

# Oscilador armónico simple y amortiguado

Apuntes de clase

## Índice

<b>1. Oscilador armónico, repaso</b>	<b>2</b>
1.1. Planteamiento y soluciones . . . . .	2
1.2. Dos propiedades importantes . . . . .	5
1.3. Exponenciales complejas . . . . .	7
<b>2. Planteamiento general</b>	<b>7</b>
<b>3. Oscilaciones armónicas en dos dimensiones</b>	<b>10</b>
3.1. Frecuencia única . . . . .	10
3.2. Frecuencias diferentes . . . . .	11
<b>4. Oscilaciones amortiguadas</b>	<b>13</b>
4.1. Movimiento oscilatorio amortiguado . . . . .	14
4.2. Movimiento sobreamortiguado . . . . .	15
4.3. Movimiento aperiódico crítico (amortiguamiento crítico) . . . . .	16
4.4. Comentarios sobre el movimiento amortiguado . . . . .	16
<b>5. Energía</b>	<b>18</b>
<b>6. Ejemplos</b>	<b>19</b>
6.1. Péndulo simple . . . . .	20
6.2. Circuitos eléctricos . . . . .	23
6.2.1. Circuito $LC$ . . . . .	23
6.2.2. Circuito $RLC$ . . . . .	24
<b>7. ★ Espacio de fases</b>	<b>25</b>
7.1. Oscilador armónico simple . . . . .	25
7.2. Oscilador armónico amortiguado . . . . .	25
7.3. Comentarios . . . . .	26
<b>8. ★ Oscilador no lineal (sencillo)</b>	<b>28</b>
<b>9. Animaciones</b>	<b>30</b>

---

*Departamento de Física Teórica – IFIC*

*Universitat de València – CSIC*

Miguel.Nebot@uv.es

[Versión 1.00]

Iniciamos el estudio de las oscilaciones repasando en el apartado 1 un ejemplo básico, el oscilador mecánico más sencillo, una masa puntual unida a un muelle ideal. Una vez analizada la ecuación de movimiento y su solución, exploramos alguna de las propiedades importantes que ya se manifiestan en ese sistema. En el siguiente apartado, 2, analizamos cómo la ecuación de movimiento de un oscilador armónico describe de forma general el comportamiento de un sistema con un grado de libertad cuando es perturbado alrededor de un equilibrio estable y evoluciona libremente. En el apartado 3 exploramos brevemente qué ocurre cuando se combinan dos movimientos armónicos independientes. En el apartado 4 introducimos un nuevo ingrediente en la ecuación de movimiento, el amortiguamiento, y estudiamos las soluciones pertinentes. En el apartado 5 analizamos la energía del oscilador. Una vez cubiertos los aspectos esenciales del oscilador armónico en los apartados anteriores, visitamos varios ejemplos físicos en el apartado 6. El apartado 7 introduce superficialmente una perspectiva distinta en el estudio del oscilador, el espacio de fases. Dando un pequeño paso más allá del oscilador armónico simple, vemos en el apartado 8 un ejemplo sencillo de oscilador *que no es lineal*. Finalmente el apartado 9 detalla varias animaciones que ilustran aspectos de los apartados anteriores.

## 1. Oscilador armónico, repaso

### 1.1. Planteamiento y soluciones

A modo de recordatorio empezamos recordando las características de un sistema sencillo que recoge las características esenciales del movimiento armónico simple: el movimiento de una masa puntual unida a un muelle alrededor del equilibrio. Reducir el problema a su máxima simplicidad (conservando las características de interés) requiere varias aproximaciones razonables. Consideramos una masa puntual  $m$  y un movimiento en una única dimensión, i.e. el movimiento tiene un único *grado de libertad*; el muelle no tiene masa y su comportamiento es perfectamente lineal. Como grado de libertad para la descripción del sistema escogemos el desplazamiento en la coordenada  $x$  de la posición de equilibrio, según indica la figura 1.

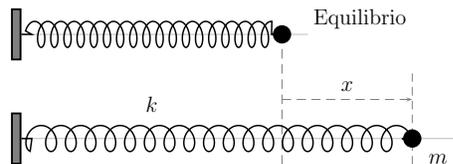


Figura 1: Masa  $m$  unida a muelle de constante elástica  $k$ .

Recordando la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

en nuestro problema con un grado de libertad,  $\vec{F} \rightarrow F$  y  $\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow m\dot{x}$ ; si la

masa  $m$  permanece constante, tenemos sencillamente

$$F = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \ddot{x} . \quad (1)$$

¿Cuánto vale  $F$ ? Recordando la ley de Hooke,

$$F = -kx , \quad k > 0 . \quad (2)$$

La fuerza se *opone* al desplazamiento y su intensidad es proporcional al mismo, siendo  $k$  la constante elástica o recuperadora del muelle. ¿Qué dimensiones tiene  $k$ ? Si  $[F] = MLT^{-2}$ , es inmediato que  $[k] = MT^{-2}$ . Empleando ec. (1) y ec. (2), obtenemos

$$m \ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m \ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 . \quad (3)$$

Antes de continuar con el análisis, recordemos qué aproximaciones simplificadas hemos realizado para llegar a la ecuación anterior, ec. (3): la masa es puntual y constante, el sistema tiene un único grado de libertad y el comportamiento del muelle es lineal. Si bien podemos imaginar circunstancias en que no se cumplan, son suficientemente razonables y permiten describir adecuadamente el sistema en multitud de casos en que además de razonables son acertadas. Regresando a ec. (3), la combinación  $\frac{k}{m}$  tiene dimensiones  $[\frac{k}{m}] = T^{-2}$ , y es una constante propia del sistema (de hecho es *la* cantidad relevante que describe la estructura del sistema), de modo que introducimos  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ , con  $[\omega_0] = T^{-1}$ , para reescribir la ecuación de movimiento (3) de forma sencilla,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} . \quad (4)$$

La ecuación de movimiento del grado de libertad  $x$  del sistema es por tanto una *ecuación diferencial lineal, de segundo orden y con coeficientes constantes*. No resulta difícil encontrar soluciones sencillas recordando que, con

$$\frac{d}{dt} (\cos(\omega_0 t)) = -\omega (\sin(\omega_0 t)) , \quad \frac{d}{dt} (\sin(\omega_0 t)) = \omega (\cos(\omega_0 t)) .$$

automáticamente

$$\frac{d^2}{dt^2} (\cos(\omega_0 t)) + \omega^2 (\cos(\omega_0 t)) = 0 , \quad \frac{d^2}{dt^2} (\sin(\omega_0 t)) + \omega^2 (\sin(\omega_0 t)) = 0 .$$

Recurriendo a la linealidad de la ecuación diferencial, podemos considerar en general soluciones

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) .$$

¿Qué información adicional  *fija*  de forma única la solución del problema? Es decir, ¿qué  *fija*  unos valores concretos de las constantes reales  $A$  y  $B$  de la ecuación anterior? Dos “informaciones”  *independientes*  sobre el estado del sistema. Por simplicidad se suelen considerar ambas en el mismo instante  $t = 0$ , y se conocen como  *condiciones iniciales* <sup>1</sup>. Fijemos  $A$  y  $B$  en términos de unas condiciones iniciales  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ . En primer lugar, sustituyendo  $t = 0$ ,

$$x(0) = A .$$

---

<sup>1</sup>¿Por qué  *dos*  condiciones iniciales? Porque la ecuación diferencial es de segundo orden. Para entenderlo de forma sencilla, consideremos el desarrollo en serie de Taylor de  $x(t)$ ,

Para sustituir  $\dot{x}(0)$ , escribimos primero  $\dot{x}(t)$ ,

$$\dot{x}(t) = \omega_0 [-A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)] \Rightarrow \dot{x}(0) = \omega_0 B .$$

La solución es inmediata,  $A = x(0)$ ,  $B = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}$  y resulta

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) . \quad (5)$$

También podemos partir de una forma ligeramente diferente de la solución,  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + b)$ ; en ese caso  $\dot{x}(t) = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + b)$  y las condiciones iniciales son

$$x(0) = a \cos b, \quad \dot{x}(0) = -\omega_0 a \sin b .$$

Podemos resolver

$$a^2 = [x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2, \quad b = \tan^{-1} \left[ \frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)} \right],$$

y escribir<sup>2</sup>

$$x(t) = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2} \cos \left( \omega_0 t + \tan^{-1} \left[ \frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)} \right] \right) . \quad (6)$$

Ambas formas de la solución  $x(t)$  (ecuaciones (5) y (6)) son absolutamente equivalentes y podemos emplearlas indistintamente según queramos poner de manifiesto con mayor claridad determinadas propiedades del comportamiento del sistema.

La figura 2 ilustra la solución  $x(t)$ , el *movimiento armónico simple* del sistema.

La primera característica reseñable es la periodicidad de  $x(t)$ . Para  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  es inmediato observar que  $x(t + T) = x(t)$  (de hecho para cualquier múltiplo entero de  $T$ ,  $x(t + nT) = x(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ).  $T$  es el *periodo* del movimiento armónico;  $\omega$  se denomina *frecuencia angular* mientras  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  es la *frecuencia*. Una segunda característica del movimiento que podemos obtener fácilmente mediante ec. (6) es la siguiente:

$$[x(t)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(t)}{\omega} \right]^2 = [x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \right]^2, \quad (7)$$

$x(t) = \sum \frac{t^n}{n!} \frac{d^n x}{dt^n} \Big|_{t=0}$ ; término a término, el primero es  $x(0)$ , el segundo  $\dot{x}(0)t$ , el tercero  $\frac{t^2}{2} \ddot{x}(0)$ , etc. Ahora bien, usando la ecuación de movimiento, el tercer término se puede expresar en función del primero; y el cuarto en función del segundo; y así sucesivamente. De este modo podemos comprender que son tan solo dos condiciones iniciales las que fijan por completo la solución porque el término del mismo orden que la ecuación diferencial es el primero que queda completamente determinado por los anteriores merced a la ecuación de movimiento. Otra forma sencilla de entenderlo es la siguiente: para fijar  $A$  y  $B$ , admitiendo que  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  es la solución más general, necesitamos *dos* ecuaciones independientes, i.e. dos condiciones iniciales.

<sup>2</sup>Nótese que al resolver  $a$  y  $b$  en términos de  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$  aparecen dos ambigüedades (discretas), un signo delante de la raíz de  $\sqrt{[x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2}$  en  $a$  y un término  $\pi$  en  $b$  (puesto que  $\tan \alpha = \tan(\alpha + \pi)$ , i.e. la función  $\tan^{-1}$  está definida módulo  $\pi$ ), que también se puede hacer aparecer como un signo global (puesto que  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ ): basta elegir consistentemente ambos para cumplir correctamente las condiciones iniciales.

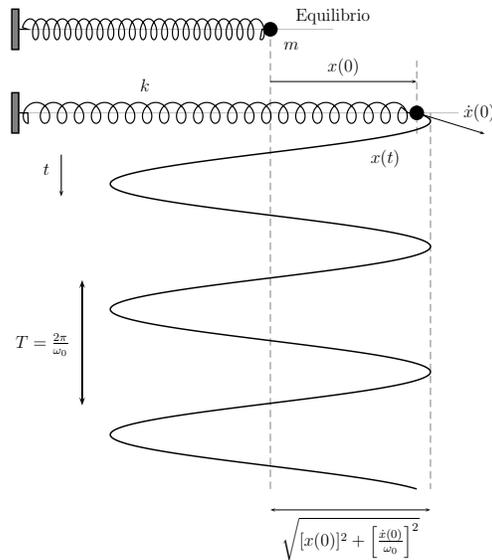


Figura 2: Movimiento armónico simple.

que indica que la combinación  $[x(t)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(t)}{\omega}\right]^2$  es de hecho independiente del tiempo  $t$ , es una constante del movimiento fijada por las condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ . Volveremos a ella y a su interpretación en términos de la energía del sistema en el apartado 5.

## 1.2. Dos propiedades importantes

En el apartado anterior hemos utilizado de forma más o menos explícita dos propiedades importantes que presenta la descripción del oscilador armónico simple: la linealidad y la invariancia de nuestra descripción bajo traslaciones temporales.

- **Linealidad:** la ecuación diferencial  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  es lineal, es decir, si  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son soluciones de la misma, cualquier combinación  $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$  (con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes) es también solución de la misma. Hemos empleado esta propiedad para escribir la solución a la ecuación de movimiento del sistema como una combinación lineal de  $\cos(\omega_0 t)$  y  $\sin(\omega_0 t)$ . En un sentido más amplio esta propiedad del sistema estudiado (la respuesta lineal  $F = -kx$  a una perturbación  $x$  con respecto al equilibrio) – y por tanto de las ecuaciones que lo describen – será fundamental en el estudio de sistemas físicos más complejos que el oscilador armónico simple.
- **Invariancia bajo traslación temporal:** las características del movimiento de la masa unida al muelle que empleamos como ejemplo de partida no dependen del origen de tiempos que hayamos adoptado. De forma más explícita, que impongamos unas condiciones iniciales  $\{x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0\}$  o que impongamos esas mismas condiciones en un instante inicial arbitrario  $t_0$ ,  $\{x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = v_0\}$ , la evolución subsiguiente del sistema será la mis-

ma. Matemáticamente basta constatar que bajo un cambio  $t \mapsto \tau = t + \alpha$  (una *traslación temporal* de magnitud  $\alpha$ ), la ecuación del movimiento permanece invariante puesto que  $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$ . Si queremos considerar una condiciones iniciales  $\{x(t_0), \dot{x}(t_0)\}$ , construimos ahora nuestra solución como una combinación lineal de  $\cos(\omega_0(t + \alpha))$  y  $\sin(\omega_0(t + \alpha))$ , con  $\alpha$  arbitrario que escogeremos después,

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos(\omega_0(t + \alpha)) + b \sin(\omega_0(t + \alpha)) , \\ \dot{x}(t) &= \omega_0 [-a \sin(\omega_0(t + \alpha)) + b \cos(\omega_0(t + \alpha))] , \end{aligned}$$

e imponemos las condiciones iniciales  $\{x(t_0), \dot{x}(t_0)\}$ :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a \cos(\omega_0(t_0 + \alpha)) + b \sin(\omega_0(t_0 + \alpha)) , \\ \dot{x}(t_0) &= \omega_0 [-a \sin(\omega_0(t_0 + \alpha)) + b \cos(\omega_0(t_0 + \alpha))] . \end{aligned}$$

Elegimos ahora el valor de  $\alpha$  que simplifica al máximo la situación a la hora de determinar tanto  $a$  como  $b$ :  $\alpha = -t_0$ . Resulta entonces

$$x(t_0) = a , \quad \dot{x}(t_0) = \omega_0 b ,$$

y la solución no es más que

$$x(t) = x(t_0) \cos(\omega_0(t - t_0)) + \frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_0} \sin(\omega_0(t - t_0)) . \quad (8)$$

La invariancia bajo traslaciones temporales de la ecuación de movimiento nos ha permitido escribir la solución  $x(t)$  en términos de las condiciones en un instante  $t_0$ ,  $\{x(t_0), \dot{x}(t_0)\}$ , y de las soluciones armónicas básicas seno y coseno (de frecuencia angular  $\omega_0$ ) en términos del tiempo transcurrido desde ese instante  $t_0$ ,  $t - t_0$ , de forma completamente análoga a la solución en (5). Del mismo modo podemos escribir

$$x(t) = \sqrt{[x(t_0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(t_0)}{\omega_0}\right]^2} \cos\left(\omega_0(t - t_0) + \tan^{-1}\left[\frac{-\dot{x}(t_0)}{\omega_0 x(t_0)}\right]\right) . \quad (9)$$

Habiendo entendido esta propiedad, en lo sucesivo, por comodidad, emplearemos siempre condiciones iniciales en  $t = 0$ .

Completamos la discusión anterior con un comentario: en lugar de dos condiciones iniciales, también podríamos determinar la trayectoria del sistema con dos condiciones dadas a tiempos distintos  $t_1$  y  $t_2$ , por ejemplo  $\{x(t_1), x(t_2)\}$ . Con  $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ ,

$$\begin{aligned} x(t_1) &= a \cos(\omega_0 t_1) + b \sin(\omega_0 t_1) , \\ x(t_2) &= a \cos(\omega_0 t_2) + b \sin(\omega_0 t_2) . \end{aligned}$$

Será posible siempre que, en términos de las incógnitas  $a$  y  $b$ , el sistema anterior tenga solución única; no será posible en caso contrario (por ejemplo, si nuestras dos condiciones son  $\{x(0), x(2\pi/\omega)\}$ ).

### 1.3. Exponenciales complejas

La discusión anterior de la independencia del comportamiento del oscilador con respecto a la elección del origen del tiempo (que controla paramétricamente la solución), nos ha llevado a considerar las soluciones básicas  $\cos(\omega_0 t)$ ,  $\sin(\omega_0 t)$  con el argumento *desplazado*,  $\cos(\omega_0(t-t_0))$ ,  $\sin(\omega_0(t-t_0))$ ; ahora bien, desarrollando por ejemplo  $\cos(\omega_0(t-t_0)) = \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 t_0) + \sin(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t_0)$ , nos encontramos con que se reescriben, como la linealidad del sistema hace esperar, en términos de las soluciones  $\cos(\omega_0 t)$  y  $\sin(\omega_0 t)$  con el argumento *no desplazado*: ¿es posible escoger unas funciones básicas para las que la arbitrariedad en la elección del origen de tiempos se manifieste de forma más sencilla? La respuesta es sí, pagando el precio de considerar soluciones complejas. Si consideramos las combinaciones de cosenos y senos

$$\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) = e^{i\omega_0 t}, \quad \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t) = e^{-i\omega_0 t},$$

resulta sencillamente

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0(t-t_0)) + i \sin(\omega_0(t-t_0)) &= e^{i\omega_0(t-t_0)}, \\ \cos(\omega_0(t-t_0)) - i \sin(\omega_0(t-t_0)) &= e^{-i\omega_0(t-t_0)}, \end{aligned}$$

es decir, al trasladar  $t \mapsto t - t_0$ , las soluciones  $e^{\pm i\omega_0 t}$  mantienen la forma y quedan sencillamente multiplicadas por un factor (complejo) constante  $e^{\mp i\omega_0 t_0}$ .

Otra ventaja del uso de las exponenciales complejas (en última instancia no es más que otra manifestación de lo apenas comentado) que las hace particularmente cómodas, es su comportamiento con respecto a  $\frac{d}{dt}$ :

$$\frac{d}{dt} e^{\pm i\omega_0 t} = \pm i\omega_0 e^{\pm i\omega_0 t},$$

i.e. también mantienen la forma. Si consideramos las funciones  $e^{\pm i\omega_0 t}$  en el plano complejo, las trayectorias que describen corresponden a un movimiento *circular uniforme*; en ese sentido la trayectoria de un oscilador armónico se puede “visualizar” sencillamente como la proyección, obtenida al tomar la parte real, la parte imaginaria, o cualquier combinación de ambas (corresponde a proyectar en cualquier dirección que no sea ni el eje real ni el imaginario) de un movimiento circular uniforme con frecuencia angular  $\omega_0$ . Contando con estas propiedades, en apartados posteriores emplearemos exponenciales complejas cuando resulte cómodo y apropiado.

## 2. Planteamiento general

En el apartado anterior hemos repasado un ejemplo concreto y sencillo de oscilador armónico. Hemos explorado además propiedades del sistema que serán particularmente relevantes en el estudio de otros sistemas más complejos. En este apartado analizamos en qué medida el estudio del ejemplo concreto de la masa unida a un muelle oscilando alrededor del equilibrio recoge características generales del comportamiento de sistemas con un grado de libertad cerca del equilibrio.

En primer lugar recordamos que la fuerza recuperadora del muelle,  $F = -kx$ , se puede derivar de un potencial  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ ,  $F = -\frac{d}{dx}V(x)$ . Consideremos en

general un sistema con un grado de libertad  $X$ , descrito por un potencial  $V(X)$  que produce una fuerza

$$F = -\frac{d}{dX}V(X)$$

y una ecuación de movimiento

$$F = \mu \frac{d^2}{dt^2}X = \mu \ddot{X},$$

con  $\mu$  una constante que describe la “inercia” del grado de libertad  $X$ . Si para  $X = X_0$  el sistema presenta un equilibrio *estable*, tendremos

$$\left. \frac{d}{dX}V(X) \right|_{X=X_0} = 0 \text{ (equilibrio)}, \quad \left. \frac{d^2}{dX^2}V(X) \right|_{X=X_0} > 0 \text{ (estable)}.$$

Desarrollamos  $V(X)$  alrededor del punto  $X_0$ ,

$$\begin{aligned} V(X) = & V(X_0) + (X - X_0) \left. \frac{d}{dX}V(X) \right|_{X=X_0} \\ & + \frac{1}{2}(X - X_0)^2 \left. \frac{d^2}{dX^2}V(X) \right|_{X=X_0} + \frac{1}{6}(X - X_0)^3 \left. \frac{d^3}{dX^3}V(X) \right|_{X=X_0} + \dots \end{aligned}$$

Introducimos ahora  $x = X - X_0$ , desplazamiento del grado de libertad  $X$  con respecto al equilibrio, y las condiciones de equilibrio  $\left. \frac{d}{dX}V(X) \right|_{X=X_0} = 0$ ,  $\left. \frac{d^2}{dX^2}V(X) \right|_{X=X_0} \equiv \chi > 0$ , para reescribir

$$V(x) = V(X_0) + \frac{1}{2}\chi x^2 + \mathcal{O}(x^3) + \dots$$

La figura 3 ilustra la situación.

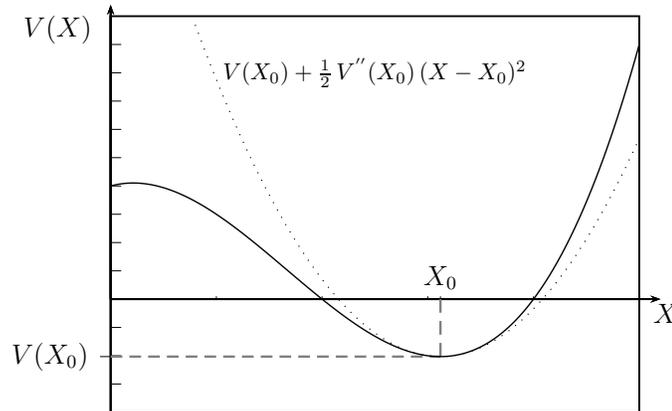


Figura 3: Potencial  $V(X)$  y aproximación alrededor del equilibrio  $X_0$ .

Si los términos de orden superior son despreciables con respecto al término cuadrático  $\frac{1}{2}\chi x^2$  (analizaremos después en qué condiciones es válida esta aproximación), la ecuación de movimiento se convierte en

$$\mu \ddot{x} = -\chi x \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\chi}{\mu} x = 0.$$

La combinación  $\frac{\chi}{\mu}$ , que recoge las características del sistema, tiene dimensiones (tiempo)<sup>-2</sup> de modo que introducimos  $\omega_0^2 \equiv \frac{\chi}{\mu}$  para encontrarnos finalmente con la ecuación de movimiento de un oscilador armónico para el comportamiento del sistema alrededor del equilibrio

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} . \quad (10)$$

Las soluciones, según hemos ya estudiado, quedan determinadas por las condiciones iniciales de la perturbación del sistema  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ ,

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2} \cos\left(\omega_0 t + \tan^{-1}\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)}\right]\right) . \quad (11)$$

Veamos ahora la validez de la aproximación  $V(x) = V(X_0) + \frac{1}{2}\chi x^2$ : para poder despreciar términos de orden superior, recuperando explícitamente el término siguiente  $\mathcal{O}(x^3)$  del desarrollo, la aproximación es válida si

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{X_0} \right] x^2 \gg \frac{1}{6} \left[ \frac{d^3 V}{dx^3} \Big|_{X_0} \right] x^3 ,$$

es decir

$$x \ll 3 \frac{\left[ \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{X_0} \right]}{\left[ \frac{d^3 V}{dx^3} \Big|_{X_0} \right]} .$$

La fracción en el miembro derecho,  $\frac{\left[ \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{X_0} \right]}{\left[ \frac{d^3 V}{dx^3} \Big|_{X_0} \right]}$ , tiene las mismas dimensiones que

$x$  y nos indica la escala con respecto a la cual los desplazamientos  $x$  deben ser pequeños para que la aproximación armónica sea correcta<sup>3</sup>. Resumiendo todo lo anterior: alrededor de un equilibrio estable, para desplazamientos suficientemente pequeños, *perturbaciones*, en el grado de libertad estudiado, el sistema se comporta como un *oscilador armónico simple* de frecuencia dada por las características estructurales del sistema (la “inercia”  $\mu$  y la “constante de recuperación” alrededor del equilibrio  $\chi$ ) y de amplitud dada por el “tamaño” de la perturbación, dado por  $x(0)$  y  $\dot{x}(0)$ .

<sup>3</sup>En general deberíamos considerar desplazamientos  $x$  tales que cualquier término  $\frac{x^n}{n!} \left[ \frac{d^n V}{dx^n} \Big|_{X_0} \right]$  del desarrollo resultase despreciable con respecto al término cuadrático y obtendríamos

$$x^{n-2} \ll \frac{n!}{2} \frac{\left[ \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{X_0} \right]}{\left[ \frac{d^n V}{dx^n} \Big|_{X_0} \right]} , \forall n \in \mathbb{N} .$$

A efectos de entender en qué medida, de forma general, existe un régimen en el cual el sistema se comportará como un oscilador armónico, es suficientemente ilustrativo el haber considerado el término cúbico.

### 3. Oscilaciones armónicas en dos dimensiones

#### 3.1. Frecuencia única

Hemos analizado las oscilaciones armónicas de un grado de libertad; veamos ahora qué ocurre cuando tenemos oscilaciones armónicas en un sistema con dos grados de libertad. Generalizando de la forma más sencilla posible la fuerza recuperadora  $F = -kx$  de un sistema con un grado de libertad, consideremos un sistema con dos grados de libertad  $x$  e  $y$  (con  $\vec{r} = (x, y)$ ), una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento  $\vec{F} = -k\vec{r}$ , y un mismo parámetro “de inercia” para cada grado de libertad, de modo que las ecuaciones de movimiento sean

$$m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -k x \\ m \ddot{y} = -k y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0 \end{cases} .$$

Tenemos sencillamente dos osciladores armónicos (independientes) con la misma frecuencia  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Veamos qué implica esto para la trayectoria del sistema  $(x, y)$  en función del tiempo. Consideremos soluciones

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + a), \quad y(t) = B \cos(\omega_0 t + b),$$

con  $\{A, a, B, b\}$  dados por las condiciones iniciales. En primer lugar reexpresamos  $y(t)$  haciendo aparecer la forma funcional de  $x(t)$ ,

$$\begin{aligned} y(t) &= B \cos(\omega_0 t + b) = B \cos(\omega_0 t + a + \underbrace{b - a}_{\delta}) = \\ &= B \cos(\omega_0 t + a) \cos \delta - B \sin(\omega_0 t + a) \sin \delta = \\ &= \frac{B}{A} x(t) \cos \delta - B \sin(\omega_0 t + a) \sin \delta . \end{aligned} \quad (12)$$

Llevando  $x(t)$  e  $y(t)$  al mismo miembro y tomando el cuadrado,

$$\begin{aligned} [y(t)]^2 + \frac{B^2}{A^2} [x(t)]^2 \cos^2 \delta - 2 \frac{B}{A} \cos \delta [x(t) y(t)] &= \\ B^2 [\sin^2(\omega_0 t + a)] \sin^2 \delta &= B^2 \left( 1 - \frac{[x(t)]^2}{A^2} \right) \sin^2 \delta , \end{aligned} \quad (13)$$

podemos reagrupar términos y escribir

$$B^2 [x(t)]^2 + A^2 [y(t)]^2 - 2 A B \cos \delta [x(t) y(t)] = A^2 B^2 \sin^2 \delta ,$$

es decir, matricialmente,

$$\begin{pmatrix} x(t) & y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^2 & -A B \cos \delta \\ -A B \cos \delta & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A^2 B^2 \sin^2 \delta . \quad (14)$$

La ecuación anterior es la ecuación de una cónica y las trayectorias  $(x(t), y(t))$  son sencillamente trayectorias elípticas (recorridas por el sistema en función del tiempo  $t$ ). Para determinados valores particulares de los parámetros  $A, B, \delta$ , resultan incluso más sencillas. Cuando  $\delta = 0$ , tenemos automáticamente  $B x(t) = A y(t)$ , y la trayectoria es sencillamente un segmento de recta  $y = \frac{B}{A} x$ . Cuando en cambio  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ , la trayectoria es una elipse con semiejes en las direcciones  $x$  e  $y$ . Para otros valores de  $\delta$ , tendremos elipses con semiejes rotados con respecto a las direcciones  $x$  e  $y$ . La figura 4 ilustra distintos casos.

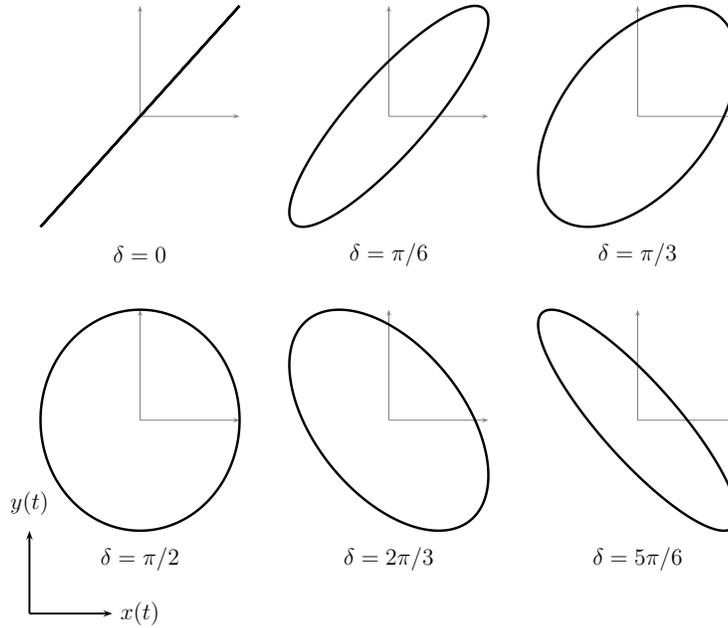


Figura 4: Figuras de Lissajous,  $\omega_x = \omega_y$ .

### 3.2. Frecuencias diferentes

Si en lugar de una fuerza recuperadora proporcional al desplazamiento  $\vec{F} = -k\vec{r}$  consideramos una fuerza con una constante de recuperación diferente en cada dirección,  $\vec{F} = -(k_x x, k_y y)$ , tenemos

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -k_x x \\ m \ddot{y} = -k_y y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{k_x}{m} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k_y}{m} y = 0 \end{cases} .$$

Las soluciones  $x(t)$  e  $y(t)$  tendrán ahora frecuencias angulares diferentes  $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$  y  $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ :

$$x(t) = A \cos(\omega_x t + a), \quad y(t) = B \cos(\omega_y t + a + \delta) .$$

Las trayectorias en el plano  $(x, y)$  son las conocidas *curvas de Lissajous*, ilustradas en la figura 5.

Cabe señalar que las trayectorias en el plano  $(x, y)$  son cerradas si los periodos de ambos movimientos tienen un múltiplo común, o, equivalentemente, si el cociente de las frecuencias  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$  es un número racional ( $\omega_x/\omega_y \in \mathbb{Q}$ ). La figura 6 ilustra parte de una trayectoria no cerrada con  $\omega_y = \sqrt{2}\omega_x$ .

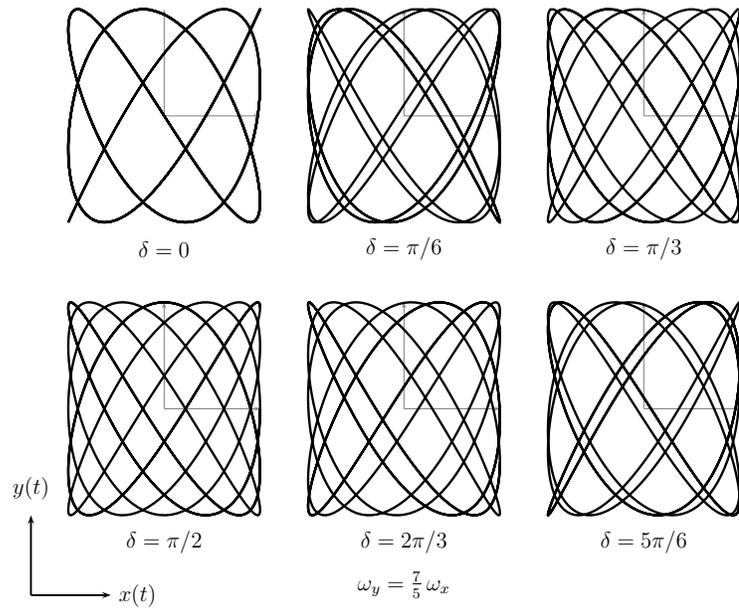


Figura 5: Figuras de Lissajous,  $\omega_x \neq \omega_y$ .

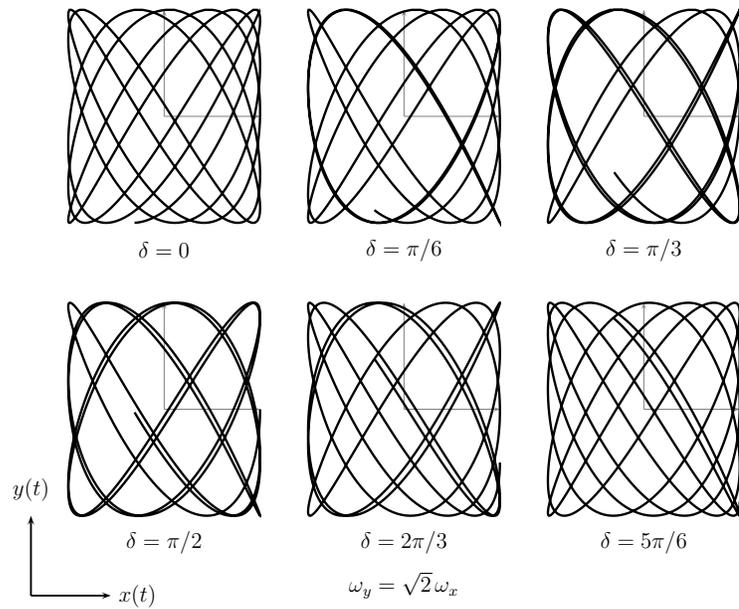


Figura 6: Figuras de Lissajous,  $\omega_x \neq \omega_y$ .

## 4. Oscilaciones amortiguadas

En los apartados anteriores la oscilación del sistema considerado se mantendría por un tiempo infinito sin ver disminuida su amplitud. Esta descripción, obviamente, no reproduce de forma fiel o verosímil el comportamiento de multitud de sistemas físicos reales. ¿Cómo podemos modificar nuestra descripción de un oscilador armónico alrededor del equilibrio para obtener una descripción más acorde a lo observado en la naturaleza? Obtuvimos la ecuación de movimiento  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  uniendo una ley dinámica  $m\ddot{x} = F$  con una forma particular de la fuerza  $F = -kx$ . Para enriquecer nuestra descripción, no modificaremos la ley dinámica (que no es más que la segunda ley de Newton) y sí en cambio nos plantearemos qué clase de modificación sencilla de la forma de la fuerza es útil a nuestro propósito. Para mantener la linealidad del sistema, tan solo consideramos términos con una única potencia de  $x$ : eso descarta automáticamente cualquier término  $x^2$ ,  $x\dot{x}$ ,  $x^3$ , etc, en  $F$ . Tampoco queremos incluir derivadas temporales de orden superior  $\ddot{\ddot{x}}$ , etc. Esto nos deja con una única dependencia para modificar la forma de la fuerza:  $\dot{x}$ . Físicamente, resulta razonable; supone añadir términos que dependen de la “velocidad” del grado de libertad  $x$ , cosa habitual al describir, por ejemplo, la presencia de fuerzas de rozamiento. Dicho esto, escribimos explícitamente la forma de la fuerza en este contexto:

$$F = -kx - \gamma \dot{x} .$$

La ecuación de movimiento resultante es por tanto

$$m \ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0 . \quad (15)$$

La combinación  $\frac{\gamma}{m}$  tiene dimensiones de (tiempo)<sup>-1</sup>; introducimos una nueva constante  $\Gamma$  con  $\frac{\gamma}{m} \equiv 2\Gamma$  (el factor 2 incluido aquí simplificará expresiones posteriores); adicionalmente, denominamos ahora  $\omega_0$  a la frecuencia “natural” del oscilador  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (no es más que la frecuencia angular que teníamos en ausencia de amortiguamiento). La ecuación diferencial que describe el movimiento es por tanto

$$\boxed{\ddot{x} + 2\Gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0} . \quad (16)$$

¿Qué soluciones tiene ec. (16)? Para obtenerlas construimos en primer lugar el polinomio característico mediante la sustitución  $x \rightarrow e^{zt}$  (por tanto  $\dot{x} \rightarrow ze^{zt}$  y  $\ddot{x} \rightarrow z^2 e^{zt}$ ) en la ecuación de movimiento,

$$(z^2 + 2\Gamma z + \omega_0^2) e^{zt} = 0 . \quad (17)$$

Calculamos las raíces del polinomio característico  $z^2 + 2\Gamma z + \omega_0^2$ ,

$$z_{\pm} = \frac{-2\Gamma \pm \sqrt{4\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} .$$

(Aquí resulta particularmente conveniente haber definido  $\Gamma$  incluyendo un factor 2). En este punto es necesario distinguir tres casos que, a continuación, analizamos por separado.

- Para  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ , tenemos dos raíces complejas (conjugadas)

$$z_+ = -\Gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} , \quad z_- = -\Gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2} .$$

- Para  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ , tenemos dos raíces reales

$$z_+ = -\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}, \quad z_- = -\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}.$$

- Para  $\omega_0^2 = \Gamma^2$ , tenemos una raíz real doble

$$z = -\Gamma.$$

#### 4.1. Movimiento oscilatorio amortiguado

Para  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ , tenemos dos raíces complejas (conjugadas). Introduciendo una nueva frecuencia  $\omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2}$ , debemos considerar dos tipos de soluciones básicas,

$$e^{-\Gamma t} e^{i\omega_1 t}, \quad e^{-\Gamma t} e^{-i\omega_1 t},$$

o equivalentemente

$$e^{-\Gamma t} \cos(\omega_1 t), \quad e^{-\Gamma t} \sin(\omega_1 t).$$

Escribiendo

$$x(t) = e^{-\Gamma t} (a \cos(\omega_1 t) + b \sin(\omega_1 t)),$$

tenemos

$$\dot{x}(t) = e^{-\Gamma t} ((\omega_1 b - \Gamma a) \cos(\omega_1 t) + (\omega_1 a - \Gamma b) \sin(\omega_1 t)),$$

de modo que podemos fijar  $a$  y  $b$  en términos de condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ :

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = \omega_1 b - \Gamma a.$$

La solución es  $a = x(0)$ ,  $b = \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\omega_1}$  con lo que

$$x(t) = e^{-\Gamma t} \left( x(0) \cos(\omega_1 t) + \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right). \quad (18)$$

En términos de una única función trigonométrica podemos también escribir

$$x(t) = e^{-\Gamma t} \sqrt{[x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\omega_1} \right]^2} \cos \left( \omega_1 t + \tan^{-1} \left[ -\frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\omega_1 x(0)} \right] \right). \quad (19)$$

De esta última forma es inmediato observar que el movimiento corresponde a una oscilación armónica de frecuencia  $\omega_1$ , diferente de la frecuencia *natural*  $\omega_0$ , modulada/acotada por<sup>4</sup>  $\pm A e^{-\Gamma t}$ ,  $-A e^{-\Gamma t} \leq x(t) \leq A e^{-\Gamma t}$ . La figura 7 ilustra este tipo de movimiento. Dadas las características del mismo se conoce como *movimiento oscilatorio amortiguado*.

<sup>4</sup>Con

$$A = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\omega_1} \right]^2}.$$

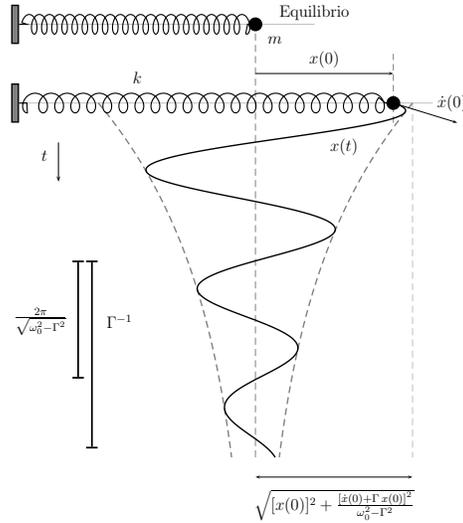


Figura 7: Oscilador amortiguado,  $\omega_0 > \Gamma$ .

#### 4.2. Movimiento sobreamortiguado

Para  $\omega_0^2 < \Gamma^2$ , tenemos dos raíces reales y no existe movimiento oscilatorio propiamente dicho. Debemos considerar dos tipos de soluciones básicas,

$$e^{-\Gamma t - \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad e^{-\Gamma t + \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t},$$

o equivalentemente

$$e^{-\Gamma t} \cosh\left(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t\right), \quad e^{-\Gamma t} \sinh\left(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t\right).$$

Nótese que aparecen funciones hiperbólicas  $\cosh$ ,  $\sinh$  en lugar de funciones circulares  $\sin$ ,  $\cos$ . Considerando combinaciones lineales de uno u otro tipo de soluciones básicas y aplicando condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ , la solución es

$$x(t) = x(0) e^{-\Gamma t} \cosh\left(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t\right) + \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\Gamma t} \sinh\left(\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t\right), \quad (20)$$

o bien

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[ x(0) + \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} \right] e^{-\Gamma t} e^{+\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t} + \frac{1}{2} \left[ x(0) - \frac{\dot{x}(0) + \Gamma x(0)}{\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2}} \right] e^{-\Gamma t} e^{-\sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2} t}. \quad (21)$$

Teniendo en cuenta que para  $t > 0$  tenemos  $e^{(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2})t} > e^{(-\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - \omega_0^2})t}$ , en general dominará la primera de las exponenciales para tiempos grandes<sup>5</sup>. La

<sup>5</sup>Salvo cuando las condiciones iniciales se escojan de forma peculiar y se anule el coeficiente de ese término exponencial.

figura 8 ilustra este tipo de movimiento. Dadas las características del mismo se conoce como *movimiento sobreamortiguado*.

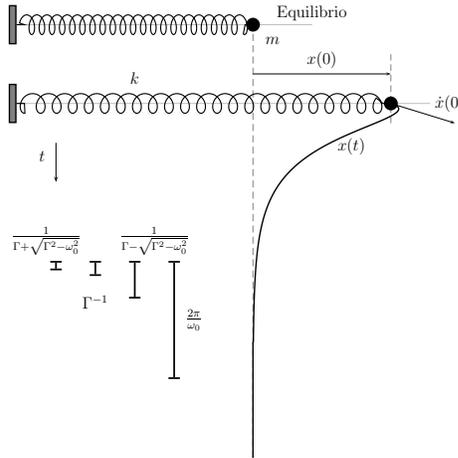


Figura 8: Oscilador sobreamortiguado,  $\omega_0 < \Gamma$ .

### 4.3. Movimiento aperiódico crítico (amortiguamiento crítico)

Para  $\omega_0^2 = \Gamma^2$ , caso intermedio entre los dos anteriores, la situación cambia ligeramente desde el punto de vista matemático. Al tener el polinomio característico una única raíz doble, debemos considerar soluciones del siguiente tipo:

$$x(t) = (a + bt)e^{-\Gamma t} \quad (\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -\Gamma x(t) + b e^{-\Gamma t}).$$

Al imponer las condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ , las constantes  $a$  y  $b$  obedecen

$$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = b - \Gamma a,$$

y la solución es

$$x(t) = [x(0) + (\dot{x}(0) + \Gamma x(0)) t] e^{-\Gamma t}. \quad (22)$$

La figura 9 ilustra este tipo de movimiento. Cabe señalar que si bien el sistema no tiene un movimiento oscilatorio como ocurre cuando  $\omega_0^2 > \Gamma^2$ , no se amortigua de forma estrictamente exponencial<sup>6</sup>. Atendiendo a las características del movimiento, en este caso se denomina *movimiento aperiódico crítico* o bien *movimiento con amortiguamiento crítico*.

### 4.4. Comentarios sobre el movimiento amortiguado

El análisis del oscilador en presencia de un término de amortiguamiento nos ha hecho descubrir tres situaciones diferentes. Cuando  $\omega_0^2 > \Gamma^2$  el sistema oscila (1) con una frecuencia angular  $\omega_1$  menor que la frecuencia angular natural  $\omega_0$

<sup>6</sup>Una vez más, esto ocurre para cualesquiera condiciones iniciales salvo aquellas peculiares en que se anula el coeficiente de  $t$ .

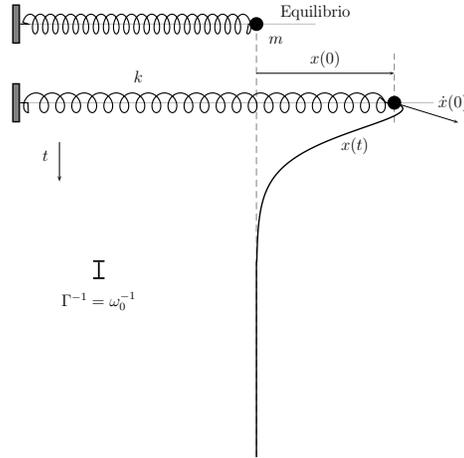


Figura 9: Oscilador con amortiguamiento crítico,  $\omega_0 = \Gamma$ .

del sistema en ausencia de amortiguamiento, (2) con una amplitud que decrece exponencialmente con el tiempo. Cuando  $\omega_0^2 \leq \Gamma^2$  el sistema tiende al equilibrio sin oscilar. Podemos entender de forma intuitiva el comportamiento del sistema del siguiente modo. El sistema tiene un tiempo de oscilación natural  $\sim \omega_0^{-1}$ ; al incluir el término de amortiguamiento introducimos una segunda escala de tiempos  $\sim \Gamma^{-1}$ . Cuando el tiempo de oscilación natural es *más corto* que la escala de tiempo del amortiguamiento, es decir  $\omega_0^{-1} < \Gamma^{-1} \Leftrightarrow \omega_0^2 > \Gamma^2$ , el sistema “tiene tiempo” de oscilar mientras se amortigua; en cambio, cuando  $\omega_0^{-1} \geq \Gamma^{-1} \Leftrightarrow \omega_0^2 \leq \Gamma^2$  el sistema “no tiene tiempo” de oscilar mientras se amortigua. El tiempo asociado con el término de amortiguamiento,  $\Gamma^{-1}$ , se conoce como *tiempo de relajación* por ser el tiempo típico que emplea el sistema para regresar al equilibrio. Se maneja a menudo un tercer parámetro para caracterizar de forma sencilla el sistema, dependiente de los anteriores: el *factor de calidad*<sup>7</sup>

$$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma} .$$

En términos de  $Q$ ,  $Q > 1$  corresponde a un sistema que oscila de forma amortiguada,  $Q = 1$  a un sistema con amortiguamiento crítico y  $Q < 1$  a un sistema sobreamortiguado.

Regresando a la discusión anterior, conviene matizar que de forma matemática estricta, en ninguno de los casos anteriores el sistema alcanza  $x(t) = 0$  para un determinado  $t$  y permanece en la posición de equilibrio, cosa que parece chocar con lo que podemos observar en multitud de sistemas amortiguados en los cuales el sistema *sí* parece regresar realmente a la posición de equilibrio: en general, en esas circunstancias, nuestra sencilla descripción resultaría incompleta (esencialmente, fuerzas/interacciones que en esa descripción sencilla ignorábamos pasan a desempeñar un papel).

<sup>7</sup>Distintos autores manejan una definición distinta de  $Q$ ,  $Q' = \frac{\omega_0}{2\Gamma}$ .

## 5. Energía

En los apartados anteriores hemos analizado las características del movimiento de un oscilador, tanto sin amortiguamiento como con amortiguamiento; hemos estudiado la forma de las trayectorias solución de las ecuaciones de movimiento incorporando las condiciones iniciales pertinentes. En este apartado vamos a analizar la evolución de la energía del sistema en ambas situaciones.

La energía total  $\mathcal{E}$  del sistema tiene dos contribuciones, la energía cinética  $\mathcal{T}$  y la energía potencial  $\mathcal{V}$ . Sus valores son

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t)]^2, \quad \mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} k [x(t)]^2 .$$

Sin amortiguamiento,  $\Gamma = 0$ , acudimos a la solución de la ecuación (6) y calculamos

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left[ [x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2 \right] \sin^2 \left( \omega_0 t + \tan^{-1} \left[ \frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)} \right] \right) \quad (23)$$

$$\mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} k \left[ [x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2 \right] \cos^2 \left( \omega_0 t + \tan^{-1} \left[ \frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)} \right] \right) . \quad (24)$$

Con  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \left[ [x(0)]^2 + \left[ \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \right]^2 \right] .$$

Observamos inmediatamente que  $\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = 0$ : como cabía intuir, la energía total es independiente del tiempo, se conserva. La energía total es igual tanto a la energía cinética cuando el sistema pasa por la posición de equilibrio (instante en que la energía potencial es nula), como a la energía potencial en los puntos de máximo alejamiento del equilibrio (instante en que la energía cinética es nula). En este caso hemos obtenido la conservación de la energía total empleando de forma explícita las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Veamos ahora si podíamos obtener este resultado de forma más directa, sin emplear las soluciones explícitas (pero sí, por supuesto, una información equivalente:  $x(t)$  cumple las ecuaciones de movimiento). Con

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{T}(t) + \mathcal{V}(t) = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + k x^2) ,$$

veamos como varía  $\mathcal{E}(t)$  en función del tiempo:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = m \dot{x} \ddot{x} + k \dot{x} x = \dot{x} (m \ddot{x} + k x) .$$

Si  $x$  cumple la ecuación de movimiento, el segundo factor se anula y se cumple automáticamente  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$ , la energía se conserva, según ilustra la figura 10.

¿Qué ocurre en presencia de amortiguamiento? Cabe esperar que en este caso la energía *no* se conserve. Procediendo de forma análoga, cuando  $\Gamma \neq 0$ ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x) ,$$

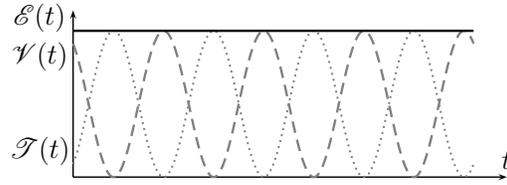


Figura 10: Energía en función del tiempo, oscilador armónico simple.

al aplicar ahora la ecuación de movimiento, ec. (15), tenemos  $m\ddot{x} + kx = -\gamma\dot{x}$ , y obtenemos

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma(\dot{x})^2 = -2\Gamma m(\dot{x})^2 = -4\Gamma \mathcal{T}(t) .$$

La energía total disminuye y de hecho la pérdida instantánea de energía es proporcional a la energía cinética y a la constante  $\Gamma$  que controla la magnitud del amortiguamiento. Podemos escribir explícitamente la energía total en función del tiempo para los tres tipos de movimiento amortiguado, pero resultando las expresiones engorrosas y poco reveladoras, nos conformamos con ilustrarla en la figura 11, que muestra ejemplos con  $x(0) \neq 0$ ,  $\dot{x}(0) \neq 0$ .

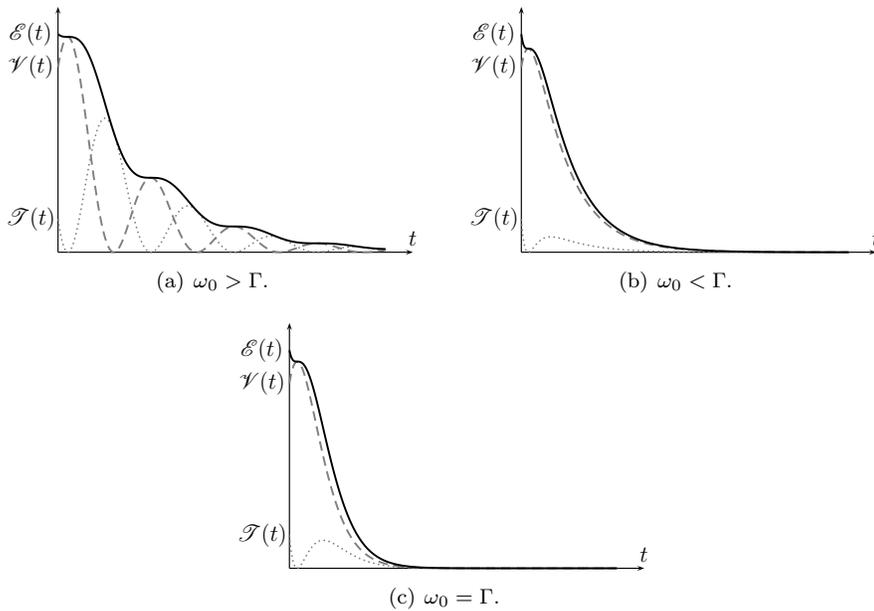


Figura 11: Energía del sistema amortiguado en función del tiempo.

## 6. Ejemplos

En este apartado repasamos un par de ejemplos de sistemas físicos que se comportan, una vez perturbados con respecto a una situación de equilibrio,

como osciladores armónicos simples.

### 6.1. Péndulo simple

Además de la masa puntual y el muelle que han poblado este tema desde el inicio, un ejemplo clásico de oscilador mecánico es el péndulo simple. En su versión ideal es una masa puntual  $m$  suspendida de un punto por una cuerda sin masa de longitud constante  $\ell$ , restringida a moverse en un plano y sometida a la acción de la gravedad  $\vec{g}$  ( $g = |\vec{g}|$ ); ninguna interacción amortigua el movimiento. El sistema tiene un único grado de libertad; elegimos, buscando la máxima simplicidad, el ángulo  $\theta$  que forma la cuerda con respecto a la dirección de  $\vec{g}$ . El sistema tiene un equilibrio estable para  $\theta = 0$ . Plantearemos las ecuaciones de movimiento siguiendo tres estrategias diferentes (el resultado será por supuesto idéntico): (1) en términos de una lagrangiana  $\mathcal{L}$  y de las correspondientes ecuaciones de movimiento de Euler–Lagrange, (2) en términos de las fuerzas presentes en el sistema y de la segunda ley de Newton, (3) en términos del momento total de las fuerzas externas y la variación del momento angular (en esencia, la aplicación de (2) a un sólido rígido).

Observando la figura 12 escribimos la energía cinética  $\mathcal{T}$  del péndulo

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 . \quad (25)$$

La energía potencial, tomando como referencia la correspondiente al equilibrio, es

$$\mathcal{V} = m g \ell (1 - \cos \theta) . \quad (26)$$

Tenemos por tanto

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} m (\ell \dot{\theta})^2 - m g \ell (1 - \cos \theta) . \quad (27)$$

La ecuación de Euler–Lagrange resultante,  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$ , es,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \ddot{\theta} \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m g \ell \sin \theta \end{array} \right\} m \ell^2 \left( \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta \right) = 0 . \quad (28)$$

La ecuación de movimiento (28) *no es* la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, ni siquiera es lineal. Ahora bien, para perturbaciones pequeñas, i.e. para desplazamientos angulares  $\theta \ll 1$ , tenemos  $\sin \theta \simeq \theta$  y despreciamos términos  $\mathcal{O}(\theta^3)$  para obtener

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 , \quad (29)$$

que *sí* es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico de frecuencia angular  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ . De hecho  $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , módulo constantes multiplicativas adimensionales, es la única cantidad con dimensiones (tiempo)<sup>-1</sup> que podemos obtener dadas las constantes que definen el problema; el razonamiento anterior es necesario para fijar esa eventual constante multiplicativa: es *uno*.

En lugar de plantear la función lagrangiana asociada al péndulo y obtener las ecuaciones de movimiento podemos abordar el problema en términos de las fuerzas presentes. Según ilustra la figura 13, tenemos dos fuerzas, la tensión  $\vec{T}$

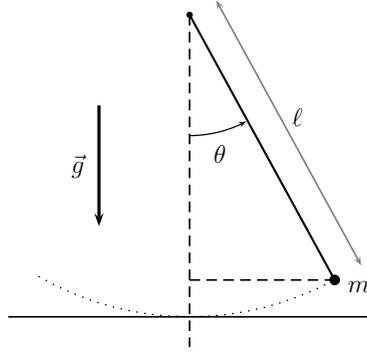


Figura 12: Péndulo simple.

y el peso  $m\vec{g}$ . Emplearemos coordenadas polares con origen en el punto de suspensión de modo que el ángulo polar es directamente nuestro grado de libertad. Tendremos entonces  $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$  con

$$\vec{T} = -T\vec{u}_r, \quad m\vec{g} = mg \cos\theta \vec{u}_r - mg \sin\theta \vec{u}_\theta.$$

Por otra parte,  $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ , con  $\vec{r} = r\vec{u}_r$ . A modo de recordatorio,

$$\vec{u}_r = \cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y, \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta \vec{u}_x + \cos\theta \vec{u}_y,$$

con lo que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}_r &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta, & \dot{\vec{u}}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{u}_r, \\ \ddot{\vec{u}}_r &= \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{u}_r, & \ddot{\vec{u}}_\theta &= -\ddot{\theta} \vec{u}_r - \dot{\theta}^2 \vec{u}_\theta. \end{aligned}$$

Con todo ello,

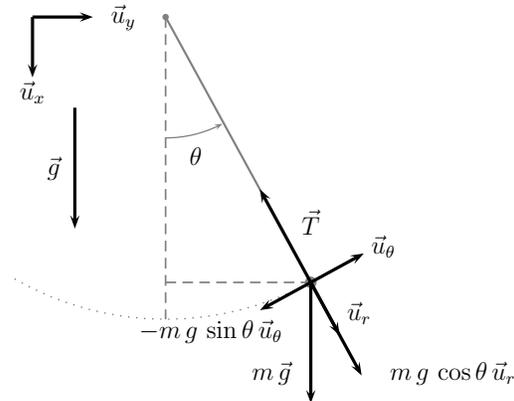


Figura 13: Péndulo simple (fuerzas).

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta,$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r} \vec{u}_r + 2 \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r .$$

Acudimos finalmente a  $m \ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m \vec{g}$  para obtener

$$\vec{u}_r \left( m(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + T - m g \cos \theta \right) + \vec{u}_\theta \left( m(2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) + m g \sin \theta \right) = \vec{0} .$$

Ahora bien, la longitud de la cuerda es fija,  $r = \ell$ , con lo que  $\dot{r} = 0$  y  $\ddot{r} = 0$ . La ecuación anterior se reduce a

$$\vec{u}_r \left( -m \ell \dot{\theta}^2 + T - m g \cos \theta \right) + \vec{u}_\theta \left( m \ell \ddot{\theta} + m g \sin \theta \right) = \vec{0} .$$

Ambos términos deben ser nulos ( $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_\theta$  son independientes por construcción); centrándonos en el término  $\vec{u}_\theta$ ,

$$m \ell \ddot{\theta} + m g \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 , \quad (30)$$

que no es más que ec. (28). Para desplazamientos angulares pequeños, una vez más,  $\sin \theta \simeq \theta$  y obtenemos de nuevo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 . \quad (29)$$

Podemos plantearnos una tercera vía (equivalente por supuesto) para obtener la ecuación de movimiento del péndulo. Atendiendo a nuestro planteamiento, el péndulo es un sólido rígido con un punto fijo (el punto de sujeción). En lugar de emplear la ecuación que controla la evolución del momento *lineal*,  $\frac{d}{dt}(m \dot{\vec{r}}) = \vec{F}$ , podemos emplear la ecuación que controla la evolución del momento *angular*:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} ,$$

con  $\vec{N}$  el momento de las fuerzas externas y  $\vec{L}$  el momento angular. Tenemos

$$\vec{N} = \vec{r} \times (m \vec{g}) .$$

Introducimos  $\vec{u}_z \equiv \vec{u}_r \times \vec{u}_\theta$  (completando una base en coordenadas cilíndricas con  $\vec{u}_z$  normal al plano de oscilación del péndulo). Con  $\vec{g} = g \cos \theta \vec{u}_r - g \sin \theta \vec{u}_\theta$ ,

$$\vec{N} = m g r (\vec{u}_r \times [\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta]) = -m g r \sin \theta \vec{u}_z .$$

Por otra parte

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \dot{\vec{r}}) = m r \vec{u}_r \times (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z .$$

Con ello,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m 2 \dot{r} r \dot{\theta} \vec{u}_z + m r^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z + m r^2 \dot{\theta} \dot{\vec{u}}_z .$$

Ahora bien,  $r = \ell$  con lo que  $\dot{r} = 0$ ; por otra parte,  $\dot{\vec{u}}_z = \vec{0}$ . Resulta entonces

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \ell^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z .$$

Recuperando  $\vec{N} = -m g r \sin \theta \vec{u}_z$  con  $r = \ell$ ,

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Leftrightarrow m \ell^2 \ddot{\theta} = -m g r \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 ,$$

una vez más.



la ecuación de un oscilador armónico. Resumiendo, si en un circuito  $LC$  en equilibrio, i.e. sin carga eléctrica ( $Q = 0$ ) ni corriente ( $\dot{Q} = 0$ ), se introduce una perturbación – una cierta cantidad de carga  $Q(0)$  o una corriente  $\dot{Q}(0)$  –, la carga  $Q(t)$  efectuará oscilaciones armónicas de frecuencia angular

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \quad (33)$$

Del mismo modo que en nuestro oscilador mecánico inicial la masa  $m$  “mide” la inercia de nuestro grado de libertad y  $k$  “mide” lo reactivo que es el sistema para evolucionar en dirección al equilibrio, en el circuito eléctrico la inductancia  $L$  desempeña el papel de la masa y la inversa de la capacidad,  $1/C$ , desempeña el papel de la constante de recuperación que hace evolucionar el sistema en dirección a la configuración de equilibrio (obviamente sin alcanzarlo, puesto que en este caso ideal, como con el oscilador, cuando el sistema “alcanza”  $Q = 0$  tiene  $\dot{Q} \neq 0$  y cuando alcanza  $\dot{Q} = 0$  tiene  $Q \neq 0$ , oscila indefinidamente).

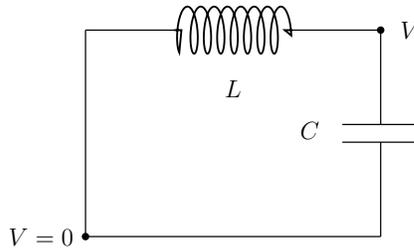
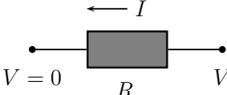


Figura 14: Circuito  $LC$ .

### 6.2.2. Circuito $RLC$

Del mismo modo que al oscilador armónico simple añadimos el amortiguamiento, al circuito  $LC$  anterior podemos añadir un nuevo componente, una resistencia  $R$ , según ilustra la figura 15. La diferencia de potencial  $V$  entre los extremos de una resistencia es

$$V = RI = R\dot{Q} \quad (\text{ley de Ohm}),$$


con  $I$  la intensidad de la corriente eléctrica y  $R$  la resistencia (“resistencia” designa tanto el componente como la magnitud que lo caracteriza,  $R$ ). Tenemos por tanto

$$V = \frac{Q}{C} + R\dot{Q} = -L\ddot{Q} , \quad (34)$$

con lo que

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 . \quad (35)$$

El sistema se comporta por tanto como un oscilador amortiguado en el cual la constante  $\Gamma$  en ec. (16) corresponde a  $\frac{R}{2L}$ .

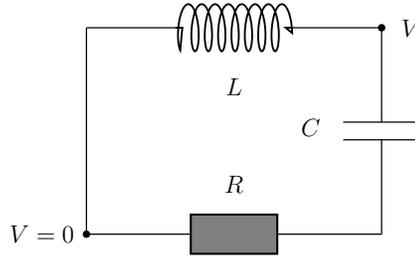


Figura 15: Circuito  $RLC$ .

## 7. ★ Espacio de fases

### 7.1. Oscilador armónico simple

Completamos el estudio de los apartados anteriores acudiendo al análisis del *espacio de fases*. Según hemos visto anteriormente, la trayectoria del sistema  $x(t)$  queda determinada por *dos* condiciones iniciales,  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ . Ahora bien, del mismo modo, si consideramos un tiempo  $t_0$  posterior, la trayectoria  $x(t)$  para  $t > t_0$  queda completamente determinada por  $\{x(t_0), \dot{x}(t_0)\}$ . Esto nos permite describir la evolución del sistema de forma diferente (aunque, por supuesto, equivalente): en lugar de considerar la trayectoria  $x(t)$  en términos de la variable  $t$ , podemos considerar la trayectoria  $(x, \dot{x})$  en términos del parámetro implícito  $t$ . Para manejar cantidades con las mismas dimensiones, consideraremos de hecho la trayectoria del sistema en el plano  $(x, \dot{x}/\omega_0)$ . Recordando ec. (6),

$$x(t) = \sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2} \cos\left(\omega_0 t + \tan^{-1}\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)}\right]\right)$$

$$\frac{\dot{x}(t)}{\omega_0} = -\sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2} \sin\left(\omega_0 t + \tan^{-1}\left[\frac{-\dot{x}(0)}{\omega_0 x(0)}\right]\right).$$

En el plano  $(x, \dot{x}/\omega_0)$  las ecuaciones anteriores definen una circunferencia de radio  $\sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2}$  recorrida en sentido horario. Ahora bien, recordando el apartado 5, este radio no es más que

$$\sqrt{[x(0)]^2 + \left[\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\right]^2} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega_0^2}},$$

con  $\mathcal{E}$  la energía, conservada, del sistema. Para cada valor de la energía  $\mathcal{E}$ , tenemos una trayectoria del sistema perfectamente bien definida en el plano  $(x, \dot{x}/\omega_0)$ , conocido como *espacio de fases*. La figura 16 ilustra las trayectorias de un oscilador armónico simple en el espacio  $(x, \dot{x}/\omega_0)$  para distintos valores de la energía.

### 7.2. Oscilador armónico amortiguado

Podemos extender el análisis anterior al estudio de un oscilador armónico amortiguado. Deberíamos distinguir los distintos casos posibles (oscilador amor-

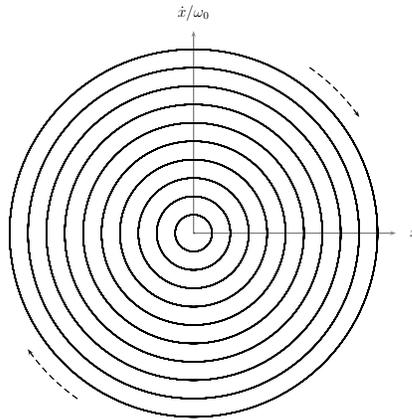


Figura 16: Espacio de fases, oscilador armónico simple.

tiguado, sobreamortiguado o con amortiguamiento crítico), pero nos limitaremos a ilustrar la forma de las distintas trayectorias que puede seguir el sistema en la figura 17 (en la que todas las trayectorias corresponden a una misma energía inicial).

### 7.3. Comentarios

Un análisis más serio de las trayectorias del sistema en el espacio de fases va más allá de nuestros objetivos. Nos limitamos a subrayar un aspecto del movimiento que podemos observar en las figuras 16 y 17: las trayectorias *no se cruzan*. ¿Es una propiedad general? De serlo, ¿por qué? En efecto es una propiedad general y la podemos entender de forma sencilla: si en el espacio de fases dos trayectorias se cruzaran, tendríamos un punto  $\{x(t_0), \dot{x}(t_0)/\omega_0\}$  del espacio de fases a partir del cual la evolución del sistema no sería única, en absoluta contradicción con lo estudiado en apartados anteriores: la trayectoria del sistema queda completamente determinada por las condiciones iniciales, y este hecho proviene directamente del tipo de ecuación de movimiento que tenemos.

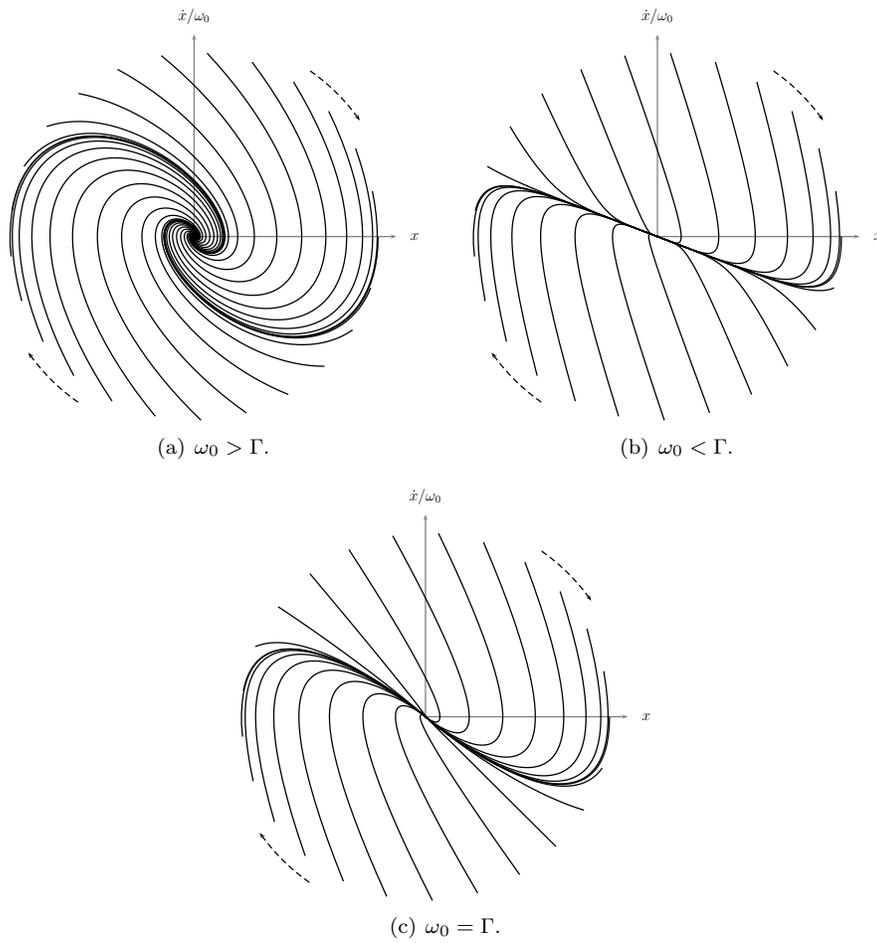


Figura 17: Espacio de fases, oscilador armónico con amortiguamiento.

## 8. ★ Oscilador no lineal (sencillo)

En los apartados anteriores hemos estudiado en detalle el comportamiento general de un grado de libertad alrededor de un equilibrio estable. La ecuación de movimiento, con o sin términos de amortiguamiento, ha resultado ser lineal en la perturbación con lo que la superposición de soluciones es también solución. Podemos interpretar esto último de la siguiente forma: dos perturbaciones distintas, pongamos por concreción  $x_1(0)$  y  $x_2(0)$ , del grado de libertad  $x$ , evolucionan necesariamente con la misma frecuencia angular  $\omega_0$ , la misma con la que a su vez evoluciona cualquier combinación de ambas perturbaciones  $ax_1(0) + bx_2(0)$ . Este hecho, que parece trivial, está asociado directamente con las propiedades de la ecuación de movimiento. En este apartado vamos a analizar brevemente un sistema que comparte ciertas características con el oscilador (perturbaciones que varían de forma periódica alrededor del equilibrio) *pero* no es lineal. Ignoraremos en todo momento términos asociados a amortiguamiento. La ecuación de movimiento del oscilador armónico es  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ , la linealidad de la misma viene tanto de la ley dinámica que nos da  $\ddot{x}$  como de la forma de la fuerza, proporcional a  $x$ . Para cambiar esta situación, lo más sencillo que nos podemos plantear es considerar una fuerza que no sea lineal en  $x$ . El caso más sencillo: una fuerza constante. Ahora bien, si queremos describir un sistema que presente un equilibrio, la fuerza no podrá ser la misma constante en todas partes. Con estos ingredientes, consideremos la siguiente fuerza ( $F_0 > 0$ )

$$F(x) = \begin{cases} -F_0, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ +F_0, & x < 0, \end{cases} \quad (36)$$

que adicionalmente es *impar* (como tantas veces en física, la simetría simplifica notablemente el estudio del problema). Podemos “leerla” de forma sencilla: cuando  $x > 0$ ,  $F(x) < 0$ , cuando  $x < 0$ ,  $F(x) > 0$ . La fuerza actúa siempre en la dirección opuesta al desplazamiento. La fuerza se anula en  $x = 0$ , único equilibrio del sistema. Dadas unas condiciones iniciales  $\{x(0), \dot{x}(0)\}$ , resolvamos la ecuación de movimiento. Supongamos  $x(0) > 0$ . Mientras  $x(t) > 0$ , tendremos ( $m$  es la masa, o en general la inercia del grado de libertad  $x$  en  $F = m\ddot{x}$ )

$$m \ddot{x} = -F_0 .$$

Con las condiciones iniciales anteriores, la trayectoria del sistema mientras  $x(t) > 0$  es

$$x(t) = -\frac{F_0}{2m} t^2 + \dot{x}(0) t + x(0) .$$

Pasará por la posición de equilibrio  $x = 0$  para  $t = t_0$ ,

$$t_0 = \frac{m}{F_0} \left[ \dot{x}(0) + \sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} \right] ,$$

con velocidad

$$\dot{x}(t_0) = -\sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} .$$

El movimiento prosigue entonces en  $x < 0$ , y tenemos que resolver

$$m \ddot{x} = +F_0$$

con condiciones iniciales  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = -\sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)}$ . La solución es sencillamente

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} (t - t_0)^2 - \sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} (t - t_0) .$$

El sistema volverá a pasar por el equilibrio para

$$t - t_0 = \frac{2m}{F_0} \sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} ,$$

y lo hará con velocidad

$$\dot{x} = +\sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} ,$$

que no es más que  $-\dot{x}(t_0)$ . Con todo lo anterior, resulta claro que el movimiento  $x(t)$  será una sucesión periódica de segmentos parabólicos<sup>8</sup>, con periodo  $T$

$$T = \frac{4m}{F_0} \sqrt{[\dot{x}(0)]^2 + 2 \frac{F_0}{m} x(0)} ,$$

y desplazamiento máximo con respecto al punto de equilibrio

$$\pm \left[ \frac{m [\dot{x}(0)]^2}{2 F_0} + x(0) \right] .$$

Como en el caso del oscilador armónico, la amplitud del movimiento depende de las condiciones iniciales; ahora bien, la diferencia crucial en este sistema reside en que la periodicidad o frecuencia del mismo *también* depende de las condiciones iniciales mientras en el oscilador armónico *no*. Resulta por otra parte inmediato comprobar que una combinación lineal de dos soluciones no constituye una solución, el sistema considerado en este apartado es un *oscilador no lineal*. La figura 18 ilustra dos trayectorias con  $x(0)$  común y  $\dot{x}(0)$  diferente. Es inmediato observar que tienen distinta periodicidad, conforme hemos analizado.

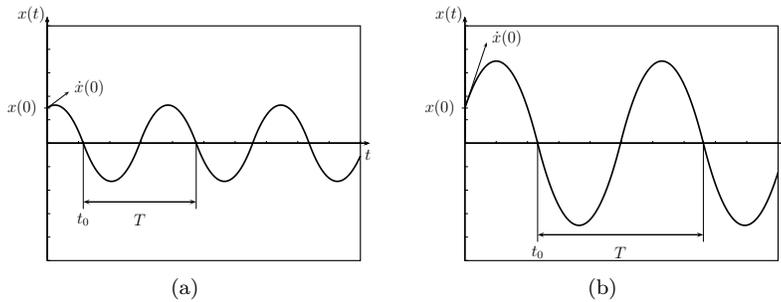


Figura 18: Oscilador no lineal, ejemplos de trayectorias.

<sup>8</sup>Nuestro primer paso tan solo ha servido para obtener la velocidad con que se cruza la posición de equilibrio por primera vez, se puede simplificar el desarrollo anterior considerando directamente unas condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) \neq 0$ .

## 9. Animaciones

A continuación la lista de animaciones que ilustran distintos aspectos de los apartados anteriores.

- `T01_Oscilador_Armonico.avi`: oscilador mecánico de la figura 1, la trayectoria  $x(t)$  (ver ec. (5)) es el *movimiento armónico simple*.
- `T01_Oscilador_Amortiguado.avi`: oscilador mecánico de la figura 1 con amortiguamiento  $\Gamma < \omega_0$ , trayectoria en ec. (18).
- `T01_Oscilador_Sobreamortiguado.avi`: oscilador mecánico de la figura 1 con amortiguamiento  $\Gamma > \omega_0$ , trayectoria en ec. (20).
- `T01_Oscilador_Amortiguado_Critico.avi`: oscilador mecánico de la figura 1 con amortiguamiento  $\Gamma = \omega_0$ , trayectoria en ec. (22).
- El siguiente grupo de animaciones ilustra los resultados y las figuras de Lissajous vistas en el apartado 3
  - `T01_Lissajous_01.avi`: frecuencia única,  $A = B$ ,  $\delta = 0$ .
  - `T01_Lissajous_02.avi`: frecuencia única,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/6$ .
  - `T01_Lissajous_03.avi`: frecuencia única,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/3$ .
  - `T01_Lissajous_04.avi`: frecuencia única,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/2$ .
  - `T01_Lissajous_05.avi`: frecuencia única,  $A \neq B$ ,  $\delta = \pi/2$ .
  - `T01_Lissajous_06.avi`:  $3\omega_x = 2\omega_y$ ,  $A = B$ ,  $\delta = 0$ .
  - `T01_Lissajous_07.avi`:  $3\omega_x = 2\omega_y$ ,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/2$ .
  - `T01_Lissajous_08.avi`:  $5\omega_x = 4\omega_y$ ,  $A = B$ ,  $\delta = 0$ .
  - `T01_Lissajous_09.avi`:  $5\omega_x = 4\omega_y$ ,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/3$ .
  - `T01_Lissajous_10.avi`:  $\sqrt{2}\omega_x = \omega_y$ ,  $A = B$ ,  $\delta = \pi/3$ . Mientras en todas las animaciones anteriores la trayectoria es cerrada, en este ejemplo el cociente de las frecuencias es irracional y la trayectoria no es cerrada<sup>9</sup>.
- `T01_Oscilador_Armonico_EspacioFases.avi`: ejemplo de trayectoria  $\dot{x}(t)/\omega_0$  vs.  $x(t)$  en el espacio de fases, oscilador armónico simple (ec. (5) y figura 16).
- `T01_Oscilador_Amortiguado_EspacioFases.avi`: ejemplo de trayectoria  $\dot{x}(t)/\omega_0$  vs.  $x(t)$  en el espacio de fases, oscilador amortiguado (ec. (18) y figura 17(a)).
- `T01_Oscilador_Sobreamortiguado_EspacioFases.avi`: ejemplo de trayectoria  $\dot{x}(t)/\omega_0$  vs.  $x(t)$  en el espacio de fases, oscilador sobreamortiguado (ec. (20) y figura 17(b)).
- `T01_Oscilador_Amortiguado_Critico_EspacioFases.avi`: ejemplo de trayectoria  $\dot{x}(t)/\omega_0$  vs.  $x(t)$  en el espacio de fases, oscilador amortiguado crítico (ec. (22) y figura 17(c)).

---

<sup>9</sup>Cabe precisar un aspecto: a nivel numérico, con variables definidas con una precisión *finita*, no tiene sentido hablar de un cociente de frecuencias irracional; ahora bien, dada la duración de la animación `T01_Lissajous_10.avi` semejante efecto es inobservable.

**Claves del tema**

- Ecuación de movimiento de un oscilador libre, ecuaciones (3) y (4), soluciones armónicas ec. (5), ec. (6).
- “Principio” de superposición: cualquier combinación *lineal* de soluciones *es solución*.
- Generalidad del planteamiento (apartado 2).
- Ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado libre, ec. (16), y los distintos tipos de solución, ecuaciones (18) y (19), ecuaciones (20) y (21), y ecuación (22).
- Energía del oscilador (apartado 5).