos

Habiendo estudiado las características que determinan la solución estacionaria  $x_{[p]}(t)$ , en este apartado ilustraremos el movimiento forzado del sistema a través de varios ejemplos.

- En todos los ejemplos de las figuras 6 y 7 la frecuencia natural del oscilador,  $\omega_0$ , y la amplitud de la fuerza externa  $F_0$  coinciden. En todas las figuras se ha representado la magnitud de  $\frac{F_0}{m\omega_0^2}$  a modo de referencia (recuérdese la discusión anterior relativa a la resonancia).
- El oscilador de las figuras 6(a), 6(b) y 6(c) tiene un coeficiente de amortiguamiento  $\Gamma = \omega_0/4$  de modo que, según hemos analizado, se puede dar el fenómeno de resonancia. En cambio, el oscilador de las figuras 7(a), 7(b) y 7(c) tiene un coeficiente de amortiguamiento  $\Gamma > \omega_0/\sqrt{2}$ , de modo que no se puede dar el fenómeno de resonancia.
- Las condiciones iniciales son idénticas en todos los casos,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Se puede apreciar la presencia del término transitorio al inicio del movimiento.
- La frecuencia angular de la fuerza externa,  $\omega_F$ , se indica al pie de cada figura. Se ilustran básicamente tres casos,  $\omega_F$  netamente inferior a  $\omega_0$  en las figuras 6(a) y 7(a),  $\omega_F \simeq \omega_0$  en las figuras 6(b) y 7(b), y  $\omega_F$  netamente superior a  $\omega_0$  en las figuras 6(c) y 7(c). Cabe destacar el caso 6(b) en que  $\omega_F$  no solo es cercana a  $\omega_0$ , se ha elegido de hecho  $\omega_F = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$ , frecuencia de resonancia del sistema.

Para completar el análisis de los ejemplos en las figuras 6 y 7, las figuras 8(a) y 8(b) recogen la amplitud  $a$  de la solución estacionaria en función de  $\omega_F$  para uno y otro sistema, apareciendo señalados específicamente los valores de  $\omega_F$  correspondientes a los casos anteriores. Tras estos ejemplos, en el próximo

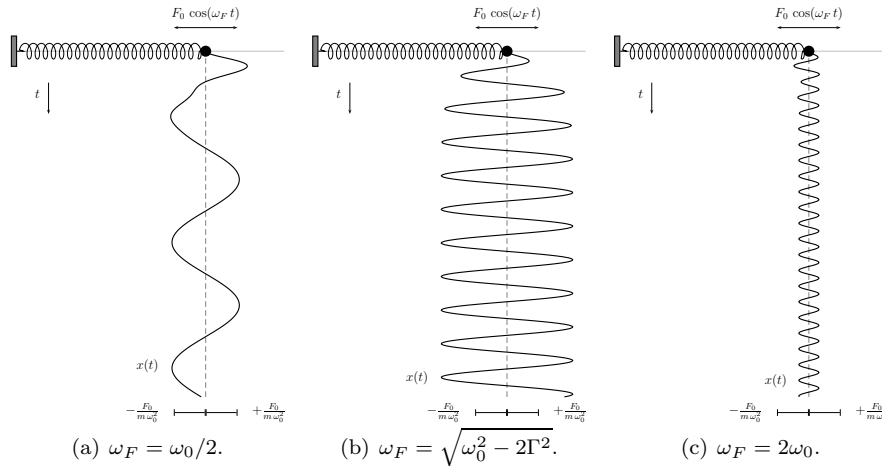


Figura 6: Ejemplos con  $\Gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

apartado pasamos a estudiar qué ocurre con la energía en el oscilador forzado.



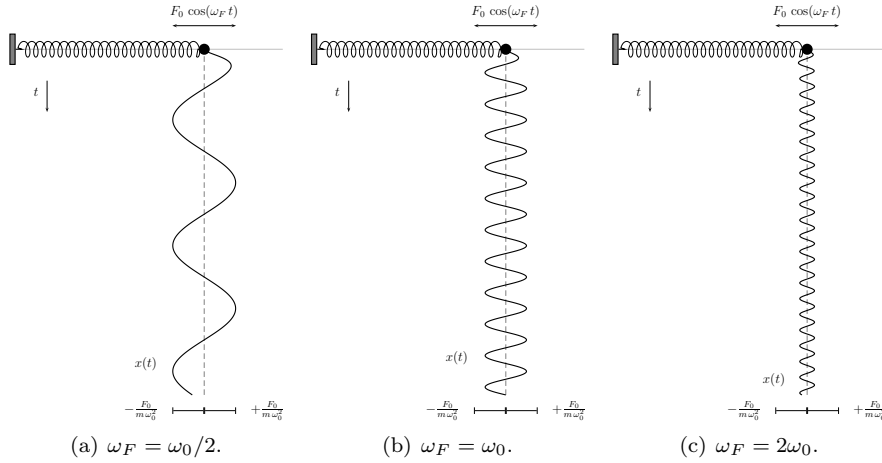
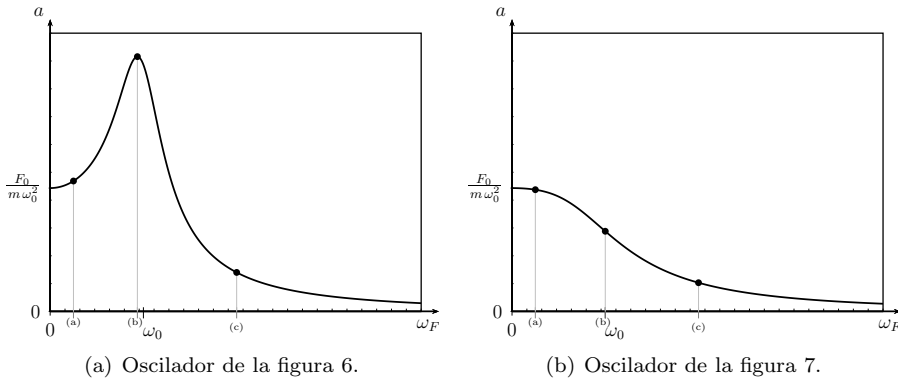


Figura 7: Ejemplos con  $\Gamma > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .



(a) Oscilador de la figura 6.

(b) Oscilador de la figura 7.

Figura 8: Amplitud de la solución estacionaria en función de  $\omega_F$ .

## 6. Energía del oscilador forzado en el régimen estacionario

Al estudiar la energía de un oscilador armónico simple, i.e. en ausencia de amortiguamiento y de fuerzas externas, demostramos que la energía total del mismo  $\mathcal{E} = \mathcal{T} + \mathcal{V}$ , suma del término cinético  $\mathcal{T} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$  y del término potencial  $\mathcal{V} = \frac{1}{2}kx^2$ , se mantenía constante. Al introducir un término de amortiguamiento la energía del oscilador decrecía según  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -4\Gamma\mathcal{T}$ . ¿Qué ocurre en el caso de un oscilador forzado? Por una parte el término transitorio “desaparece” para tiempos  $t \gg \frac{1}{\Gamma}$ , dejándonos con el término estacionario. Según hemos visto, el término estacionario corresponde a una oscilación armónica de amplitud  $a$  y frecuencia angular  $\omega_F$ . Inocentemente podríamos pensar, dada la similitud con el caso de un oscilador armónico simple, que la energía se mantiene constante. Sin embargo la situación resulta algo más sutil y pasamos a analizarla. La solución

general  $x(t)$  consta de un término transitorio  $x_{[h]}(t)$  (solución de la ecuación diferencial homogénea) y de un término estacionario  $x_{[p]}(t)$  (solución particular de la ecuación diferencial inhomogénea). El término transitorio (con independencia de encontrarnos en el caso sobreamortiguado, en el caso amortiguado crítico o en el caso del oscilador amortiguado), desaparece al evolucionar el sistema:

$$t \gg \frac{1}{\Gamma} \Rightarrow x(t) \rightarrow x_{[p]}(t) .$$

Considerando únicamente  $x_{[p]}(t) = a_e \cos(\omega_F t) + a_i \sin(\omega_F t)$ , tendremos

$$\dot{x}_{[p]}(t) = \omega_F (-a_e \sin(\omega_F t) + a_i \cos(\omega_F t)) .$$

¿Cómo varía la energía  $\mathcal{E}_{[p]} = \frac{1}{2} m \dot{x}_{[p]}^2 + \frac{1}{2} k x_{[p]}^2$ ? Veamos,

$$\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} = \dot{x}_{[p]}(m \ddot{x}_{[p]} + k x_{[p]}) .$$

Aplicando la ecuación de movimiento,

$$m \ddot{x}_{[p]} + k x_{[p]} = F_0 \cos(\omega_F t) - 2\Gamma m \dot{x}_{[p]} ,$$

de modo que

$$\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} = \dot{x}_{[p]} F_0 \cos(\omega_F t) - 2\Gamma m \dot{x}_{[p]}^2 .$$

¿Cuál es el origen de cada término?

- $\dot{x}_{[p]} F_0 \cos(\omega_F t)$  corresponde a la potencia suministrada por la fuerza externa, (Fuerza)  $\times$  (Velocidad),
- $-2\Gamma m \dot{x}_{[p]}^2$  corresponde a la potencia disipada a través del amortiguamiento;  $-2\Gamma m \dot{x}_{[p]}^2 = -4\Gamma \mathcal{T}_{[p]}(t)$  con  $\mathcal{T}_{[p]}(t)$  la energía cinética en el régimen estacionario. Como vimos en el análisis del caso amortiguado libre, el amortiguamiento disipa energía a un ritmo proporcional a la energía cinética.

Sustituyendo la expresión de  $\dot{x}_{[p]}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} &= F_0 \omega_F (a_i \cos^2(\omega_F t) - a_e \cos(\omega_F t) \sin(\omega_F t)) \\ &- 2\Gamma m \omega_F^2 (a_i^2 \cos^2(\omega_F t) + a_e^2 \sin^2(\omega_F t) - 2 a_i a_e \cos(\omega_F t) \sin(\omega_F t)) . \end{aligned} \quad (23)$$

Podemos reescribir  $\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt}$ , operar algebraicamente y agrupar términos a voluntad, el resultado fundamental con que nos encontramos permanece inamovible,  $\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} \neq 0$ , la energía del oscilador varía con el tiempo. ¿Contradice esto la constancia de la energía con que nos encontramos al estudiar el oscilador armónico simple? Si el movimiento es periódico ¿cabría esperar que la energía no variase con el tiempo? No, y aquí reside la sutileza de la situación, cabe esperar que no haya variado *tras un periodo*. Veamos qué ocurre cuando integramos  $\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt}$  a lo largo de un periodo  $\frac{2\pi}{\omega_F}$ . Recordemos en primer lugar las siguientes integrales básicas

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} dt \cos^2(\omega_F t) = \frac{\pi}{\omega_F}, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} dt \sin^2(\omega_F t) = \frac{\pi}{\omega_F}, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} dt \sin(\omega_F t) \cos(\omega_F t) = 0 .$$

Calculemos ahora

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} \frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} = F_0 \omega_F \left[ a_i \frac{\pi}{\omega_F} \right] - 2\Gamma m \omega_F^2 \left[ a_i^2 \frac{\pi}{\omega_F} + a_e^2 \frac{\pi}{\omega_F} \right] = \pi F_0 a_i - \pi 2\Gamma m \omega_F [a_i^2 + a_e^2] . \quad (24)$$

Recordando ahora las expresiones de  $a_e$  y  $a_i$  - ec. (22) -,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} \frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} = \pi \frac{F_0^2}{m} \frac{2\Gamma \omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} - 2\pi \frac{F_0^2}{m} \frac{\Gamma \omega_F}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2} = 0 . \quad (25)$$

A lo largo de un periodo la variación total de la energía del oscilador es *nula*. El resultado era claramente esperable observando que  $\mathcal{E}_{[p]}$ , siendo función de  $\sin^2(\omega_F t)$ ,  $\cos^2(\omega_F t)$  y  $\sin(\omega_F t) \cos(\omega_F t)$  es *periódica*; de hecho con haber considerado medio periodo,  $\frac{\pi}{\omega_F}$ , en lugar de un periodo completo,  $\frac{2\pi}{\omega_F}$ , hubiéramos alcanzado la conclusión deseada. La energía varía,  $\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} \neq 0$ , y aunque el oscilador disipa energía continuamente por efecto del amortiguamiento, durante parte del movimiento acumula energía de forma neta, durante parte del movimiento pierde energía de forma neta, con un balance global nulo. Para completar esta pequeña discusión, observemos de nuevo ec. (24), en particular el primer término del resultado final,  $\pi F_0 a_i$ ; este término corresponde a la potencia suministrada por la fuerza externa y, como vemos, tan solo depende de  $a_i$ , no depende de  $a_e$ . Ese es el origen de las denominaciones *amplitud elástica*  $a_e$  y *amplitud inelástica*  $a_i$  introducidas en el apartado anterior: el término elástico *no cambia* la energía del sistema. Para mayor claridad, completamos el análisis empleando la otra forma (equivalente, por supuesto) de la solución estacionaria,  $x_{[p]}(t) = a \cos(\omega_F t - \delta)$ . Tenemos

$$\dot{x}_{[p]}(t) = -\omega_F a \sin(\omega_F t - \delta) ,$$

con lo que

$$\mathcal{E}_{[p]}(t) = \frac{1}{2} m \omega_F^2 a^2 \sin^2(\omega_F t - \delta) + \frac{1}{2} k a^2 \cos^2(\omega_F t - \delta) .$$

Recordando que  $k = m\omega_0^2$ , podemos escribir distintas expresiones equivalentes,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{[p]}(t) &= \frac{1}{2} m a^2 [\omega_F^2 \sin^2(\omega_F t - \delta) + \omega_0^2 \cos^2(\omega_F t - \delta)] , \\ &= \frac{1}{2} m a^2 [\omega_F^2 + (\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos^2(\omega_F t - \delta)] , \\ &= \frac{1}{2} m a^2 [\omega_0^2 + (\omega_F^2 - \omega_0^2) \sin^2(\omega_F t - \delta)] , \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \left[ \frac{\omega_0^2 + \omega_F^2}{2} + \frac{\omega_0^2 - \omega_F^2}{2} (\cos^2(\omega_F t - \delta) - \sin^2(\omega_F t - \delta)) \right] , \\ &= \frac{1}{2} m a^2 \left[ \frac{\omega_0^2 + \omega_F^2}{2} + (\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(2(\omega_F t - \delta)) \right] . \end{aligned} \quad (26)$$

Es inmediato leer de nuevo que en general  $\frac{d\mathcal{E}_{[p]}}{dt} \neq 0$ . Podemos también leer que el oscilador gana y pierde energía alternativamente a lo largo de cuartos

de periodo. Observando las ecuaciones anteriores  $\omega_F = \omega_0$  resulta “especial”, ¿qué ocurre cuando  $\omega_F = \omega_0$ , frecuencia natural del sistema? La energía del mismo *no cambia*, la potencia suministrada compensa exactamente la pérdida instantánea debida al amortiguamiento. Adicionalmente estas expresiones nos permiten calcular de forma sencilla cual es el valor medio de la energía a lo largo de un periodo,  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$ ,

$$\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle = \frac{\omega_F}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_F}} dt \mathcal{E}_{[p]} = \frac{1}{2} m a^2 \frac{\omega_0^2 + \omega_F^2}{2} = \frac{F_0^2}{4m} \frac{\omega_0^2 + \omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma\omega_F)^2}. \quad (27)$$

La figura 9 ilustra varios aspectos del análisis de la energía del oscilador forzado que acabamos de desarrollar. Podríamos ahora estudiar las variaciones de  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$

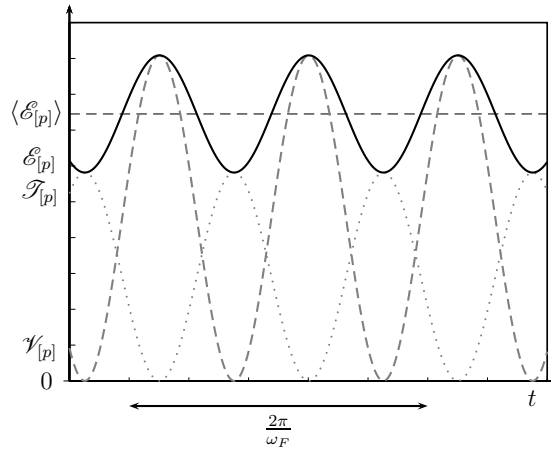


Figura 9: Evolución de la energía del oscilador forzado en el régimen estacionario.

en función  $\omega_F$ , pero no resulta especialmente revelador y sí farragoso. Tan solo señalamos que, cuando  $\omega_0 > \frac{2}{\sqrt{3}}\Gamma$  (equivalentemente  $\omega_0 < 2\omega_1$ ),  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$  alcanza un máximo en<sup>5</sup>  $\omega_F = \sqrt{\omega_0(2\omega_1 - \omega_0)}$ . Si  $\omega_0 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\Gamma$ ,  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$  es máxima cuando  $\omega_F \rightarrow 0$ . Ilustramos en cualquier caso  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$  como función de  $\omega_F$  en la figura 10.

## 7. Oscilador forzado con fuente periódica arbitraria

Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento del oscilador forzado en presencia de una fuerza externa armónica  $F_0 \cos(\omega_F t)$ ; ¿qué comportamiento tiene el sistema cuando la fuerza externa no tiene una forma tan “amable”? Para dar un primer paso en esa dirección empezaremos estudiando el comportamiento del sistema en presencia de una fuerza externa *periódica*  $f(t)$ . Explícitamente,

<sup>5</sup>La energía media *no es máxima* a la frecuencia de resonancia; no debería sorprendernos en exceso teniendo en cuenta que para  $\omega_F = \omega_R$  quien es máxima es la amplitud  $a$ , pero la energía media  $\langle \mathcal{E}_{[p]} \rangle$  es proporcional a  $a^2$  y a un factor  $\omega_0^2 + \omega_F^2$ .

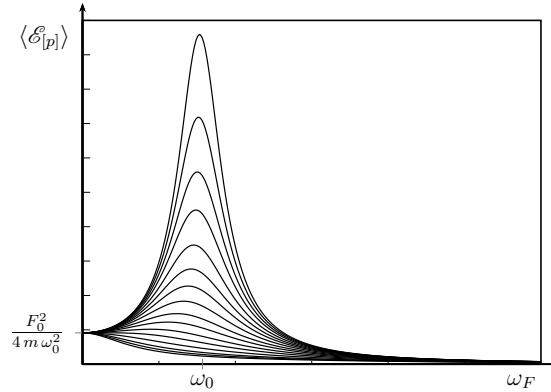


Figura 10: Energía media del oscilador forzado para distintos valores de  $\Gamma$ .

queremos resolver  $x(t)$  cuando la ecuación de movimiento no es ec. (1) sino

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}, \quad (28)$$

donde  $\exists T \in \mathbb{R}^+$ , el periodo de la fuerza externa, tal que  $f(t + T) = f(t)$ . Asociaremos una frecuencia angular  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  al periodo  $T$  de la fuerza externa. ¿Qué funciones con el mismo periodo  $T$  y particularmente sencillas conocemos? Tanto  $\cos(\omega t)$  como  $\sin(\omega t)$  responden a este requisito. Es más, si consideramos un entero  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario, tanto  $\cos(n\omega t)$  como  $\sin(n\omega t)$  son periódicas de periodo  $T$  (de hecho son periódicas de periodo  $T/n$ ). Tenemos así toda una familia de funciones,

$$\cos(n\omega t), \quad \sin(n\omega t), \quad n \in \mathbb{N},$$

con periodo  $T$ . Podemos completar este conjunto con la función periódica más simple imaginable, una función constante  $c$ , que para mayor simplicidad si cabe escogemos igual a uno. Si dado el conjunto de funciones

$$\{1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t), \dots, \sin(n\omega t), \cos(n\omega t), \dots\}, \quad (29)$$

podríamos escribir cualquier función periódica  $f(t)$  como una combinación lineal de las mismas, nuestro problema se habría convertido en una suma de problemas análogos al estudiado anteriormente en que la fuerza externa era armónica,  $F_0 \cos(\omega_F t)$ ,  $F_0 \sin(\omega_F t)$ . Teniendo en cuenta que la ecuación de movimiento es lineal, obtendríamos la solución deseada como una combinación lineal (una *superposición*) de las distintas soluciones. Afortunadamente semejante posibilidad existe: es el desarrollo<sup>6</sup> de una función en un intervalo  $T$  en

<sup>6</sup>Podemos establecer una analogía limitada entre una serie de Fourier y otra serie más familiar, la serie de Taylor. Al considerar el desarrollo en serie de Taylor de una función  $f(x)$ , alrededor de  $x = 0$ , escribimos  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ; podemos leer esta serie como una combinación lineal de un conjunto de funciones base  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$  cuyos coeficientes se obtienen operando sobre la propia  $f(x)$ : derivándola; para obtener los coeficientes veremos a continuación qué hay que hacer con  $f(x)$ .

una *serie de Fourier*<sup>7</sup>:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) , \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (30)$$

Los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  son

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(n\omega t) f(t) , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sin(n\omega t) f(t) . \quad (31)$$

### 7.1. Análisis de Fourier

Para que resulte más claro el origen de las expresiones de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , damos un paso atrás y dedicamos esta sección a obtener los coeficientes del desarrollo anterior. Para ello, *supongamos* que  $f(t)$  se puede escribir como una serie

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t)) , \text{ con } \omega = \frac{2\pi}{T} . \quad (32)$$

¿Cómo obtenemos los coeficientes? Para determinar los coeficientes multiplicamos  $f(t)$  por las distintas funciones del conjunto base considerado (ec. (29)) e integramos sobre un periodo<sup>8</sup>. Es decir, consideramos las siguientes integrales (con un entero  $m$  genérico):

$$\begin{aligned} ? &= \int_0^T dt \, 1 f(t) , \\ ? &= \int_0^T dt \, \cos(m\omega t) f(t) , \\ ? &= \int_0^T dt \, \sin(m\omega t) f(t) . \end{aligned}$$

Si introducimos el desarrollo de  $f(t)$  que hemos asumido, nos encontramos con la siguiente lista de integrales a evaluar:

- Integrales con la función constante 1,

$$? = \int_0^T dt \, 1 \alpha_0 , \quad (33)$$

$$? = \int_0^T dt \, 1 \alpha_n \cos(n\omega t) , \quad (34)$$

$$? = \int_0^T dt \, 1 \beta_n \sin(n\omega t) . \quad (35)$$

<sup>7</sup>Esta breve introducción al desarrollo en serie de Fourier de una función periódica no es ni rigurosa ni exhaustiva, apenas pretende dar los ingredientes mínimos que permitan: (1) comprender mínimamente sus fundamentos y su relevancia para el problema físico abordado, (2) aplicarlo a casos de complejidad moderada.

<sup>8</sup>De forma más rigurosa la integral sobre un periodo del producto de dos funciones corresponde a un producto escalar en el espacio de las funciones de cuadrado integrable sobre ese intervalo. El conjunto  $\{1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots\}$  constituye entonces una base ortonormal.

- Integrales con la función  $\cos(m\omega t)$ ,

$$? = \int_0^T dt \cos(m\omega t) \alpha_0 , \quad (36)$$

$$? = \int_0^T dt \cos(m\omega t) \alpha_n \cos(n\omega t) , \quad (37)$$

$$? = \int_0^T dt \cos(m\omega t) \beta_n \sin(n\omega t) . \quad (38)$$

- Integrales con la función  $\sin(m\omega t)$ ,

$$? = \int_0^T dt \sin(m\omega t) \alpha_0 , \quad (39)$$

$$? = \int_0^T dt \sin(m\omega t) \beta_n \sin(n\omega t) , \quad (40)$$

$$? = \int_0^T dt \sin(m\omega t) \alpha_n \cos(n\omega t) . \quad (41)$$

Del conjunto anterior de integrales empezamos por las integrales inmediatas:

$$\text{ec. (33)} \rightarrow \int_0^T dt 1 \alpha_0 = \alpha_0 T ,$$

$$\text{ecs. (34),(36)} \rightarrow \int_0^T dt \cos(n\omega t) = 0 ,$$

$$\text{ecs. (35),(39)} \rightarrow \int_0^T dt \sin(n\omega t) = 0 .$$

Para continuar con el resto de coeficientes, conviene primero recordar las siguientes identidades trigonométricas,

$$\begin{aligned} \cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B , \\ \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B , \end{aligned} \quad (42)$$

que nos permitirán reescribir

$$\cos(n\omega t) \cos(m\omega t) = \frac{1}{2} [\cos((n+m)\omega t) + \cos((n-m)\omega t)] ,$$

$$\sin(n\omega t) \sin(m\omega t) = \frac{1}{2} [\cos((n-m)\omega t) - \cos((n+m)\omega t)] ,$$

$$\sin(n\omega t) \cos(m\omega t) = \frac{1}{2} [\sin((n+m)\omega t) + \sin((n-m)\omega t)] ,$$

$$\sin(m\omega t) \cos(n\omega t) = \frac{1}{2} [\sin((n+m)\omega t) - \sin((n-m)\omega t)] .$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \text{ec. (37)} \rightarrow \int_0^T dt \cos(m\omega t) \alpha_n \cos(n\omega t) &= \\ &= \frac{\alpha_n}{2} \int_0^T dt [\cos((n+m)\omega t) + \cos((n-m)\omega t)] , \end{aligned}$$

cuyo primer término es

$$\frac{\alpha_n}{2} \int_0^T dt \cos((n+m)\omega t) = \left[ \frac{\sin((n+m)\omega t)}{(n+m)\omega} \right]_0^T = 0 .$$

Para el segundo término, tenemos que distinguir  $n \neq m$  de  $n = m$ ,

$$\begin{aligned} n \neq m, \quad \frac{\alpha_n}{2} \int_0^T dt \cos((n-m)\omega t) &= \left[ \frac{\sin((n-m)\omega t)}{(n-m)\omega} \right]_0^T = 0, \\ n = m, \quad \frac{\alpha_m}{2} \int_0^T dt \underbrace{\cos((n-m)\omega t)}_1 &= \frac{\alpha_m}{2} T . \end{aligned}$$

Seguimos con

$$\begin{aligned} \text{ec. (38)} \rightarrow \int_0^T dt \cos(m\omega t) \beta_n \sin(n\omega t) &= \\ \frac{\beta_n}{2} \int_0^T dt [\sin((n+m)\omega t) + \sin((n-m)\omega t)] , \end{aligned}$$

cuyo primer término es

$$\frac{\beta_n}{2} \int_0^T dt \sin((n+m)\omega t) = \left[ -\frac{\cos((n+m)\omega t)}{(n+m)\omega} \right]_0^T = 0 .$$

Para el segundo término, distinguimos de nuevo  $n \neq m$  de  $n = m$ ,

$$\begin{aligned} n \neq m, \quad \frac{\beta_n}{2} \int_0^T dt \sin((n-m)\omega t) &= \left[ -\frac{\cos((n-m)\omega t)}{(n-m)\omega} \right]_0^T = 0, \\ n = m, \quad \frac{\beta_m}{2} \int_0^T dt \underbrace{\sin((n-m)\omega t)}_0 &= 0 . \end{aligned}$$

De forma completamente análoga (basta cambiar tanto  $\cos(m\omega t)\sin(n\omega t)$  por  $\cos(n\omega t)\sin(m\omega t)$  como  $\beta_n$  por  $\alpha_n$ ),

$$\text{ec. (41)} \rightarrow \int_0^T dt \cos(n\omega t) \alpha_n \sin(m\omega t) = 0 .$$

La única integral que falta es

$$\begin{aligned} \text{ec. (40)} \rightarrow \int_0^T dt \sin(m\omega t) \beta_n \sin(n\omega t) &= \\ \frac{\beta_n}{2} \int_0^T dt [\cos((n-m)\omega t) - \cos((n+m)\omega t)] . \end{aligned}$$

Atendiendo al cálculo apenas expuesto de la ec. (37), la integral anterior es:

$$\begin{aligned} n \neq m, \quad \frac{\beta_n}{2} \int_0^T dt \cos((n-m)\omega t) &= \left[ \frac{\sin((n-m)\omega t)}{(n-m)\omega} \right]_0^T = 0, \\ n = m, \quad \frac{\beta_m}{2} \int_0^T dt \underbrace{\cos((n-m)\omega t)}_1 &= \frac{\beta_m}{2} T . \end{aligned}$$



Recogiendo los resultados de las integrales ec. (33) a ec. (41), tenemos

$$\int_0^T dt 1 f(t) = \alpha_0 \frac{T}{2}, \quad (43)$$

$$\int_0^T dt \cos(m\omega t) f(t) = \alpha_m \frac{T}{2}, \quad (44)$$

$$\int_0^T dt \sin(m\omega t) f(t) = \beta_m \frac{T}{2}, \quad (45)$$

de ahí las expresiones en ec. (31). Antes de centrarnos en la solución del problema físico que nos ocupa, conviene subrayar una última propiedad. Considerando la periodicidad tanto de  $f(t)$  como de las funciones base del desarrollo, el aspecto fundamental del cálculo de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  es la longitud del intervalo de integración  $T$ : no importa *qué* límites de integración superior  $\ell_{Max}$  e inferior  $\ell_{Min}$  escojamos si  $\ell_{Max} - \ell_{min} = T$ . Para ello demostremos que las integrales en ec. (31) son *invariantes* al incrementar con una misma constante  $c$  los límites de integración inferior y superior (de forma completamente general podemos suponer  $0 < c < T$ ):

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt \cos(n\omega t) f(t), \quad b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt \sin(n\omega t) f(t).$$

Concretando para  $a_n$ , empezamos por reescribir

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt \cos(n\omega t) f(t) = \frac{2}{T} \int_c^T dt \cos(n\omega t) f(t) + \frac{2}{T} \int_T^{c+T} dt \cos(n\omega t) f(t).$$

Manipulamos ahora la segunda integral utilizando primero la periodicidad de las funciones,

$$\frac{2}{T} \int_T^{c+T} dt \cos(n\omega t) f(t) = \frac{2}{T} \int_T^{c+T} dt \cos(n\omega(t+T)) f(t+T),$$

y cambiando ahora la variable de integración  $t \mapsto t+T$ , con lo que los límites de integración cambian a 0 y  $c$ ,

$$\frac{2}{T} \int_T^{c+T} dt \cos(n\omega(t+T)) f(t+T) = \frac{2}{T} \int_0^c dt \cos(n\omega t) f(t).$$

Reuniendo las expresiones anteriores,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt \cos(n\omega t) f(t) = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt \cos(n\omega t) f(t). \quad (46)$$

De forma completamente análoga,

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt \sin(n\omega t) f(t) = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt \sin(n\omega t) f(t). \quad (47)$$

Conviene recordar esta propiedad para simplificar el cálculo de  $a_n$  y  $b_n$  cuando  $f(t)$  sea una función *par* o *impar*: escogiendo  $c = -T/2$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(n\omega t) f(t), \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin(n\omega t) f(t).$$

Cuando  $f(t)$  sea *par*, tendremos inmediatamente  $b_n = 0$ ; cuando  $f(t)$  sea *impar*, tendremos inmediatamente  $a_n = 0$ .

## 7.2. Solución en serie de Fourier

Hemos dedicado el apartado anterior a dar una visión superficial del desarrollo en serie de Fourier de una función periódica, regresemos ahora al problema físico que nos ha llevado a esa excursión matemática. Queríamos resolver

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}. \quad (28)$$

Hemos visto cómo desarrollar  $f(t)$  periódica de periodo  $T$ ,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)),$$

que nos permite reescribir ec. (28)

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \right].$$

Según anticipamos, la linealidad de esta ecuación diferencial nos permite construir la solución general como una superposición de las soluciones correspondientes a cada una de las fuerzas externas  $\cos(n\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (y por supuesto de la correspondiente al término constante), además del término transitorio que resuelve la ecuación homogénea. En el estudio del oscilador forzado (apartados 1 a 6), encontramos las soluciones estacionarias

$$x_{[p]}(t) = a \cos(\omega_F t - \delta) = \frac{F_0 (\omega_0^2 - \omega_F^2) \cos(\omega_F t) + 2\Gamma \omega_F \sin(\omega_F t)}{m (\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2},$$

para una fuente  $F_0 \cos(\omega_F t)$ ,

$$x_{[p]}(t) = a \sin(\omega_F t - \delta) = \frac{F_0 (\omega_0^2 - \omega_F^2) \sin(\omega_F t) - 2\Gamma \omega_F \cos(\omega_F t)}{m (\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\Gamma \omega_F)^2},$$

para una fuente  $F_0 \sin(\omega_F t)$ .

Se puede extender este resultado sin dificultad al caso que nos ocupa:

$$x_{[p]}(t) = \frac{a_0}{2m\omega_0^2} + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t - \delta_n) + b_n \sin(n\omega t - \delta_n)}{\sqrt{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\Gamma n\omega)^2}}, \quad (48)$$

con

$$\delta_n \equiv \tan^{-1} \left[ \frac{2\Gamma n\omega}{\omega_0^2 - (n\omega)^2} \right].$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
 x_{[p]}(t) &= \frac{a_0}{2m\omega_0^2} \\
 &+ \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{a_n(\omega_0^2 - (n\omega)^2) - b_n 2\Gamma n\omega}{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\Gamma n\omega)^2} \right] \cos(n\omega t) \\
 &+ \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b_n(\omega_0^2 - (n\omega)^2) + a_n 2\Gamma n\omega}{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\Gamma n\omega)^2} \right] \sin(n\omega t) . \quad (49)
 \end{aligned}$$

La solución general estacionaria involucra por tanto contribuciones correspondientes a todos los armónicos necesarios para desarrollar  $f(t)$  en serie de Fourier (incluyendo el término constante  $\frac{a_0}{2}$  – que al fin y al cabo no es más que la fuerza promediada en un periodo –, que se traduce en un desplazamiento “neto” de la posición de equilibrio). Gran parte del análisis llevado a cabo en los apartados anteriores de este capítulo se traslada al análisis *de cada uno de los términos* en  $x_{[p]}(t)$  de las ecuaciones (48) y (49): la dependencia de la amplitud con la frecuencia externa, el fenómeno de resonancia o el desfase entre la fuerza externa y la oscilación del sistema. El estudio de la variación de la energía no resulta conceptualmente más complicado que el correspondiente a una fuerza externa armónica simple, pero sí resulta más engorroso algebraicamente; al no aportar nuevos ingredientes de interés, queda fuera de esta discusión.

### 7.3. Ejemplo

#### 7.3.1. Solución mediante una serie de Fourier

Para ilustrar lo expuesto en los dos apartados anteriores, el análisis del movimiento forzado con una fuerza externa periódica en términos de la descomposición en serie de Fourier, desarrollamos ahora un ejemplo. Consideremos la fuerza externa<sup>9</sup>

$$f(t) = \alpha \frac{4}{T^2} t(T - t), \quad t \in [0; T] . \quad (50)$$

Si extendemos la definición a cualquier intervalo  $[nT; (n + 1)T]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , según

$$f(t) = \alpha \frac{4}{T^2} (t - nT)((n + 1)T - t), \quad t \in [nT; (n + 1)T] , \quad (51)$$

$f(t)$  es periódica de periodo  $T$ , (ver figura 11,  $f(t)$  no es más que una sucesión de arcos parabólicos):

$$\begin{aligned}
 t + T \in [nT; (n + 1)T], \quad f(t + T) &= \alpha \frac{4}{T^2} (t + T - nT)((n + 1)T - t - T) = \\
 \alpha \frac{4}{T^2} (t - (n - 1)T)(nT - t) &= f(t), \quad t \in [(n - 1)T; nT] .
 \end{aligned}$$

Desarrollemos ahora  $f(t)$  en serie de Fourier,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] .$$

---

<sup>9</sup>El factor  $\alpha \frac{4}{T^2}$  se ha elegido de modo que el máximo de  $f(t)$ , que se alcanza para  $t$  igual a múltiplos impares de  $\frac{T}{2}$ , sea simplemente  $\alpha$ .

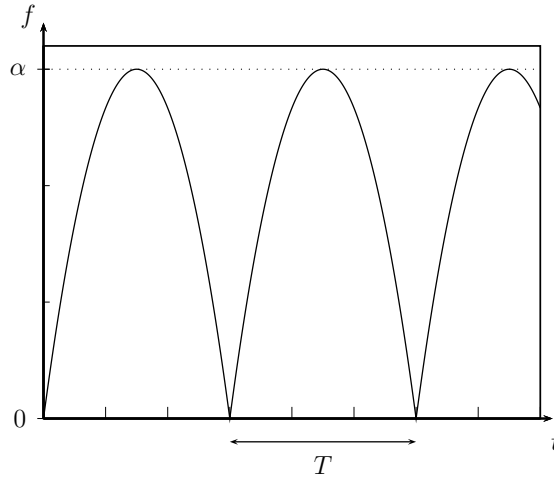


Figura 11: Fuerza periódica  $f(t)$ , ec. (51).

Observando la figura 11, podemos sospechar que  $f(t)$  es *par*, demostrémoslo:

$$f(-t) = \alpha \frac{4}{T^2} (-t) (T + t) .$$

Empleando la periodicidad de  $f$ , desplazamos  $t \mapsto t - T$ , con lo que

$$f(-t) = \alpha \frac{4}{T^2} (T - t) t = f(t) ,$$

y  $f(t)$  es, en efecto, *par*. Sin necesidad de cálculo alguno,  $b_n = 0$  en el desarrollo de  $f(t)$ . Calculemos los restantes coeficientes escogiendo<sup>10</sup> como límites de integración 0 y  $T$ .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt \cos(n\omega t) f(t) = \alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) (Tt - t^2) . \quad (52)$$

Empezamos por el término cuadrático,

$$-\alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) t^2 .$$

Integramos por partes escogiendo

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = \cos(n\omega t) \\ v(t) = t^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \\ v'(t) = 2t \end{array} \right\} .$$

Tendremos entonces

$$-\alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) t^2 = -\alpha \frac{8}{T^3} \left\{ \left[ t^2 \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T - \int_0^T dt \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} 2t \right\} .$$

<sup>10</sup>N.B. Podríamos, por ejemplo, escoger un intervalo de integración simétrico con límites  $-T/2$  y  $T/2$ , pero en eso caso tendríamos que sustituir en cada subintervalo  $[-T/2; 0]$  y  $[0; T/2]$  la expresión de  $f(t)$  adecuada según ec. (51), es decir  $f(t) = -\alpha \frac{4}{T^2} t(t + T)$  en  $[-T/2; 0]$  y  $f(t) = \alpha \frac{4}{T^2} t(T - t)$  en  $[0; T/2]$ .

Con  $\omega T = 2\pi$ , la primera contribución es nula y tan solo queda por calcular

$$-\alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) t^2 = \alpha \frac{16}{T^3} \int_0^T dt \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} t ,$$

que abordamos de nuevo por partes con

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \\ v(t) = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) = -\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \\ v'(t) = 1 \end{array} \right\} ,$$

de modo que

$$-\alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) t^2 = \alpha \frac{16}{T^3} \left\{ \left[ -t \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right]_0^T + \int_0^T dt \frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2} \right\} ,$$

$$-\alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt \cos(n\omega t) t^2 = \alpha \frac{16}{T^3} \left\{ -\frac{T}{(n\omega)^2} + \left[ \frac{\sin(n\omega t)}{(n\omega)^3} \right]_0^T \right\} = -\frac{4\alpha}{\pi^2 n^2} .$$

Para completar el cálculo de  $a_n$  en ec. (52), falta el término

$$\alpha \frac{8}{T^2} \int_0^T dt t \cos(n\omega t) .$$

Una vez más, integramos por partes, con

$$\left\{ \begin{array}{l} u'(t) = \cos(n\omega t) \\ v(t) = t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u(t) = \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \\ v'(t) = 1 \end{array} \right\} ,$$

de modo que

$$\alpha \frac{8}{T^2} \int_0^T dt t \cos(n\omega t) = \alpha \frac{8}{T^2} \left\{ \left[ t \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^T - \int_0^T dt \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right\} = 0 .$$

Esto nos deja con

$$a_n = -\frac{4\alpha}{\pi^2 n^2} .$$

Veamos ahora el término constante de la serie de Fourier (no es más que el valor medio de  $f(t)$  en un periodo),

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) = \alpha \frac{8}{T^3} \int_0^T dt (tT - t^2) = \alpha \frac{8}{T^3} \left[ T \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^T = \alpha \frac{4}{3} .$$

El desarrollo de  $f(t)$ , con  $\frac{a_0}{2} = \alpha \frac{2}{3}$  y  $a_n = -\frac{4\alpha}{\pi^2 n^2}$  es por tanto

$$f(t) = \alpha \frac{2}{3} - \alpha \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega t) . \quad (53)$$

La figura 12 ilustra uno a uno los primeros términos del desarrollo anterior. La figura 13 ilustra la serie de Fourier de  $f(t)$  truncada a un determinado orden  $N$ , para distintos valores de  $N$ . La solución estacionaria  $x_{[p]}(t)$  de las ecuaciones de

movimiento será por tanto

$$\begin{aligned}
 x_{[p]}(t) = & \frac{2\alpha}{3m\omega_0^2} \\
 & - \frac{\alpha}{m} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{\omega_0^2 - (n\omega)^2}{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\Gamma n\omega)^2} \right] \cos(n\omega t) \\
 & - \frac{\alpha}{m} \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{2\Gamma n\omega}{(\omega_0^2 - (n\omega)^2)^2 + (2\Gamma n\omega)^2} \right] \sin(n\omega t) \quad (54)
 \end{aligned}$$

La figura 14 ilustra el resultado anterior; la figura 15 ilustra en cambio la solución completa  $x(t)$  con condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Se aprecia claramente como se pasa del régimen inicial con un término transitorio a la solución estacionaria. A modo de comparación, y sin entrar en mayores detalles sobre las constantes del sistema escogidas en este ejemplo, la figura 16 muestra una solución completamente *numérica* de la ecuación de movimiento dadas las mismas condiciones iniciales. Como se puede apreciar, la solución analítica que hemos construido y la solución numérica coinciden plenamente.

El método de resolución ilustrado en este análisis es aplicable a cualquier función periódica  $f(t)$ , ahora bien, este ejemplo es peculiar en un aspecto: la fuente es un polinomio de segundo grado (que se repite en intervalos de tamaño  $T$ ). ¿Podemos encontrar una solución particular de ese mismo tipo? Sustituyendo una función  $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$  en

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{4\alpha}{T^2} t(T-t),$$

no es difícil obtener los valores de  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  necesarios:

$$\begin{aligned}
 c_2 &= -\frac{4\alpha}{\omega_0^2 T^2}, \\
 c_1 &= \frac{4\alpha}{\omega_0^2 T^2} \left( T + \frac{4\Gamma}{\omega_0^2} \right), \\
 c_0 &= \frac{8\alpha}{\omega_0^4 T^2} \left( 1 - T\Gamma - \frac{4\Gamma^2}{\omega_0^2} \right).
 \end{aligned}$$

Parece entonces que, al menos para el ejemplo anterior, nos hemos fatigado en vano calculando el desarrollo en serie de Fourier de la fuente cuando una mirada atenta a la forma de la misma nos permite encontrar la solución estacionaria resolviendo un sencillo sistema lineal de ecuaciones. Desafortunadamente el problema no es tan sencillo. La fuente es  $\frac{4\alpha}{T^2} t(T-t)$  para tiempos  $t \in [0; T]$ ; el polinomio  $c_0 + c_1 t + c_2 t^2$  con los coeficientes anteriores resuelve la ecuación en el intervalo  $[0; T]$ . . . pero no más allá. Podríamos pensar que bastará entonces considerar  $c_0 + c_1(t-T) + c_2(t-T)^2$  para  $t \in [T; 2T]$ , puesto que con los mismos valores  $c_0$ ,  $c_1$  y  $c_2$  resolvemos la ecuación diferencial (lo único que habríamos hecho entonces habría sido “desplazar”  $t \in [T; 2T] \rightarrow t \in [0; T]$  para reutilizar lo hecho inicialmente). Ahora bien, tenemos una dificultad, que arruina de hecho el planteamiento:  $x$  debe ser, necesariamente, continua. En términos de  $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$  la continuidad requiere  $x(0) = x(T)$  para construir la solución anterior. . . pero  $c_0 \neq c_0 + c_1 T + c_2 T^2$  en general y nos encontramos con la imposibilidad de construir una solución particular exacta de forma sencilla.

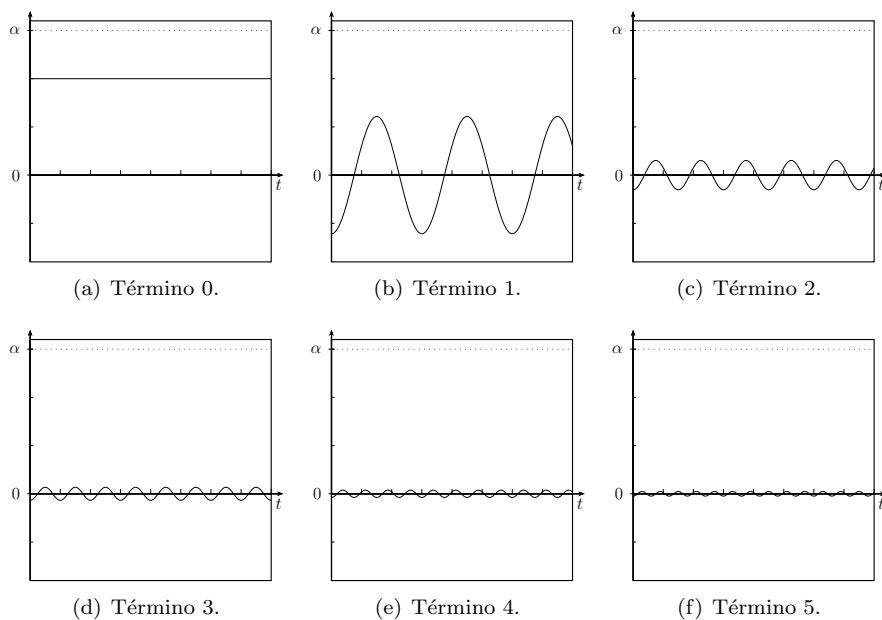


Figura 12: Primeros términos del desarrollo en serie de Fourier de  $f(t)$ , ec. (53).

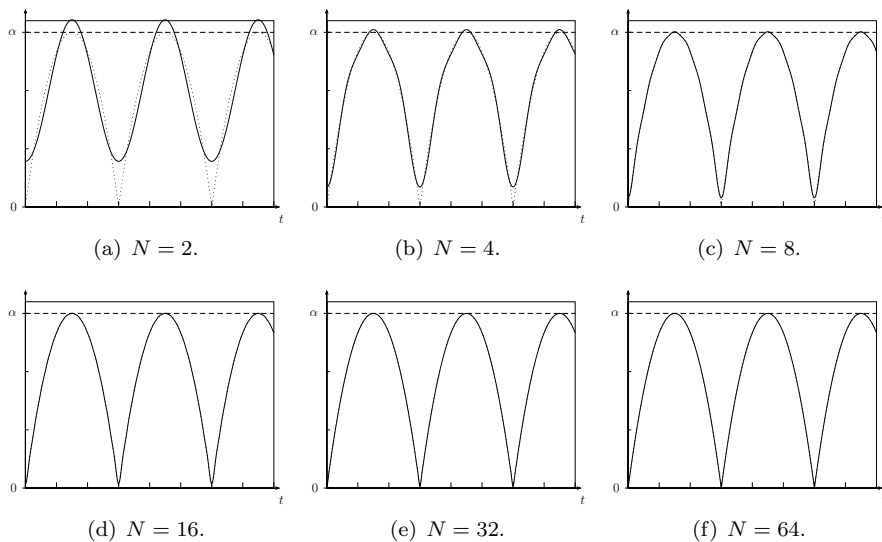


Figura 13: Serie de Fourier de  $f(t)$ , ec. (53), hasta el término  $N$ .

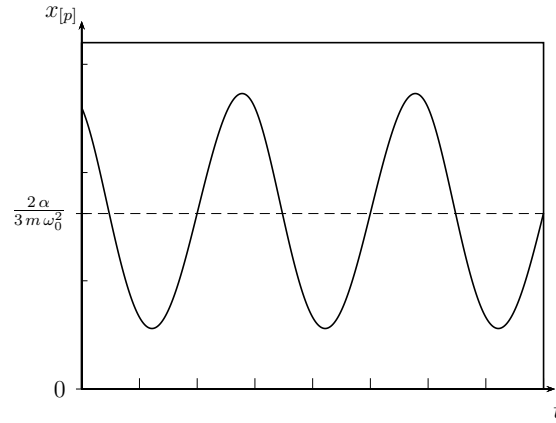


Figura 14: Solución estacionaria  $x_{[p]}(t)$ , ec. (54), hasta el término n° 64.

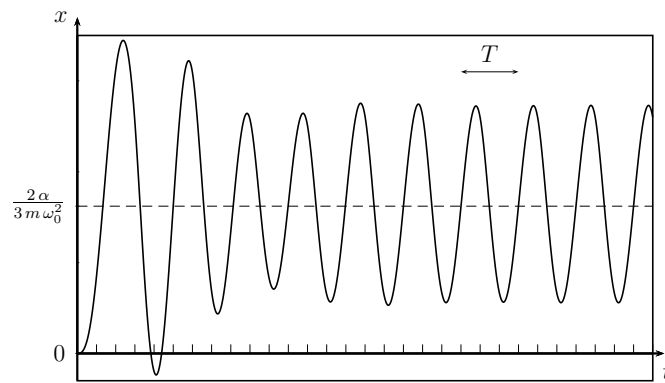


Figura 15: Solución completa  $x(t)$ , hasta el término n° 64,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

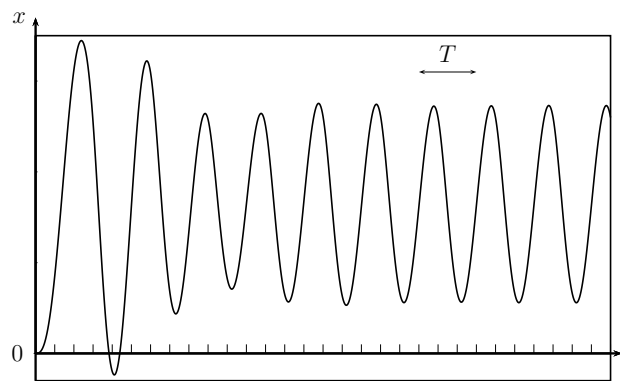


Figura 16: Solución numérica  $x(t)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ , a comparar con la figura 15.



## 7.4. \* Fuente arbitraria

A lo largo de este apartado hemos estudiado cómo abordar el movimiento de un oscilador cuando este se encuentra sometido a una fuerza externa periódica. Obviamente no es el caso más general que podemos imaginar. Si nos encontráramos en presencia de una fuerza externa arbitraria todo lo desarrollado parece en principio inútil. Ahora bien, podemos considerar que una fuente arbitraria es de hecho una fuente periódica con periodo *infinito*. ¿Permite esto resolver el problema empleando la misma clase de desarrollo en serie? La respuesta es *sí* para fuentes arbitrarias que cumplan ciertos requisitos. A una periodicidad finita  $T$  hemos asociado una frecuencia angular  $\omega$  y hemos empleado una *serie* de armónicos de frecuencias  $n\omega$ ; con una periodicidad *infinita*, en lugar de una serie habrá que considerar una *integral* sobre un continuo de frecuencias angulares. El requisito fundamental que deberá cumplir la fuente es que el cálculo del “coeficiente” asociado a cada armónico en ese continuo de frecuencias tenga sentido; en términos de las integrales que “proyectan” los coeficientes del desarrollo, corresponderá a pedir que tengan un valor finito. Sin entrar en mayor detalle matemático, tan solo las fuentes que sean “de cuadrado integrable” admitirán esa clase de desarrollo. Al tratarse de un *continuo* de frecuencias en lugar de un conjunto (infinito) numerable, una *serie*, se habla de *transformada (integral) de Fourier* (en senos y cosenos). Desarrollar estos aspectos nos lleva demasiado lejos sin añadir mayor comprensión física del problema; de hecho, hemos centrado el estudio de las oscilaciones forzadas en la solución estacionaria, perdurable en el tiempo, que para una fuente arbitraria no siempre existirá.

## 8. Oscilador no lineal

A lo largo de las secciones anteriores hemos analizado múltiples aspectos del comportamiento de un sistema perturbado alrededor del equilibrio. Un ingrediente fundamental en todo lo desarrollado ha sido la *linealidad* de la ecuación diferencial que controla el movimiento, aun cuando se ha considerado el movimiento con amortiguamiento o el movimiento forzado. En multitud de casos un tratamiento lineal es perfectamente válido y adecuado, no obstante no siempre ha de ser así. En esta sección vamos a estudiar alguna de las consecuencias físicas de alejarnos del régimen lineal. Para ello introduciremos, en la ecuación diferencial que controla el movimiento, un término no lineal sencillo,  $Ax^2$  (corresponde a un término en la fuerza recuperadora sobre el grado de libertad  $x$  de tipo  $mAx^2$ ), de modo que esta resulta,

- en ausencia de una fuerza externa,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 = 0 , \quad (55)$$

- en presencia de una fuerza externa armónica,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) . \quad (56)$$

Además de  $x = 0$ , el sistema puede poseer una segunda posición de equilibrio en  $x = -\frac{\omega_0^2}{A}$ ; ahora bien, es inestable y la ignoramos en lo sucesivo.

Los métodos empleados hasta ahora son *a priori* inútiles para encontrar una solución analítica exacta al problema. De entrada, la ecuación resultante *no es lineal* con lo que el principio de superposición *no es válido*. Para resolver el problema nos contentaremos con construir de forma sistemática soluciones aproximadas. Por razones que quedarán claras a continuación, abordamos primero el segundo caso, cuando el sistema se encuentra sometido a una fuerza externa armónica.

### 8.1. Oscilador no lineal forzado I

Según acabamos de mencionar, la ecuación (56) queda fuera de los métodos empleados hasta ahora. De entre las características del problema lineal *sí* que hay una que podemos esperar encontrar de nuevo: la periodicidad de la solución. Nótese que no hablamos ya de solución transitoria ni de solución estacionaria puesto que la ecuación no es lineal. Considerando el periodo de la fuerza externa  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , si  $x(t)$  posee esa misma periodicidad ( $x(t+T) = x(t)$ ), todos los términos de la ecuación resultan invariantes al trasladar  $t \mapsto t+T$ . Es más, en el límite  $A \rightarrow 0$ , deberíamos recuperar la solución estacionaria,

$$\lim_{A \rightarrow 0} x(t) = a \cos(\omega t - \delta) .$$

Estos dos ingredientes, la periodicidad y un límite no trivial conocido (el problema *lineal* con  $A = 0$ ), pueden resultar suficientes para construir una solución al problema no lineal de forma controlada. Si  $A$  es *pequeño*<sup>11</sup>, podemos construir una solución aproximada como una serie de potencias en el parámetro  $A$ . El término de orden cero, correspondiente al límite  $A = 0$ , ya lo conocemos. Escribamos explícitamente  $x(t)$  como una serie de potencias en  $A$ :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)}(t) = x_{(0)}(t) + A x_{(1)}(t) + A^2 x_{(2)}(t) + \dots \quad (57)$$

$A^n x_{(n)}(t)$  es el orden  $n$  del desarrollo de la solución<sup>12</sup>. Si sustituimos este desarrollo en la ecuación de movimiento (56),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} A^n \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} + A \left( \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} \right)^2 = \\ \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} A^n \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} A^n x_{(n)} + \sum_{n,m=0}^{\infty} A^{n+m+1} x_{(n)} x_{(m)} = \\ \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) . \quad (58) \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Como cada vez que calificamos un parámetro dimensional como *pequeño* o *grande*, debemos considerar que es *pequeño* o *grande* ¿con respecto a qué otras cantidades que definen el problema? En este caso por “ $A$  es *pequeño*” debemos entender que para desplazamientos en el grado de libertad de tamaño  $X$ , el término  $AX^2$  de la ecuación diferencial es típicamente más pequeño que los restantes términos.

<sup>12</sup>Conviene subrayar que, según hemos escrito la ecuación de movimiento,  $A$  tiene dimensiones de  $[x]^{-1} \times (\text{Tiempo})^{-2}$ , con lo que  $[x_{(0)}] = [x]$ ,  $[x_{(1)}] = [x] \times [A^{-1}] = [x]^2 \times (\text{Tiempo})^2$  y en general  $[x_{(n)}] = [x] \times [A^{-n}] = [x]^{n+1} \times (\text{Tiempo})^{2n}$ .

Para poder apreciar con claridad qué podemos hacer con la ecuación anterior, veamos explícitamente qué resulta de considerar los primeros órdenes en  $A$  de forma ordenada:

$$\begin{aligned}
 & A^0 (\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma \dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}) + \\
 & A^1 (\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} + [(x_{(0)})^2]) + \\
 & A^2 (\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma \dot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} + [2x_{(0)}x_{(1)}]) + \\
 & A^3 (\ddot{x}_{(3)} + 2\Gamma \dot{x}_{(3)} + \omega_0^2 x_{(3)} + [2x_{(0)}x_{(2)} + (x_{(1)})^2]) + \\
 & \dots \\
 & = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) . \quad (59)
 \end{aligned}$$

El término de orden más bajo, con  $A^0$ , tan solo involucra  $x_{(0)}$ , y lo hace de forma lineal, conforme a la ecuación diferencial lineal que teníamos para  $A = 0$ :  $\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma \dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}$ . El término de primer orden,  $A^1$ , involucra tanto el término  $x_{(1)}$ , de nuevo de forma lineal,  $\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)}$ , como el término  $x_{(0)}$ , este de forma *no lineal*:  $(x_{(0)})^2$ . Podemos ver qué ocurre para el término genérico de orden  $A^n$ : tendremos una parte  $\ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma \dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 x_{(n)}$  *lineal* en  $x_{(n)}$ , con una dependencia en  $x_{(n)}$  análoga a la de la ecuación diferencial *lineal*, y una parte no lineal  $2(x_{(0)}x_{(n-1)} + x_{(1)}x_{(n-2)} + x_{(2)}x_{(n-3)} + \dots)$ , además de un término  $(x_{((n-1)/2}))^2$  si  $n$  es impar; es fundamental subrayar que la parte no lineal tan solo involucra términos  $x_{(j)}$  de órdenes inferiores,  $j < n$ . Esto nos permite calcular los  $x_{(n)}$  hasta el orden que deseemos del siguiente modo:

- (1) - Resolvemos  $\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma \dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ . Conforme hemos estudiado, se resuelve como suma de un término estacionario

$$x_{(0)[p]} = a_{(0)e} \cos(\omega t) + a_{(0)i} \sin(\omega t) , \quad (60)$$

con

$$a_{(0)e} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} , \quad a_{(0)i} = \frac{F_0}{m} \frac{2\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma \omega)^2} ,$$

y de un término transitorio  $x_{(0)[h]}$  que desaparece con el tiempo (recordemos el factor  $e^{-\Gamma t}$ ). Nos interesa principalmente el régimen estacionario de modo que nos permitimos ignorar el término transitorio (demostraremos que no surge problema alguno al hacerlo y comentaremos algún aspecto adicional de esta cuestión más adelante).

- (2) - Sustituyendo  $x_{(0)}$  obtenido en el paso anterior, retomamos, en ec. (59),

$$\begin{aligned}
 & \ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -(x_{(0)})^2 = \\
 & -a_{(0)e}^2 \cos^2(\omega t) - a_{(0)i}^2 \sin^2(\omega t) - 2a_{(0)e} a_{(0)i} \cos(\omega t) \sin(\omega t) . \quad (61)
 \end{aligned}$$

¿Cómo resolvemos ec. (61)? Reescribimos primero

$$\begin{aligned}
 \cos^2(\omega t) &= \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} , \quad \sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} , \\
 2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) &= \sin(2\omega t) ,
 \end{aligned}$$

con lo que

$$\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = -(x_{(0)})^2 = -\frac{a_{(0)e}^2 + a_{(0)i}^2}{2} + \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} \cos(2\omega t) - a_{(0)e} a_{(0)i} \sin(2\omega t). \quad (62)$$

Tenemos por tanto una ecuación diferencial *lineal* para  $x_{(1)}$  con una fuente que tiene un término constante y términos armónicos  $\cos(2\omega t)$  y  $\sin(2\omega t)$  (i.e. con una frecuencia angular que es simplemente *el doble* de la de la fuerza externa  $\frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ ). La solución  $x_{(1)}$  tendrá por tanto un término transitorio que de nuevo ignoramos, y un término estacionario

$$x_{(1)[p]}(t) = -\frac{a_{(0)e}^2 + a_{(0)i}^2}{2\omega_0^2} + \frac{\cos(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} \times \left( (\omega_0^2 - (2\omega)^2) \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} + (2\Gamma)(2\omega) a_{(0)e} a_{(0)i} \right) + \frac{\sin(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} \times \left( -(\omega_0^2 - (2\omega)^2) a_{(0)e} a_{(0)i} + (2\Gamma)(2\omega) \frac{a_{(0)i}^2 - a_{(0)e}^2}{2} \right). \quad (63)$$

Sustituyendo  $a_{(0)e}$  y  $a_{(0)i}$ ,

$$x_{(1)[p]}(t) = -\frac{F_0^2}{2m^2\omega_0^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2} + \frac{F_0^2}{2m^2} \frac{(2\Gamma\omega)^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2]^2} \frac{(\omega_0^2 - (2\omega)^2) \cos(2\omega t) + (2\Gamma)(2\omega) \sin(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2} - \frac{F_0^2}{m^2} \frac{2\Gamma\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2]^2} \frac{(\omega_0^2 - (2\omega)^2) \sin(2\omega t) - (2\Gamma)(2\omega) \cos(2\omega t)}{(\omega_0^2 - (2\omega)^2)^2 + (2\Gamma)^2(2\omega)^2}. \quad (64)$$

Además del primer término, que corresponde a un desplazamiento en la posición de equilibrio, el término no lineal en la ecuación diferencial hace aparecer armónicos de frecuencia *doble* en  $x(t)$ .

(3) - Podemos escribir el siguiente orden en ec. (59),

$$\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma \dot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} = -2x_{(0)}x_{(1)}. \quad (65)$$

Veamos qué estructura, en cuanto a la dependencia en el tiempo  $t$ , tiene  $x_{(0)}x_{(1)}$ :

$$x_{(0)}x_{(1)} = [(\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \sin(\omega t)] \times [(\dots) + (\dots) \cos(2\omega t) + (\dots) \sin(2\omega t)] = (\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(\omega t) \cos(2\omega t) + (\dots) \cos(\omega t) \sin(2\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) \cos(2\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) \sin(2\omega t).$$

Reescribiendo los productos de funciones armónicas (empleando por ejemplo ec. (42)), resulta

$$x_{(0)} x_{(1)} = (\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(3\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(3\omega t) .$$

La solución  $x_{(2)}$  de ec. (65) tendrá un término transitorio (que ignoramos una vez más), y un término estacionario. Con las funciones armónicas de la fuente  $-2x_{(0)}x_{(1)}$ , el término estacionario también será de tipo

$$x_{(2)[p]} = (\dots) \cos(\omega t) + (\dots) \cos(3\omega t) + (\dots) \sin(\omega t) + (\dots) \sin(3\omega t) .$$

Sin entrar a detallar la forma (independiente del tiempo) de cada uno de las coeficientes  $(\dots)$ , concluimos en cualquier caso que a este orden,  $A^2$ , aparecen además armónicos de frecuencia *triple*,  $3\omega$ .

- (4) - De forma análoga a lo anterior, podemos escribir los siguientes órdenes de ec. (59); para el orden genérico  $n$ , tendremos una ecuación diferencial lineal  $\ddot{x}_{(n)} + 2\Gamma\dot{x}_{(n)} + \omega_0^2 x_{(n)} = \text{fuente}$ , en la que la *fuente* incluye a priori todos los armónicos (de hecho no serán todos, para  $n$  *par* solo aparecen los impares, para  $n$  *impar* solo los pares) *hasta* orden  $n + 1$ . Ignorando el término transitorio de la solución, el término estacionario en  $x_{(n)}$  será por tanto una combinación lineal de armónicos (pares o impares según  $n$ ) de hasta orden  $n + 1$ .

En los pasos anteriores hemos visto como podemos construir la solución en ec. (57) de forma controlada. A cada orden sucesivo que consideramos se añaden términos armónicos de orden cada vez más alto. Recordemos además que aparece un término constante, desplazamiento neto con respecto a la posición de equilibrio  $x = 0$  que tenemos cuando  $A = 0$ .

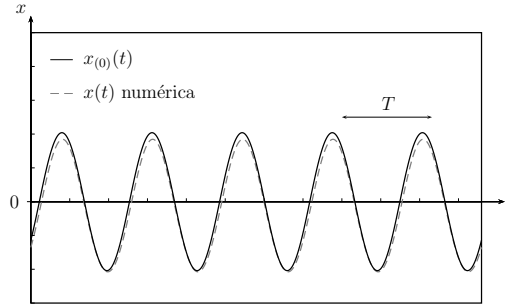
Recapitulando lo desarrollado: el añadir un término no lineal a la ecuación de movimiento forzado (ec. (56)), ha requerido acudir a un nuevo método para resolver de forma controlada (siempre que el nuevo término sea “pequeño”) en términos de *aproximaciones sucesivas*, la trayectoria del sistema. Para cada uno de los órdenes del desarrollo ec. (57) hemos encontrado una ecuación diferencial *lineal y no homogénea* en la que el papel de la *fuente* lo desempeña una suma de productos de órdenes *más bajos* en el desarrollo de  $x$ ; en otras palabras, el problema *no lineal* se ha convertido en una serie (infinita) de problemas *lineales*, en cada uno de los cuales la fuerza externa efectiva es una función *no lineal* de las soluciones de los órdenes más bajos. Más allá de la reflexión general anterior, es interesante subrayar que, con respecto al caso lineal  $A = 0$ , en la solución del caso no lineal aparecen armónicos (todos) con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia de la fuerza externa.

En todo el desarrollo anterior quedan varios cabos por atar: los términos transitorios. Hemos empezado despreciando el término transitorio en  $x_{(0)}$ , cosa perfectamente razonable para  $t \gg 1/\Gamma$  si recordamos el factor<sup>13</sup>  $e^{-\Gamma t}$  de la solución transitoria. Ahora bien, al resolver  $x_{(1)}$  en el siguiente paso, en la *fuente* falta ese término  $\propto e^{-\Gamma t}$ . Si tenemos en cuenta ese término, conforme se puede

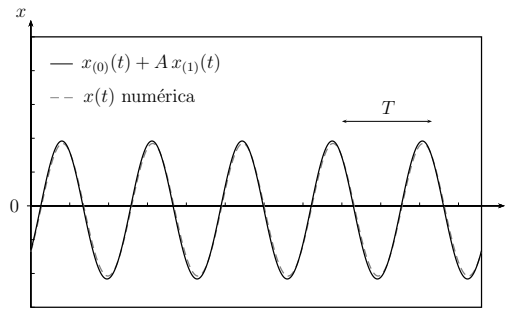
<sup>13</sup>Aunque estrictamente cada tipo de solución transitoria tiende al equilibrio con una dependencia temporal diferente, acudimos de forma genérica a la dependencia  $e^{-\Gamma t}$  por simplicidad ya que recoge la característica central del movimiento amortiguado.

comprobar en el apéndice A, aparecerán en  $x_{(1)}$  nuevas contribuciones a la solución particular con el mismo factor  $e^{-\Gamma t}$ , que podemos despreciar junto al término transitorio propiamente dicho (solución de la ecuación homogénea). De ese modo, orden a orden y de forma consistente, podremos despreciar todos los términos transitorios en  $x(t)$  para encontrar la solución estacionaria.

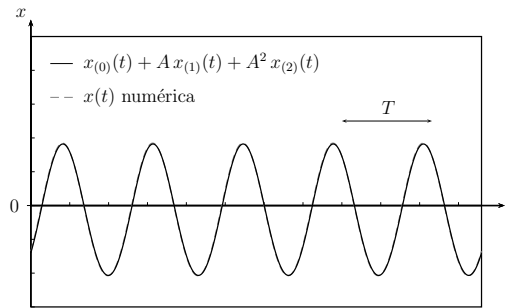
Las figuras 17 ilustran con un ejemplo lo desarrollado en los apartados anteriores; se incluye una solución estrictamente numérica que permite contrastar la bondad de la aproximación.



(a)



(b)



(c)

Figura 17: Oscilador no lineal forzado, solución estacionaria.

## 8.2. Oscilador no lineal forzado II, frecuencias de combinación

En los dos apartados anteriores hemos analizado el oscilador no lineal forzado, obteniendo una solución general para el régimen estacionario mediante aproximaciones sucesivas (términos de orden cada vez más alto en el parámetro  $A$  que rompe la linealidad del sistema). Para fuentes periódicas generales podemos combinar lo anterior con un desarrollo en serie de Fourier para resolver el problema. El hecho más sobresaliente ha sido el descubrir que la no linealidad del sistema hace aparecer, en la solución  $x(t)$ , armónicos con frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia asociada a la fuerza externa. Veamos, de forma esquemática, por qué es esperable que esto ocurra. Olvidemos por un momento todo el análisis anterior y consideremos ec. (56). ¿Qué ocurre si  $x(t)$  contiene algún término armónico  $\cos(\omega t)$  (sea  $\omega$  la frecuencia que sea)? Entonces el término no lineal tendrá al menos un término  $\cos^2(\omega t)$ , que corresponde a un término armónico  $\cos(2\omega t)$  y un término constante. Comprendemos de este modo que, para ser solución de la ecuación diferencial no lineal, si  $x(t)$  incluye un término armónico, ¡tendrá *necesariamente* que incluir toda la familia de armónicos de orden superior! Este hecho, asociado a la no linealidad del sistema, se pone también de manifiesto en una situación algo más general. Consideremos de nuevo el sistema con un término no lineal, pero sometido ahora a una fuente que tiene *dos componentes armónicas* diferentes<sup>14</sup>:

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x + A x^2 = \frac{F_c}{m} \cos(\omega_c t) + \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t) . \quad (66)$$

Apliquemos el desarrollo del apartado 8.2. En lugar de ec. (59), tendremos ahora

$$\begin{aligned} & A^0 (\ddot{x}_{(0)} + 2\Gamma \dot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}) + \\ & A^1 (\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} + [(x_{(0)})^2]) + \\ & A^2 (\ddot{x}_{(2)} + 2\Gamma \dot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} + [2x_{(0)}x_{(1)}]) + \\ & A^3 (\ddot{x}_{(3)} + 2\Gamma \dot{x}_{(3)} + \omega_0^2 x_{(3)} + [2x_{(0)}x_{(2)} + (x_{(1)})^2]) + \\ & \dots \\ & = \frac{F_c}{m} \cos(\omega_c t) + \frac{F_d}{m} \cos(\omega_d t) . \end{aligned} \quad (67)$$

El orden más bajo de la solución estacionaria será

$$x_{(0)}(t) = a_{e,c}^{(0)} \cos(\omega_c t) + a_{i,c}^{(0)} \sin(\omega_c t) + a_{e,d}^{(0)} \cos(\omega_d t) + a_{i,d}^{(0)} \sin(\omega_d t) ,$$

con

$$\begin{aligned} a_{e,c}^{(0)} &= \frac{F_c}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + (2\Gamma \omega_c)^2} , & a_{i,c}^{(0)} &= \frac{F_c}{m} \frac{2\Gamma \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + (2\Gamma \omega_c)^2} , \\ a_{e,d}^{(0)} &= \frac{F_d}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega_d^2}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\Gamma \omega_d)^2} , & a_{i,d}^{(0)} &= \frac{F_d}{m} \frac{2\Gamma \omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (2\Gamma \omega_d)^2} . \end{aligned}$$

Para obtener el término de primer orden en  $A$  resolvemos

$$\ddot{x}_{(1)} + 2\Gamma \dot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} = - (x_{(0)})^2 .$$

<sup>14</sup>Si  $\omega_a/\omega_b \in \mathbb{Q}$ , podríamos replantear el problema en términos de una serie de Fourier con tan solo dos términos, pero no es ese el aspecto interesante que ahora queremos abordar.

En  $(x_{(0)})^2$  tenemos términos con dependencias temporales

$$\begin{aligned} & \cos^2(\omega_c t), \sin^2(\omega_c t), \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t), \\ & \cos^2(\omega_d t), \sin^2(\omega_d t), \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t), \\ & \cos(\omega_c t) \cos(\omega_d t), \sin(\omega_c t) \sin(\omega_d t), \\ & \cos(\omega_c t) \sin(\omega_d t), \sin(\omega_c t) \cos(\omega_d t), \end{aligned}$$

que reescribimos como funciones armónicas simples usando

$$\begin{aligned} \cos(\omega_c t) \cos(\omega_d t) &= \frac{\cos((\omega_c - \omega_d)t) + \cos((\omega_c + \omega_d)t)}{2}, \\ \sin(\omega_c t) \sin(\omega_d t) &= \frac{\cos((\omega_c - \omega_d)t) - \cos((\omega_c + \omega_d)t)}{2}, \\ \sin(\omega_c t) \cos(\omega_d t) &= \frac{\sin((\omega_c + \omega_d)t) + \cos((\omega_c - \omega_d)t)}{2}, \\ \cos(\omega_c t) \sin(\omega_d t) &= \frac{\sin((\omega_c + \omega_d)t) - \cos((\omega_c - \omega_d)t)}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cos^2(\omega_c t) &= \frac{1 + \cos(2\omega_c t)}{2}, \quad \sin^2(\omega_c t) = \frac{1 - \cos(2\omega_c t)}{2}, \\ \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t) &= \frac{1}{2} \sin(2\omega_c t), \\ \cos^2(\omega_d t) &= \frac{1 + \cos(2\omega_d t)}{2}, \quad \sin^2(\omega_d t) = \frac{1 - \cos(2\omega_d t)}{2}, \\ \sin(\omega_d t) \cos(\omega_d t) &= \frac{1}{2} \sin(2\omega_d t). \end{aligned}$$

Dada la proliferación de términos, no escribimos explícitamente  $x_{(1)}(t)$ ; queda claro sin embargo que en  $x_{(1)}$ , además de términos constantes, tendremos armónicos con frecuencia igual a una combinación de  $\omega_c$  y  $\omega_d$ :  $2\omega_c$ ,  $2\omega_d$ ,  $\omega_c + \omega_d$ ,  $\omega_c - \omega_d$ . La aparición de estas frecuencias, denominadas *frecuencias de combinación*, es consecuencia de tener tanto el término no lineal  $Ax^2$  como una fuerza externa con dos componentes armónicas. Lo obtenido en los apartados anteriores corresponde sencillamente a la situación particular en que  $\omega_c \rightarrow \omega_d$ . De forma análoga, si continuáramos un orden más, obtendríamos que  $x_{(2)}$  incluye armónicos con nuevas combinaciones de frecuencias,

$$3\omega_c, 2\omega_c \pm \omega_d, \omega_c \pm 2\omega_d, 3\omega_d,$$

y de forma análoga aparecerán (simple cuestión combinatoria) nuevas frecuencias a cada orden en  $A$ . Con este comentario sobre la aparición de *frecuencias de combinación* concluimos el estudio del oscilador no lineal forzado y pasamos a comentar algún aspecto del oscilador no lineal libre.

### 8.3. \* Oscilador no lineal libre

En el análisis anterior, la presencia de una fuerza externa ha desempeñado un papel importante: según hemos comentado, teniendo la siguiente combinación (la parte dependiente de  $x$ ),  $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2$ , en la ecuación diferencial que controla el movimiento, si  $x(t)$  incluye alguna dependencia armónica, automáticamente tendrá que incluir los armónicos superiores merced al término  $Ax^2$ ; es más, si  $x(t)$  incluyera dos dependencias armónicas diferentes, por ejemplo



$\cos(\omega_1 t)$  y  $\cos(\omega_2 t)$ , automáticamente debería poseer también términos armónicos con frecuencias  $n_1\omega_1 \pm n_2\omega_2$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ . En presencia de una fuerza externa, centrándonos en el régimen estacionario, la propia *fuerza* introduce esa dependencia armónica. ¿Qué ocurre en cambio cuando analizamos el oscilador no lineal libre? Aplicando de nuevo el desarrollo anterior podemos intentar construir de forma controlada una solución que incluirá todos los armónicos superiores de la frecuencia *natural*  $\omega_0$  (en lugar de la frecuencia *externa*  $\omega$  que aparece en el caso forzado). La obtención de una solución mediante aproximaciones sucesivas, i.e. en una serie de potencias del parámetro  $A$ , parece directa y exenta de problemas. Sin embargo, no es así. A continuación vamos a ver cómo puede fallar el desarrollo anterior. Consideremos de nuevo el oscilador con un término no lineal en la ecuación de movimiento  $Ax^2$ , en una circunstancia particular, *no hay amortiguamiento*,  $\Gamma = 0$  (y el sistema no se encuentra forzado):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 = 0 .$$

De haber considerado amortiguamiento no nulo, no podríamos tener oscilación alguna para tiempos  $t \gg 1/\Gamma$ . En lugar de ec. (59) tenemos ahora

$$\begin{aligned} & A^0 (\ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)}) + \\ & A^1 (\ddot{x}_{(1)} + \omega_0^2 x_{(1)} + [(x_{(0)})^2]) + \\ & A^2 (\ddot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} + [2x_{(0)}x_{(1)}]) + \\ & A^3 (\ddot{x}_{(3)} + \omega_0^2 x_{(3)} + [2x_{(0)}x_{(2)} + (x_{(1)})^2]) + \\ & \dots \\ & = 0 . \end{aligned} \tag{68}$$

El orden cero del desarrollo de  $x(t)$  (ec. (57)),  $x_{(0)}(t)$ , corresponderá sencillamente a un oscilador armónico,

$$\ddot{x}_{(0)} + \omega_0^2 x_{(0)} = 0 ,$$

con solución

$$x_{(0)}(t) = a_1^{(0)} \cos(\omega_0 t) + b_1^{(0)} \sin(\omega_0 t) .$$

Mantenemos constantes genéricas  $a_q^{(p)}$  y  $b_q^{(p)}$ , aquí y en lo sucesivo, ya que no desempeñan ningún papel relevante en la discusión<sup>15</sup>. Para el término de primer orden  $x_{(1)}(t)$ , tendremos la ecuación de un oscilador forzado con una fuerza externa de tipo

$$\alpha + \beta_c \cos(2\omega_0 t) + \beta_s \sin(2\omega_0 t)$$

obtenida del desarrollo de  $-[x_{(0)}]^2$ , que no plantea mayores dificultades y conduce a

$$x_{(1)}(t) = a_2^{(1)} \cos(2\omega_0 t) + b_2^{(1)} \sin(2\omega_0 t) + c^{(1)}$$

Ahora bien, al abordar el siguiente orden, nos encontramos con una ecuación diferencial para  $x_{(2)}(t)$  con la siguiente estructura

$$\ddot{x}_{(2)} + \omega_0^2 x_{(2)} = C \cos(\omega_0 t) + S \sin(\omega_0 t) + (\text{Armónicos superiores con } 3\omega_0) ,$$

---

<sup>15</sup> Notación:  $a_q^{(p)}$  acompaña una dependencia temporal  $\cos(q\omega_0 t)$  en  $x_{(p)}(t)$ ,  $b_q^{(p)}$  acompaña una dependencia temporal  $\sin(q\omega_0 t)$  en  $x_{(p)}(t)$ , y en lo sucesivo  $c^{(p)}$  indica un término constante en  $x_{(p)}(t)$ .

donde el miembro derecho, que actúa como una fuente para  $x_{(2)}$ , se obtiene simplemente desarrollando y reescribiendo  $-2x_{(0)}x_{(1)}$  (según ec. (65)). Nos concentramos en la forma de los dos primeros términos, que tienen una dependencia armónica muy particular: con la propia frecuencia natural del oscilador cuando  $A = 0$ . En ese caso la obtención de una solución particular de la ecuación diferencial cambia sensiblemente, funciones armónicas de frecuencia angular  $\omega_0$  satisfacen la ecuación homogénea, nunca producirán la solución particular. Sí podemos encontrar la solución particular considerando funciones  $t \cos(\omega_0 t)$ ,  $t \sin(\omega_0 t)$ . Veamos, si tenemos la siguiente ecuación diferencial,

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \mathcal{S} \sin(\omega_0 t) + \mathcal{C} \cos(\omega_0 t), \quad \mathcal{S}, \mathcal{C} \in \mathbb{R},$$

buscamos una solución particular de tipo  $X_p(t) = s t \sin(\omega_0 t) + c t \cos(\omega_0 t)$  con  $s, c \in \mathbb{R}$ . Derivando,

$$\ddot{X} = -\omega_0^2 X + 2\omega_0 (s \cos(\omega_0 t) - c \sin(\omega_0 t)),$$

y basta escoger  $s = \frac{\mathcal{C}}{2\omega_0}$ ,  $c = -\frac{\mathcal{S}}{2\omega_0}$  para conseguirlo. Tenemos por tanto soluciones particulares dadas por el producto de  $t$  y funciones armónicas, i.e. funciones armónicas con una amplitud que *crece* de forma *lineal* con el tiempo. Esto supone un serio problema: de ser así, al perturbar el sistema alrededor del equilibrio estable  $x = 0$ , las oscilaciones del mismo tendrían una amplitud divergentemente creciente. ¿Qué está ocurriendo?

Los términos crecientes con el tiempo del tipo analizado se conocen como *términos seculares*. Señalan realmente un problema con el método empleado. Veamos cómo ha podido ocurrir algo semejante. El problema aparece al obtener términos armónicos de frecuencia  $\omega_0$  en  $x_{(0)}(t)$  y que estos acaben haciendo aparecer una fuente de frecuencia angular  $\omega_0$  en la ecuación que corresponde a un orden superior,  $x_{(2)}$  en este caso, de modo que aparezcan necesariamente las soluciones con amplitud proporcional a  $t$ . Recordando que obtenemos las ecuaciones (68) a partir de una desarrollo en serie de potencias de  $A$ , nada nos hubiera impedido buscar soluciones armónicas con una frecuencia  $\omega$ , desarrollable también en serie de potencias de  $A$ :

$$\omega = \omega_{(0)} + A \omega_{(1)} + A^2 \omega_{(2)} + A^3 \omega_{(3)} + \dots$$

Para recuperar el límite conocido  $A \rightarrow 0$ , basta tener  $\omega_{(0)} = \omega_0$ . ¿Explica el considerar una frecuencia  $\omega \neq \omega_0$  nuestro problema? Veamos, si consideramos una solución armónica  $\cos(\omega t)$  y la desarrollamos en términos de  $A$ ,

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) &= \cos(\omega_0 t + A \omega_{(1)} t + \dots) = \\ &= \cos(\omega_0 t) \cos(A \omega_{(1)} t + \dots) - \sin(\omega_0 t) \sin(A \omega_{(1)} t + \dots) \\ &\simeq \cos(\omega_0 t) - A \omega_{(1)} t \sin(\omega_0 t) + \dots \end{aligned}$$

a primer orden en  $A$ . Aparece un término  $t \sin(\omega_0 t)$ , exactamente del tipo que hemos encontrado al “descubrir” esta dificultad. Esto ocurre al desarrollar en serie de potencias de  $A$ , y separar una dependencia armónica en  $\omega_0 t$ . Requiriendo que el desarrollo de  $\omega$  en serie de potencias de  $A$  permita eliminar los términos seculares, se puede construir la solución del problema libre. Nos contentamos con lo señalado sobre las sutilezas que el oscilador no lineal libre requiere y no profundizamos más. Para ilustrar lo mencionado, en la figura 18 mostramos

una solución obtenida de forma numérica para un oscilador no lineal libre sin amortiguamiento junto a una función armónica de frecuencia angular  $\omega_0$ : como se puede observar la solución numérica *no tiene* la periodicidad asociada a  $\omega_0$ .

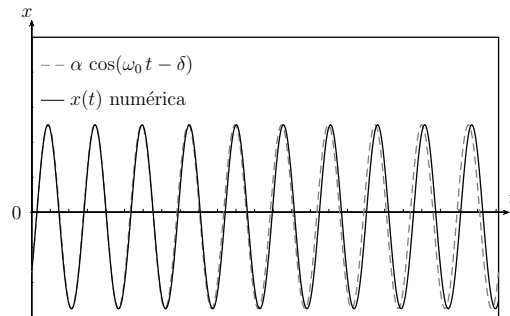


Figura 18: Oscilador no lineal libre, comparación entre una solución numérica y una función armónica de periodicidad  $2\pi/\omega_0$ .

## 9. Ejemplos físicos

El análisis presentado en los apartados 1 a 7 es aplicable a cualquier sistema físico que pueda ser “forzado” y para el cual la aproximación armónica abordada en el tema anterior sea válida. Existen ejemplos en prácticamente cualquier dominio de la física: sistemas mecánicos análogos al que hemos tomado como ejemplo de referencia, resonancia óptica, las resonancias nucleares, el fenómeno de resonancia magnética nuclear, etc. Habiendo abordado en el tema anterior las oscilaciones libres de un circuito  $RLC$ , ilustramos a continuación el mismo ejemplo forzado por una fuente.

### 9.1. Circuito eléctrico $RLC$ forzado

Consideremos el circuito de la figura 19 sobre el que actúa una fuerza electromotriz externa  $V_0 \cos(\omega t)$ , i.e. entre el punto de referencia  $V = 0$  y el punto señalado se aplica una diferencia de potencial eléctrico externa de forma armónica. Tendremos ( $Q$  es la carga eléctrica acumulada en el condensador)

$$V_0 \cos(\omega t) = R\dot{Q} + \frac{Q}{C} + L\ddot{Q}, \quad (69)$$

que reescribimos

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t). \quad (70)$$

Con la frecuencia natural  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , el coeficiente de amortiguamiento  $2\Gamma = \frac{R}{L}$  y  $\frac{F_0}{m} = \frac{V_0}{L}$ , todos los resultados anteriores se aplican directamente a la evolución temporal del circuito, incluyendo la energía: la inductancia  $L$  acumula una energía (debida al campo magnético)  $\frac{1}{2}L\dot{Q}^2$ , análoga a la energía cinética  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ , el condensador acumula una energía (debida al campo eléctrico)  $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$  y la resistencia disipa energía (bajo forma de calor, el *efecto Joule*) a ritmo  $RI^2 = R\dot{Q}^2$  ( $R\dot{Q}^2 = 2\frac{R}{L} \times \frac{1}{2}L\dot{Q}^2$ , análogo a  $4\Gamma \times \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ ).

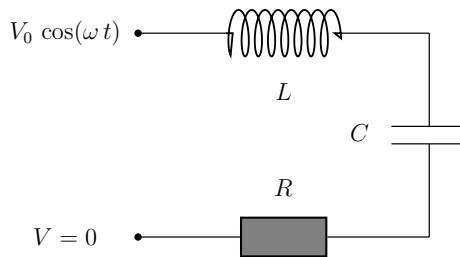


Figura 19: Circuito  $RLC$  forzado.

## 10. Animaciones

A continuación la lista de animaciones que ilustran distintos aspectos de los apartados anteriores.

- Las animaciones T02\_Oscilador\_Forzado\_???.avi corresponden a tres osciladores con la misma  $\omega_0$  y distintos valores de  $\Gamma$ : dos casos para los cuales la resonancia es posible,  $\Gamma = \frac{1}{8}\omega_0$  y  $\Gamma = \frac{1}{2}\omega_0$ , uno para el cual no,  $\Gamma = \frac{4}{5}\omega_0$ . Para cada uno de ellos, consideramos tres fuerzas armónicas de frecuencias diferentes.
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_01.avi:  $\Gamma = \frac{1}{8}\omega_0$ ,  $\omega_F = 2\omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_02.avi:  $\Gamma = \frac{1}{8}\omega_0$ ,  $\omega_F = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$  (resonancia).
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_03.avi:  $\Gamma = \frac{1}{8}\omega_0$ ,  $\omega_F = \frac{1}{2}\omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_04.avi:  $\Gamma = \frac{1}{2}\omega_0$ ,  $\omega_F = 2\omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_05.avi:  $\Gamma = \frac{1}{2}\omega_0$ ,  $\omega_F = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\Gamma^2}$  (resonancia).
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_06.avi:  $\Gamma = \frac{1}{2}\omega_0$ ,  $\omega_F = \frac{1}{2}\omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_07.avi:  $\Gamma = \frac{4}{5}\omega_0$ ,  $\omega_F = 2\omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_08.avi:  $\Gamma = \frac{4}{5}\omega_0$ ,  $\omega_F = \omega_0$ .
  - T02\_Oscilador\_Forzado\_09.avi:  $\Gamma = \frac{4}{5}\omega_0$ ,  $\omega_F = \frac{1}{2}\omega_0$ .
- T02\_Amplitud\_Oscilador\_Forzado.avi: evolución de  $a(\omega_F)$ , amplitud de la solución estacionaria, en función del valor de  $\Gamma$ .

**Claves del tema**

- Ecuación de un oscilador forzado (ec. (1)) y solución estacionaria, ecs. (6) y (7).
- Propiedades de la solución estacionaria (apartados 3 y 4) y fenómeno de resonancia.
- Energía del oscilador forzado (apartado 6).
- Fuentes periódicas y análisis de Fourier (apartado 7).

## A. \* Fuente amortiguada

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no homogénea,

$$\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = e^{-\hat{\Gamma}t} (\hat{a} \cos(\omega t) + \hat{b} \sin(\omega t)) \quad \text{con } \hat{\Gamma} > 0. \quad (71)$$

A diferencia de lo estudiado en el apartado 1, la fuerza externa no es sencillamente una función armónica ya que se atenúa exponencialmente merced al factor  $e^{-\hat{\Gamma}t}$ . Dada la linealidad de la ecuación, la solución completa seguirá teniendo dos partes: la solución de la ecuación homogénea y una solución particular. La solución de la ecuación homogénea nos es de sobra conocida, la dificultad está ahora en encontrar una solución particular. Probamos una solución particular que tenga la misma forma que la fuente externa,

$$x_{[p]}(t) = e^{-\hat{\Gamma}t} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)), \quad (72)$$

y determinamos los coeficientes  $a$  y  $b$  en términos de  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Calculamos en primer lugar

$$\dot{x}_{[p]}(t) = e^{-\hat{\Gamma}t} \{[-a\hat{\Gamma} + b\omega] \cos(\omega t) + [-b\hat{\Gamma} - a\omega] \sin(\omega t)\}, \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{[p]}(t) = e^{-\hat{\Gamma}t} \{ & [a(-\omega^2 + \hat{\Gamma}^2) - b2\hat{\Gamma}\omega] \cos(\omega t) \\ & [a2\hat{\Gamma}\omega + b(-\omega^2 + \hat{\Gamma}^2)] \sin(\omega t)\}. \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{[p]} + 2\Gamma \dot{x}_{[p]} + \omega_0^2 x_{[p]} = e^{-\hat{\Gamma}t} \{ & [a(\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)) + b2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega] \cos(\omega t) \\ & [-a2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega + b(\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma))] \sin(\omega t)\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Debemos por tanto resolver  $a$  y  $b$  en términos de  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  con

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a(\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)) + b2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega, \\ \hat{b} &= -a2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega + b(\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)). \end{aligned} \quad (76)$$

La solución se obtiene sin dificultad,

$$\begin{aligned} a &= \frac{\hat{a}[\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)] - \hat{b}[2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega]}{[\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)]^2 + [2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega]^2}, \\ b &= \frac{\hat{a}[2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega] - \hat{b}[\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)]}{[\omega_0^2 - \omega^2 + \hat{\Gamma}(\hat{\Gamma} - 2\Gamma)]^2 + [2(\Gamma - \hat{\Gamma})\omega]^2}. \end{aligned} \quad (77)$$

Con  $\hat{\Gamma} \rightarrow 0$  podemos recuperar resultados anteriores. En particular, para  $\hat{\Gamma} = 0$  y  $\hat{b} = 0$ , tenemos una fuerza externa armónica  $\hat{a} \cos(\omega t)$  y obtenemos

$$a = \hat{a} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + [2\Gamma\omega]^2}, \quad b = \hat{a} \frac{2\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2},$$

que corresponde a ec. (6). Para  $\hat{\Gamma} = 0$  y  $\hat{a} = 0$  la fuerza externa es  $\hat{b} \sin(\omega t)$  y obtenemos

$$a = -\hat{b} \frac{2\Gamma\omega}{[\omega_0^2 - \omega^2]^2 + [2\Gamma\omega]^2}, \quad b = \hat{b} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\Gamma\omega)^2},$$

que corresponde a ec. (6').