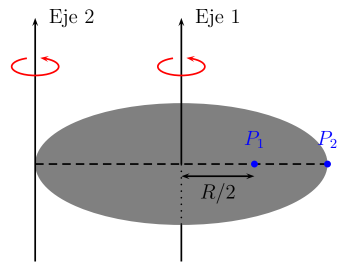
Cinemática. Velocidad angular.

6.1 ✎✎ Un disco de radio $R = 6$ cm gira a partir del reposo hasta alcanzar 500 rpm con aceleración angular constante en $5,5$ s. Consideramos dos situaciones, el eje de rotación, perpendicular al disco, pasa (1) por el centro del disco, (2) por un punto del borde del disco; consideramos también dos puntos P_1 y P_2 situados según indica la figura. Calcula: a) el valor de la aceleración angular, b) el número de revoluciones del disco en los 5.5 s de aceleración, c) la distancia recorrida por los puntos P_1 y P_2 para ambas posiciones del eje de rotación en los $5,5$ s de aceleración. d) Alcanzadas las 500 rpm, se mantiene una velocidad angular constante: determina velocidad y aceleración de P_1 y P_2 para ambas posiciones del eje de rotación.



6.2 ✎✎ Una rueda inicia un movimiento uniformemente acelerado a partir del reposo y alcanza una velocidad angular $\omega_1 = 300$ rpm en $t_1 = 6$ minutos. Después de haber girado durante cierto tiempo a esta velocidad angular, se aplican unos frenos que producen un movimiento uniformemente retardado y la rueda tarda 5 minutos en pararse. a) Representa las funciones aceleración angular $\alpha(t)$, velocidad angular $\omega(t)$ y el ángulo de giro $\theta(t)$ ANTES de realizar ningún cálculo. b) Escribe $\theta(t)$ para todos los tramos. c) Sabiendo que la rueda ha dado en total 3100 revoluciones, calcula el tiempo total que ha durado el movimiento.

6.3 ✎✎ Tres masas idénticas m se encuentran, en un instante dado, en $\vec{r}_1 = 4\vec{i}$ m, $\vec{r}_2 = 8\vec{i}$ m, $\vec{r}_3 = (6\vec{i} + 6\vec{j})$ m y tienen velocidades $\vec{v}_1 = 3\vec{i}$ m/s, $\vec{v}_2 = (3\vec{i} + 2\vec{j})$ m/s, $\vec{v}_3 = \vec{j}$ m/s. a) Determina la posición y la velocidad del centro de masas de las tres masas. b) Determina las posiciones y velocidades relativas al centro de masas. c) Comprueba que el sistema se mueve como un sólido rígido. d) Determina la velocidad angular $\vec{\omega}$ con la que las tres masas giran alrededor del centro de masas.

6.4 ✎✎ Tres masas $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 2$ kg, $m_3 = 1$ kg se encuentran, en un instante dado, en $\vec{r}_1 = (1, 3, 1)$ m, $\vec{r}_2 = (1, 1, 1)$ m, $\vec{r}_3 = (3, 1, 1)$ m y tienen velocidades $\vec{v}_1 = (0, 3, 0)$ m/s, $\vec{v}_2 = (-2, 3, 2)$ m/s, $\vec{v}_3 = (-2, 1, -2)$ m/s. Forman, junto a una cuarta masa m_4, un cuerpo rígido. a) Determina m_4, su posición y su velocidad para que ese cuerpo rígido tenga forma de cuadrado con el CM en su centro geométrico. b) Determina con qué velocidad angular gira alrededor del CM.

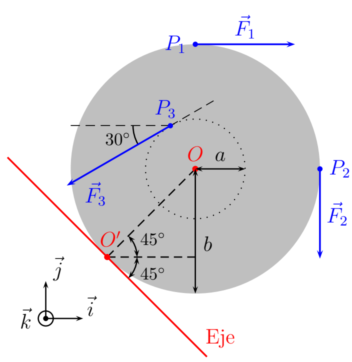
6.5 ✎✎ Las posiciones y velocidades de dos puntos de un sólido rígido son $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. La posición y la velocidad del centro de masas son $\vec{r}_{\rm CM}$, $\vec{v}_{\rm CM}$. Calcula la velocidad angular del sólido rígido en cada uno de los siguientes casos (posiciones en m, velocidades en m/s).
a) $\vec{r}_1 = (2, -1, 2)$, $\vec{r}_2 = (2, 0, 2)$, $\vec{v}_1 = (-1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, 1, 2)$, $\vec{r}_{\rm CM} = (1, -1, 2)$ y $\vec{v}_{\rm CM} = (-1, 0, 2)$.
b) $\vec{r}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{r}_2 = (3, 2, -1)$, $\vec{v}_1 = (1, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -4)$, $\vec{r}_{\rm CM} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v}_{\rm CM} = (1, 0, -2)$.
c) $\vec{r}_1 = (0, 2, 1)$, $\vec{r}_2 = (1, 2, 1)$, $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 3, -2)$, $\vec{r}_{\rm CM} = (-1, 2, 1)$ y $\vec{v}_{\rm CM} = (1, 1, 0)$.

6.6 ✎✎ La expresión de la velocidad angular $\vec{\omega} = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{\vec{V}_1 \cdot \vec{R}_2}$ depende de posiciones y velocidades relativas al CM de un sólido rígido. a) Demuestra que sin necesidad de conocer la posición y la velocidad del CM, con las posiciones $\vec{r}_j$ y velocidades $\vec{v}_j$ de tres puntos del sólido rígido se cumple $\vec{\omega} = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_3) \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_3)}{(\vec{v}_1 - \vec{v}_3) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}$. b) Para $\vec{r}_1 = (1, 0, 3)$ m, $\vec{r}_2 = (1, 1, 3)$ m, $\vec{r}_3 = (1, 2, 2)$ m, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ m/s, $\vec{v}_2 = (0, 1, 2)$ m/s, $\vec{v}_3 = (-2, 2, 3)$ m/s, comprueba que la velocidad angular calculada de una u otra forma, conociendo $\vec{r}_{\rm CM} = (0, 0, 3)$ m y $\vec{v}_{\rm CM} = (1, 0, 2)$ m/s, coinciden.

Momento de fuerzas

6.7 ✎ Calcula la distancia entre: a) el centro de un cubo de lado d y cualquiera de sus aristas, b) la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm y el vértice opuesto, c) los vértices de un paralelogramo y sus diagonales si sus lados miden 5 cm y $5/\sqrt{2}$ cm y forman ángulos interiores de 45° y 135°.

6.8 ✎✎ Se aplican fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, en diferentes puntos de un disco, según indica la figura. a) ¿Cuál es el momento total de fuerzas con respecto al centro del disco? b) ¿Cuál es el momento total de fuerzas con respecto al eje que pasa por O'? Valores numéricos: $|\vec{F}_1| = 10\,$N, $|\vec{F}_2| = 9\,$N, $|\vec{F}_3| = 12\,$N; $a = 10\,$cm, $b = 25\,$cm.



6.9 ✎✎ Un cuadrado de lado $d = 1$ m tiene sus vértices en las siguientes posiciones: $(0, 0, 0)$, $(d, 0, 0)$, $(d, d, 0)$, $(0, d, 0)$. Sobre estos vértices actua un campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ N (con x, y, z en m). Calcula el momento total de fuerzas con respecto a: a) el centro del cuadrado, b) el vértice en el origen de coordenadas, c) un eje perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro, d) la diagonal del cuadrado que no pasa por el origen.

6.10 ✎✎ Una varilla de 1 m de longitud y masa despreciable tiene adheridas 11 bolas metálicas de 50 g cada una, dispuestas regularmente con 10 cm de separación entre bolas consecutivas. Se mantiene la varilla en posición horizontal sujetando la bola que se encuentra a 20 cm de un extremo. Calcula el momento total de fuerzas debido a los pesos de las bolas metálicas con respecto al punto de sujeción.

Momento de inercia

6.11 ✎✎ Cuatro partículas están en los vértices de un cuadrado de lado $L = 2$ m, unidas por varillas sin masa. Las posiciones que ocupan las masas son $\vec{r}_1 = (0, L, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_3 = (L, L, 0)$, $\vec{r}_4 = (L, 0, 0)$. Los valores de las masas son $m_1 = m_4 = 3$ kg y $m_2 = m_3 = 4$ kg. Calcula los momentos de inercia respecto de: a) el eje x, b) el eje y, c) el eje z, d) el eje que pasa por los puntos $P_1 = (0, 0, -L/2)$ y $P_2 = (L/2, L/2, 0)$.

6.12 ✎✎ Calcula los momentos de inercia de un conjunto de 3 masas puntuales idénticas situadas en los vértices de un triángulo equilátero (dos masas sobre el eje x, una sobre el eje y) con respecto a: a) un eje de dirección $\vec{i}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, b) un eje de dirección $\vec{j}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, c) un eje de dirección $\vec{k}$ que pasa por $(0, 0, 0)$. d) Calcula numéricamente los resultados anteriores si el lado del triángulo mide 20 cm y las masas son de $0,5$ kg.

6.13 ✎✎ Calcula los momentos de inercia de un conjunto de cinco masas puntuales m idénticas en posiciones $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (a, b, 0)$, $\vec{r}_3 = (a, -b, 0)$, $\vec{r}_4 = (-a, b, 0)$, $\vec{r}_5 = (-a, -b, 0)$ con respecto a: a) un eje de dirección $\vec{i}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, b) un eje de dirección $\vec{j}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, c) un eje de dirección $\vec{k}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, d) un eje de dirección $\vec{i}$ que pasa por $(0, b, 0)$. e) Calcula numéricamente los resultados anteriores para $a = 10$ cm, $b = 20$ cm y $m = 0,5$ kg.

6.14 ✎✎ Considera las siguientes 4 masas puntuales: m en $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$, m en $\vec{r}_2 = (-a, 0, 0)$, M en $\vec{r}_3 = (0, b, 0)$, M en $\vec{r}_4 = (0, -b, 0)$. Calcula los momentos de inercia del sistema con respecto a: a) un eje de dirección $\vec{i}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, b) un eje de dirección $\vec{j}$ que pasa por $(0, 0, 0)$, c) un eje de dirección $\vec{k}$ que pasa por $(0, 0, 0)$. d) Calcula numéricamente los resultados anteriores para $m = 400$ g, $M = 1$ kg, $a = 25$ cm y $b = 10$ cm.

6.15 ✎ Calcula el momento de inercia de una varilla delgada homogénea de longitud L y masa M, con respecto a: a) un eje perpendicular que pasa por un extremo, b) un eje perpendicular que pasa por el centro.

6.16 ✎✎ Calcula el momento de inercia de una placa rectangular homogénea de lados a y b, con respecto a: a) un eje perpendicular que pasa por el centro de masas, b) un eje perpendicular que pasa por un vértice, c) un eje que pasa por un lado de longitud b.

6.17 ✎✎ Calcula el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular que pasa por el centro de: a) un anillo homogéneo de masa M y radio R, b) un disco homogéneo de masa M y radio R.

6.18 ✎✎ Calcula el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por un diámetro de: a) un anillo homogéneo de masa M y radio R, b) un disco homogéneo de masa M y radio R.

6.19 ✎✎ Calcula el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de: a) una superficie esférica homogénea de masa M y radio R, b) una esfera maciza homogénea de masa M y radio R.

6.20 ✎✎ Una cisterna de gasolina de $4,4 \times 10^8$ kg es transportada desde Venezuela (10° latitud norte) hasta Holanda (53° latitud norte). a) Calcula en general el momento de inercia del sistema Tierra-cisterna como función de la latitud, así como la variación relativa del momento de inercia entre dos latitudes diferentes. b) Calcula numéricamente el apartado a) para los datos del problema.

Dinámica de rotación del sólido rígido

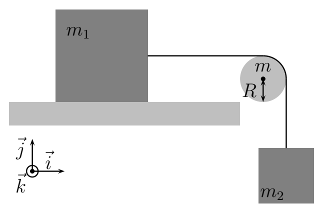
6.21 ✎ Se quiere abrir una puerta de masa $m = 50$ kg, una anchura $\ell = 90$ cm y una altura $h = 2$ m, tirando de ella con una fuerza F de 10 N (perpendicularmente a la puerta). a) Calcula el momento de inercia de la puerta, respecto del eje que pasa por las bisagras (como una lámina rectangular uniforme). b) Compara la aceleración angular que adquiere la puerta si tiramos del extremo o del punto medio. c) Si la anchura de la puerta se reduce a la mitad, manteniendo la misma masa, ¿cuál es la aceleración angular que adquiere, comparada con el caso anterior (tirando del extremo)?

6.22 ✎✎ Una varilla uniforme de masa m y longitud ℓ puede girar sin rozamiento alrededor de un extremo; partiendo del reposo en posición horizontal, determina: a) la aceleración angular inicial, b) la aceleración tangencial inicial del extremo libre, c) la fuerza de contacto en el extremo fijo en el instante inicial. d) Calcula los valores numéricos de los apartados anteriores para $\ell = 30$ cm, $m = 200$ g.

6.23 ✎✎ Se sujeta un bloque de masa m a una cuerda ligera enrollada alrededor de una polea (disco homogéneo) de masa m_0 y radio R. La polea puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza. Halla: a) la tensión de la cuerda, b) la aceleración del bloque. c) Para $m = 1$ kg, $m_0 = 125$ g y $R = 4$ cm, calcula los valores numéricos de los apartados anteriores.

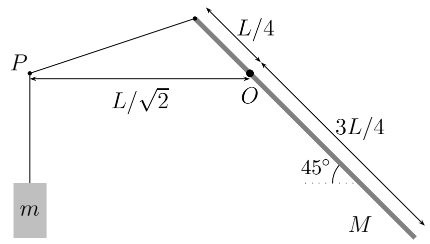
6.24 ✎✎ Considera una máquina de Atwood formada por dos bloques de masas m_1 y m_2, conectados por una cuerda que pasa por una polea que es un disco homogéneo de radio R y masa m. La cuerda no desliza sobre la polea, y esta puede girar sin rozamiento. Determina: a) la aceleración lineal de los bloques, b) la aceleración angular de la polea, c) las tensiones en la cuerda. d) Para $m_1 = 510$ g, $m_2 = 500$ g, $R = 5$ cm, $m = 50$ g, calcula los valores numéricos de los apartados anteriores.

6.25 ✎✎ Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa por una polea. La polea es un disco homogéneo de masa m y radio R. La cuerda no desliza sobre la polea, y esta puede girar sin rozamiento. El bloque m_1 puede deslizar horizontalmente sin rozamiento mientras el bloque m_2 se mueve verticalmente, según indica la figura. Halla: a) la aceleración de los bloques, b) la aceleración angular de la polea y c) las tensiones en la cuerda. d) Para $m_1 = 510$ g, $m_2 = 500$ g, $R = 10$ cm, $m = 50$ g, calcula los valores numéricos de los apartados anteriores.

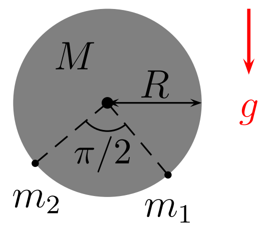


6.26 ✎✎✎ Un varilla rígida homogénea de masa M y longitud L puede rotar libremente alrededor de un punto O de la misma situado a distancia $L/4$ del centro de masas. Una masa m cuelga de una cuerda unida al extremo de la varilla más cercano al punto O, pasando por el punto P (por el que puede deslizar sin rozamiento). El punto P se encuentra a una distancia $L/\sqrt{2}$ de O y a la misma altura.

a) ¿Qué valor ha de tener m para que el sistema esté en equilibrio cuando la varilla forma un ángulo de 45° con la horizontal según ilustra la figura? b) ¿Qué fuerza externa se ejerce en O? c) Si se lleva el extremo de la varilla más alejado de O a la posición más baja y se suelta, asumiendo el valor de m del apartado anterior, ¿con qué aceleración angular empieza a girar la varilla? d) Si, estando el sistema en la posición de equilibrio del apartado a), se corta la cuerda, ¿con qué aceleración angular empieza a girar la varilla?, ¿cuánto vale la fuerza ejercida en O inmediatamente después de cortar la cuerda?, ¿qué velocidad tendrá el extremo de la varilla más alejado de O cuando la varilla esté en posición vertical? e) Calcula los resultados anteriores numéricamente para $M = 1$ kg, $L = 40$ cm.



6.27 ✎✎✎ Un disco homogéneo de masa M y radio R está sujeto de modo que puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular al mismo que pasa por su centro O. El borde del disco hay dos masas m_1 y m_2 adheridas según indica la figura: los radios entre O y sus posiciones forman un ángulo recto. a) Determina las posiciones de equilibrio del sistema. b) Estando el sistema en equilibrio, la masa m_2 "se despega", ¿con qué aceleración angular empieza a girar el disco? c) ¿Qué fuerza de sujeción se ejerce sobre el disco? d) Calcula los resultados anteriores numéricamente para $m_1 = m_2 = 250$ g, $M = 1$ kg, $R = 10$ cm.



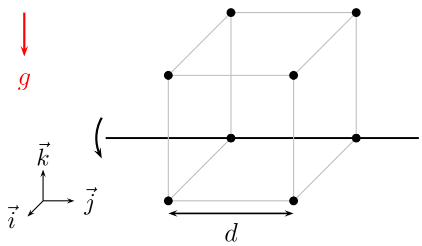
6.28 ✎ a) Calcula la aceleración angular de una polea cilíndrica de 0,5 m de radio y 20 kg de masa si se aplica una fuerza de 9,8 N a una cuerda enrollada sobre ella (la cuerda no tiene masa, y no desliza al desenrollarse). b) Si el extremo de la cuerda enrollada alrededor de la polea estuviera sujeto al techo y se dejara caer el sistema desde el reposo, calcula la aceleración angular de la polea.

Teorema Trabajo-Energía cinética. Energía mecánica.

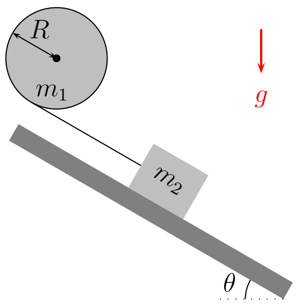
6.29 ✎ Se enrolla una cuerda alrededor de una polea cilíndrica de 0,25 m de radio y 10 kg de masa, se sujeta el extremo libre de la cuerda al techo, y se deja caer desde el reposo (la cuerda no tiene masa, y no desliza al desenrollarse). Determina la velocidad angular de la polea y la velocidad de su centro de masas cuando este último haya descendido 1 m con respecto a la posición inicial.

6.30 ✎✎ Una rueda está formada por un borde circular de 3 kg de masa y diámetro 40 cm y cuatro radios de 1,2 kg de masa cada uno, dispuestos en dos diámetros perpendiculares: ⊗. Gira con una velocidad angular de 1 s^{-1} alrededor de un eje perpendicular al plano de la rueda. Calcula la energía cinética de la rueda cuando a) el eje pasa por el centro, b) el eje pasa por un punto de unión entre el borde y un radio.

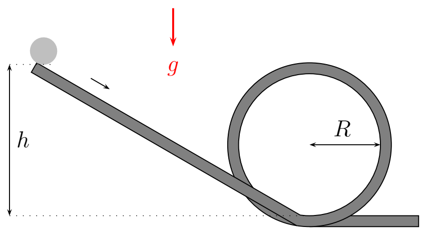
6.31 ✎✎ Ocho masas puntuales idénticas m están fijadas a los vértices de un cubo rígido sin masa. Está inicialmente en reposo y puede girar libremente alrededor de un eje fijo que pasa por una de sus aristas según ilustra la figura (en la configuración inicial, la cara inferior del cubo está en un plano horizontal y el eje fijo pasa por uno de sus lados). Calcula a) la aceleración angular inicial, b) la energía cinética máxima que alcanzará. c) Para $m = 125$ g y $d = 10$ cm, calcula numéricamente los apartados anteriores.



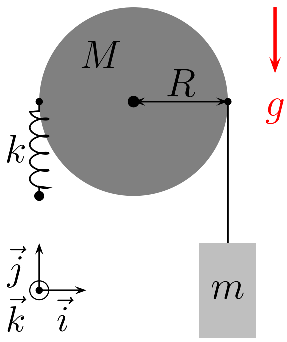
6.32 ✎✎ Un cilindro homogéneo de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Se enrolla una cuerda alrededor del mismo que se mueve con una masa m_2 la cual está apoyada sin rozamiento en un plano inclinado un ángulo θ como ilustra la figura. El sistema se deja en libertad desde el reposo. Determina: a) la aceleración de la masa m_2, b) la tensión de la cuerda, c) la velocidad que adquiere la masa m_2 tras recorrer una distancia L. d) Analiza las respuestas para los casos $\theta = 0$, $\theta = 90°$ y $m_1 = 0$.



6.33 ✎✎ Tienes que diseñar un juguete para niños con un circuito en forma de bucle. La idea, como muestra la figura, es que la bola (una esfera homogénea) de masa m y radio r, descienda sin deslizar por el plano inclinado y recorra el bucle de radio R. La bola parte del reposo desde una altura h. a) Determina el valor de h para el que la bola permanece en contacto con la superficie del circuito en todos los puntos. b) Considerando el valor de h del apartado anterior, ¿qué ocurriría si en lugar de una bola empleáramos un disco homogéneo de masa m y radio r? ¿Y si empleáramos un anillo homogéneo de masa m y radio r?



6.34 ✎✎✎ Un disco homogéneo de masa M y radio R está suspendido y puede girar libremente alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro. Un muelle ideal, sin masa, que tiene una longitud en reposo $R/4$ y una constante de recuperación k, tiene sus extremos fijados a un punto E con posición $-R(\vec{i} + \vec{j})$ relativa al centro del disco, y a un punto de su circunferencia. Del punto diametralmente opuesto a este último cuelga una masa m mediante una cuerda ideal, conforme ilustra la figura. a) Determina m para que el sistema esté en equilibrio con el centro del disco y el punto de sujeción a la misma altura. b) Si, estando el sistema en equilibrio, se corta la cuerda, ¿con qué aceleración angular empezará a girar el disco? c) ¿Qué velocidad angular máxima alcanzará? d) Calcula los resultados de los apartados anteriores numéricamente para $M = 1$ kg, $R = 10$ cm y $k = 100$ N/m.



Objetos rodantes.

6.35 ✎ Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una distancia d por encima del centro de la bola. Hallar el valor de d para el cual la bola rodará sin deslizamiento desde el comienzo.

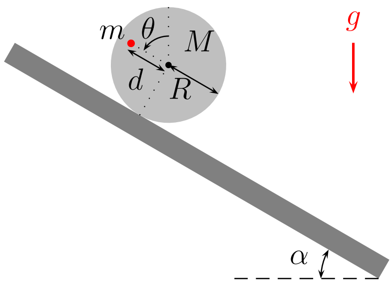
6.36 ✎ Una bola de bolera radio $R = 11$ cm y masa $M = 7,2$ kg rueda sin deslizar con $v = 2,0$ m/s sobre una superficie horizontal. Continua rodando sin deslizar cuando sube por una rampa, hasta que se detiene a una altura h. Determina h.

6.37 ✎✎ A bowling ball of mass M and radius R is released so that at the instant it touches the floor it is moving horizontally with a speed v_0 and is not rotating. It slides for a time t_1 a distance s_1 before it begins to roll without slipping. (a) If μ_k is the coefficient of kinetic friction between the ball and the floor, find s_1, t_1, and the final speed v_1 of the ball. (b) Find the ratio of the final kinetic energy to the initial kinetic energy of the ball. (c) Evaluate s_1, t_1, and v_1 for $v_0 = 8.0$ m/s and $\mu_k = 0.060$.

6.38 ✎✎ Una esfera maciza homogénea, un cilindro macizo homogéneo y un anillo homogéneo, todos con radio R y masa M, bajan rodando sin deslizar por un plano inclinado un ángulo θ respecto a la horizontal. Parten del reposo desde una altura h. Para cada uno, determina: a) la aceleración del centro de masas, b) la velocidad del centro de masas en el punto más bajo, c) la fuerza de rozamiento. d) Si $h = 1$ m, ¿en qué orden llegarán al punto más bajo del plano inclinado y con qué velocidades?

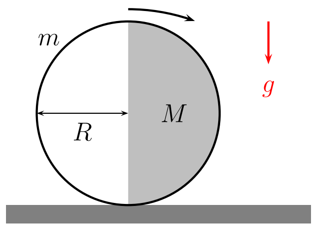
6.39 ✎✎✎ Un disco homogéneo de masa M y radio R puede rodar sin deslizar sobre un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal. Se adhiere una masa m a una distancia d del centro de modo que el segmento que une m con el centro del disco forma un ángulo θ con la dirección vertical hacia arriba, según ilustra la figura. A partir de la situación inicial de reposo, se deja evolucionar el sistema disco+masa adherida.

a) Obtén θ tal que la posición inicial sea de equilibrio si $m = M/2$, $d = R/2$ y $\alpha = 5°$. b) ¿Qué valor mínimo ha de tener m para que inicialmente el disco suba si $d = R$, $\alpha = 30°$ y $\theta = 60°$? c) Para $m = 3M$, $d = R$, $\alpha = 30°$ y $\theta = 60°$, calcula la energía potencial gravitatoria en función del giro del sistema con respecto a la posición inicial y comenta el resultado. d) Para $m = 3M$, $d = R$, $\alpha = 30°$ y $\theta = -30°$, calcula la energía potencial gravitatoria en función del giro del sistema con respecto a la posición inicial y comenta el resultado.

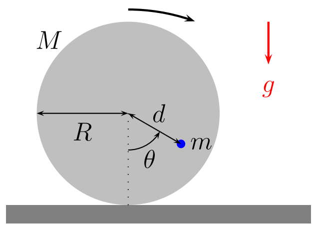


6.40 ✎✎✎ Un sólido rígido formado por medio disco homogéneo de masa M unido a un anillo de masa m, ambos de radio R, se encuentra en la posición inicial que ilustra la figura (el lado recto del medio disco es un diámetro del anillo, y tiene dirección vertical), a partir de la cual rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

a) Determina la posición del centro de masas del cuerpo. b) Determina el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje perpendicular que pasa por el punto de contacto con el plano horizontal (mediante un uso juicioso de los momentos de inercia de un anillo, de un disco, y del teorema de Steiner). c) Determina, en el instante inicial, la aceleración del centro de masas, la aceleración angular, y las fuerzas normal y tangencial (de rozamiento) ejercidas por la superficie. d) ¿Para qué posición del cuerpo se alcanzará la mayor velocidad angular (en módulo)? Determina la velocidad del centro de masas en esa configuración. e) Particulariza los resultados anteriores para $M \to 0$ y comenta el resultado. f) Calcula los resultados de los apartados a) a d) numéricamente para $M = 1$ kg, $m = 500$ g y $R = 10$ cm.



6.41 ✎✎✎ Un sólido rígido formado por un disco homogéneo de masa M y radio R al que se ha adherido una masa puntual m a una distancia d del centro, rueda sin deslizar sobre un plano horizontal partiendo de la posición inicial de reposo que ilustra la figura. a) Determina la posición del centro de masas del cuerpo. b) Determina el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje perpendicular que pasa por el punto de contacto con el plano horizontal. c) Determina, en el instante inicial, la aceleración del centro de masas, la aceleración angular, y las fuerzas normal y tangencial (de rozamiento) ejercidas por la superficie. d) Particulariza y comenta los resultados anteriores para $\theta = \pi$, para $d = 0$ y para $m = 0$. e) Calcula los resultados del apartado c) numéricamente para $M = 1$ kg, $m = 200$ g, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $R = 10$ cm y $d = 8$ cm.



Momento angular

6.42 ✎ Determina el momento angular respecto del origen en las siguientes situaciones: a) un coche de masa 1200 kg se mueve en un círculo de 20 m de radio con velocidad de 15 m/s, en sentido antihorario. El círculo se halla en el plano xy, centrado en el origen. b) El mismo coche se mueve con velocidad $v = -15\,\vec{i}$ m/s a lo largo de la recta $y = y_0 = 20$ m. c) Un disco en el plano xy de radio 20 m y masa 1200 kg gira con velocidad angular de $0,75$ rad/s alrededor de su eje, en sentido antihorario.

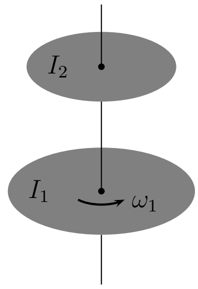
6.43 ✎ Dos partículas puntuales se mueven en sentidos opuestos a lo largo de una línea recta. La primera partícula, de masa m, se mueve con velocidad $\vec{v}_1 = v\vec{i}$, la segunda partícula, de masa $3m$, se mueve con velocidad $\vec{v}_2 = -v\vec{i}$. ¿Cuál es el momento angular total del sistema respecto de a) el punto $A = (0, 0, -2d)$, b) el punto $O = (0, 0, 0)$ y c) el punto $B = (0, 0, d)$?

6.44 ✎✎ Una partícula de masa m se lanza con una velocidad v_0 formando un ángulo θ con la horizontal (tiro parabólico). Se pide: calcular el momento angular en a) el origen, b) en el punto de máxima altura y c) en el punto de máximo alcance. d) ¿Qué momento de fuerzas es el responsable de la variación del momento angular?

6.45 ✎ Una persona de masa $m = 70$ kg se encuentra en el borde de una plataforma horizontal, homogénea de masa $M = 100$ kg, circular de radio $R = 5$ m. La plataforma puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. La persona lleva una masa de 1 kg y, estando el sistema en reposo, la lanza con velocidad

$v_0 = 10$ m/s en dirección tangencial a la plataforma. Determina la velocidad angular con que girará el sistema tras el lanzamiento.

6.46 ✎✎ Dos discos pueden girar sin rozamiento alrededor de un eje fijo común, perpendicular a ambos pasando por sus centros, según ilustra la figura. El primer disco, de momento de inercia I_1 con respecto al eje, gira con velocidad angular ω_1; el segundo disco, de momento de inercia I_2 con respecto al eje, está inicialmente en reposo. Se deja caer sobre el primero. Como las superficies de los cilindros son rugosas, los dos cilindros adquieren la misma velocidad angular ω_f. Determinar a) la velocidad angular ω_f, b) la variación de la energía cinética de rotación.

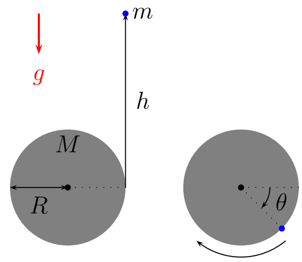


6.47 ✎✎ Una barra delgada de masa M y longitud L cuelga de un pivote en su parte superior. Un fragmento de arcilla de masa m y velocidad v horizontal choca con la barra a una distancia x del pivote y se adhiere a ella. Determina la razón entre la energía cinética del sistema inmediatamente después y antes de la colisión.

6.48 ✎✎ Una bala de masa $m = 20$ g que se mueve horizontalmente con una velocidad v, choca y se queda incrustada en el extremo inferior de una varilla, de longitud $L = 20$ cm y masa $M = 0,5$ kg. La varilla, similar a la del problema anterior, está suspendida por el extremo superior, alrededor del cual puede girar libremente. a) Calcular la velocidad mínima de la bala para que la varilla (con la bala) gire un ángulo de 180°. b) En las condiciones del apartado a) calcular la energía perdida en el choque.

6.49 ✎✎ Una barra homogénea de longitud ℓ y masa M se encuentra suspendida verticalmente, en reposo, de un punto a una distancia $\ell/3$ de un extremo; puede girar libremente alrededor de ese punto (el extremo más cercano al eje de giro se encuentra por encima del mismo). Una masa puntual m impacta en el extremo inferior de la barra con velocidad horizontal v, quedando adherida a la barra. a) Determina la velocidad angular justo después de la colisión. b) Compara la energía cinética justo después de la colisión con la energía cinética inicial del sistema. c) ¿Cuál es la velocidad v mínima tal que el sistema barra-masa puntual complete un giro? d) Calcula numéricamente los resultados de los apartados anteriores para $M = 900$ g, $\ell = 90$ cm, $m = 150$ g y $v = 30$ m/s.

6.50 ✎✎✎ Un disco de masa M y radio R, inicialmente en reposo, puede girar en torno a un eje horizontal, perpendicular al disco pasando por su centro. Una bola pequeña de masa $m = M/2$ se deja caer desde una altura h por encima del centro del disco de manera que choca con el disco justo en el borde, quedándose adherida al mismo. El disco junto con la bola empiezan a girar con una velocidad angular ω_0. La figura izquierda ilustra la configuración inicial, la figura derecha el sistema bola-disco cuando ha girado un ángulo θ. a) Calcula la altura h desde la que hay que dejar caer la bola para que el disco (junto con la bola) se detenga tras girar un ángulo de 270°. b) Calcula la energía perdida en el choque bola-disco. c) Determina la velocidad angular $\omega(\theta)$ del sistema en función del ángulo θ girado. d) Para $M = 500$ g, $R = 10$ cm, y h el valor del apartado a), calcula los valores de $\omega(\theta)$ para $\theta = 0$, $\pi/2$, π y $3\pi/2$.



6.51 ✎✎✎ Estima la variación de la duración del día terrestre que se podría verificar si toda la masa de hielo antártico se fundiera. Para ello: a) razona cualitativamente (sin hacer ningún cálculo), sobre los efectos que dicho fenómeno tendría sobre la rotación de la Tierra. b) Considerar un modelo sencillo para la distribución del hielo en la Antártida, como por ejemplo que se encuentra en un cilindro de radio r, altura h y masa m centrado en el Polo Sur. c) Calcula la variación de velocidad angular debida al cambio en la distribución de masa producido al fundirse el hielo antártico. Dato de interés: se estima que la masa del hielo antártico es aproximadamente 21×10^{15} toneladas ($3,62 \times 10^9$ toneladas corresponden a un aumento del nivel del mar de 1 mm).