

**Cinemática. Velocidad angular.**

**6.1** Ver Teoría.

**6.2** Para  $t \in [0; t_1]$ ,  $\theta(t) = \frac{\omega_1 t^2}{2t_1}$ ; para  $t \in [t_1; t_2]$ ,  $\theta(t) = \omega_1(t - t_1/2)$ ; para  $t \in [t_2; t_3]$ ,  
 $\theta(t) = \omega_1 \left( t - \frac{t_1}{2} - \frac{(t-t_2)^2}{2(t_3-t_2)} \right)$ .  $t_2 - t_1 = \frac{29}{6}$  min,  $t_3 = \frac{95}{6}$  min.

**6.3** Ver Teoría.

**6.4** a)  $\vec{r}_4 = (3, 3, 1)$  m,  $m_4 = 2$  kg,  $\vec{v}_4 = (0, 1, -4)$  m/s. b)  $\vec{\omega} = (-1, 2, -1)$  s<sup>-1</sup>.

**6.5** a)  $\vec{\omega} = (1, 1, 1)$  s<sup>-1</sup>. b)  $\vec{\omega} = (0, 1, 0)$  s<sup>-1</sup>. c)  $\vec{\omega} = (\rho, 1, 1)$  s<sup>-1</sup> con  $\rho$  arbitrario.

**6.6**  $\vec{\omega} = (1, 1, 1)$  s<sup>-1</sup>.

**Momento de fuerzas**

**6.7** a)  $d/\sqrt{2}$ . b) 12/5 cm. c)  $5/\sqrt{2} \simeq 3,54$  cm y  $\sqrt{5/2} \simeq 1,58$  cm.

**6.8** Ver Teoría.

**6.9** a)  $\frac{d^3}{2}(\vec{i} - \vec{j})$  N m. b)  $d^3(\vec{i} - \vec{j})$  N m. c)  $\frac{d^3}{2}(\vec{i} - \vec{j})$  N m. d)  $-\frac{d^3}{2}(\vec{i} - \vec{j})$  N m.

**6.10**  $\vec{i}$  horizontal en dirección de la bola fija al extremo más alejado,  $\vec{k}$  vertical,  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  base ortonormal directa.

$\vec{M}_{\text{Tot}} = 33mgd\vec{j}$ .

**Momento de inercia**

**6.11** a)  $(m_1 + m_3)L^2 = 28$  kg m<sup>2</sup>. b)  $(m_3 + m_4)L^2 = 28$  kg m<sup>2</sup>. c)  $(m_1 + 2m_3 + m_4)L^2 = 56$  kg m<sup>2</sup>. d)  $(m_1 + m_2/3)L^2 = 17,33$  kg m<sup>2</sup>.

**6.12** Ver Teoría.

**6.13** Ver Teoría.

**6.14** Ver Teoría.

**6.15** a)  $\frac{1}{3}ML^2$ . b)  $\frac{1}{12}ML^2$ .

**6.16** a)  $\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ . b)  $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$ . c)  $\frac{1}{3}Ma^2$ .

**6.17** a)  $MR^2$ . b)  $\frac{1}{2}MR^2$ .

**6.18** a)  $\frac{1}{2}MR^2$ . b)  $\frac{1}{4}MR^2$ .

**6.19** a)  $\frac{2}{3}MR^2$ . b)  $\frac{2}{5}MR^2$ .

**6.20** a)  $I(\theta) = (\frac{2}{5}M_T + m \cos^2 \theta) R_T^2$ ,  $I(\theta_1) - I(\theta_2) = mR_T^2(\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2)$ . b)  $I(\theta) \simeq \frac{2}{5}M_T R_T^2 = 4,9 \times 10^{37}$  kg m<sup>2</sup>; entre Venezuela ( $\theta_2 = 10^\circ$  N) y Holanda ( $\theta_1 = 53^\circ$  N),  $I(\theta_1) - I(\theta_2) = -1,1 \times 10^{22}$  kg m<sup>2</sup>.

**Dinámica de rotación del sólido rígido**

**6.21** Ver Teoría.

**6.22** Ver Teoría.

**6.23** Ver Teoría.

**6.24** Ver Teoría.



**6.25** Ver Teoría.

**6.26** Origen  $O$ , base ortonormal directa con  $\vec{i}$  horizontal hacia la derecha,  $\vec{j}$  vertical hacia arriba.


a)  $m = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{2}M$ . b)  $\vec{F} = Mg \left( \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\vec{j} \right)$ . c)  $\vec{\alpha} = \frac{g}{L} \frac{m}{M} \frac{8\sqrt{2}}{7}\vec{k}$ . d)  $\vec{\alpha} = -\frac{12}{7} \frac{g}{L}\vec{k}$ ,  $\vec{F} = Mg \left( -\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{4}{7}\vec{j} \right)$ ,

$\vec{v} = -\sqrt{gL \frac{27\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{28}}\vec{i}$ . e) a)  $m = 737$  g, b)  $\vec{F} = 6,3\vec{i} + 13,3\vec{j}$  N, c)  $\vec{\alpha} = 29,2\vec{k}$  s<sup>-2</sup>, d)  $\vec{\alpha} = -42\vec{k}$  s<sup>-2</sup>,


$\vec{F} = -4,2\vec{i} + 5,6\vec{j}$  N,  $\vec{v} = -1,49\vec{i}$  m/s.


**6.27**    $\theta$  es el ángulo que forma el radio que llega a  $m_1$  con un radio horizontal hacia la derecha del centro del disco. Base ortonormal directa con  $\vec{i}$  horizontal hacia la derecha,  $\vec{j}$  vertical.


a)  $\tan \theta = -\frac{m_1}{m_2}$ . b)  $\vec{\alpha} = -\frac{g}{R} \frac{m_1 \cos \theta}{m_1 + M/2} \vec{k}$ . c)  $\vec{F} = (m_1 + M)g\vec{j} + g \frac{m_1^2 \cos \theta}{m_1 + M/2} (\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$ . d) Equilibrio  $\theta = -\pi/4$  (masas “abajo”),  $\theta = 3\pi/4$  (masas “arriba”),  $\vec{F} = 14,7\vec{j}$  N. Se despeja  $m_2$ :  $\vec{\alpha} = -23,1\vec{k} \text{ s}^{-2}$ ,  $\vec{F} = -0,41\vec{i} + 11,85\vec{j}$  N.


**6.28**  a)  $\alpha = \frac{2F}{MR} = 1,96 \text{ s}^{-2}$ . b)  $\alpha = \frac{2g}{3R} = 13,07 \text{ s}^{-2}$ .


### Teorema Trabajo-Energía cinética. Energía mecánica.



**6.29**   $\omega = \sqrt{\frac{4gh}{3R^2}} = 14,47 \text{ s}^{-1}$ ,  $v = \omega R = 3,62 \text{ m/s}$ .

**6.30**   $M_c$  masa del borde circular,  $M_r$  masa de un radio.  
a)  $\frac{1}{2} (M_c + \frac{4}{3}M_r) (\omega R)^2 = 0,092 \text{ J}$ . b)  $\frac{1}{2} (2M_c + \frac{13}{3}M_r) (\omega R)^2 = 0,224 \text{ J}$ .

**6.31**  a)  $\vec{\alpha} = \frac{g}{2d} \vec{k}$ . b)  $E_c = 4mgd(1 + \sqrt{2})$ . c)  $\vec{\alpha} = 49\vec{k} \text{ s}^{-2}$ ,  $E_c = 0,20 \text{ J}$ .

**6.32**   $\vec{i}$  en la dirección del plano inclinado hacia abajo,  $\vec{j}$  perpendicular al plano inclinado hacia arriba. a)  $\vec{a}_2 = g \sin \theta \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \vec{i}$ . b)  $T = m_2 g \sin \theta \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}$ . c)  $\vec{v} = \sqrt{2gL \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}} \vec{i}$ . d)  $\theta = 0$  equilibrio;  $\theta = 90^\circ$  como masa colgada de una polea, ver Teoría;  $m_1 = 0$ ,  $m_2$  desliza por plano inclinado como si no hubiera cilindro:  $T = 0$ ,  $\vec{a}_2 = g \sin \theta \vec{i}$ .

**6.33**  a)  $h = \frac{2r}{r} (R - r)$ . b) Ni el disco ni el anillo completarían el bucle.

**6.34**   a)  $m = \frac{3kR}{4g}$ . b)  $\vec{\alpha} = \frac{3k}{2M} \vec{k}$ . c)  $\sqrt{\frac{2k}{M} (2\sqrt{2} - \frac{3}{2})}$ . d)  $m = 765 \text{ g}$ ,  $\vec{\alpha} = 150\vec{k} \text{ s}^{-2}$ ,  $\omega = 20,39 \text{ s}^{-1}$ .



### Objetos rodantes.

**6.35**  Ver Teoría.



**6.36**  Ver Teoría.

**6.37**  Ver Teoría.



**6.38**  Ver Teoría.

**6.39**   Origen de coordenadas en el punto de contacto disco-plano inclinado, base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  con  $\vec{i}$  horizontal hacia la derecha,  $\vec{j}$  vertical hacia arriba.

a)  $\sin \theta = \frac{R}{d} \frac{m+M}{m} \sin \alpha$ ,  $\theta = 31,5^\circ$ . b)  $m > M \frac{R \sin \alpha}{d \sin \theta - R \sin \alpha} \simeq 1,366M$ . c) Con  $x$  el ángulo girado ( $x > 0$  antihorario rueda “hacia arriba”),  $\Delta U(x) = MgR \left( 2x + \frac{3}{2}(\cos x - 1) - \frac{3\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$ ; pendiente negativa en  $x = 0$ , rueda “hacia arriba” hacia posición de equilibrio. d) Con  $x$  el ángulo girado ( $x > 0$  antihorario rueda “hacia arriba”),  $\Delta U(x) = MgR \left( 2x + \frac{3\sqrt{3}}{2}(\cos x - 1) + \frac{3}{2} \sin x \right)$ ; pendiente positiva en  $x = 0$ , rueda hacia abajo (no hay posición de equilibrio).

**6.40**   Origen de coordenadas en el punto de contacto disco-plano, base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  con  $\vec{i}$  horizontal hacia la derecha,  $\vec{j}$  vertical hacia arriba.


a)  $\vec{r}_{CM} = R\vec{j} + \frac{4}{3\pi} \frac{M}{M+m} R\vec{i}$ . b)  $(2m + \frac{3}{2}M) R^2$ . c)  $\vec{a}_{CM} = g \frac{4}{3\pi} \frac{M}{2m + \frac{3}{2}M} \vec{i} - g \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \frac{M^2}{(m+M)(2m + \frac{3}{2}M)} \vec{j}$ ,  
 $\vec{\alpha} = -\frac{4}{3\pi} \frac{g}{R} \frac{M(M+m)}{2m + \frac{3}{2}M} \vec{k}$ ,  $\vec{F}_N = \left( (m+M)g - g \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2 \frac{M^2}{2m + \frac{3}{2}M} \right) \vec{j}$ ,  $\vec{f}_r = \frac{4}{3\pi} g \frac{M(M+m)}{2m + \frac{3}{2}M} \vec{i}$ . d) Mayor velocidad angular cuando, con respecto al centro del anillo, el conjunto haya rodado  $\pi/2$  en sentido horario y el centro de masas se encuentra en la posición más baja posible.  $\vec{v}_{CM} = \sqrt{gR} \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right) \frac{4}{\sqrt{9\pi - 16 + 12\pi \frac{m}{M}}} \vec{i}$ . e) Equilibrio  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,  $\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ ,  $\vec{f}_r = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_N = mg\vec{j}$ . f) c)  $\vec{\alpha} = -16,65\vec{k} \text{ s}^{-2}$ ,  $\vec{a}_{CM} = (1,66\vec{i} - 1,41\vec{j}) \text{ m/s}^2$ ,  $\vec{f}_r = 2,50\vec{i} \text{ N}$ ,  $\vec{F}_N = 14,01\vec{j} \text{ N}$ , d)  $\vec{v}_{CM} = 0,51\vec{i} \text{ m/s}$ .


**6.41**   Origen de coordenadas en el punto de contacto disco-plano, base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  con  $\vec{i}$  horizontal hacia la derecha,  $\vec{j}$  vertical hacia arriba.


a)  $\vec{r}_{CM} = R\vec{j} + \frac{md}{m+M} (\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$ . b)  $I = \frac{3}{2}MR^2 + m(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta)$ . c)  $\vec{a}_{CM} = \frac{mgd \sin \theta}{I(m+M)} \left[ (R(m+M) - md \cos \theta) \vec{i} - md \sin \theta \vec{j} \right]$ ,  $\vec{\alpha} = -\frac{mgd \sin \theta}{I} \vec{k}$ ,  $\vec{F}_N = \left( (m+M)g - g \frac{(md \sin \theta)^2}{I} \right) \vec{j}$ ,  $\vec{f}_r = \frac{mgd \sin \theta}{I} (R(m+M) - md \cos \theta) \vec{i}$ . d)  $\theta = \pi$  equilibrio con  $\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,  $\vec{f}_r = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_N = (m+M)g\vec{j}$ ;  $d = 0$  equilibrio con  $\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,  $\vec{f}_r = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_N = (m+M)g\vec{j}$ ;  $m = 0$  equilibrio con  $\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ,  $\vec{f}_r = \vec{0}$ ,  $\vec{F}_N = Mg\vec{j}$ . e)  $I = 0,018 \text{ kg m}^2$ ,  $\vec{a}_{CM} = (0,86\vec{i} - 0,11\vec{j}) \text{ m/s}^2$ ,  $\vec{\alpha} = -8,59\vec{k} \text{ s}^{-2}$ ,  $\vec{F}_N = 11,6\vec{j} \text{ N}$ ,  $\vec{f}_r = 1,03\vec{i} \text{ N}$ .


**Momento angular**

**6.42**  Ver Teoría.


**6.43**  a)  $-4mvd\vec{j}$ . b)  $\vec{0}$ . c)  $2mvd\vec{j}$ .


**6.44**  Trayectoria:  $\vec{a}(t) = \vec{g}$ ,  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ ,  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$  con  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ . Momento angular con respecto al origen  $\vec{L}(t) = \vec{r}(t) \times m\vec{v}(t) = \frac{1}{2}mt^2\vec{v}_0 \times \vec{g}$ . Con  $\vec{g} = -g\vec{j}$ ,  $\vec{v}_0 = v_0(\cos\theta_0\vec{i} + \sin\theta_0\vec{j})$ ,  $\vec{v}_0 \times \vec{g} = -gv_0 \cos\theta_0\vec{k} \Rightarrow \vec{L}(t) = -\frac{mgv_0 \cos\theta_0}{2}t^2\vec{k}$ . a)  $\vec{L}(0) = \vec{0}$ . b) Altura máxima para  $t_1 = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$ ,  $\vec{L}(t_1) = -\frac{mv_0^3 \cos\theta_0 \sin^2\theta_0}{2g}\vec{k}$ . c) Máximo alcance  $t_2 = 2t_1$ ,  $\vec{L}(t_2) = 4\vec{L}(t_1)$ . d) El momento del peso  $m\vec{g}$  en  $\vec{r}(t)$  es  $\vec{M}(t) = (\vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2) \times m\vec{g} = mt\vec{v}_0 \times \vec{g}$ , y podemos verificar que  $\frac{d}{dt}\vec{L}(t) = mt\vec{v}_0 \times \vec{g} = \vec{M}(t)$ .

**6.45**   $|\vec{\omega}| = \frac{v_0}{R} \frac{m_0}{m+M/2} = 0,0167 \text{ s}^{-1}$  ( $m_0$  es la masa lanzada).

**6.46**  a)  $\omega_f = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_1$ . b)  $E_{c,rot,i} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ ;  $E_{c,rot,f} = \frac{I_1}{I_1+I_2}E_{c,rot,i}$ .


**6.47**  Ver Teoría

**6.48**  a)  $v_{\min} = \sqrt{2gL} \sqrt{(2 + \frac{M}{m})(1 + \frac{M}{3m})}$ . b) 8,83 J.

**6.49**  a)  $|\vec{\omega}| = \frac{v}{\ell} \frac{6m}{4m+M}$ . b) Energía cinética antes de la colisión  $\frac{1}{2}mv^2$ , después de la colisión  $\frac{1}{2}mv^2 \frac{4m}{4m+M}$ .

c)  $v_{\min} = \sqrt{\frac{g\ell}{6} \frac{4m+M}{m}}$ . d)  $|\vec{\omega}| = 8,09 \text{ s}^{-1}$ ;  $\frac{4m}{4m+M} = 0,4$ ;  $v_{\min} = 12,13 \text{ m/s}$ .

**6.50**  Solución tras el fin del plazo de entrega

**6.51**  a) Deshielo  $\Rightarrow$  cambio del momento de inercia  $I$  con respecto al eje de rotación,  $I \mapsto I' > I$ , conservación del momento angular (Tierra aislada)  $\vec{L} = I\vec{\omega} = I'\vec{\omega}' \Rightarrow \vec{\omega}' = \frac{I}{I'}\vec{\omega}$ ,  $|\vec{\omega}'| < |\vec{\omega}|$ , la rotación se ralentiza, periodo  $T \mapsto T' = \frac{I'}{I}$ . b)  $I = I_T + I_h$  con  $I_h$  el momento de inercia del hielo con respecto al eje de rotación,  $I_T$  el resto del momento de inercia de la Tierra;  $I' = I_T + I'_h$  con  $I'_h$  el momento de inercia del agua del deshielo. Para  $I_h$  consideramos un cilindro de radio  $r$ , altura  $h = 3 \text{ km}$  y masa  $m = 2,1 \times 10^{19} \text{ kg}$  con densidad  $\rho = 917 \text{ kg/m}^3$ . Para  $I'_h$  consideramos una corona esférica de radio  $R_T$  (como el espesor de la misma es despreciable con respecto a  $R_T$  podemos describirla directamente como una superficie esférica de masa  $m$ ). Con  $I_h = \frac{1}{2}mr^2$  y  $m = \pi r^2 h \rho$ ,  $I_h = \frac{m^2}{2\rho\pi h}$ ;  $I'_h = \frac{2}{3}mR_T^2$ ; para  $I_T$  consideramos una Tierra esférica homogénea,  $I_T = \frac{2}{5}M_T R_T^2$ . Con todo ello,  $\frac{I'}{I} = \frac{1 + \frac{5m}{3M_T}}{1 + \frac{5m^2}{4\pi\rho h R_T^2 M_T}} \simeq 1 + 5,6 \times 10^{-6}$ , el periodo es  $T' = T + 0,5\text{s}$  (el día se alargaría medio segundo).