

Leyes de Kepler, ley de gravitación

7.1 a) $6,67 \times 10^{-9}$ N, b) $1,7 \times 10^{-3}$ N, c) 3×10^{-2} N.

7.2 Ver Teoría

7.3 $\vec{F} = \frac{4Gmm_1}{d^2} \vec{u} = 1,67 \times 10^{-6} \vec{u}$ N con $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ vector unitario en dirección de m_1 a m_3 .

7.4 Ver Teoría


7.5 $d_{\text{Venus-Sol}} = 1,08 \times 10^8$ km, $T_{\text{Neptuno-Sol}} = 165,1$ años.

7.6 Tercera ley de Kepler $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_J} \Rightarrow$ calculamos $C = \left(\frac{T}{1 \text{ día}}\right)^2 \left(\frac{10^6 \text{ km}}{R}\right)^3$ y comprobamos que $C \simeq 41.8$ para las cuatro lunas. Además, $M_J = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \simeq 1,9 \times 10^{27}$ kg.

	R (km)	T (días)	C
Io	$4,22 \times 10^5$	1,77	41,7
Europa	$6,71 \times 10^5$	3,55	41,7
Ganímedes	$1,07 \times 10^6$	7,16	41,8
Calisto	$1,88 \times 10^6$	16,69	41,9

7.7 $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$

Campo gravitatorio

7.8 $\vec{F} = -\frac{GMm}{d(d+L)} \vec{i}$ con \vec{i} unitario en dirección del centro de la esfera hacia la varilla. 

7.9 Origen de coordenadas en el centro del anillo; segmento de anillo en el plano $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ empezando en $R\vec{i}$ y dispuesto en sentido antihorario (por ejemplo, para un cuarto de anillo el otro extremo está en $R\vec{j}$), punto en el que se calcula el campo $z\vec{k}$.

a,b) 1/4 de anillo: $\vec{g}(z) = \frac{Gm}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left(\frac{2R}{\pi}(\vec{i} + \vec{j}) - z\vec{k}\right) = (1, 21\vec{i} + 1, 21\vec{j} - 7, 61\vec{k}) \times 10^{-10}$ m/s²;

1/2 anillo: $\vec{g}(z) = \frac{Gm}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left(\frac{2R}{\pi}\vec{j} - z\vec{k}\right) = (1, 21\vec{i} - 7, 61\vec{k}) \times 10^{-10}$ m/s²;

3/4 de anillo: $\vec{g}(z) = \frac{Gm}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left(\frac{2R}{3\pi}(-\vec{i} + \vec{j}) - z\vec{k}\right) = (-0, 4\vec{i} + 0, 4\vec{j} - 7, 61\vec{k}) \times 10^{-10}$ m/s².

7.10 a) Con las mismas coordenadas que en el ejercicio anterior, $\vec{g}(z) = \frac{Gm}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left(\frac{2R}{\pi}\vec{j} - z\vec{k}\right)$.

b) Situando una masa M en $z\vec{k}$, la fuerza ejercida sobre el medio anillo es $\vec{F} = -M\vec{g}(z)$, el centro de masas del medio anillo se encuentra en $\frac{2R}{\pi}\vec{j}$, el momento de inercia del medio anillo con respecto al eje E_f es $I = \frac{mR^2}{2}$, el momento de la fuerza aplicada en el centro de masas con respecto al eje E_f es $\vec{M} = \frac{2R}{\pi} \frac{GmM}{(R^2+z^2)^{3/2}} z\vec{i}$ y por tanto la aceleración angular $\vec{\alpha} = \vec{M}/I = \frac{4}{\pi} \frac{GmM}{(R^2+z^2)^{3/2}} \frac{z}{R} \vec{i}$. c) $|\vec{F}| = 4,03 \times 10^{-11}$ N, $|\vec{\alpha}| = 8,06 \times 10^{-9}$ s⁻².

7.11 Ver Teoría

7.12 Ver Teoría

Energía potencial gravitatoria, órbitas

7.13 Ver Teoría

7.14 Ver Teoría

7.15 $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2GM_T h}{R_T(R_T+h)}} = 1385$ m/s

7.16 $|\vec{v}| = \sqrt{3} \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 19,34$ km/s

7.17 $\sqrt{2}$

7.18 Ver Teoría

7.19 $|\vec{v}_1| = \sqrt{\frac{2Gm_2^2}{r(m_1+m_2)}}$, $|\vec{v}_2| = \sqrt{\frac{2Gm_1^2}{r(m_1+m_2)}}$

7.20 a) Masa de la Tierra $M(R) = \frac{11}{20} \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 = 5,98 \times 10^{24}$ kg, siendo $M(r) = \int_0^r dx 4\pi x^2 \rho(x) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \left(1 - \frac{9r^2}{20R^2}\right)$. b) Para $r \leq R$, campo gravitatorio $\vec{g}(r) = -GM(r) \frac{\vec{r}}{r^3}$, $|\vec{g}(r)|/|\vec{g}(R)| = \frac{20}{11} \frac{r}{R} \left(1 - \frac{9r^2}{20R^2}\right)$, $|\vec{g}(R/2)|/|\vec{g}(R)| = \frac{10}{11} \left(1 - \frac{9}{80}\right) \simeq 0,807$.

7.21 a) $f \leq 1/\sqrt{2}$. b) acercamiento mínimo $R_T + h$, acercamiento máximo $\frac{R_T+h}{2f^2-1}$, periodo $2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}} \left(\frac{f^2}{2f^2-1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

7.22 El fragmento 1 es el de velocidad $2f\vec{v}$. a) Si $f \geq 1/\sqrt{2}$, el fragmento 1 escapa de la órbita terrestre; si $f \leq 1 - 1/\sqrt{2}$, es el fragmento 2 el que escapa. b,c) Porque “velocidad $\vec{v} \perp$ posición \vec{r} ” \Leftrightarrow extremo de $|\vec{r}|$. Para el fragmento 1: si $f > 1/2$, perigeo $R_T + h$ y apogeo $\frac{2f^2}{2f^2-1}(R_T + h)$; si $f < 1/2$, apogeo $R_T + h$ y perigeo $\frac{2f^2}{1-2f^2}(R_T + h)$. Periodo de la órbita del fragmento 1: $T_1 = \pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{2GM_T(1-2f^2)^3}}$. d) Fragmento 1 se estrella si $(R_T + h)\frac{2f^2}{1-2f^2} < R_T \Leftrightarrow f > \frac{1}{\sqrt{4+2\frac{h}{R_T}}}$. Para el fragmento 2, basta aplicar $f \mapsto 1 - f$ a los resultados del fragmento 1. No se estrella ningún fragmento si $1 - \frac{1}{\sqrt{4+2\frac{h}{R_T}}} > f > \frac{1}{\sqrt{4+2\frac{h}{R_T}}}$. Para $f = 1/2$, como si el satélite no se hubiera separado, los dos fragmentos siguen la misma órbita circular.

7.23 a) $\vec{v}_1 = v\left(\frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} + \vec{j}\right)$, $\vec{v}_2 = v\left(-\frac{\vec{i}}{\sqrt{3}} + \vec{j}\right)$. b) $E_{\text{Mec},1} = E_{\text{Mec},2} = -\frac{GM_T m}{6r} < 0$. c) Ambos fragmentos tienen el mismo momento angular $\vec{L} = \frac{mrv}{2}\vec{k}$. d) Vectores de Runge-Lenz $\vec{A}_1 = \frac{GM_T m}{2\sqrt{3}}\vec{j}$, $\vec{A}_2 = -\frac{GM_T m}{2\sqrt{3}}\vec{j}$. e) $r_{\min} = (R_T + h)\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$, $r_{\max} = (R_T + h)\frac{3+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$. Distancias mínima y máxima con respecto a superficie $h_{\min} = r_{\min} - R_T$, $h_{\max} = r_{\max} - R_T$. Órbita del fragmento 1, perigeo en $-r_{\min}\vec{j}$, apogeo en $r_{\max}\vec{j}$; órbita del fragmento 2, perigeo en $r_{\min}\vec{j}$, apogeo en $-r_{\max}\vec{j}$.

7.24 Solución tras el fin del plazo de entrega

7.25 $M = 7,45 \times 10^{36} \text{ kg} = 3,76 \times 10^6 M_{\text{Sol}}$

7.26 $T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G(m_1+m_2)}}$

7.27 a) $r_p v_p = r_a v_a$. b) $E = -\frac{GmM}{r_a+r_p} = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_a v_p \simeq -\frac{1}{2}mv_a v_p$.

7.28 a) $T = 2\pi r^{3/2}/\sqrt{G(M + \frac{m}{4})}$. b) $M \gg m$ “como si únicamente hubiera una masa m ”, $M \ll m$, órbita relativa de radio $2r$ y masa reducida $\frac{m}{2}$.

7.29 a) $M(r) = \int_0^r dx 4\pi x^2 \rho(x)$: para $r \leq r_0$, $M(r) = \frac{4\pi\rho_0}{a+3}r^3 \left(\frac{r}{r_0}\right)^a$; para $r > r_0$,

$M(r) = M(r_0) = \frac{4\pi\rho_0}{a+3}r_0^3$. b) $v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$: para $r \leq r_0$, $v(r) = \sqrt{\frac{4\pi\rho_0 G}{a+3}}r \left(\frac{r}{r_0}\right)^{a/2}$; para $r > r_0$,

$v(r) = \sqrt{\frac{4\pi\rho_0 G r_0^3}{a+3}}\frac{1}{\sqrt{r}}$. c) $v(r) \propto 1/\sqrt{r}$ decreciente para $r > r_0$. Para $r \leq r_0$, $\frac{d}{dr}v(r) = \left(1 + \frac{a}{2}\right)\frac{v(r)}{r} > 0$, $v(r)$ creciente para $a > -2$; en particular, para $a = 0$, $v(r) \propto r$ y para $a = -1$, $v(r) \propto \sqrt{r}$. d) Comportamiento para $r > r_0$ coincide con la curva A, no con la curva observada B. La existencia de *materia oscura* con su correspondiente distribución de masa da una segunda contribución a $M(r)$ y modifica $v(r)$. Por ejemplo, una segunda contribución $\propto (r/r_0)^{-2}$ daría $v(r)$ constante.

7.30 Lanzamiento con velocidad v en la misma dirección y sentido que la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, $v > \sqrt{2G\left(\frac{M_S}{d_{ST}} + \frac{M_T}{R_T}\right) - \sqrt{\frac{GM_S}{d_{ST}}}} \simeq 13,77 \text{ km/s}$ con M_S , M_T las masas de Sol y Tierra, y d_{ST} la distancia Sol-Tierra.

7.31 a) $\frac{|\vec{F}_{S-U}|}{|\vec{F}_{U-N}|} = \left(1 - \frac{d_N}{d_U}\right)^2 \frac{M_S}{M_N}$ siendo M_S , M_N , las masas de Sol y Neptuno, d_N , d_U las distancias Sol-Neptuno, Sol-Urano. b) $\frac{|\vec{F}_{S-U}|}{|\vec{F}_{U-N}|} = 6220$.

7.32 Aceleración media $\bar{g} = \frac{GM_P}{d^2}$, variación $\delta g = \frac{GM_P}{d^2} \frac{R_{\text{Tx}}}{d}$; valores en m/s^2

	\bar{g}	δg
Mercurio (☿)	$6,5 \times 10^{-9}$	$7,8 \times 10^{-11}$
Tierra (⊕)	$1,8 \times 10^{-8}$	$8,2 \times 10^{-11}$
Júpiter (♃)	$2,1 \times 10^{-7}$	$1,9 \times 10^{-10}$

Aunque las \bar{g} 's sean dispares, las variaciones δg son muy similares.

7.33

a) $\vec{V}_{P,i} = -\frac{m_S}{m_P}\vec{V}_{S,i}$ y $\vec{V}_{P,f} = -\frac{m_S}{m_P}\vec{V}_{S,f}$. b) Colisión elástica, $|\vec{V}_{S,i}| = |\vec{V}_{S,f}| = V_{S,i}$,

$$|\vec{V}_{P,i}| = |\vec{V}_{P,f}| = \frac{m_S}{m_P}V_{S,i}.$$

$$c) E_{c,S,i} = \frac{1}{2}m_S (V_{S,i}^2 + |\vec{v}_{CM}|^2 + 2V_{S,i}|\vec{v}_{CM}|\cos\alpha); E_{c,S,f} = \frac{1}{2}m_S (V_{S,i}^2 + |\vec{v}_{CM}|^2 + 2V_{S,i}|\vec{v}_{CM}|\cos(\theta - \alpha));$$

$$E_{c,P,i} = \frac{1}{2}m_P (|\vec{V}_{P,i}|^2 + |\vec{v}_{CM}|^2 - 2|\vec{V}_{P,i}||\vec{v}_{CM}|\cos\alpha); E_{c,P,f} = \frac{1}{2}m_P (|\vec{V}_{P,i}|^2 + |\vec{v}_{CM}|^2 - 2|\vec{V}_{P,i}||\vec{v}_{CM}|\cos(\theta - \alpha)).$$

$$d) E_{c,S,f} - E_{c,S,i} = m_S V_{S,i}|\vec{v}_{CM}|(\cos(\theta - \alpha) - \cos\alpha),$$

$$E_{c,P,f} - E_{c,P,i} = -m_P |\vec{V}_{P,i}||\vec{v}_{CM}|(\cos(\theta - \alpha) - \cos\alpha) = -(E_{c,S,f} - E_{c,S,i}).$$

Mayor ganancia de energía cinética para $\alpha = \theta = \pi$.

$$e) \text{ Con } E_c = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \text{ inicial, gracias al impulsor tenemos } \vec{p} \mapsto \vec{p} + \Delta\vec{I} \text{ y entonces } E_c \mapsto \frac{|\vec{p}|^2 + 2\vec{p}\cdot\Delta\vec{I} + |\Delta\vec{I}|^2}{2m} \text{ y la ganancia de energía cinética } \frac{2\vec{p}\cdot\Delta\vec{I} + |\Delta\vec{I}|^2}{2m} \text{ será mayor cuanto mayor sea } \vec{p}.$$