Leyes de Kepler, ley de gravitación

7.1 ✎ Calcula la fuerza gravitatoria ejercida entre los siguientes cuerpos: a) dos personas de 70 kg separadas 7 m, b) una persona de 50 kg sobre la superficie terrestre y la Luna, c) el Sol y un gato de 5 kg sobre la la Tierra.

7.2 ✎ La Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra, a 415 km por encima de la superficie de esta. Calcula el periodo de la órbita.

7.3 ✎ Calcula la fuerza gravitatoria ejercida sobre una partícula de masa $m = 250$ kg, situada en el centro del cuadrado que forman las masas $m_1 = 100$ kg en $(0, 0, 0)$, $m_2 = 500$ kg en $(d, 0, 0)$, $m_3 = 300$ kg en $(d, d, 0)$ y $m_4 = 500$ kg en $(0, d, 0)$ con $d = 2$ m.

7.4 ✎✎ Queremos situar un satélite de masa $m = 1000$ kg en órbita circular geoestacionaria. a) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre está la órbita? b) ¿Qué velocidad tiene el satélite? c) Si se parte del reposo en la estación de lanzamiento y se desprecia la resistencia del aire, ¿cuál es la energía necesaria para situarlo en órbita?

7.5 ✎✎ Sabiendo que el planeta Venus tarda 224,7 dias en una revolución completa alrededor del Sol y que la distancia de Neptuno al Sol es de $4,5 \times 10^9$ km, que la Tierra invierte 365,256 dias en una revolución completa alrededor del Sol y que la distancia media Tierra-Sol es de $149,5 \times 10^6$ km, calcula: a) la distancia Venus-Sol, b) la duración de una revolución completa de Neptuno alrededor del Sol.

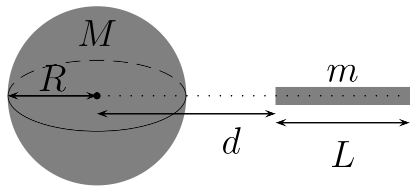
7.6 ✎ La tabla adjunta da el radio R de la órbita (supuesta circular) y el periodo T de revolución de las lunas de Júpiter, descubiertas por Galileo en 1610. Con estos datos, comprueba que se cumple la tercera ley de Kepler y estima la masa de Júpiter.

	R (km)	T (días)
Io	$4,22 \times 10^5$	$1,77$
Europa	$6,71 \times 10^5$	$3,55$
Ganímedes	$1,07 \times 10^6$	$7,16$
Calisto	$1,88 \times 10^6$	$16,69$

7.7 ✎✎ Four identical planets are arranged in the vertices of a square. If the mass of each planet is M and the square has sides of length a, what must be their speed if they follow a common circular orbit around the center of the square under the influence of their mutual attraction?

Campo gravitatorio

7.8 ✎✎ Una esfera uniforme de masa M está localizada cerca de una varilla delgada y uniforme de masa m y longitud L, como indica la figura: alineada con un radio de la esfera, con su extremo más cercano a distancia d. Hallar la fuerza gravitatoria de atracción ejercida por la esfera sobre la varilla.



7.9 ✎✎ a) Determina el campo gravitatorio creado por un cuarto, medio y tres cuartos de anillo homogéneo de radio R, siendo en cada caso m la masa del trozo de anillo, en un punto arbitrario del eje de simetría perpendicular al plano del anillo completo. b) Para $m = 500$ g, $R = 5$ cm y el punto arbitrario anterior situado a 20 cm del centro del anillo, calcula numéricamente el resultado de a).

7.10 ✎✎✎ a) Calcula el campo gravitatorio creado por medio anillo homogéneo de masa m y radio R en un punto arbitrario del eje de simetría E_{Sim} del anillo completo. b) Si los extremos del medio anillo están unido a un eje fijo E_f que puede girar libremente y situamos una masa M en un punto arbitrario de E_{Sim}, determina la aceleración angular del giro del medio anillo alrededor de E_f. c) Para $m = 1$ kg, $R = 10$ cm y $M = 1$ kg situada en E_{Sim} a 30 cm del centro del anillo, calcula numéricamente los resultados de a) y b).

7.11 ✎✎ Dos masas iguales, M, están situadas (fijas) sobre el eje Ox en coordenadas $\pm x$ (a igual distancia del origen, una a cada lado). Halla a) la expresión del campo gravitatorio creado por las dos masas en un punto arbitrario del eje Oy, b) la expresión de la energía potencial de una masa m respecto del origen O situada en un punto arbitrario del eje Oy.

7.12 ✎✎ Una barra uniforme de masa M y longitud L está centrada en el origen O y orientada a lo largo del eje Ox. Calcula el campo gravitatorio debido a la barra en puntos del eje x, con $x > L/2$.

Energía potencial gravitatoria, órbitas

7.13 ✎ Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_i = 8$ km/s. Determina la altura máxima que alcanza, despreciando la resistencia del aire.

7.14 ✎ Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_i = 15$ km/s. Determinar la velocidad del proyectil cuando está muy lejos de la Tierra, despreciando la resistencia del aire.

7.15 ✎ Hallar la velocidad con la que llegará a la superficie terrestre un objeto de masa m que se deja caer desde una altura $h = 100$ km sobre la superficie de la Tierra partiendo del reposo.

7.16 ✎ Se lanza desde la superficie de la Tierra una partícula con una velocidad doble de la de escape. Cuando esté muy lejos de la Tierra, ¿cuál será su velocidad?

7.17 ✎✎ ¿En qué factor hay que incrementar la velocidad de un objeto en órbita circular para alcanzar la velocidad de escape desde su altitud orbital?

7.18 ✎✎ Un satélite se mueve describiendo una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Las distancias mínima y máxima a la superficie de la Tierra son 400 km y 3000 km, respectivamente. Calcula la velocidad del satélite en el apogeo y en el perigeo, y la excentricidad de la órbita.

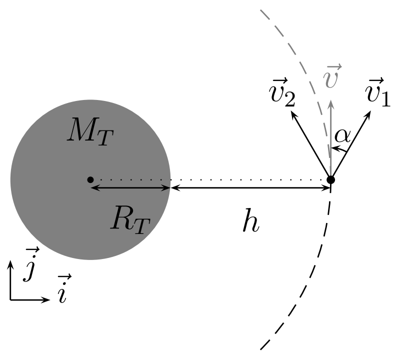
7.19 ✎✎ Dos partículas de masas m_1 y m_2 están inicialmente en reposo separadas una distancia "infinita". Por su atracción gravitatoria mutua comienzan a moverse una hacia la otra. ¿Qué velocidad tendrá cada una de ellas cuando se encuentren a una distancia r?

7.20 ✎✎✎ Suponiendo que la Tierra tiene simetría esférica, si su densidad en un punto situado a una distancia r de su centro es $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{3r^2}{4R^2}\right)$ siendo $\rho_0 = 10$ g/cm^3 y $R = 6379$ km su radio: a) calcula la masa de la Tierra. b) Si $\vec{g}(r)$ es el campo gravitatorio creado por la Tierra en el punto mencionado, calcula $|\vec{g}(r)|/|\vec{g}(R)|$ y $|\vec{g}(R/2)|/|\vec{g}(R)|$. c) Si una masa puntual m pudiera caer sin rozamiento, partiendo del reposo en la superficie, ¿con qué velocidad llegaría al centro de la Tierra?

7.21 ✎✎✎ Un satélite de masa m sigue una órbita circular a una altura h desde la superficie terrestre. En un momento dado, explota en dos fragmentos, uno de masa $f\,m$, el otro de masa $(1-f)\,m$, con f un parámetro en el rango $[0;1]$. En la separación, el fragmento de masa $(1-f)\,m$ tiene velocidad nula. La NASA acude a ti para contestar las siguientes preguntas. a) ¿Para qué rango de valores de f el fragmento de masa $f\,m$ escapa de la órbita terrestre? b) Si el fragmento de masa $f\,m$ permanece en órbita, determina, en función de f, su acercamiento mínimo, su acercamiento máximo a la Tierra y su periodo orbital.

7.22 ✎✎✎ Un satélite de masa m sigue una órbita circular a una altura h desde la superficie terrestre. En un momento dado se separa en dos fragmentos idénticos de masa $m/2$. Si la velocidad del satélite en ese instante era $\vec{v}$, la velocidad de uno de los fragmentos es $2f\vec{v}$ con $f \in [0;1]$ un parámetro (f es la fracción del momento del satélite que "se lleva" uno de los fragmentos). La Agencia Espacial Europea (ESA) espera que aclares las siguientes cuestiones. a) ¿Para qué valores de f uno de los fragmentos escapa de la órbita terrestre? b) Explica porqué, si un fragmento no escapa de la órbita terrestre, su posición inicial (el punto de separación del satélite) es necesariamente el perigeo o el apogeo de su órbita y determina, en función de f, si es uno u otro. c) Determina las posiciones del perigeo y del apogeo de las órbitas de ambos fragmentos y su periodo orbital en función de f. Comenta el resultado para $f = 1/2$. d) ¿Para qué valores de f ninguno de los dos fragmentos se estrellará sobre la superficie terrestre?

7.23 ✎✎✎ Un satélite de masa m sigue una órbita circular a una altura h desde la superficie terrestre. En un momento dado explota en dos fragmentos de idéntica masa $m/2$. La velocidad del satélite en ese instante era $\vec{v} = v\vec{j}$ y su posición $\vec{r} = r\vec{i}$ con $r = R_T + h$. Un fragmento tiene velocidad $\vec{v}_1 = \frac{2v}{\sqrt{3}}(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$ con $\alpha = \pi/6$, según ilustra la figura. El objetivo del problema es determinar las órbitas de ambos fragmentos. a) Determina la velocidad $\vec{v}_2$ del otro fragmento asumiendo conservación del momento en la explosión. b) Demuestra que ningún fragmento escapa de la órbita terrestre calculando sus respectivas energías mecánicas. c) Calcula los momentos angulares de ambos fragmentos con respecto al centro de la Tierra. d) Calcula el vector de Runge-Lenz para las órbitas de ambos fragmentos. e) Determina las posiciones del perigeo y el apogeo de ambas órbitas. ¿A qué distancias máxima y mínima de la superficie terrestre pasarán?



7.24 ✎✎✎ Un satélite espía de masa M sigue una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. Una potencia competidora se plantea eliminarlo alcanzándolo con un proyectil de masa m y analiza dos posibilidades: 1) choque frontal: la velocidad del proyectil tiene misma dirección pero sentido opuesto a la del satélite, 2) choque "desde detrás": la velocidad del proyectil tiene misma dirección y sentido que la del satélite. En ambos casos el proyectil queda incrustado en el satélite. a) En el caso 1), ¿qué posibles velocidades ha de tener el proyectil para que el satélite acabe estrellándose sobre la superficie terrestre? b) En el caso 2), ¿qué velocidad mínima ha de tener el proyectil para expulsar el satélite de la órbita terrestre? c) Para $M = 500$ kg, $h = 500$ km y $m = 50$ kg, calcula los valores numéricos de los apartados anteriores.

7.25 ✎ Se cree que existe un agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia. Un dato que conduce a dicha conclusión es la observación del movimiento estelar en las proximidades de dicho centro. Si una de esas estrellas se mueve siguiendo una órbita elíptica alrededor del centro galáctico con un periodo de 15,2 años y su semieje mayor es de 5,5 días-luz ¿Qué valor tiene la masa del agujero negro?

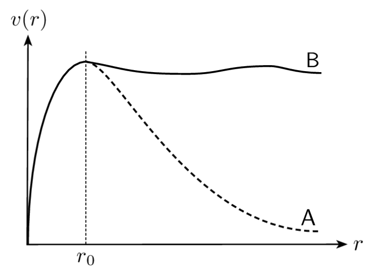
7.26 ✎✎✎ En un sistema de estrellas binarias, dos estrellas de masas m_1 y m_2 se encuentran separadas una distancia d, y describen órbitas circulares respecto a su centro de masas. a) Demostrar que el periodo es el mismo para las dos estrellas. b) Calcular este periodo en función de la distancia d que separa ambas estrellas.

7.27 ✎✎✎ Considera la órbita elíptica de un planeta de masa m alrededor de una estrella de masa $M \gg m$. Las distancias planeta-estrella en el periastro y en el apoastro son, respectivamente, r_p y r_a; las velocidades del planeta en el periastro y en el apoastro (en módulo) son, respectivamente, v_p y v_a. La energía mecánica del planeta es $E = -\frac{GmM}{r_a+r_p}$. a) ¿Qué relación entre r_a, r_p, v_a y v_p proporciona la conservación del momento angular? b) Mediante la relación anterior y la conservación de la energía mecánica, expresa E únicamente en términos de v_a y v_p.

7.28 ✎✎ Un cierto sistema triple consta de dos estrellas, cada una de masa m, que orbitan alrededor de una estrella central de masa M en la misma órbita circular de radio r. Las dos estrellas están siempre en los extremos opuestos de un diámetro de la órbita circular. a) Calcula el periodo de revolución de las estrellas de masa m. b) Comenta los límites $M \gg m$ y $M \ll m$.

7.29 ✎✎✎ A principios de la década de los 1970's, la astrofísica Vera Rubin midió la longitud de onda de la luz proveniente de diferentes posiciones radiales de la galaxia Andrómeda, y dedujo su velocidad de giro en función del radio por efecto Doppler (corrimiento relativo hacia el rojo/azul en el lado que se aleja/acerca de/a nosotros, y nulo en el centro). El resultado, una curva de rotación como B en la figura ilustrativa, está muy alejado de lo esperado, la curva A. Esta observación, pionera a escala galáctica, reforzaba la posible existencia de *materia oscura* (que se manifiesta sólo por efectos gravitacionales) que observaciones a escala de cúmulos de galaxias habían originado en los 1930's. Esta discrepancia se observó después en otras galaxias. Junto a otros resultados asociados por ejemplo a la evolución del Universo, la posible existencia de *materia oscura* constituye uno de los grandes misterios de la física actual. El objetivo del problema es entender mejor la discrepancia de la figura.

Para ello, vamos a suponer que la densidad de masa de estrellas en una galaxia sigue una distribución con simetría esférica $\rho(r)$, $\rho(r) = \rho_0(r/r_0)^a$ para $r \le r_0$ y $\rho(r) = 0$ para $r > r_0$, siendo r_0 un radio característico del núcleo galáctico esférico, ρ_0 una densidad característica y $a > -2$ un parámetro que nos permite describir distintas distribuciones (por ejemplo, $a = 0$ corresponde a una distribución homogénea). a) Calcula la masa $M(r)$ que se encuentra a una distancia $r < r_0$ del centro ($M(r_0)$ es la masa total). b) Conociendo $M(r)$ y suponiendo que las estrellas siguen órbitas circulares, calcula la curva rotación $v(r)$ mediante la segunda ley de Newton. c) Representa esquemáticamente $v(r)$ (considera por ejemplo los casos $a = -1$ y $a = 0$), notando en particular si, en función de r, crece o decrece para $r < r_0$ y para $r > r_0$. d) Compara finalmente este comportamiento con la curva B de la figura y comenta cómo la presencia de *materia oscura* podría explicar la discrepancia.

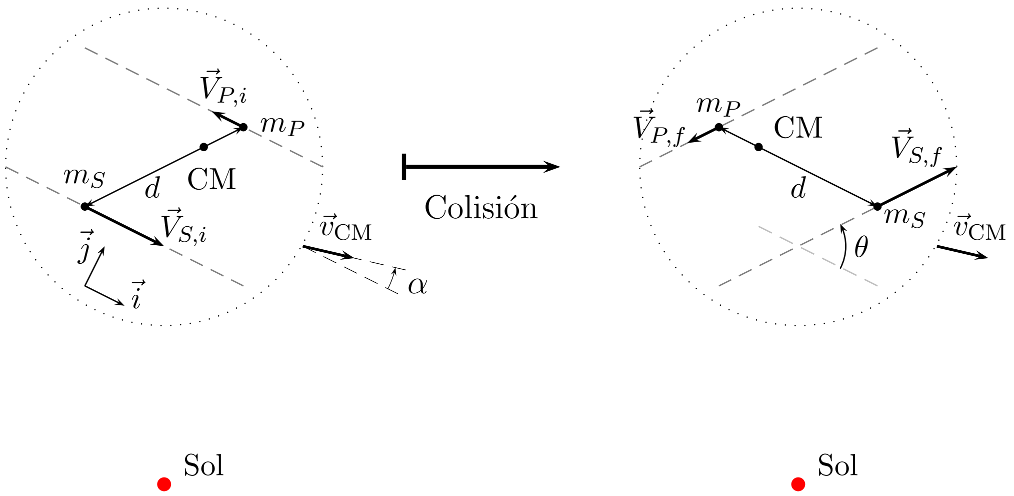


7.30 ✎✎ El Voyager 1 es un satélite lanzado el 5 de septiembre de 1977 con el objetivo de fotografiar y estudiar de cerca diferentes planetas para, posteriormente, salir de nuestro sistema solar (el 13 de diciembre de 2013 se encontraba a 127 AU de la Tierra). Calcula la velocidad mínima con la que es necesario lanzar el satélite, desde la superficie de la Tierra, teniendo en cuenta que la Tierra tiene una cierta velocidad orbital alrededor del Sol y que el satélite debe poder escapar del sistema solar. Discute previamente en qué dirección y sentido, con respecto a la velocidad orbital de la Tierra, conviene lanzarlo.

7.31 ✎✎ Urano, el séptimo planeta del sistema solar, fue observado por primera vez por William Herschel en 1781. Alrededor de 1840 las observaciones indicaban que la órbita de Urano ♅ (con periodo $T_{♅} = 84$ años) se desviaba de los cálculos keplerianos en una cantidad no atribuible a la incertidumbre de medida. La conclusión fue que debía haber un octavo planeta que también contribuyera a la fuerza gravitatoria sobre Urano, además del Sol ☼ y los seis planetas conocidos, y cuya órbita fue calculada por Adams y Le Verrier en 1845. Un año después, apuntando al cielo en la posición predicha, John Galle encontró Neptuno ♆, cuya órbita tiene periodo $T_{♆} = 164,8$ años. a) Calcula simbólicamente la razón de fuerzas gravitatorias Urano-Sol y Urano-Neptuno en función de las masas y periodos cuando los dos planetas están alineados con el Sol. b) Estima dicho valor numéricamente (busca los valores numéricos de las masas de los planetas involucrados; para el Sol $M_{☼} = 1,98 \times 10^{30}$ kg).

7.32 ✎✎ Compara el efecto de marea que tienen Mercurio (☿), la Tierra (⊕) y Júpiter (♃) sobre el Sol (☼) con los siguientes datos: distancias $d_{☼☿} = 5,79 \times 10^{10}$ m, $d_{☼\oplus} = 1,50 \times 10^{11}$ m, $d_{☼♃} = 7,78 \times 10^{11}$ m, masas $M_{☿} = 3,28 \times 10^{23}$ kg, $M_{\oplus} = 5,98 \times 10^{24}$ kg, $M_{♃} = 1,90 \times 10^{27}$ kg, masa del Sol $M_{☼} = 1,98 \times 10^{30}$ kg, radio del Sol $R_{☼} = 6,96 \times 10^{8}$ m.

7.33 ✎✎✎ Una forma de incrementar la velocidad de los satélites de exploración para alcanzar órbitas alejadas o incluso salir del Sistema Solar es obligarles a realizar alguna "slingshot orbit" u órbita tirachinas. En este procedimiento, el satélite de masa m_S se acerca a un planeta de masa $m_P \gg m_S$, cambia de dirección y sale despedido. El objetivo de este problema es entender los aspectos más básicos de esta técnica. Sin necesidad de una descripción detallada en términos de órbitas, basta considerar una descripción en términos de una colisión. El centro de masas del sistema planeta-satélite tiene una velocidad $\vec{v}_{\rm CM}$ relativa al Sol. En el sistema de referencia del centro de masas planeta-satélite, el satélite y el planeta tienen velocidades iniciales $\vec{V}_{S,i} = V_{S,i}\,\vec{i}$ y $\vec{V}_{P,i}$ respectivamente. Tras la colisión – el acercamiento –, las velocidades de satélite y planeta cuando se encuentran a la misma distancia relativa que en la situación inicial, son $\vec{V}_{S,f} = V_{S,f}(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$ y $\vec{V}_{P,f}$ respectivamente, según ilustra la figura. Suponemos que la atracción del Sol durante el tiempo de la colisión es despreciable (la colisión se desarrolla en un tiempo mucho menor que el periodo orbital del planeta alrededor del Sol), y por tanto $\vec{v}_{\rm CM} = v_{\rm CM}(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})$ es constante entre las dos situaciones inicial y final.



a) Calcula $\vec{V}_{P,i}$ y $\vec{V}_{P,f}$. b) ¿Es una colisión elástica? c) En el sistema de referencia del Sol, calcula las energías cinéticas de planeta y satélite en las dos situaciones inicial y final. d) ¿Para qué valores de θ y α es mayor la energía cinética ganada por el satélite?
Además de recurrir a órbitas tirachinas, los satélites cuentan con algún tipo de cohete impulsor, pero pueden transportar poco combustible y este debe ser utilizado de la forma más eficiente. e) Si el impulsor puede incrementar el momento lineal del satélite en una cantidad ΔI en la dirección en que se mueve, explica por qué la ganancia de energía cinética obtenida usando el impulsor es mayor cuanto mayor sea su velocidad (en el caso de las órbitas tirachinas, eso implica que el mejor momento para activar el impulsor del cohete es precisamente alrededor del máximo acercamiento al planeta).
Puedes encontrar más detalles en `https://en.wikipedia.org/wiki/Gravity_assist`