<u>**Centro de masas**</u>

5.1 ✎ Con el centro del cubo en $\frac{L}{2}(1,1,1)$ y los vértices de la cara ausente en $L(0,1,0)$, $L(1,1,0)$, $L(0,1,1)$, $L(1,1,1)$, $\vec{r}_{\rm CM} = L(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2})$.

5.2 ✎✎ Ángulos entre los oxígenos O y el nitrógeno N suman 180° $\Rightarrow$ están en un mismo plano. Origen de coordenadas en el nitrógeno N, $\vec{i}$ en dirección de N al O que se encuentra a 140,6 pm, $\vec{j}$ perpendicular a $\vec{i}$ en dirección entre el oxígeno anterior y el que se encuentra a 121,1 pm de N.
a) $12,693\vec{i} + 2,020\vec{j}$ pm. b) $12,693\vec{i} - 0,180\vec{j} + 2,199\vec{k}$ pm.

5.3 ✎✎ CM en $(0, \frac{3}{4}b)$.

5.4 ✎✎ CM en $(\frac{7}{6}R, 0)$.

5.5 ✎✎ a) Anillo semicircular en $R(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$ con $\theta \in [0;\pi]$: $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{2R}{\pi}\vec{j}$.
b) Medio disco homogéneo $r(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$ con $r \in [0;R]$, $\theta \in [0;\pi]$: $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{4R}{3\pi}\vec{j}$.
c) Triángulo con vértices $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,b)$: $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{a}{3}\vec{i} + \frac{b}{3}\vec{j}$.

5.6 ✎✎ $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + m\vec{r}_3}{3m} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \frac{1}{3}(\vec{r}_3 - \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}) \Rightarrow$ en la mediana que va del medio del lado 1-2 al vértice 3, a 1/3 de la distancia, análogamente permutando $(123) \mapsto (231), (312)$ para ver que se encuentra en la intersección de las medianas.

5.7 ✎✎ Ver Teoría.

5.8 ✎✎✎ Cálculo explícito.

5.9 ✎✎✎ a) $M = L\left(A - \frac{BL}{2}\right)$; si $M \geq 0$, $A \geq \frac{BL}{2}$. b) Condición más restrictiva: densidad lineal de masa positiva o nula; implica $A \geq BL$. c) $x_{\rm CM} = \frac{L}{2}\frac{A - 2BL/3}{A - BL/2} = \frac{L}{2}\left(1 - \frac{BL/6}{A - BL/2}\right)$.

5.10 ✎✎✎ a) $\frac{x^2+h^2}{2(x+h)}$. b) $x = h(\sqrt{2} - 1)$. c) Idénticos.

<u>**Momento lineal, aceleración y conservación de la energía mecánica de un sistema.**</u>

5.11 ✎ Sistema aislado, se juntarán en el CM, a distancia $d\frac{m_2}{m_1+m_2} \simeq 6,1$ m de m_1.

5.12 ✎ Ver Teoría.

5.13 ✎ Masa de la persona m, masa de la Tierra M_T, altura $h = 15$ m.
Retroceso de la Tierra $-\frac{m}{m+M_T}h \simeq 8 \times 10^{-22}$ m (e.g. radio de un protón $\sim 10^{-15}$ m).

5.14 ✎ Ver Teoría.

5.15 ✎ Ver Teoría.

5.16 ✎ 347 N.

5.17 ✎✎ Masa de la caja m_c, masa de Pedro, también masa de David, M_P, masa del bote m_b.
Desplazamiento del bote $\frac{m_c}{M_P+M_P+m_b+m_c}d$, coincide con el resultado de 5.***6***, ya que la masa de la caja en este ejercicio es precisamente la diferencia de masas entre las personas en aquel ejercicio.

5.18 ✎✎ $d' = 13,6$ m.

5.19 ✎✎ a) $\vec{v}_2 = -\frac{u}{3}\vec{j}$. b) $\vec{v}_1^{\rm lab} = v\vec{i} + u\vec{j}$, $|\vec{v}_1^{\rm lab}| = \sqrt{v^2+u^2} = 5$ m/s, $\vec{v}_2^{\rm lab} = v\vec{i} - \frac{u}{3}\vec{j}$, $|\vec{v}_2^{\rm lab}| = \sqrt{v^2 + \frac{u^2}{9}} \simeq$. c) $\cos\theta = \frac{\vec{v}_1^{\rm lab}\cdot\vec{v}_2^{\rm lab}}{|\vec{v}_1^{\rm lab}|\,|\vec{v}_2^{\rm lab}|} = \frac{13}{5\sqrt{17}}$, $\theta = 51°$.

5.20 ✎✎ a) $\frac{m}{M}v$ en dirección a la nave. b) $v_0 - \frac{m}{M}v$ en dirección de alejamiento de la nave. c) $M\frac{v_0}{v}$. d) Con dos lanzamientos de masa m alcanza velocidad $\frac{m}{M}\frac{m+2M}{m+M}v$, con un lanzamiento de masa $2m$ alcanza velocidad $2\frac{m}{M}v$, se alcanza mayor velocidad en el segundo caso. En el primer caso se ha "gastado" momento del primer lanzamiento en dar momento no solo a la astronauta, también al segundo bloque.

5.21 ✎✎ a) $\sqrt{2gh\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}}$. b) $h\frac{2m_2}{m_1+m_2}$.

5.22 ✎✎✎ Usamos $\vec{i}$ horizontal $\rightarrow$, $\vec{j}$ vertical $\uparrow$, $\vec{i}_1$ en la dirección del plano inclinado de la cuña $\searrow$, $\vec{i}_1 = \cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}$, $\vec{j}_1$ perpendicular al plano inclinado de la cuña $\nearrow$.
Relación entre aceleraciones $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + a_D\vec{i}_1$ siendo D el desplazamiento de m_1 a lo largo del plano inclinado de la

cuña, $a_D = \frac{d^2D}{dt^2}$ y $\vec{a}_2 = a_2\vec{i}$.
Fuerzas externas al sistema bloque-cuña: normal ejercida por el suelo $R\vec{j}$, peso $-(m_1+m_2)g\vec{j}$.
Movimento del centro de masas: $(m_1+m_2)\vec{a}_{\mathrm{CM}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = (R-(m_1+m_2)g)\vec{j}$, y obtenemos las dos ecuaciones $(m_1+m_2)a_2 + m_1\cos\theta\, a_D = 0$ y $R-(m_1+m_2)g = -m_1\sin\theta\, a_D$; con la primera podemos despejar $a_2 = -\frac{m_1\cos\theta}{m_1+m_2}a_D$.
Trayectorias $\vec{r}_2(t) = \frac{1}{2}a_2t^2\vec{i}$, $\vec{v}_2(t) = a_2t\,\vec{i}$, $D(t) = \frac{1}{2}a_Dt^2$, $\vec{v}_1(t) = (a_2 + a_D\cos\theta)t\vec{i} - a_D\sin\theta\, t\vec{j}$.
Se calcula ahora la energía cinética $\frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1(t)|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2(t)|^2$, expresándola en términos de a_D; la energía potencial, tomando como referencia la posición inicial, es $-\frac{1}{2}a_Dt^2m_1g\sin\theta$. Mediante la conservación de la energía mecánica, que es $E_{\mathrm{Mec}} = 0$ en el instante inicial, se despeja $a_D = g\frac{(m_1+m_2)\sin\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}$, y de ahí $a_2 = -g\frac{m_1\cos\theta\sin\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}$ y $R = m_2g\left(1+\frac{m_1\cos^2\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}\right)$.

Colisiones

5.23 ✎ $7,78\times10^8$ N.

5.24 ✎✎ $v_{\mathrm{CM}} = 5$ m/s, $v'_{1i} = 1$ m/s, $v'_{2i} = -2$ m/s, $v'_{1f} = -1$ m/s, $v'_{2f} = 2$ m/s, $v_{1f} = 4$ m/s, $v_{2f} = 7$ m/s.

5.25 ✎✎ a) Impulso mv_0, con $m = 0,8$ kg y $v_0 = 4,0$ m/s, $mv_0 = 3,2$ kg m/s. b) Si la mano frena con fuerza constante F y aceleración constante $a_0 = F/m$, entonces $t = \frac{2d}{v_0}$ y $a_0 = \frac{v_0^2}{2d}$ con $d = 8$ mm: $t = 4$ ms, $F = ma_0 = \frac{mv_0^2}{2d} = 800$ N (¡$a_0 \simeq 102g$!).

5.26 ✎✎ a) $v = \sqrt{2gh\left(1+\frac{M}{m}\right)}$. b) $h' = \frac{h}{4}\left(1+\frac{M}{m}\right)^2$, $e = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{M}{m}\right)$ ($e<0$ porque la bala atraviesa el bloque), $v_{\min} = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$. Aplicación numérica: $v = 81,2$ m/s, $h' = 5,3$ cm, $e = -0,487$, $v_{\min} = 560$ m/s.

5.27 ✎✎ a) m_1 alcanza B con velocidad $v_{1i} = \sqrt{2gh}$, tras la colisión elástica $v_{1f} = -\frac{1}{3}v_{1i}$, $v_{2f} = \frac{2}{3}v_{1i}$. b) $h' = h/9$, independiente de m_1 una vez fijado m_2/m_1. c) Si $m_2 = fm_1$, tendríamos $v_{1f} = \frac{1-f}{1+f}v_{1i}$, $v_{2f} = \frac{2}{1+f}v_{1i}$: si $|v_{1f}| > |v_{2f}|$, m_1 subirá, bajará y alcanzará a m_2 (no interesa cuantas veces, existe por ejemplo el límite trivial $m_2 \gg m_1$ con "infinitos" alcances y rebotes) $\Rightarrow f > 3$.

5.28 ✎✎ a) $v_{\mathrm{CM}} = -3.0$ m/s. b) $v'_{1i} = -2.0$ m/s, $v'_{2i} = 6.0$ m/s. c) $v'_{1f} = 2.0$ m/s, $v'_{2f} = -6.0$ m/s. d) $v_{1f} = -1.0$ m/s, $v_{2f} = -9.0$ m/s. e) $E_{Ki} = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = 42.0$ J, $E_{Kf} = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = 42.0$ J.

5.29 ✎✎ $v = 300$ m/s, $m = 25$ g, $M = 1$ kg, $k = 400$ N/M, $d = 10$ cm, $\mu_c = 0,6$.
a) $v - \sqrt{\frac{kd^2M}{m^2}} = 220$ m/s. b) Con v_{CM}, $E_{c,i}^{\mathrm{CM}} = \frac{mM}{2(m+M)}v^2$, $E_{c,f}^{\mathrm{CM}} = \frac{M(m+M)}{2m}\left(\sqrt{\frac{kd^2}{M}} - \frac{mv}{m+M}\right)^2$, energía perdida en la colisión $\Delta E_c^{\mathrm{CM}} = E_{c,f}^{\mathrm{CM}} - E_{c,i}^{\mathrm{CM}}$, coeficiente de restitución $e = \sqrt{\frac{E_{c,f}^{\mathrm{CM}}}{E_{c,i}^{\mathrm{CM}}}} = \frac{1}{v}\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{\frac{kd^2}{M}} - 1 = -0,73$. c) Con rozamiento $d' = \sqrt{d^2 + \left(\frac{\mu_cMg}{k}\right)^2} - \frac{\mu_cMg}{k} = 8,6$ cm.

5.30 ✎✎ $v = 300$ m/s, $m = 10$ g, $M = 0,99$ kg, $d = 20$ cm, $\mu_c = 0,5$.
a) $k = \frac{m^2v^2}{(m+M)d^2} = 225$ N/m. b) $T = 2\pi\frac{(m+M)d}{mv} = 0,42$ s. c) $d' = \sqrt{d^2 + \left[\frac{\mu_cgd^2(m+M)^2}{v^2m^2}\right]^2} - \frac{\mu_cgd^2(m+M)^2}{v^2m^2} = 17,9$ cm; $d'' = \frac{3\mu_cgd^2(m+M)^2}{v^2m^2} - \sqrt{d^2 + \left[\frac{\mu_cgd^2(m+M)^2}{v^2m^2}\right]^2} = -13,6$ cm (se estira más allá de la posición inicial).

5.31 ✎✎ a) Con alcance de tiro parabólico $d = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$, impulso $mv_0 = m\sqrt{\frac{gd}{\sin2\theta}} = 2,93$ kg m/s. b) Suponiendo que se alcanza v_0 con aceleración constante en un desplazamiento $2r$, el tiempo de colisión es $t = \frac{4r}{v_0} = 1,2$ ms y c) la fuerza media $F = ma = m\frac{v_0}{t} = \frac{v_0^2}{4r} = g\frac{d}{4r\sin2\theta} = 2390$ N.

5.32 ✎✎ Ver Teoría

5.33 ✎✎ $m_1 = 1200$ kg, $m_2 = 900$ kg, $\mu_c = 0,92$, $d = 6,8$ m.
$v_{1i} = \sqrt{2\mu_cgd}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = 69,8$ km/h: no dice la verdad.

5.34 ✎✎ $\ell = 1$ m, $\theta_1 = 60°$; $h_0 = \ell(1-\cos\theta_1) = 0,5$ m.
$v_{1i}^2 = 2g\ell(1-\cos\theta_1) = 2gh_0$; $h_1 = \left(\frac{1-2e}{3}\right)^2\frac{v_{1i}^2}{2g}$, $h_2 = \left(\frac{1+e}{3}\right)^2\frac{v_{1i}^2}{2g}$.
Choque elástico, $e = 1$, $h_1 = \frac{1}{9}h_0 = 5,6$ cm, $h_2 = \frac{4}{9}h_0 = 22,2$ cm.
Choque inelástico $h_2 > h_1 \Rightarrow h' = h_2 = 17$ cm, $e = 3\sqrt{\frac{h'}{h_0}} - 1 = 0,75$.

5.35 ✎✎ $4\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\cos^2\theta\, E_{c,1i} = 2,37$ J.

5.36 ✎✎ $|\vec{v}_{1i}| = 20$ m/s, $|\vec{v}_{1f}| = 15$ m/s, $\theta_1 = 25°$.
$\tan\theta_2 = \frac{|\vec{v}_{1f}|\sin\theta_1}{|\vec{v}_{1f}|\cos\theta_1 - |\vec{v}_{1i}|} \Rightarrow \theta_2 = -44,7°$ respecto a la dirección inicial.

5.37 ✎✎✎ $\vec{v}_{1i} = v_{1i}\vec{i}$, $v_{1i} = 10$ m/s.
$\vec{v}_{1f} = \frac{5\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$ m/s, $\vec{v}_{2f} = \frac{5}{2}(\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j})$ m/s.

5.38 ✎✎✎ $v_{0\perp}$ es la componente de la velocidad $\vec{v}_0$ perpendicular a la pared.
a) Momento aportado por la pared $-\frac{2Mm}{M+m}v_{0\perp}$, velocidades tras la colisión: pelota $\frac{m-M}{m+M}v_{0\perp}$, pared $\frac{2m}{M+m}v_{0\perp}$.
b) $\vec{v}_m = \frac{M(2u+v_0\cos\theta)-mv_0\cos\theta}{M+m}\vec{i} - v_0\sin\theta\vec{j}$. c) $M \gg m \Rightarrow \vec{v}_m = (2u + v_0\cos\theta)\vec{i} - v_0\sin\theta\vec{j}$. e) Choque frontal, $\theta = 0$, $\vec{v}_m = 11,67\vec{i}$ m/s.

5.39 ✎✎✎ a) Choque frontal. b) Cambio de velocidad máximo $1 - \frac{v_f}{v_T} = \frac{m}{M_T+m}\left(1 + \frac{v_m}{v_T}\right) = 7,2\times 10^{-17}$. c) $m \simeq 3,0\times 10^{22}$ kg (algo menos de la mitad de la masa de la Luna).