

Tema 7 – El campo gravitatorio

- Las leyes de Kepler
- Ley de gravitación de Newton
 - Experimento de Cavendish
 - Leyes de Kepler
- El campo gravitatorio
- Energía potencial gravitatoria, velocidad de escape
- Órbitas

Las leyes de Kepler

Leyes empíricas formuladas por Johannes Kepler (1571-1630) obtenidas a partir de las observaciones de Tycho Brahe (1546-1601)



Leyes de Kepler

- 1 Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de los focos (1609)
- 2 La recta que une cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales (1609)
- 3 El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita (1619)

Las leyes de Kepler

Primera Ley de Kepler (1609)

Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de los focos

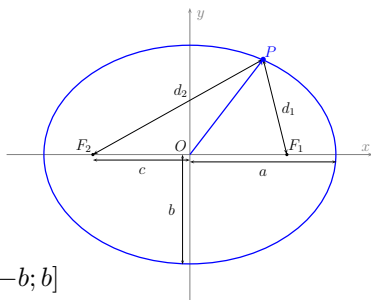
- Semiejes mayor a y menor b
- Focos F_1, F_2 , elipse: puntos P tales que $d_1 + d_2 = 2a$
($|\overrightarrow{F_1P}| = d_1, |\overrightarrow{F_2P}| = d_2$)

- Excentricidad $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$,
 $c = ea$

- $\overrightarrow{OP} = (x, y)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \in [-a; a], \quad y \in [-b; b]$$

$$x = a \cos \tau, \quad y = b \sin \tau, \quad \tau \in [0; 2\pi]$$



Las leyes de Kepler

Primera Ley de Kepler (1609)

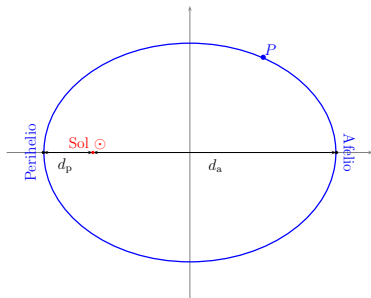
Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en uno de los focos

- $e = 0 \rightarrow$ circunferencia
- En el Sistema Solar, elipses con $e \ll 1$:

$$\begin{aligned} \text{Tierra: } d_a &= 1.52 \times 10^{11} \text{ m} \\ d_p &= 1.48 \times 10^{11} \text{ m} \end{aligned}$$

- Distancia media Tierra-Sol:
Unidad Astronómica

$$1 \text{ UA} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$$

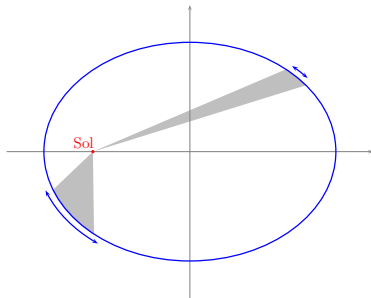


Las leyes de Kepler

Segunda Ley de Kepler (1609)

La recta que une cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales

- Un planeta se mueve más rápido cuando está más próximo al Sol que cuando está más alejado
- \Leftrightarrow conservación del momento angular!



Las leyes de Kepler

Tercera Ley de Kepler (1619)

El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita

- R : radio orbital medio
/10¹⁰ m
- T : periodo / años
- $C = 10^4 \times T^2 / R^3$

Planeta	R	T	C
Mercurio	5.79	0.241	2.99
Venus	10.8	0.615	3.00
Tierra	15.0	1.0	2.99
Marte	22.8	1.88	2.98
Júpiter	77.8	11.9	3.01
Saturno	143	29.5	2.98
Urano	287	84	2.98
Neptuno	450	165	2.99
Plutón	590	248	2.99

Ley de gravitación de Newton

No solo Newton



Hooke, Wren, Halley



Consideraciones (Hooke 1674)

- la aceleración de un planeta en su órbita es debida a una fuerza ejercida por el Sol,
- una fuerza que varía como $1/r^2$ es la causa de las órbitas elípticas observadas por Kepler,
- esa fuerza existe entre todos los objetos, celestes y terrestres (del universo).

Ley de gravitación

Toda partícula en el universo atrae al resto de las partículas con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Ley de gravitación de Newton

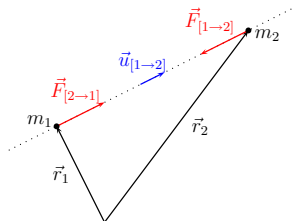
Fuerza gravitatoria que m_2 ejerce sobre m_1

$$\vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} = \frac{G m_1 m_2}{d_{12}^2} \vec{u}_{[1 \rightarrow 2]} = G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

- Proporcional a m_1 y a m_2
- Dirección de m_1 a m_2 ,
$$\vec{u}_{[1 \rightarrow 2]} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$
- Inversamente proporcional al cuadrado de la distancia
$$d_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$
- $\vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} = -\vec{F}_{[1 \rightarrow 2]}$
- Constante de gravitación universal

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$$1 \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2} = 1 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$



Ley de gravitación de Newton

Newton y la caída de la Luna (manzana vs. Luna)

- Verificación de la dependencia $\propto 1/d^2$ de la atracción gravitatoria
- (N.B. Hipótesis: actúa “como si toda la masa de la Tierra se encontrase en su centro y análogamente con la Luna)
- Conocida la aceleración de la gravedad \vec{g} en la superficie terrestre (manzana), $g = |\vec{g}| \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$, y el radio de la Tierra R_T

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

- La Luna sigue una órbita \simeq circular de radio $d_{TL} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ con periodo $T = 27.32$ días (la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T}$); si la aceleración \vec{a}_L para mantener la trayectoria circular se debe también a la atracción gravitatoria, tenemos

$$|\vec{a}_L| = \frac{GM_T}{d_{TL}^2} = \omega^2 d_{TL} = \frac{4\pi^2 d_{TL}}{T^2}$$

Ley de gravitación de Newton

Newton y la caída de la Luna (manzana vs. Luna)

- Con los datos experimentales

$$GM_T = g R_T^2, \quad GM_T = \frac{4\pi^2 d_{TL}^3}{T^2}$$

$$g R_T^2 = 3.98 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}, \quad \frac{4\pi^2 d_{TL}^3}{T^2} = 4.01 \times 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

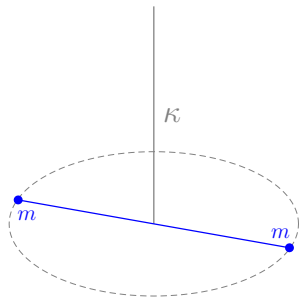
⇒ consistente con la hipótesis de la dependencia $\propto 1/d^2$
de la atracción gravitatoria

Ley de gravitación de Newton

Experimento de Cavendish en 1798 (Henry Cavendish 1731-1810) –
Medida de la densidad media de la Tierra

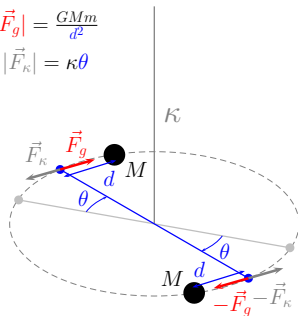
(N.B. \Rightarrow medida de G , aunque G no “aparece” hasta 1873)

- Balanza de torsión, constante de recuperación conocida
- Medida precisa de la distancia d y desviación θ que aparece en presencia de bolas de masa conocida M



$$|\vec{F}_g| = \frac{GMm}{d^2}$$

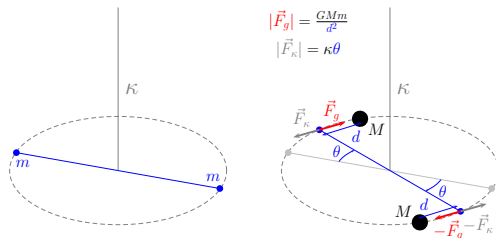
$$|\vec{F}_\kappa| = \kappa\theta$$



Ley de gravitación de Newton

Experimento de Cavendish

- Medida de θ , κ conocido \Rightarrow medida de \vec{F}_κ
- Medida de $\vec{F}_\kappa \Rightarrow$ medida de \vec{F}_g
- Medida (diferente) de la atracción Tierra-bola
- \Rightarrow medida de la masa de la Tierra o de su densidad
- \Rightarrow medida de G



Ley de gravitación de Newton

Segunda ley de Kepler

- Planeta P en posición \vec{r} con velocidad \vec{v} relativas al Sol
- Momento angular \vec{L}_P con respecto al Sol

$$\vec{L} = M_P \vec{r} \times \vec{v}$$

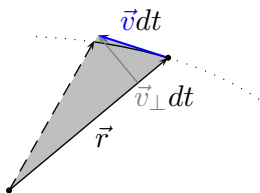
- En un intervalo dt , la posición varía de \vec{r} a $\vec{r} + \vec{v} dt$
- Descomponiendo \vec{v} según \vec{r} , $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, con $\vec{r} \cdot \vec{v}_\perp = 0$, el área dA barrida por \vec{r} es

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\vec{v}_\perp dt| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}_\perp| dt$$

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt = \frac{|\vec{L}| dt}{2M_P}$$

Tenemos por tanto

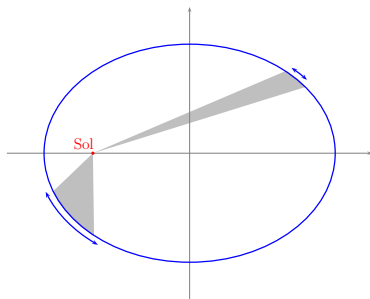
$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2M_P}$$



Ley de gravitación de Newton

Segunda ley de Kepler

- Si el momento angular se conserva, $|\vec{L}| = \text{cte}$ y el área barrida en intervalos de tiempo iguales es la misma en cualquier parte de la órbita



- **Ojo:** el sistema de referencia ligado al Sol no es inercial aunque no existan más fuerzas en el sistema Sol-Planeta que la atracción gravitatoria, pero veremos que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$

Ley de gravitación de Newton

Tercera ley de Kepler para una órbita circular

- Supongamos una órbita circular: punto P de masa M_P se mueve alrededor de un punto S de masa M_S , con $\vec{r} = \overrightarrow{SP}$, $|\vec{r}| = R$ constante, sometido a una fuerza

$$\vec{F}_{[S \rightarrow P]} = -GM_S M_P \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- $|\vec{r}|$ constante $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$
- Segunda ley

$$M_P \vec{a} = \vec{F}_{[S \rightarrow P]} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\perp, \vec{a}_\parallel = \vec{0}$$

y tenemos $|\vec{v}|^2 = R|\vec{a}_\perp| = \frac{GM_S}{R}$

- Periodo $T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow |\vec{v}| = \frac{2\pi R}{T}$
- Obtenemos por tanto

$$\frac{GM_S}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Ley de gravitación de Newton

Tercera ley de Kepler (órbita circular), $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

- No depende de la masa del planeta (idéntico para distintos “planetas” que orbitan alrededor de un mismo cuerpo, por ejemplo satélites alrededor de la Tierra $\rightarrow \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$)
- Para una órbita elíptica, $R \rightarrow a$ (semieje mayor)
- Sirve para medir la masa del objeto alrededor del cual se observan las órbitas
- **Ojo:** deducción “como si S permaneciera fijo”

Ley de gravitación de Newton

Ejemplo: la Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra a una altura de 415 km por encima de su superficie. Calcula el periodo de la órbita.

(N.B. A efectos de la atracción gravitatoria, puedes considerar la Tierra como si toda su masa estuviera en su centro)

Ley de gravitación de Newton Leyes de Kepler

Ejemplo: Estación Espacial Internacional

- Aplicamos la tercera ley de Kepler

$$T^2 = R^3 \frac{4\pi^2}{GM_T} = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{GM_T}$$

con

$$R_T = 6400 \text{ km}, \quad h = 415 \text{ km}, \quad M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

- Obtenemos

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 ((6.4 + 0.415) \times 10^6)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}} \text{ s} = 5560 \text{ s} = 93 \text{ min}$$

- N.B. Velocidad $|\vec{v}| = \frac{2\pi R}{T} = 7700 \text{ m s}^{-1}$

Campo gravitatorio

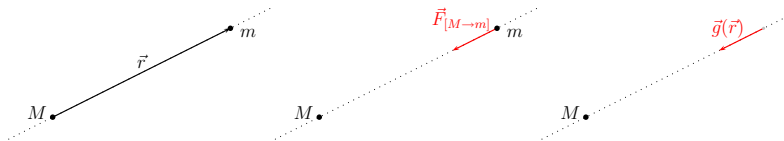
- Sean una masa M y una masa m en posición \vec{r} relativa a M
- La fuerza gravitatoria que M ejerce sobre m es

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -GMm \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u}_r$$

con $r = |\vec{r}|$ y $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ vector unitario en dirección radial \vec{r}

- Se define el campo gravitatorio creado por M en \vec{r}

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{[M \rightarrow m]}}{m} = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{GM}{r^2} \vec{u}_r$$



Campo gravitatorio

- Fuerza gravitatoria (ejercida por M) por unidad de masa
- Acción (instantánea) a distancia: si colocamos una masa m en \vec{r} , aparece sobre m una fuerza $\vec{F} = m\vec{g}(\vec{r})$
- Definido “en todo el espacio”
- Campo creado por un conjunto de n masas M_j en posiciones \vec{r}_j

$$\vec{g}_{\text{Tot}}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^n \vec{g}_j(\vec{r}), \quad \vec{g}_j(\vec{r}) = GM_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^3}$$

$\vec{g}_j(\vec{r})$ el campo creado en \vec{r} por la masa M_j situada en \vec{r}_j

- Campo creado por una distribución de masa

$$\vec{g}_{\text{Tot}}(\vec{r}) = \int_{\text{Vol.}(\vec{r})} d\vec{g}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad d\vec{g}(\vec{r}, \vec{r}') = G dm \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$d\vec{g}(\vec{r}, \vec{r}')$ el campo creado en \vec{r} por una masa dm situada en \vec{r}'

Campo gravitatorio

- Teoría (clásica) de campos (siglo XIX):
 - gravitación, electromagnetismo
 - En un principio, campo \leftrightarrow “artificio matemático”
 - Electromagnetismo de Maxwell \rightsquigarrow campo como entidad física real (detectable, medible)
 - Acción a distancia no instantánea
- Teoría cuántica de campos (siglo XX):
 - partículas como excitaciones de los campos

Campo gravitatorio

Ejemplo: calcula el campo gravitatorio creado por dos masas puntuales idénticas en un punto equidistante de ambas

Campo gravitatorio

Ejemplo: dos masas puntuales

- Escogemos ejes tales que las masas M se encuentran en posiciones $\pm d\vec{j}$, y el punto en el que queremos determinar el campo $\vec{r} = r\vec{i}$
- Campo total

$$\vec{g}(\vec{r}) = GM \frac{d\vec{j} - r\vec{i}}{|d\vec{j} - r\vec{i}|^3} + GM \frac{-d\vec{j} - r\vec{i}}{|d\vec{j} + r\vec{i}|^3}$$

$$\vec{g}(\vec{r}) = GM \frac{d\vec{j} - r\vec{i}}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} + GM \frac{-d\vec{j} - r\vec{i}}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

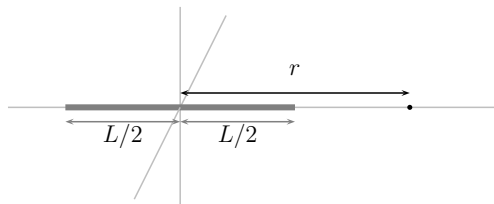
$$\vec{g}(\vec{r}) = -2GM \frac{r}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

Las componentes \vec{j} se cancelan (simetría)

- Límites
 - $r \ll d$, $\vec{g}(\vec{r}) \simeq -2GM \frac{r}{d^3} \vec{i}$ (lineal)
 - $r \gg d$, $\vec{g}(\vec{r}) \simeq -2GM \frac{1}{r^2} \vec{i}$ (como si fuera una única masa puntual $2M$ en el origen)

Campo gravitatorio

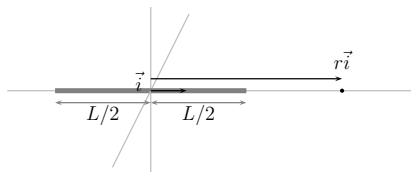
Ejemplo: calcula el campo gravitatorio creado por una varilla homogénea de masa M y longitud L en un punto situado a distancia r de su centro en la dirección de la propia varilla ($r > L/2$)



Campo gravitatorio

Ejemplo: varilla, dirección \vec{i}

- Simetría: si hay alguna componente en dirección \perp a \vec{i} y rotamos la varilla alrededor de \vec{i} , esas componentes cambiarían sin que se hubiera producido ningún cambio en el sistema \Rightarrow campo necesariamente en dirección \vec{i}
- Densidad lineal de la varilla: $\lambda = \frac{M}{L}$



Campo gravitatorio

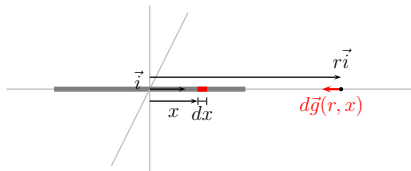
Ejemplo: varilla, dirección \vec{i}

- Elemento de varilla en posición $x \in [-L/2; L/2]$, de longitud dx
- Campo gravitatorio creado por ese elemento en el punto $\vec{r} = r\vec{i}$,

$$d\vec{g}(r, x) = G \lambda dx \frac{(x - r)\vec{i}}{|x - r|^3}$$

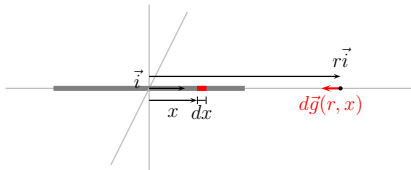
Para $r > L/2$, $r > x$ cuando $x \in [-L/2; L/2]$,

$$d\vec{g}(r, x) = -G \lambda dx \frac{1}{(r - x)^2} \vec{i}$$



Campo gravitatorio

Ejemplo: varilla, dirección \vec{i}



- Integramos dx entre $-L/2$ y $L/2$,

$$\vec{g}(r) = -G \lambda \vec{i} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(r-x)^2} = -G \lambda \vec{i} \left[\frac{1}{r-x} \right]_{-L/2}^{L/2} = -\frac{MG \vec{i}}{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

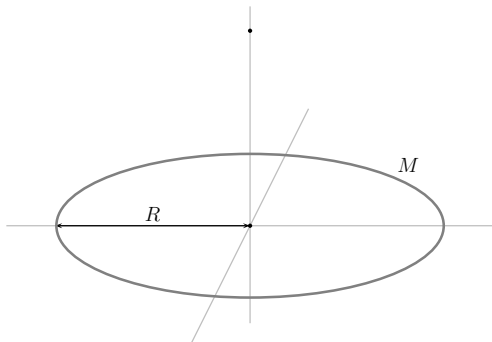
Resultado final

$$\vec{g}(r) = -\frac{MG}{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \vec{i}$$

- Límite $r \gg L$, $\vec{g}(r) \rightarrow -MG \frac{\vec{r}}{r^3}$, como si la varilla fuera puntual

Campo gravitatorio

Ejemplo: calcula el campo gravitatorio creado por un anillo homogéneo de masa M y radio R en un punto del eje ortogonal al plano del anillo que pasa por su centro.



Campo gravitatorio

Ejemplo: anillo

- Simetría: si hay alguna componente en el plano del anillo y rotamos este alrededor del eje ortogonal por su centro, esas componentes cambiarían sin que se hubiera producido ningún cambio en el sistema \Rightarrow campo necesariamente en dirección de ese eje de simetría
- Origen de coordenadas en el centro del anillo, $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ en el plano del anillo
- Densidad lineal del anillo $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$
- Elemento de anillo parametrizado por ángulo $\theta \in [0; 2\pi]$: posición $R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta)$, longitud $R d\theta$
- Punto en el que queremos calcular el campo: $\vec{r} = z\vec{k}$

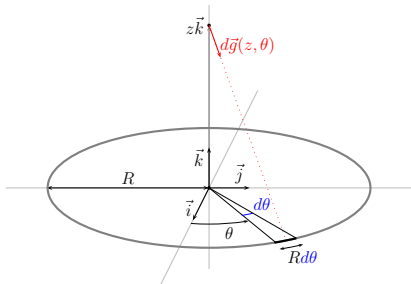
Campo gravitatorio

Ejemplo: anillo

- Campo gravitatorio creado por el elemento de anillo en el punto \vec{r}

$$d\vec{g}(z, \theta) = G \lambda R d\theta \frac{R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) - z\vec{k}}{|R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) - z\vec{k}|^3}$$

$$d\vec{g}(z, \theta) = G \lambda R d\theta \frac{R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) - z\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Campo gravitatorio

Ejemplo: anillo

- Campo total $\int d\vec{g}(z, \theta)$

$$\vec{g}(z) = G \lambda R \int_0^{2\pi} d\theta \frac{R(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) - z\vec{k}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -G \lambda 2\pi R \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

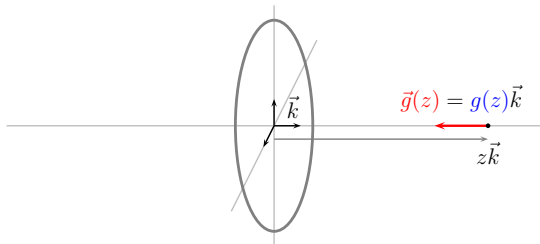
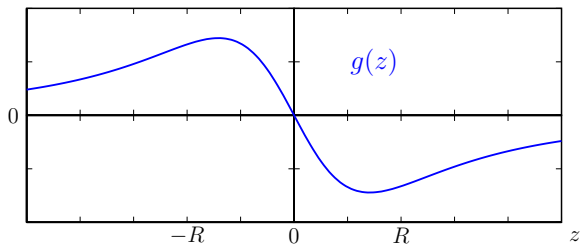
$$\vec{g}(z) = -MG \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

- Límites

- $z \gg R$, $\vec{g}(z) \simeq -MG \frac{1}{z^2} \vec{k}$, como si toda la masa del anillo estuviera en el origen
- $z \ll R$, $\vec{g}(z) \simeq -MG \frac{z}{R^3} \vec{k}$, lineal

Campo gravitatorio

Ejemplo: anillo

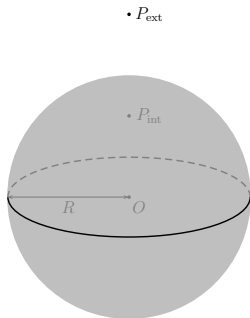


Campo gravitatorio

- En el ejemplo del campo creado por un anillo, un argumento de simetría permite simplificar el cálculo
- En general, si tenemos un cuerpo C y queremos determinar el campo en un punto P tales que existe alguna transformación bajo la cual son invariantes, es decir una *simetría*, cualquier componente del campo que no sea invariante bajo esa transformación tiene que ser necesariamente nula.
- En el ejemplo del campo creado por un anillo en un punto del eje considerado, bajo una rotación alrededor de ese eje, el anillo permanece invariante (aunque cada punto del mismo se transforme en otro) y el punto considerado también. Tan solo la componente del campo en la dirección del eje (\vec{k}) es invariante en esa transformación, por tanto el campo no puede tener componentes no nulas según \vec{i} o \vec{j} .

Campo gravitatorio

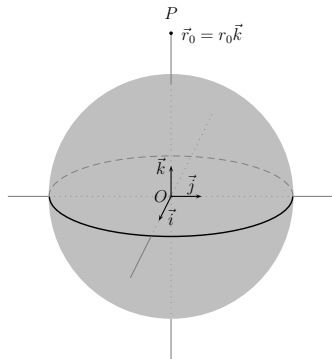
Ejemplo: campo gravitatorio creado por una superficie esférica de radio R y masa M



- Simetría bajo una rotación alrededor del eje que une el centro de la superficie esférica con el punto \Rightarrow campo en esa dirección
- Superficie esférica homogénea de masa M y radio R , densidad superficial de masa $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$

Campo gravitatorio

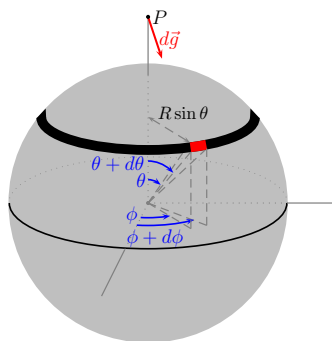
Ejemplo: campo gravitatorio, superficie esférica



- Origen de coordenadas en el centro
- Campo en un punto \vec{r}_0 , $|\vec{r}_0| = r_0$, ejes tales que $\vec{r}_0 = r_0 \vec{k}$

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio, superficie esférica



- Elemento de superficie $dS = R^2 \sin \theta d\phi d\theta$ en posición

$$\vec{r} = R(\vec{i} \sin \theta \cos \phi + \vec{j} \sin \theta \sin \phi + \vec{k} \cos \theta)$$

- Campo creado por el elemento de superficie en el punto \vec{r}_0

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio, superficie esférica

- Campo creado por el elemento de superficie en el punto \vec{r}_0

$$d\vec{g}(\vec{r}_0, \vec{r}) = d\vec{g}(\vec{r}_0, \theta, \phi) = G \sigma R^2 \sin \theta d\phi d\theta \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}_0 &= R \sin \theta (\vec{i} \cos \phi + \vec{j} \sin \phi) + \vec{k}(R \cos \theta - r_0) \\ |\vec{r} - \vec{r}_0|^2 &= |\vec{r}|^2 + |\vec{r}_0|^2 - 2\vec{r}_0 \cdot \vec{r} = r_0^2 + R^2 - 2R r_0 \cos \theta\end{aligned}$$

- Campo total

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = \int_S d\vec{g}(\vec{r}_0, \vec{r}) = G \sigma R^2 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

$$\text{N.B. } \int_S dS = R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2$$

Campo gravitatorio

Ejemplo: superficie esférica

- Tan solo $\vec{r} - \vec{r}_0$ depende de ϕ

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = G \sigma R^2 \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \int_0^{2\pi} d\phi (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi (\vec{r} - \vec{r}_0) = R \sin \theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi (\vec{i} \cos \phi + \vec{j} \sin \phi)}_{\vec{0}} + \vec{k} (R \cos \theta - r_0) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{r}_0) &= G \sigma 2\pi R^2 \vec{k} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (R \cos \theta - r_0)}{(r_0^2 + R^2 - 2R r_0 \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{M G}{2r_0^2} \vec{k} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (q \cos \theta - 1)}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\text{con } q = R/r_0$$

Campo gravitatorio

Ejemplo: superficie esférica

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = \frac{MG}{2r_0^2} \vec{k} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (q \cos \theta - 1)}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}}$$

- “Arreglamos” el numerador

$$\begin{aligned} q \cos \theta - 1 &= -\frac{1}{2}(1 + q^2 - 2q \cos \theta) + \frac{1 + q^2}{2} - 1 = \\ &= -\frac{1}{2}(1 + q^2 - 2q \cos \theta) + \frac{q^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

para obtener

$$\frac{\sin \theta (q \cos \theta - 1)}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}} = -\frac{\sin \theta}{2(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{1/2}} + \frac{(q^2 - 1) \sin \theta}{2(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}}$$

Campo gravitatorio

Ejemplo: superficie esférica

- Calculamos

$$\begin{aligned} [I_\theta] &= \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (q \cos \theta - 1)}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta \left\{ -\frac{\sin \theta}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{1/2}} + \frac{(q^2 - 1) \sin \theta}{(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{-1}{2q} \left[(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{1/2} \right]_0^\pi + \frac{-(q^2 - 1)}{2q} \left[(1 + q^2 - 2q \cos \theta)^{-1/2} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{1 + q - |1 - q|}{2q} + \frac{1 - q^2}{2q} \left(\frac{1}{1 + q} - \frac{1}{|1 - q|} \right) \\ &= -1 + \frac{|1 - q|}{2q} \left(1 - \frac{1 - q^2}{(1 - q)^2} \right) = -1 - \frac{|1 - q|}{1 - q} \end{aligned}$$

- Para $q < 1$, $[I_\theta] = -2$, para $q > 1$, $[I_\theta] = 0$

Campo gravitatorio

Ejemplo: una superficie esférica

- Con $q = R/r_0$:
 - $q > 1$, \vec{r}_0 en el interior de la superficie esférica, $[I_\theta] = 0$
 - $q < 1$, \vec{r}_0 en el exterior de la superficie esférica, $[I_\theta] = -2$

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = \frac{M G}{2r_0^2} [I_\theta] \vec{k}$$

Por tanto

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r_0 < R, \\ -MG \frac{r_0}{r_0^3} & \text{si } r_0 > R. \end{cases}$$

- En el interior no hay campo gravitatorio, es $\vec{0}$
- En el exterior, el campo es idéntico al creado por toda la masa M de la superficie esférica situada en su propio centro

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio creado por una esfera

- Esfera homogénea de masa M y radio R , origen de coordenadas en el centro; densidad $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$
- Campo en un punto \vec{r}_0 , $|\vec{r}_0| = r_0$, ejes tales que $\vec{r}_0 = r_0 \vec{k}$
- Empleamos el campo gravitatorio $d\vec{g}(\vec{r}_0)$ creado por una superficie homogénea (ejemplo anterior) para obtener el campo gravitatorio que crea una corona esférica de radio r (superficie $4\pi r^2$) y de espesor dr en \vec{r}_0 :

$$d\vec{g}(\vec{r}_0, r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r_0 < r, \\ -(\rho 4\pi r^2 dr) G \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} & \text{si } r_0 > r. \end{cases}$$

- Para obtener el campo total creado por la esfera, integramos dr en $[0; R]$; tenemos que distinguir si r_0 es mayor o menor que R .

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio creado por una esfera

- Para $r_0 > R$

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = -\rho 4\pi G \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \int_0^R dr r^2 = -\rho \frac{4}{3}\pi R^3 G \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} = -MG \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} = -\frac{MG}{r_0^2} \vec{k}$$

El campo, para $r_0 > R$, corresponde simplemente al campo creado por toda la masa de la esfera situada en su centro

- Para $r_0 < R$, separamos

$$\int_0^R dr = \int_0^{r_0} dr + \int_{r_0}^R dr$$

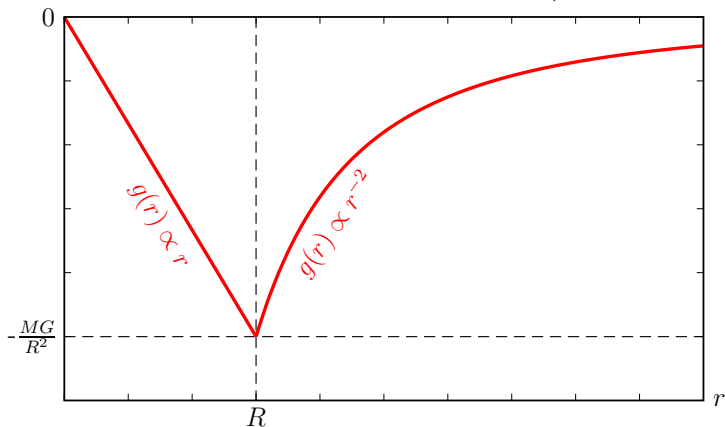
En la integral en $r \in [r_0; R]$, el campo es $d\vec{g}(\vec{r}_0, r) = \vec{0}$ y queda

$$\vec{g}(\vec{r}_0) = -\rho 4\pi G \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} \int_0^{r_0} dr r^2 = -\rho \frac{4}{3}\pi G \vec{r}_0 = -MG \frac{\vec{r}_0}{R^3} = -\frac{MG r_0}{R^3} \vec{k}$$

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio creado por una esfera

Esfera homogénea $\vec{g}(\vec{r}) = g(r) \frac{\vec{r}}{r}$



Ejemplo: campo gravitatorio creado por una esfera

- El campo en el interior de la esfera tiene una dependencia lineal con la distancia al centro, y es continuo en la superficie, donde $|\vec{g}(\vec{r}_0)|$ es máximo
- N.B. Si la esfera no es homogénea pero tiene simetría esférica, i.e. densidad variable $\rho(\vec{r}) = \rho(r) > 0$, la dependencia no es lineal, pero el campo sigue siendo continuo en R , donde $|\vec{g}(\vec{r}_0)|$ sigue siendo máximo

Campo gravitatorio

Ejemplo: campo gravitatorio de la Tierra

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

- La Tierra

$$M_T = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad R_T = 6370 \text{ km}$$

- En la superficie,

$$\vec{g}_0 = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{k} = -g_0 \vec{k}, \quad g_0 = 9.83 \text{ m s}^{-2}$$

- A una altura $h \geq 0$

$$\vec{g}(h) = -g(h) \vec{k}, \quad g(h) = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2}$$

Energía potencial gravitatoria

- ¿La fuerza de atracción gravitatoria es conservativa?
- Recordemos, conservativa \Rightarrow el trabajo que realiza es independiente del camino
- Si es conservativa, podemos definir la correspondiente energía potencial
- La respuesta es **sí**

Energía potencial gravitatoria

- Si consideramos una masa m en posición \vec{r} con respecto a una masa M , la fuerza gravitatoria que M ejerce sobre m es

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -GmM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

- En coordenadas cartesianas (base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ y origen en la posición de M)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

por tanto

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -GmM \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Energía potencial gravitatoria

- Notamos que

$$- \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$- \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$- \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

de modo que

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = \left[\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left(\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = \vec{\nabla} \left(\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Fuerza gravitatoria es una “derivada” \Rightarrow conservativa

Energía potencial gravitatoria

- Fuerza gravitatoria es una “derivada”

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = \vec{\nabla} \left(\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

- Energía potencial gravitatoria

$$U(x, y, z) = -\frac{GmM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow U(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r}$$
$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

Energía potencial gravitatoria

- Otra forma de “llegar” a la energía potencial gravitatoria: considerando de nuevo la masa m en posición \vec{r} con respecto a M , se mueve sometida a la fuerza $\vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -GmM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$
- La energía cinética de m es

$$E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

¿Cómo varía E_c en el tiempo?

(Recordemos la conexión entre trabajo y energía cinética)

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d|\vec{v}|^2}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Usando la segunda ley de Newton $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{[M \rightarrow m]}$,

$$\frac{dE_c}{dt} = -GmM \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Energía potencial gravitatoria

- Notamos ahora que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) = \frac{d}{dt} \left((\vec{r} \cdot \vec{r})^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} (\vec{r} \cdot \vec{r})^{-\frac{3}{2}} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} \right) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3}$$

de modo que

$$\frac{dE_c}{dt} = GmM \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(E_c - \frac{GmM}{r} \right) = 0$$

- La cantidad $E_c - \frac{GmM}{r}$ es constante (conservada) en presencia de la atracción gravitatoria
- $E_c - \frac{GmM}{r}$ es la energía mecánica, en la cual $-\frac{GmM}{r}$ corresponde a la energía potencial gravitatoria

Energía potencial gravitatoria (**)

En términos del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria

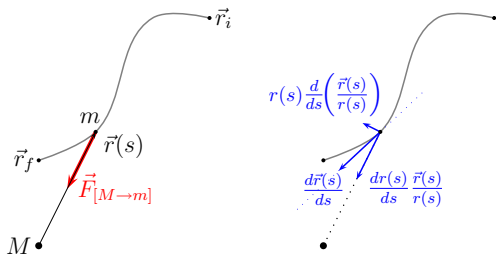
- Una masa m recorre un camino $\vec{r}(s)$, descrito en términos de un parámetro s , entre $\vec{r}_i = \vec{r}(s_i)$ y $\vec{r}_f = \vec{r}(s_f)$, con $\vec{r}(s)$ la posición relativa a una masa M
- El trabajo que realiza la fuerza de atracción gravitatoria a lo largo de ese camino es

$$W_{if} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{[M \rightarrow m]} \cdot d\vec{r} \quad \text{con} \quad \vec{F}_{[M \rightarrow m]} = -GMm \frac{\vec{r}(s)}{|\vec{r}(s)|^3}$$

- Con $|\vec{r}(s)| = r(s)$, $\vec{r}(s) = r(s) \frac{\vec{r}(s)}{r(s)}$ donde $\frac{\vec{r}(s)}{r(s)}$ es el vector unitario en dirección $\vec{r}(s)$. El elemento $d\vec{r}$ de camino es

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} ds = \left(\frac{dr(s)}{ds} \frac{\vec{r}(s)}{r(s)} + r(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \right) \right) ds$$

Energía potencial gravitatoria (**)



- Tenemos

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} \cdot d\vec{r} = -GmM \frac{\vec{r}(s)}{[r(s)]^3} \cdot \left(\frac{dr(s)}{ds} \frac{\vec{r}(s)}{r(s)} + r(s) \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \right) \right) ds$$

$$\vec{F}_{[M \rightarrow m]} \cdot d\vec{r} = -GmM \frac{1}{[r(s)]^2} \frac{dr(s)}{ds} ds = \frac{d}{ds} \left(\frac{GmM}{r(s)} \right) ds$$

$$\text{N.B.} \quad \frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \cdot \frac{\vec{r}(s)}{r(s)} \right) = 0$$

Energía potencial gravitatoria (**)

- Por tanto

$$W_{if} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{[M \rightarrow m]} \cdot d\vec{r} = \int_{s_i}^{s_f} \frac{d}{ds} \left(\frac{GmM}{r(s)} \right) ds = \frac{GmM}{|\vec{r}_f|} - \frac{GmM}{|\vec{r}_i|}$$

- W_{if} no depende del camino, con lo que $\vec{F}_{[M \rightarrow m]}$ es conservativa

Energía potencial gravitatoria

- Permite definir una diferencia de energía potencial

$$U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i) = -W_{if} = -\frac{GmM}{|\vec{r}_f|} + \frac{GmM}{|\vec{r}_i|}$$

- Recordemos que las cantidades que tienen sentido físico son las diferencias de energía potencial
- Adoptamos por comodidad $U(\vec{r}) - U_{\text{ref}} \rightarrow U(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r}$ como la energía potencial gravitatoria, tomando $U_{\text{ref}} = \lim_{r \rightarrow \infty} U(\vec{r}) = 0$
- Al tratar problemas “cerca de la superficie terrestre” es más conveniente tomar como potencial de referencia el correspondiente a la propia superficie terrestre

Energía mecánica y órbitas

- Consideremos el sistema formado por dos masas puntuales m y M , $m \ll M$, aislado; las únicas fuerzas presentes son las atracciones gravitatorias mutuas. Con $M \gg m$, podemos considerar M en reposo. \vec{r} es la posición de m con respecto a M , y su velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.
- La energía mecánica E del sistema es una cantidad conservada

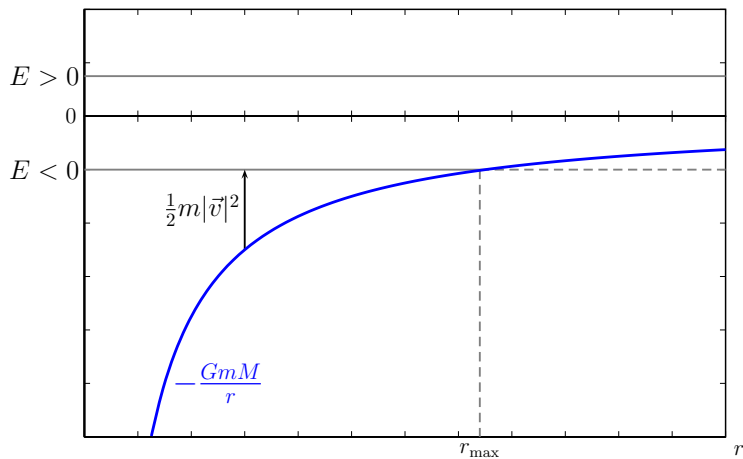
$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GmM}{|\vec{r}|}$$

- La energía cinética $E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \geq 0$ es positiva por definición
- Si $E < 0$, existe una distancia máxima r_{\max} para la cual la energía cinética se anula y la energía potencial es máxima

$$r_{\max} = -\frac{GmM}{E} \quad \text{con } E < 0$$

\Rightarrow trayectorias (órbitas) acotadas

Energía mecánica y órbitas



Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: órbita circular

- Distancia constante $|\vec{r}| = R$
- Segunda ley + movimiento circular \Rightarrow

$$|\vec{v}|^2 = \frac{GM}{R}$$

- Energía mecánica

$$E = \frac{GmM}{2R} - \frac{GmM}{R} = -\frac{GmM}{2R}$$

- Para una órbita elíptica

$$E = -\frac{GmM}{2a} \quad \text{con } a \text{ el semieje mayor}$$

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: Queremos situar un satélite de masa $m = 1000$ kg en órbita circular geoestacionaria.

- ¿A qué altura sobre la superficie terrestre está la órbita?
- ¿Qué velocidad tiene el satélite?
- Si se parte del reposo en la estación de lanzamiento y se desprecia la resistencia del aire, ¿cuál es la energía necesaria para situarlo en su órbita?

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: satélite geoestacionario

- Acudimos directamente a la tercera ley de Kepler para una órbita circular

$$\frac{t^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow h = \left(\frac{GM_T t^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - R_T$$

con $t = 24$ h el periodo; sustituyendo valores

$$h = 3.59 \times 10^7 \text{ m} \quad (h \simeq 5.6R_T)$$

- Velocidad

$$v = \frac{2\pi(R_T + h)}{t} = \left(\frac{2\pi GM_T}{t} \right)^{\frac{1}{3}} = 3.07 \times 10^3 \text{ m/s}$$

- Energía necesaria para alcanzar la órbita: diferencia entre la energía mecánica correspondiente a la órbita E_o y la energía mecánica inicial E_i (considerando satélite inicialmente en reposo)

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: satélite geoestacionario

■ Energía

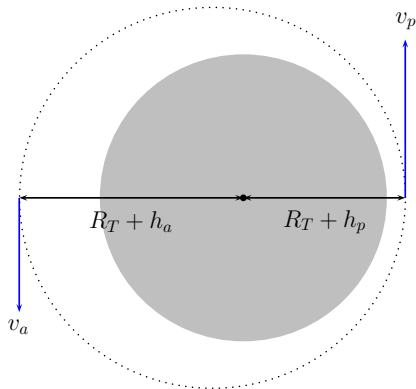
$$E_o = -\frac{GmM_T}{2(R_T + h)}, \quad E_i = -\frac{GmM_T}{R_T}$$

$$E_o - E_i = GmM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2(R_T + h)} \right)$$

$$E_o - E_i = \frac{GmM_T(R_T + 2h)}{2R_T(R_T + h)} = 5.8 \times 10^{10} \text{ J}$$

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: Un satélite se mueve describiendo una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Las distancias mínima y máxima a la superficie de la Tierra son 400 km y 3000 km, respectivamente. Calcula la velocidad del satélite en el apogeo y en el perigeo.



Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: satélite

- Órbita elíptica alrededor de la Tierra: energía $E = -\frac{GM_T m}{2A}$ con m la masa del satélite y A el semieje mayor de la órbita
- Distancias máxima y mínima al centro de la Tierra,

$$d_a = R_T + h_a, \quad d_p = R_T + h_p$$

con $R_T = 6.37 \times 10^6$ m, $h_a = 3.0 \times 10^6$ m, $h_p = 4.0 \times 10^5$ m

- Semieje mayor

$$A = \frac{d_a + d_p}{2} = R_T + \frac{h_a + h_p}{2} = 8.07 \times 10^6 \text{ m}$$

- Obtenemos la velocidad v del satélite cuando se encuentra a distancia h de la superficie a partir de la conservación de la energía mecánica

$$E = -\frac{GM_T m}{2A} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h}$$

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: satélite

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2GM_T}{2R_T + h_a + h_p}} \sqrt{\frac{R_T + h_a + h_p - h}{R_T + h}}$$

- Para $h = h_a$

$$v_a = \sqrt{\frac{2GM_T}{2R_T + h_a + h_p}} \sqrt{\frac{R_T + h_p}{R_T + h_a}} = 5.98 \text{ km/s}$$

- Para $h = h_p$

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_T}{2R_T + h_a + h_p}} \sqrt{\frac{R_T + h_a}{R_T + h_p}} = 8.27 \text{ km/s}$$

Energía mecánica y órbitas

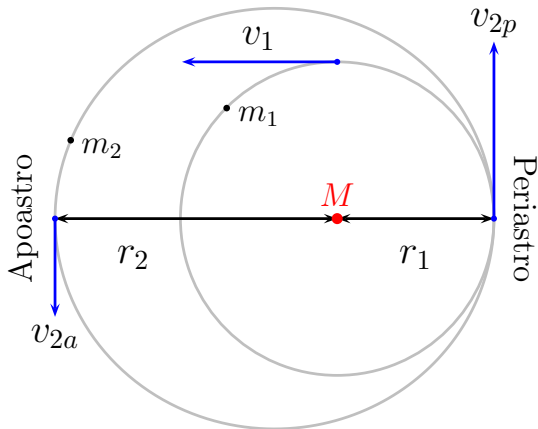
Ejemplo: dos planetas giran alrededor de la misma estrella. El primero con una órbita circular de radio $r_1 = 10^{11}$ m y periodo de rotación de dos años. El segundo con una órbita elíptica con $r_2 = 1.8 \times 10^{11}$ m (ver figura).

- Calcula el periodo de rotación del segundo planeta.
- Calcula la masa de la estrella.
- Calcula la velocidad del primer planeta.
- Calcula la velocidad del segundo planeta en el periastro y en el apoastro (posiciones de mínima y máxima distancia a la estrella, respectivamente).
- Calcula la energía mínima que habría que aportar para alejar indefinidamente el segundo planeta de la estrella si tiene una masa igual a la de la Tierra.

N.B. La interacción gravitacional entre ambos planetas se considera despreciable

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: estrella-dos planetas



Información: distancias r_1 , r_2 , periodo T_1

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: estrella-dos planetas

- Para determinar el periodo de rotación T_2 del segundo planeta, usamos la tercera ley de Kepler para la órbita circular del primer planeta y para la órbita elíptica del segundo, que tiene semieje mayor $\frac{r_1+r_2}{2}$.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM}, \quad \frac{2^3 T_2^2}{(r_1 + r_2)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

con M la masa de la estrella.

Despejamos T_2

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{2^3 T_2^2}{(r_1 + r_2)^3} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Con $r_2/r_1 = 1.8$,

$$T_2 = 1.65 T_1 = 3.31 \text{ años}$$

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: estrella-dos planetas

- Calculamos también la masa de la estrella

$$M = \frac{4\pi^2 r_1^3}{GT_1^2} = 1.49 \times 10^{29} \text{ kg } (= 0.075 M_S)$$

- Velocidad $v_1 = |\vec{v}_1|$ del primer planeta: con la energía mecánica $E_1 = -\frac{GMm_1}{2r_1}$ obtenemos

$$-\frac{GMm_1}{2r_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm_1}{r_1} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 9.96 \times 10^3 \text{ m/s}$$

- La velocidad $v_2 = |\vec{v}_2|$ del segundo planeta depende de la posición, la energía potencial gravitatoria también, pero a través de la conservación de la energía mecánica, conociendo las posiciones de periastro y apoastro, tenemos información suficiente para determinar las correspondientes velocidades.

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: estrella-dos planetas

- Velocidad del segundo planeta; la energía mecánica es (para una órbita elíptica, en lugar del radio tenemos el semieje mayor en el denominador)

$$E_2 = -\frac{GMm_2}{r_1 + r_2}$$

Periastro

$$\begin{aligned} -\frac{GMm_2}{r_1 + r_2} &= \frac{1}{2}m_2v_{2p}^2 - \frac{GMm_2}{r_1} \\ \Rightarrow v_{2p} &= \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \end{aligned}$$

Apoastro (cambiamos $r_1 \leftrightarrow r_2$ y $v_{2p} \rightarrow v_{2a}$)

$$-\frac{GMm_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2}m_2v_{2a}^2 - \frac{GMm_2}{r_2} \Rightarrow v_{2a} = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1 + r_2)}}$$

Energía mecánica y órbitas

Ejemplo: estrella-dos planetas

- Sustituyendo valores

$$v_{2p} = 11.3 \times 10^3 \text{ m/s}, \quad v_{2a} = 6.27 \times 10^3 \text{ m/s}$$

- Energía mínima para alejar indefinidamente (es decir, a distancia ∞) el segundo planeta de la estrella: $-E_2$ (de modo que a distancia ∞ tenga velocidad nula)

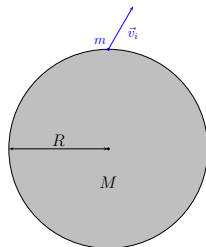
$$\frac{GMm_2}{r_1 + r_2} = \frac{GMM_T}{r_1 + r_2} = 2.12 \times 10^{32} \text{ J}$$

Energía liberada en

- una nova $\sim 10^{38} - 10^{39} \text{ J}$,
- una supernova $\sim 10^{44} \text{ J}$

Velocidad de escape

- Consideremos un cuerpo de masa M y radio R , con simetría esférica, “un planeta”. Una masa $m \ll M$ se lanza desde su superficie con velocidad inicial \vec{v}_i y no actúan más fuerzas que la atracción gravitatoria. Podemos plantearnos dos preguntas
- ¿Qué distancia máxima con respecto al centro del cuerpo puede alcanzar dada \vec{v}_i ?
- ¿Cuál es la velocidad inicial mínima para que la masa m pueda escapar de la atracción del “planeta”?



Velocidad de escape

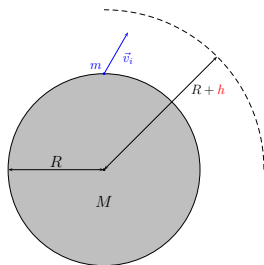
- Para contestar ambas preguntas veamos qué velocidad $|\vec{v}|$ tiene m en función de la distancia $R + h$ al centro del cuerpo
- Aplicamos la conservación de la energía mecánica entre ambas situaciones

$$E_i = \frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$E = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - \frac{GmM}{R+h}$$

$$E_i = E \Rightarrow$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_i|^2 - \frac{2GM}{R} + \frac{2GM}{R+h} = |\vec{v}_i|^2 - 2GM \frac{h}{R(R+h)}$$



Velocidad de escape

- Distancia máxima: si $E_i \geq 0$, $h \rightarrow \infty$; si $E_i < 0$, es la distancia $R + h_{\max}$ para la cual $|\vec{v}| = 0$, i.e.

$$0 = \frac{1}{2}|\vec{v}_i|^2 - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{R + h_{\max}} \Leftrightarrow R + h_{\max} = \frac{R}{1 - \frac{R|\vec{v}_i|^2}{2GM}}$$

- Velocidad de escape v_e , i.e. velocidad inicial mínima para alcanzar $h_{\max} \rightarrow \infty$ con $|\vec{v}| = 0$, i.e.

$$0 = \frac{1}{2}v_e^2 - \frac{GM}{R} \Leftrightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Con la aceleración de la gravedad en la superficie $g_0 = \frac{GM}{R^2}$,

$$v_e = \sqrt{2g_0R}$$

- Ojo: si la distancia inicial con respecto al centro es $d > R$ en lugar de R , $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{d}} = \sqrt{\frac{2g_0R^2}{d}}$

Velocidad de escape

- Ejemplo: velocidad de escape de la Tierra, $R_T = 6.37 \times 10^6$ m, $g_0 = 9.8 \text{ m s}^{-2}$

$$v_e = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.37 \times 10^6} = 11.2 \text{ km s}^{-1}$$

- Ejemplo: velocidad de escape de la Luna, $R_L = 1.74 \times 10^6$ m, $M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 7.35 \times 10^{22}}{1.74 \times 10^6}} = 2.37 \text{ km s}^{-1}$$

- Ejemplo: velocidad de escape del Sol, $R_S = 6.95 \times 10^8$ m, $M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{6.95 \times 10^8}} = 618 \text{ km s}^{-1}$$

Velocidad de escape

Ejemplo: se dispara un proyectil hacia arriba desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial $v_i = 8 \text{ km/s}$; despreciando la resistencia del aire, calcula qué altura alcanza. ¿Qué altura alcanza si la velocidad inicial es $v_i = 0.7 \text{ km/s}$?

Velocidad de escape

Ejemplo: proyectil-altura

- Aplicamos la conservación de la energía mecánica (repetiendo lo expuesto al obtener la velocidad de escape) para obtener

$$R_T + h_{\max} = \frac{R_T}{1 - \frac{R_T v_i^2}{2GM}} \Leftrightarrow h_{\max} = R_T \frac{\frac{R_T v_i^2}{2GM}}{1 - \frac{R_T v_i^2}{2GM}}$$

- Para $v_i = 8 \text{ km/s}$

$$h_{\max} = 6.66 \times 10^3 \text{ km}$$

- Para $v_i = 0.7 \text{ km/s}$

$$h_{\max} = 25 \text{ km}$$

Velocidad de escape

Ejemplo: se dispara un proyectil hacia arriba desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial $v_i = 15 \text{ km/s}$; despreciando la resistencia del aire, calcula qué velocidad tendrá cuando se encuentre lejos de la Tierra.

Velocidad de escape

Ejemplo: proyectil-velocidad

- En este caso la velocidad inicial v_i es superior a la velocidad de escape, y obtenemos la velocidad v_f del proyectil cuando este se encuentre lejos de la Tierra a partir (de nuevo) de la conservación de la energía mecánica

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T + h} \quad \text{con } h \rightarrow \infty, \quad E_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$E_i = E_f \Rightarrow v_f = \sqrt{v_i^2 - \frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{v_i^2 - v_e^2}$$

con v_e la velocidad de escape

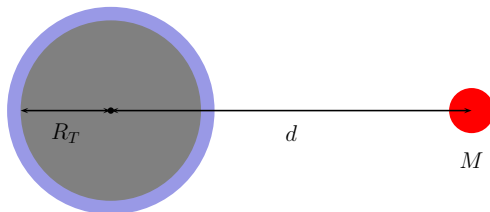
- Con $v_i = 15 \text{ km/s}$

$$v_f = 10 \text{ km/s}$$

- Marea: cambio periódico del nivel del mar
- Fenómeno “conocido”, por ejemplo Piteas (siglo IV a.C.), Seleuco (siglo II a.C.), Plinio el Viejo (siglo I d.C.) ya relacionaron periodicidad de las mareas con la influencia de la Luna y el Sol; primera explicación “moderna” debida a Newton.
- Fenómeno complejo, nos limitamos a entender los aspectos más básicos:
 - *Pleamar* (marea alta), altura máxima del nivel del mar
 - *Bajamar* (marea baja), altura mínima del nivel del mar
 - Tiempo entre pleamar y bajamar ~ 6 horas

Mareas

- Tierra \Leftrightarrow esfera con hidrosfera (¡no es un sólido rígido!), veamos la influencia de un cuerpo de masa M sobre esta última



- Atracción “media” en dirección a M , aceleración

$$g_0 = \frac{GM}{d^2}$$

- ¿Qué ocurre en los puntos más cercanos o alejados de M ?

Mareas

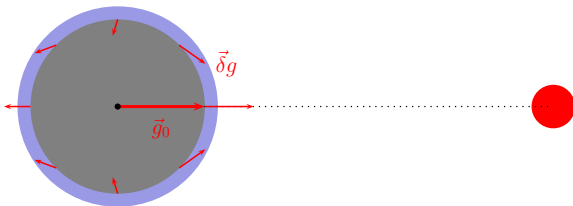
- Puntos a distancia $d \pm R_T$, aceleración

$$g_{\pm} = \frac{GM}{(d \pm R_T)^2} = \frac{GM}{d^2} \frac{1}{\left(1 \pm \frac{R_T}{d}\right)^2} = g_0 \frac{1}{\left(1 \pm \frac{R_T}{d}\right)^2}$$

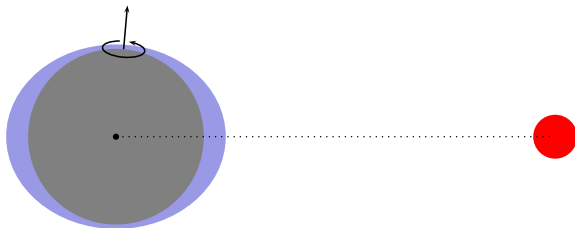
$$\frac{1}{\left(1 \pm \frac{R_T}{d}\right)^2} = 1 \mp 2\frac{R_T}{d} + 3\frac{R_T^2}{d^2} + \dots$$

(Desarrollo multipolar)

En general $\vec{g} = \vec{g}_0 + \delta\vec{g}$; con respecto a \vec{g}_0 ,



- $\delta\vec{g}$ (+ hidrodinámica), + rotación de la Tierra:



- Alternancia periódica de máximos y mínimos del nivel del mar

Mareas

- Atracción del Sol ($M_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg, $d_S = 1.5 \times 10^{11}$ m)

$$g_{0S} = \frac{GM_S}{d_S^2} = 5.9 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2} = 6.0 \times 10^{-4} g$$

Variación máxima

$$\delta g_S = \pm \frac{GM_S}{d_S^2} \frac{R_T}{d_S} = \pm 2.5 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-2} = 2.5 \times 10^{-8} g$$

- Atracción de la Luna ($M_L = 7.35 \times 10^{22}$ kg, $d_L = 3.84 \times 10^8$ m)

$$g_{0L} = \frac{GM_L}{d_L^2} = 3.4 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2} = 3.5 \times 10^{-6} g$$

Variación máxima

$$\delta g_L = \pm \frac{GM_L}{d_L^2} \frac{R_T}{d_L} = \pm 5.7 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-2} = 5.8 \times 10^{-8} g$$

- Aunque $g_{0S} \gg g_{0L}$, $\delta g_L \sim 2\delta g_S$

- Combinación de la variación local en la atracción tanto del Sol como de la Luna explica la periodicidad de las mareas
- Detalle “más fino” (e.g. variaciones mensuales)
 - depende de la posición relativa de Sol y Luna
 - de la orientación: eje de giro de la Tierra inclinado 23.27° con respecto a la eclíptica (plano de la órbita Tierra-Sol), plano de la órbita de la Luna inclinado 5.45° con respecto a la eclíptica
 - órbitas elípticas

Mareas

Marea “muerta”



● Luna



Sol

Marea “viva”

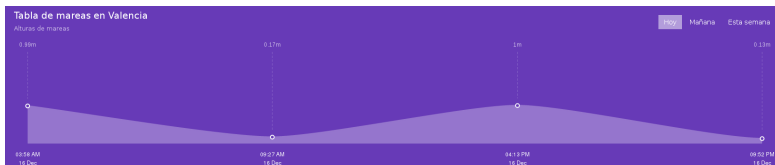


● Luna



Sol

Mareas



La marea está bajando en Valencia en este momento. Como puede ver, la marea más alta (1m) fue a las 4:13 pm y la marea más baja de 0.13m es a las 9:52 pm. El sol salió a las 8:14 am y la puesta de sol fue a las 5:38 pm. Hoy hubo 09 horas y 24 minutos de sol y la temperatura media de hoy es 15°C. La temperatura del agua en estos momentos es 15°C y la temperatura media del agua de hoy es 15°C.

Próxima pleamar
4:43 AM

Próxima bajamar
9:52 PM

- m_1 en \vec{r}_1 con velocidad \vec{v}_1 , m_2 en \vec{r}_2 con velocidad \vec{v}_2
- las únicas fuerzas sobre el sistema de dos masas son las atracciones gravitatorias

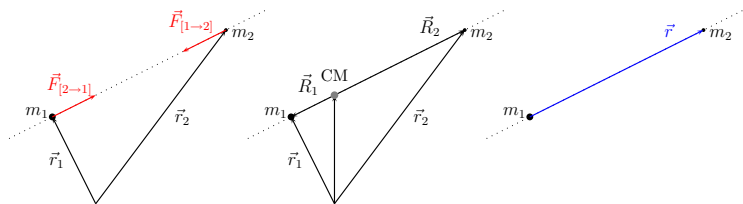
$$\vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad \vec{F}_{[1 \rightarrow 2]} = -\vec{F}_{[2 \rightarrow 1]}$$

- Centro de masas

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

- Posiciones y velocidades relativas al CM

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{r}_{\text{CM}}, & \vec{R}_2 &= \vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{CM}}, & m_1\vec{R}_1 + m_2\vec{R}_2 &= \vec{0} \\ \vec{V}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_{\text{CM}}, & \vec{V}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{v}_{\text{CM}}, & m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 &= \vec{0} \end{aligned}$$



■ Posiciones y velocidades relativas

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{R}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{R}_2$$

$$\vec{v} \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{V}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{V}_2$$

■ Segunda ley de Newton

$$\vec{F}_{[1 \rightarrow 2]} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Segunda ley de Newton

$$\vec{F}_{[1 \rightarrow 2]} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = m_2 \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En ausencia de fuerzas externas $\frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{0}$,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Esta sería la ecuación diferencial $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = f(\vec{r})$ a resolver para obtener la evolución del sistema, $\vec{r}(t)$
- Se obtiene lo mismo con $\vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}$
- Masa reducida $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \mu \rightarrow m_2$

- Momento angular con respecto a O

$$\vec{L}_{\text{Tot}} = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{L}_{\text{Tot}} = (m_1 + m_2) \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + m_1 \vec{R}_1 \times \vec{V}_1 + m_2 \vec{R}_2 \times \vec{V}_2$$

- Momento angular de la masa total del sistema en el CM con respecto a O

$$(m_1 + m_2) \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}$$

- Momento angular del sistema en el movimiento con respecto al CM

$$\vec{L} \equiv m_1 \vec{R}_1 \times \vec{V}_1 + m_2 \vec{R}_2 \times \vec{V}_2 =$$

$$\frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \vec{v} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v}$$

- Conservación del momento angular

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}}) = \vec{r}_{\text{CM}} \times \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = \vec{0}$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mu \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

- Importante: momento angular de m_2 con respecto a m_1

$$\vec{\ell} = m_2(\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \times (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = m_2 \vec{r} \times \vec{v} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \vec{L}$$

\Rightarrow el momento angular $\vec{\ell}$ de m_2 con respecto a m_1 se conserva pese a que el sistema de referencia ligado a m_1 no es inercial
(\rightarrow segunda ley de Kepler \checkmark)

■ Energía cinética

$$E_{c,\text{Tot}} = \frac{1}{2}m_1|\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2|^2$$

$$E_{c,\text{Tot}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2}m_1|\vec{V}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{V}_2|^2$$

- Energía cinética del sistema en su movimiento global con respecto a O

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\vec{v}_{\text{CM}}|^2$$

- Energía cinética del sistema en su movimiento con respecto al CM

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}m_1|\vec{V}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\vec{V}_2|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

- Energía cinética, movimiento con respecto al CM: $E_c = \frac{1}{2}\mu |\vec{v}|^2$
- Variación de la energía cinética

Global

$$\frac{d}{dt} |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 = 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

Respecto al CM

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \frac{1}{2}\mu \frac{d}{dt} |\vec{v}|^2 = \mu \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \\ &\mu \vec{v} \cdot \left(-G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -Gm_1m_2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3} \end{aligned}$$

- Energía potencial

$$U = -Gm_1m_2 \frac{1}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} = -Gm_1m_2 \frac{1}{r}$$

- Variación de la energía potencial

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -Gm_1m_2 \frac{d}{dt} \frac{1}{r} = -Gm_1m_2 \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r})^{-1/2} = \\ &Gm_1m_2 (\vec{r} \cdot \vec{v}) (\vec{r} \cdot \vec{r})^{-3/2} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3} \end{aligned}$$

- Conservación de la energía mecánica $E = E_c + U$

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad E_c = \frac{1}{2} \mu |\vec{v}|^2, \quad U = -\frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{\gamma}{r}$$

(*) Órbitas

- La conservación del momento angular \vec{L} y de la energía mecánica E van a resultar fundamentales para obtener las trayectorias/órbitas
- Con \vec{L} constante y $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{L} = 0$, el movimiento tiene lugar en un plano
- En ese plano (\vec{r}, \vec{v}) introducimos una base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ (además, $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$), y coordenadas (r, θ)

$$\vec{r} = r(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta), \quad (|\vec{r}| = r)$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}(\vec{i} \cos \theta + \vec{j} \sin \theta) + r \frac{d\theta}{dt}(-\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta)$$

$$|\vec{v}|^2 = \left| \frac{dr}{dt} \right|^2 + r^2 \left| \frac{d\theta}{dt} \right|^2$$

- Momento angular

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} = L \vec{k}$$

(*) Órbitas

- Momento angular constante $\Rightarrow L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}$ constante
 - $\theta(t)$ monótona (signo de $\frac{d\theta}{dt}$ fijo)
 - $|\vec{v}|^2 = \left| \frac{dr}{dt} \right|^2 + \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$
- Energía

$$E = \frac{1}{2} \mu |\vec{v}|^2 - \frac{\gamma}{r} = \frac{1}{2} \mu \left| \frac{dr}{dt} \right|^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}$$

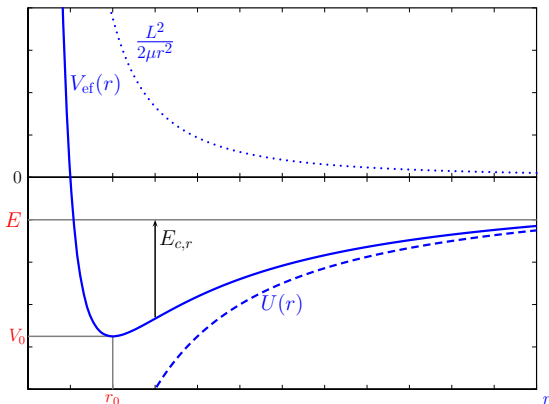
$$E = E_{c,r} + V_{\text{ef}}(r)$$

$$E_{c,r} = \frac{1}{2} \mu \left| \frac{dr}{dt} \right|^2, \quad V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}$$

- $E_{c,r}$ energía cinética “radial”
- $V_{\text{ef}}(r)$ energía potencial “efectiva”

(*) Órbitas

$$E = E_{c,r} + V_{\text{ef}}(r), \quad E_{c,r} = \frac{1}{2}\mu \left| \frac{dr}{dt} \right|^2, \quad V_{\text{ef}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\gamma}{r}$$



(*) Órbitas

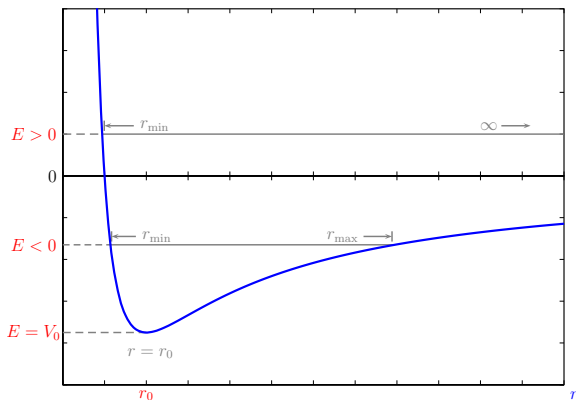
- $V_{\text{ef}}(r)$ incluye la *barrera centrífuga* $\frac{L^2}{2\mu r^2}$
(N.B. Barrera centrífuga viene de la energía cinética, no es energía potencial)
- $V_{\text{ef}}(r)$ tiene un mínimo

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0 \Leftrightarrow -\frac{L^2}{\mu r_0^3} + \frac{\gamma}{r_0^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{\mu \gamma} = \frac{L^2(m_1 + m_2)}{G(m_1 m_2)^2}$$

$$V_0 = V_{\text{ef}}(r_0) = \frac{\mu \gamma}{L^2} \left(\frac{L^2}{2\mu} \frac{\mu \gamma}{L^2} - \gamma \right) = -\frac{\mu \gamma^2}{2L^2} < 0$$

$$-r_0^2 V_0 = \frac{L^2}{2\mu} = L^2 \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2}, \quad r_0 V_0 = -\frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{2} G m_1 m_2$$

(*). Órbitas



Dos tipos de órbitas según $E \geq 0$ ó $0 \geq E \geq V_0$

(*) Órbitas

Dos tipos de órbitas según $E \geq 0$ ó $0 \geq E \geq V_0$

- $E \geq 0$: existe r_{\min} y r puede alcanzar $+\infty$
- $0 \geq E \geq V_0$: existen r_{\min} y r_{\max} , trayectoria acotada; cuando $E = V_0$, $r = r_0$, la trayectoria es circular

Para r_{\min} ,

$$E = \frac{L^2}{2\mu r_{\min}^2} - \frac{\gamma}{r_{\min}} = -V_0 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} \right)^2 + 2V_0 \frac{r_0}{r_{\min}} = -V_0 \left(\frac{r_0}{r_{\min}} - 1 \right)^2 + V_0$$

de modo que

$$\frac{r_0}{r_{\min}} - 1 = \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}}$$

(*) Órbitas

- “Resolvemos”:

$$E = E_{c,r} + V_{\text{ef}}(r) \Leftrightarrow E_{c,r} = \frac{1}{2}\mu \left| \frac{dr}{dt} \right|^2 = E - V_{\text{ef}}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V_{\text{ef}}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}}}$$

$$\int dt = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}}} \Rightarrow t = f(r)$$

y hemos resuelto formalmente $r(t) = f^{-1}(t)$

Con $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$,

$$\theta(t) = \frac{L}{\mu} \int \frac{dt}{[r(t)]^2}$$

para obtener finalmente

$$\vec{r}(t) = r(t)(\vec{i} \cos \theta(t) + \vec{j} \sin \theta(t))$$

(*) Órbitas

- ... pero es muy complicado analíticamente.
- No obstante podemos obtener la trayectoria $r(\theta)$
(al fin y al cabo conocemos *dos* cantidades conservadas: E , L)
... y lo podemos hacer siguiendo dos estrategias diferentes
 - (II) evitando la dependencia en t , y obteniendo una relación entre r y θ mediante integración
 - (I) acudiendo a una *tercera* cantidad conservada

(*) Órbitas (I)

Vector de (Laplace-)Runge-Lenz

- \vec{r} y \vec{v} se mantienen en el mismo plano a lo largo del movimiento y en general no son ortogonales
- Podemos “construir” más vectores: $\vec{L} \times \vec{r}$, $\vec{L} \times \vec{v}$ y estudiar su variación con t

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \times \vec{r} + \vec{L} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{L} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{L} \times \vec{v}$$
$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{r}) = -\mu\vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{v}) = -\mu(|\vec{v}|^2\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{v})$$

no resulta muy interesante porque no podemos sustituir $\frac{d\vec{v}}{dt} \propto -\frac{\vec{r}}{r^3}$ siguiendo la segunda ley.

(*) Órbitas (I)

- En cambio

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{L}}{dt} \times \vec{v} + \vec{L} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{L} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{v}) = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{L} \times \vec{r} = \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{v}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} ((\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{r} - r^2\vec{v})$$

- ... pero ya hemos visto algo “parecido” al primer término:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3}; \text{ de hecho}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{v}}{r}$$

de modo que

$$\frac{d}{dt}(\vec{L} \times \vec{v}) = -Gm_1m_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\gamma \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

(*). Órbitas (I)

- Tenemos por tanto

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \vec{0} \quad \text{con} \quad \vec{A} = \vec{L} \times \vec{v} + \gamma \frac{\vec{r}}{r}$$

- \vec{A} es el vector de Runge-Lenz
 - es una cantidad conservada, además de \vec{L} y E
 - \vec{A} es ortogonal a \vec{L} , i.e. se encuentra en el plano (\vec{r}, \vec{v})
- Para que \vec{A} sea útil para obtener la trayectoria, resulta inconveniente que contenga la velocidad \vec{v} , pero podemos “eliminarla” de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{A} &= \vec{r} \cdot (\vec{L} \times \vec{v}) + \gamma r = \vec{L} \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) + \gamma r \\ &= \gamma r - \frac{1}{\mu} \vec{L} \cdot \vec{L} = \gamma r - \frac{L^2}{\mu}\end{aligned}$$

- Como \vec{A} es constante, es suficiente conocerlo en algún punto particular para que la expresión anterior proporcione una relación entre r y θ , la ecuación de la trayectoria

(*) Órbitas (I)

- Calculamos \vec{A} en el punto de la trayectoria en que $r = r_{\min}$.
Como en $r = r_{\min}$, $\frac{dr}{dt} = 0$ y entonces $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$, fijamos la base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de modo que

$$\vec{r} = r_{\min} \vec{i}, \quad \vec{v} = v \vec{j}$$

Tenemos

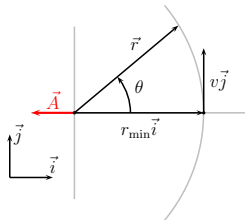
$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu r_{\min} v \vec{k} = L \vec{k}$$

$$\vec{A} = \vec{L} \times \vec{v} + \gamma \frac{\vec{r}}{r} = Lv \vec{k} \times \vec{j} + \gamma \vec{i}$$

$$\vec{A} = \left(\gamma - \frac{L^2}{\mu r_{\min}} \right) \vec{i} = \gamma \left(1 - \frac{L^2}{\mu \gamma r_{\min}} \right) \vec{i}$$

$$\vec{A} = \gamma \left(1 - \frac{r_0}{r_{\min}} \right) \vec{i}$$

La dirección de \vec{A} es (-) la de la posición relativa \vec{r} correspondiente al punto de máximo acercamiento



(*) Órbitas (I)

- Sustituimos en $\vec{r} \cdot \vec{A}$ con $\vec{r} = r(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$,

$$\begin{aligned}\vec{r} \cdot \vec{A} &= \gamma \left(1 - \frac{r_0}{r_{\min}}\right) r \cos \theta = \gamma r - \frac{L^2}{\mu} \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{r_0}{r_{\min}}\right) \cos \theta &= 1 - \frac{L^2}{\mu \gamma r} = 1 - \frac{r_0}{r}\end{aligned}$$

- Hemos obtenido finalmente la ecuación de la trayectoria

$$\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos \theta$$

con

$$\begin{aligned}e &= \frac{r_0}{r_{\min}} - 1 = \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{G^2(m_1 m_2)^3}} \\ r_0 &= \frac{L^2}{\mu \gamma} = \frac{L^2(m_1 + m_2)}{G(m_1 m_2)^2}\end{aligned}$$

(*) Órbitas (II)

- Por completitud, veamos la obtención de las órbitas por integración, estrategia alternativa a usar la conservación del vector de Runge-Lenz
- Cambiamos en primer lugar

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}}}$$

es decir

$$d\theta = L \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{ef}}}}, \quad L \sqrt{\frac{\mu}{2}} = \pm \sqrt{-r_0^2 V_0}$$

- Integramos para obtener $\theta(r)$

$$\int d\theta = L \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{ef}}}} = L \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\gamma}{r}}}$$

(*) Órbitas (II)

- Cambio de variable (1): $\rho = \frac{1}{r}$, $d\rho = -\frac{dr}{r^2}$,

$$\int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} = - \int \frac{d\rho}{\sqrt{E - V_{\text{ef}}(1/\rho)}} = - \int \frac{d\rho}{\sqrt{E - \frac{L^2 \rho^2}{2\mu} + \gamma \rho}}$$

- Arreglamos

$$\begin{aligned} E - \frac{L^2 \rho^2}{2\mu} + \gamma \rho &= E - \frac{L^2}{2\mu} \left(\rho^2 - \frac{2\mu\gamma}{L^2} \rho \right) = E - (-r_0^2 V_0) \left(\rho^2 - 2 \frac{\rho}{r_0} \right) \\ &= E - (-r_0^2 V_0) \left(\rho - \frac{1}{r_0} \right)^2 - V_0 \\ &= (E - V_0) \left(1 - \frac{(-r_0^2 V_0)}{E - V_0} \left(\rho - \frac{1}{r_0} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

(* Órbitas (II)

- Cambio de variable (2):

$$z = \sqrt{\frac{-r_0^2 V_0}{E - V_0}} \left(\rho - \frac{1}{r_0} \right) \Rightarrow dz = \sqrt{\frac{-r_0^2 V_0}{E - V_0}} d\rho$$

dejando

$$\int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{\text{ef}}(r)}} = - \int \frac{dz \sqrt{\frac{E - V_0}{-r_0^2 V_0}}}{\sqrt{E - V_0} \sqrt{1 - z^2}} = - \frac{1}{\sqrt{-r_0^2 V_0}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

- Obtenemos

$$\int d\theta = - \frac{L}{\sqrt{L^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \text{con } z = \sqrt{\frac{-V_0}{E - V_0}} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right)$$

- Primitiva

$$\frac{d}{dz} \arccos(z) = - \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

(*) Órbitas (II)

- Integramos finalmente

$$\theta - \theta_{\text{ref}} = \arccos \left(\sqrt{\frac{-V_0}{E - V_0}} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right)$$

(constantes de integración $\rightarrow \theta_{\text{ref}}$) es decir

$$\frac{r_0}{r} = 1 + \sqrt{1 - \frac{E}{V_0}} \cos(\theta - \theta_{\text{ref}})$$

Escogemos por simplicidad $\theta_{\text{ref}} = 0$ (\Leftrightarrow elección del origen para θ) de modo que r_{min} corresponde a $\theta = 0$

- N.B. Hemos tomado $\frac{L}{\sqrt{L^2}} \rightarrow 1$, signo contrario da la trayectoria recorrida en sentido contrario
- Obtenemos de nuevo la ecuación de las órbitas

$$\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos \theta$$

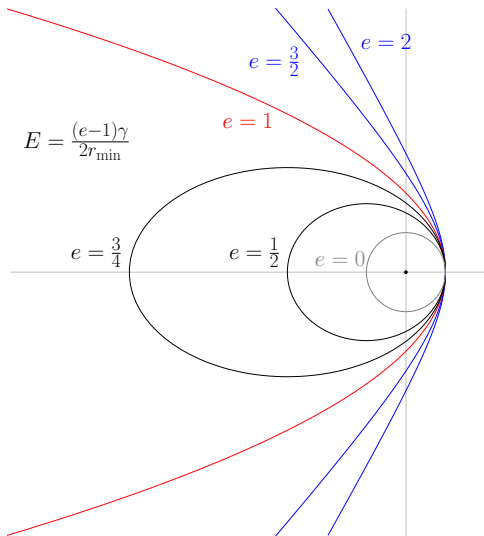
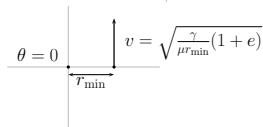
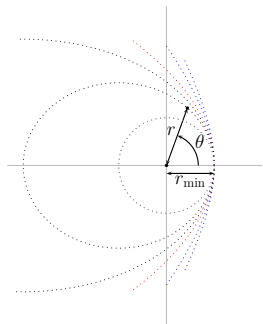
(*) Órbitas

$$\frac{r_0}{r} = 1 + e \cos \theta$$

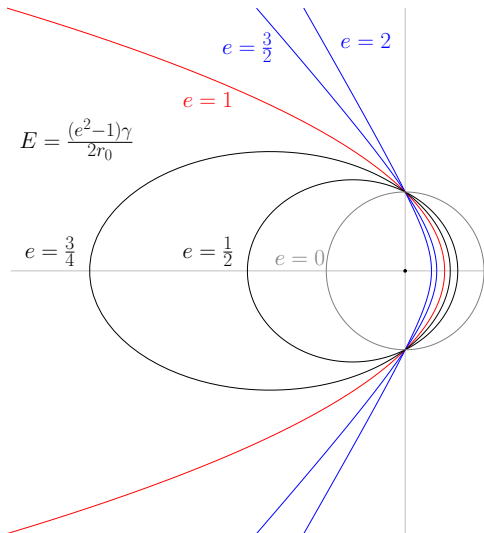
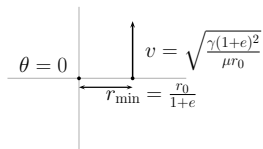
$$e = \sqrt{1 + \frac{2 E L^2 (m_1 + m_2)}{G^2 (m_1 m_2)^3}}, \quad r_0 = \frac{L^2 (m_1 + m_2)}{G (m_1 m_2)^2}$$

- Ecuación de una sección cónica de excentricidad e
 - $e = 0$: circunferencia de radio r_0 , $\theta \in [-\pi; \pi]$
 - $0 < e < 1$: elipse, $\theta \in [-\pi; \pi]$
 - $e = 1$: parábola, $\theta \in]-\pi; \pi[$
 - $e > 1$: hipérbola, $\theta \in]-\theta_\infty; \theta_\infty]$, $\theta_\infty = \arccos(-1/e)$
- Dadas m_1 y m_2 ,
 - r_0 depende únicamente de L^2 ,
 - e depende de $E L^2$
- $r_{\min} = \frac{r_0}{1+e}$

(*) Órbitas con idéntico r_{\min}



(*). Órbitas con idéntico $r_0 = (1 + e)r_{\min} \Leftrightarrow$ idéntico L



(*) Órbitas elípticas

Órbitas con $e < 1$

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}$$

- Mínimo y máximo de r

$$r_{\min} = \frac{r_0}{1 + e} \quad \text{para } \theta = 0$$

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - e} \quad \text{para } \theta = \pi$$

- Semieje mayor a :

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{2r_0}{1 - e^2} \Leftrightarrow a = \frac{r_0}{1 - e^2}$$

- Semieje menor b :

$$a^2(1 - e^2) = b^2 \Leftrightarrow b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - e^2}}$$

- Con $x = ea + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(*) Órbitas elípticas

- Segunda ley de Kepler $\frac{dS}{dt} = \frac{|\vec{\ell}|}{2m_2} = \frac{|\vec{L}|}{2\mu}$ constante.

Área total $S = \pi ab \Rightarrow \pi ab = T \frac{|\vec{L}|}{2\mu}$ con T el periodo

- Sustituimos $b = a\sqrt{1 - e^2}$ y $|\vec{L}| = \sqrt{L^2} = \sqrt{\mu\gamma r_0} = \sqrt{\mu\gamma a(1 - e^2)}$ para obtener

$$S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{T \sqrt{\mu\gamma a(1 - e^2)}}{2\mu} \Leftrightarrow 2\pi a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}} T$$

que es la Tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

- Para las órbitas planetarias en el Sistema Solar, siendo la masa del Sol M_S mucho mayor que la masa de cualquier planeta,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

(*) Órbitas elípticas

En cuanto a la energía mecánica E , con e y r_0 :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2(m_1 + m_2)}{G^2(m_1m_2)^3}}, \quad r_0 = \frac{L^2(m_1 + m_2)}{G(m_1m_2)^2}$$

tenemos

$$e = \sqrt{1 + \frac{2r_0E}{Gm_1m_2}} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{2r_0E}{Gm_1m_2} \Leftrightarrow E = -Gm_1m_2 \frac{1 - e^2}{2r_0}$$

pero $\frac{2r_0}{1-e^2} = r_{\min} + r_{\max}$, dos veces el semieje mayor de la órbita, y la energía mecánica es finalmente

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{r_{\min} + r_{\max}}$$

Órbitas elípticas, energía mecánica

También podemos obtener la energía mecánica E en términos del semieje mayor de la siguiente forma

- En los puntos de mayor y menor acercamiento tenemos posiciones y velocidades (en módulo) r_a, v_a, r_p, v_p
- En ambos puntos, posición y velocidad (vectores) son perpendiculares, conservación del momento angular nos da $r_a v_a = r_p v_p$
- Conservación de la energía mecánica nos da

$$E = \frac{1}{2}\mu v_a^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_a} = \frac{1}{2}\mu v_p^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_p}$$

- Tenemos entonces

$$2E = \frac{\mu}{2}(v_a^2 + v_p^2) - Gm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p} \right) = \frac{\mu}{2}(v_a^2 + v_p^2) - Gm_1 m_2 \frac{r_a + r_p}{r_a r_p}$$

$$0 = \frac{\mu}{2}(v_a^2 - v_p^2) - Gm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) = \frac{\mu}{2}(v_a^2 - v_p^2) - Gm_1 m_2 \frac{r_p - r_a}{r_a r_p}$$

Órbitas elípticas, energía mecánica

Usando la conservación del momento angular,

$$v_a^2 \pm v_p^2 = v_a v_p \frac{r_p}{r_a} \pm v_p v_a \frac{r_a}{r_p} = v_a v_p \frac{r_p^2 \pm r_a^2}{r_a r_p}$$

y sustituimos en la 2ª de las ecuaciones anteriores para obtener

$$0 = \frac{\mu}{2}(v_a^2 - v_p^2) - Gm_1 m_2 \frac{r_p - r_a}{r_a r_p} \Rightarrow \frac{\mu}{2} v_a v_p = \frac{Gm_1 m_2}{r_a + r_p}$$

Podemos ahora sustituir en la 1ª

$$2E = \frac{\mu}{2}(v_a^2 + v_p^2) - Gm_1 m_2 \frac{r_a + r_p}{r_a r_p} = \frac{Gm_1 m_2}{r_a r_p} \left(\frac{r_a^2 + r_p^2}{r_a + r_p} - (r_a + r_p) \right)$$

y por tanto

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{r_a + r_p}$$

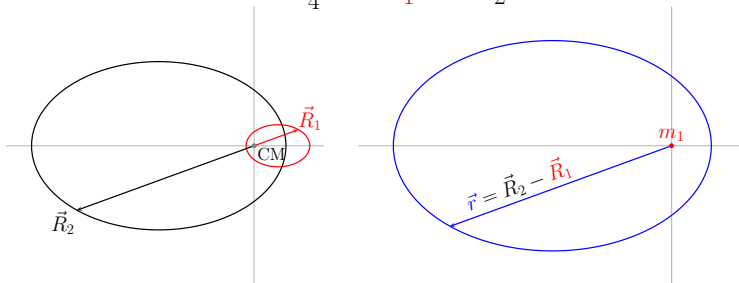
(*) Órbitas

- Recordemos que hemos obtenido la trayectoria $\vec{r}(\theta) = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, que corresponde al movimiento de una masa μ (la masa reducida) con respecto a m_1 ; las posiciones relativas al CM son

$$\vec{R}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{R}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

N.B. Para $m_1 \gg m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow m_2$ (CM $\rightarrow m_1$)

$$e = \frac{3}{4} \quad m_1 = 4m_2$$



(*) Órbitas

- Recordemos que hemos obtenido la trayectoria $\vec{r}(\theta) = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, que corresponde al movimiento de una masa μ (la masa reducida) con respecto a m_1 ; las posiciones relativas al CM son

$$\vec{R}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{R}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

N.B. Para $m_1 \gg m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow m_2$ (CM $\rightarrow m_1$)

$$e = \frac{1}{2} \quad m_1 = 4m_2$$

