

Tema 4 – Trabajo y energía. Principios de conservación

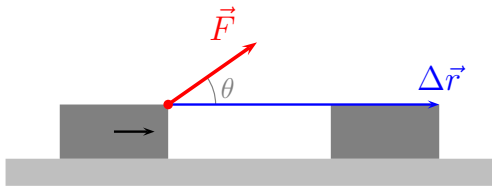
- Trabajo de una fuerza.
- Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética.
- Potencia.
- Fuerzas conservativas. Energía potencial.
- Energía mecánica. Conservación.
- Energía potencial y equilibrio.
- Fuerzas conservativas y no conservativas. Principio de conservación de la energía de un sistema.

Trabajo de una fuerza

Fuerza constante

- El trabajo realizado por una fuerza constante es igual al producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por la magnitud del desplazamiento.


$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \theta$$



- W es una magnitud escalar (puede ser $W > 0$, $W = 0$, $W < 0$)
- $[W] = ML^2T^{-2}$, unidad derivada S.I. $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ J}$, julio (“joule”)

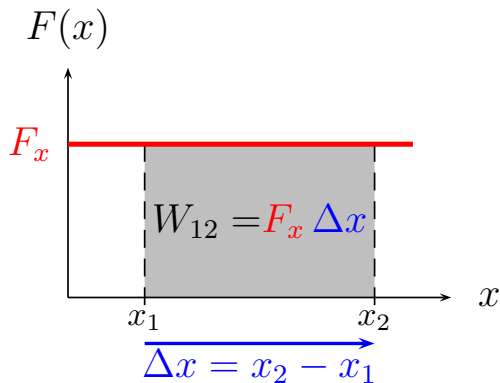
Trabajo de una fuerza

Trabajo de una fuerza constante, ejemplos

- $W > 0$, fuerza ejercida por el caballo que tira del carro 
- $W = 0$, fuerza gravitacional sobre un objeto en reposo
sobre una superficie horizontal ($\Delta\vec{r} = \vec{0}$)
- $W = 0$, fuerza gravitacional sobre un objeto que desliza
sobre una superficie horizontal ($\Delta\vec{r} \perp \vec{g}$)
- $W < 0$, fuerza de rozamiento

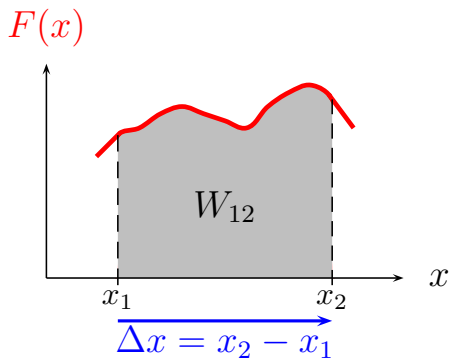
Trabajo de una fuerza

Fuerza constante en una dimensión



Trabajo de una fuerza

Generalizamos a una fuerza variable en una dimensión



$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

$$W_{21} = -W_{12}$$

Trabajo de una fuerza

Generalizamos a una fuerza variable en tres dimensiones

$$W_{12} = \int_{C_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

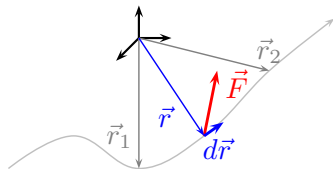
Integral *de camino* entre \vec{r}_1 y \vec{r}_2
 $d\vec{r}$ a lo largo de la curva C_{12} ,

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

con dx , dy , dz relacionados por el camino.

Mismo camino, sentido contrario:

$$W_{12} \mapsto W_{21} = -W_{12}$$



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: una partícula se encuentra sometida a la fuerza

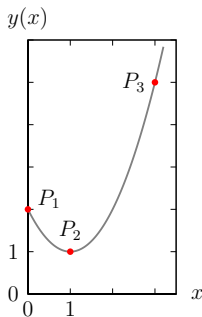
$$\vec{F}(\vec{r}) = 3y\vec{i} + xy\vec{j}$$

mientras sigue la trayectoria

$$y(x) = x^2 - 2x + 2, \quad z = 0.$$

Calcula el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se traslada

- (i) entre $P_1 = (0, 2, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 0)$,
- (ii) entre $P_1 = (0, 2, 0)$ y $P_3 = (3, 5, 0)$.



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\vec{i} + xy\vec{j}$

- Trayectoria $y(x) = x^2 - 2x + 2$, $z = 0$:
escogemos x para describir la trayectoria
- Información de la trayectoria en $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + (2x - 2)dx\vec{j},$$

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = (2x - 2)dx$$

$$dz = \frac{dz}{dx}dx = 0$$

- Información de la trayectoria en $\vec{F}(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x, y(x), z(x))$$

- Cálculo de $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\vec{i} + xy\vec{j}$

- Cálculo de $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= (3y\vec{i} + xy\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + (2x - 2)dx\vec{j}) \\ &= (3y + (2x - 2)xy) dx \\ &= (x^2 - 2x + 2)(2x^2 - 2x + 3) dx \\ &= (2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6) dx\end{aligned}$$

- Trabajo $W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$\begin{aligned}\int^x (2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6) dx \\ = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x\end{aligned}$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\vec{i} + xy\vec{j}$

■ Caso (i)

$$\begin{aligned}W_{P_1 \rightarrow P_2} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6) dx \\ &= \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{107}{30}\end{aligned}$$

■ Caso (ii)

$$\begin{aligned}W_{P_1 \rightarrow P_3} &= \int_{P_1}^{P_3} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^3 (2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6) dx \\ &= \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{477}{10}\end{aligned}$$

Trabajo de una fuerza

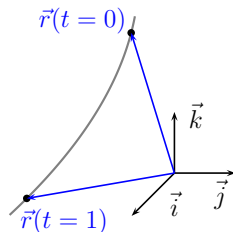
Ejemplo: una partícula sigue la trayectoria

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$x(t) = 1 + t$$

$$y(t) = -t^2$$

$$z(t) = 3 - 2t$$



Sobre esta partícula actúa la fuerza

$$\vec{F}(\vec{r}) = -y\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x^2 + y)\vec{k}$$

Calcula el trabajo que realiza la fuerza cuando la partícula se desplaza entre $\vec{r}_0 = \vec{r}(t = 0)$ y $\vec{r}_1 = \vec{r}(t = 1)$.

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trayectoria parametrizada t

- En primer lugar,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (1+t)\vec{i} - t^2\vec{j} + (3-2t)\vec{k} \\ d\vec{r} &= (\vec{i} - 2t\vec{j} - 2\vec{k}) dt\end{aligned}$$

- En la expresión de \vec{F} , imponemos la trayectoria

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= -y\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x^2+y)\vec{k} \\ \vec{F}(t) &= t^2\vec{i} + 5\vec{j} + (1+2t)\vec{k}\end{aligned}$$

- Calculamos $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (t^2 - 10t - 2(1+2t)) dt = (t^2 - 14t - 2) dt$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trayectoria parametrizada t

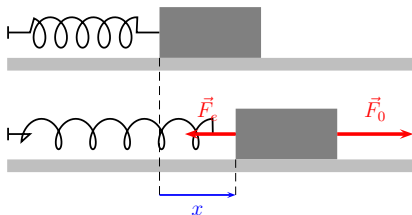
- Trabajo

$$W_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_1} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^2 - 14t - 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 7t^2 - 2t \right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{26}{3}$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: en una dimensión, se aplica una fuerza externa constante F_0 a un bloque unido a un muelle; el bloque se desplaza una distancia d desde la posición inicial de equilibrio hasta la posición final de equilibrio. La constante de recuperación del muelle es k (ley de Hooke: fuerza de recuperación elástica $F_e = -kx$ con x el desplazamiento con respecto al equilibrio).

- Expresa F_0 en función de d y k .
- Calcula el trabajo realizado sobre el bloque (el trabajo realizado por la fuerza neta).



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: muelle

- Equilibrio final:

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow F_0 = kd$$

- Trabajo realizado:

- desplazamiento entre $x = 0$ y $x = d$
- fuerza neta $F_{\text{neta}} = F_0 - kx$

$$W = \int_0^d F_{\text{neta}} dx = \int_0^d (F_0 - kx) dx = \left[F_0x - \frac{kx^2}{2} \right]_{x=0}^{x=d} = F_0d - \frac{kd^2}{2} = \frac{kd^2}{2}$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

- La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} es

$$E_c \equiv \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

- E_c es una magnitud escalar, $E_c \geq 0$
- dimensiones $[E_c] = ML^2T^{-2}$, unidad derivada S.I.
 $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ J, julio ("joule")}$

Teorema trabajo-energía cinética

El trabajo total realizado sobre una partícula de masa m por la fuerza neta \vec{F}_{neta} que actúa sobre la misma, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula

$$W_{if} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = \frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Teorema trabajo-energía cinética (forma diferencial)

- Energía cinética en un instante t

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$$

- Variación con $t \mapsto t + dt$

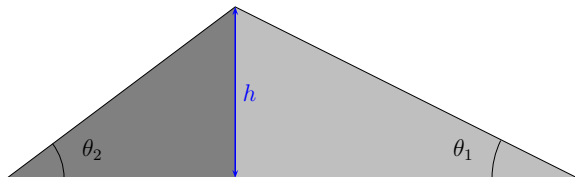
$$dE_c = \frac{dE_c}{dt}dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} \right) dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

- Tenemos $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{\text{Neta}}$ y $\vec{v} dt = d\vec{r}$, de modo que

$$dE_c = \vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \Delta E_c = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{r} = W_{if}$$

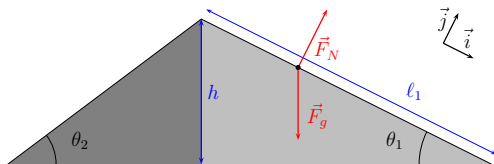
Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: una esquiadora prueba unos esquís experimentales que tienen rozamiento despreciable con la nieve. Los prueba en dos pistas rectilíneas que tienen diferente pendiente y longitud, pero tienen la misma diferencia de altura entre los puntos inicial y final (ver figura). Si la esquiadora inicia cada descenso en reposo, ¿cuál es la diferencia entre las energías cinéticas finales?



Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: esquiadora



- Iniciando en reposo, $\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2$ con $v_f = |\vec{v}_f|$ la velocidad final
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = mg \left(-\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{i} \right), \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j}$$

- Para calcular el trabajo de la fuerza neta, camino $d\vec{r} = dx \vec{i}$ con $x \in [0; \ell]$
- Trabajo de la fuerza neta

$$W = \int_i^f \vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = \int_0^\ell \left(mg \sin \theta \vec{i} + (F_N - mg \cos \theta) \vec{j} \right) \cdot (dx \vec{i})$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: esquiadora

- Trabajo de la fuerza neta

$$W = \int_0^\ell \left(mg \sin \theta \vec{i} + (F_N - mg \cos \theta) \vec{j} \right) \cdot (dx \vec{i}) =$$
$$mg \sin \theta \int_0^\ell dx = mg \ell \sin \theta = mgh$$

... que no depende de ℓ , θ .

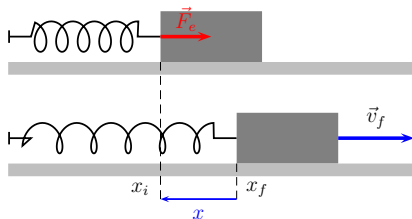
- De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética,

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh$$

en ambos casos, y la diferencia entre las energías cinéticas finales de ambos casos es **nula**.

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: un bloque de masa $m = 1.6 \text{ kg}$ está unido a un muelle de constante $k = 1000 \text{ N/m}$. Se comprime 2 cm y se libera desde el reposo. Calcular la velocidad del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio, si la superficie no presenta rozamiento.



Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: bloque-muelle

- Sea x el desplazamiento del bloque con respecto a la posición de equilibrio (que por tanto es $x = x_f = 0$); se comprime el muelle hasta $x = x_i = -2$ cm. La fuerza neta que actúa sobre el bloque es

$$F_{\text{neto}}(x) = -kx$$

(N.B. movimiento en una dimensión)

- Teorema trabajo-energía cinética ($\vec{F}_{\text{neto}} \cdot d\vec{r} = F_{\text{neto}} dx$)

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{neto}} dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_i}^{x_f} = \\ &= \frac{k}{2} (x_i^2 - x_f^2) = \frac{kx_i^2}{2} = \frac{1000}{2} (-2 \times 10^{-2})^2 \text{ N m}^{-1} \text{ m}^2 = 0.2 \text{ J} \\ \Delta E_c &= \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2) = \frac{mv_f^2}{2} \end{aligned}$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: bloque-muelle

- Teorema trabajo-energía cinética

$$W = \Delta E_c \Leftrightarrow \frac{kx_i^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} \Leftrightarrow v_f = \sqrt{\frac{kx_i^2}{m}} = 0.5 \text{ m s}^{-1}$$

Potencia

- La **potencia** suministrada por una fuerza es el trabajo por unidad de tiempo que realiza dicha fuerza.

Velocidad a la que se transfiere la energía

$$\text{Potencia (instantánea)} \quad P = \frac{dW}{dt};$$

$$dW \text{ asociado a desplazamiento } d\vec{r}: dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{si } \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}), \quad P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Potencia media } \bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- Magnitud escalar
- $[P] = ML^2T^{-3}$, unidad derivada S.I. $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} = 1 \text{ J s}^{-1} = 1 \text{ W}$, vatio (“watt”)

Potencia

En general, para cualquier transferencia de energía,

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Es frecuente expresar energías en función de $P \times$ tiempo
(e.g. recibo suministro eléctrico)

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$

Ejemplo: un ascensor de 1000 kg soporta una carga máxima de 800 kg. Una fuerza de rozamiento constante de 4000 N retarda su movimiento hacia arriba. Calcula

- la potencia que suministra el motor para subir a una velocidad constante de 3 m/s;
- la potencia del motor en cada instante, para proporcionar una aceleración hacia arriba de 1 m/s^2 .

Potencia

Ejemplo: ascensor

- Fuerzas (problema 1D)

$$\vec{T} \rightarrow T, \vec{F}_g \rightarrow -mg, \vec{f}_r \rightarrow -f_r$$

con $m = 1800 \text{ kg}$, $f_r = 4000 \text{ N}$.

- Velocidad constante v

$$T - mg - f_r = 0, T = mg + f_r = 2.16 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \rightarrow P = T v = 6.50 \times 10^4 \text{ W}$$

- Aceleración constante a

$$T - mg - f_r = ma, T = m(g + a) + f_r = 2.35 \times 10^4 \text{ N}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) \rightarrow P = T v(t) = T(v_0 + at)$$



Potencia y energía cinética

Ejemplo: un coche acelera desde el reposo a 100 km/h en 8 s. La masa del coche es 800 kg. Suponiendo que esta aceleración se produce a potencia constante,

- calcular la potencia desarrollada por el motor.
- ¿Cuánto tiempo necesitará para acelerar de 40 km/h a 80 km/h?
- ¿Cuánto tiempo necesitará para acelerar de 80 km/h a 120 km/h?

Potencia y energía cinética

Ejemplo: aceleración-coche

- Movimiento 1D; potencia P constante,

$$\begin{aligned} P &= \frac{dE_c}{dt} = \frac{(\Delta E_c)_1}{(\Delta t)_1} = \frac{m}{2} \frac{v_{f_1}^2 - v_{i_1}^2}{t_{f_1} - t_{i_1}} \\ &= \frac{800}{2} \frac{100^2}{8} \frac{\text{kg km}^2 \text{h}^{-2}}{\text{s}} = 3.86 \times 10^4 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-3} = 3.86 \times 10^4 \text{ W} \end{aligned}$$

- Aceleración de $v_{i_2} = 40 \text{ km/h}$ a $v_{f_2} = 80 \text{ km/h}$:

$$P = \frac{(\Delta E_c)_2}{(\Delta t)_2} \Leftrightarrow (\Delta t)_2 = \frac{(\Delta E_c)_2}{P} = \frac{m(v_{f_2}^2 - v_{i_2}^2)}{2P} = 3.9 \text{ s}$$

o bien $(\Delta t)_2 = \frac{(\Delta E_c)_2}{P} = \frac{(\Delta E_c)_2}{(\Delta E_c)_1} (\Delta t)_1 = \frac{v_{f_2}^2 - v_{i_2}^2}{v_{f_1}^2 - v_{i_1}^2} (\Delta t)_1$

- Aceleración de $v_{i_3} = 80 \text{ km/h}$ a $v_{f_3} = 120 \text{ km/h}$:

del mismo modo, $(\Delta t)_3 = 6.4 \text{ s}$

Fuerzas conservativas

Fuerza conservativa

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo realizado por dicha fuerza es independiente de la trayectoria o, equivalentemente, si el trabajo realizado en toda trayectoria cerrada es nulo.

Para cualesquiera A, B, C_{AB}^1, C_{AB}^2 ,

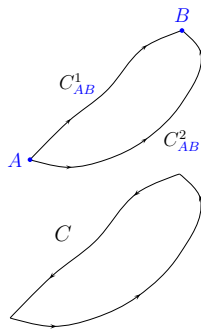
$$W_{AB} = \int_{C_{AB}^1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_{AB}^2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

W_{AB} depende únicamente de A y B

Para cualquier C cerrado,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

[N.B. “Circulación” de \vec{F}]



Energía potencial

Energía potencial

La diferencia de **energía potencial** entre dos puntos A y B , $U_A - U_B$, asociada a una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ **conservativa**, es el trabajo realizado por $\vec{F}(\vec{r})$ entre A y B

$$\begin{aligned}U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) &= -\Delta U_{AB} = W_{\vec{r}_A \vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\ U(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad U(\vec{r}_{\text{ref}}) = 0\end{aligned}$$

Energía potencial

Energía potencial

La diferencia de **energía potencial** entre dos puntos A y B , $U_A - U_B$, asociada a una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ conservativa, es el trabajo realizado por $\vec{F}(\vec{r})$ entre A y B

$$U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = -\Delta U = W_{\vec{r}_A \vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{\text{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad U(\vec{r}_{\text{ref}}) = 0$$

- Definición de la *diferencia* de energía potencial entre dos puntos
- Referencia arbitraria (“origen”) \vec{r}_{ref} por comodidad
- Cuando la fuerza realiza un trabajo *positivo*(*negativo*), la energía potencial *disminuye*(*aumenta*)

Energía potencial

Ejemplo: energía potencial gravitacional

- Fuerza gravitatoria conservativa
- Cerca de la superficie terrestre $\vec{g} = -g\vec{k}$ constante
- Masa puntual m , diferencia de energía potencial entre $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (0, 0, h)$
 - calculamos con camino $(0, 0, z)$ con $z \in [0; h]$, $d\vec{r} = dz \vec{k}$,
 $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg dz$

$$U_g(\vec{r}_2) - U_g(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_h^0 (-mg) dz = mgh$$

- (Resultado independiente del camino escogido)
Depende únicamente de la coordenada en la dirección de \vec{g}
- Se suele escoger $U_g(z = 0) = 0$ como referencia de modo que

$$U_g(x, y, z) = mgz$$

Energía potencial

Ejemplo: energía potencial de un muelle (fuerza recuperadora), en 1D

- Muelle con constante de recuperación k y desplazamiento con respecto al equilibrio $x \Rightarrow$ fuerza recuperadora $F(x) = -kx$
- $F(x)$ fuerza conservativa
- Diferencia de energía potencial entre la posición x y la de equilibrio ($x = 0$)

$$U_{\text{re}}(x) - U_{\text{re}}(0) = \int_x^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

- Se suele escoger $U_{\text{re}}(x = 0) = 0$ como referencia de modo que

$$U_{\text{re}}(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

Energía mecánica. Conservación

- Según el teorema Trabajo-Energía cinética

$$\Delta E_{c_{if}} = E_{c_f} - E_{c_i} = W_{if}^{\text{Tot}} = W_{if}^{\text{C}} + W_{if}^{\text{NoC}}$$

donde separamos

- $W_{if}^{\text{C}} = -\Delta U_{if}$ el trabajo de las fuerzas conservativas
- W_{if}^{NoC} el trabajo de las fuerzas no conservativas

$$\Delta E_{c_{if}} = -\Delta U_{if} + W_{if}^{\text{NoC}}$$

$$\Delta E_{c_{if}} + \Delta U_{if} = (E_{c_f} + U_f) - (E_{c_i} + U_i) = W_{if}^{\text{NoC}}$$

- Definimos la **energía mecánica** E_{Mec}

$$E_{\text{Mec}} \equiv E_c + U$$

- Por tanto

$$E_{\text{Mec},f} = E_{\text{Mec},i} + W_{if}^{\text{NoC}}$$

Si $W_{if}^{\text{NoC}} = 0$,

$$E_{\text{Mec},f} = E_{\text{Mec},i} = E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i = \text{Constante}$$

Energía mecánica. Conservación

Conservación de la energía mecánica

La energía mecánica de un sistema permanece constante si solo actúan fuerzas conservativas o son las únicas que realizan trabajo

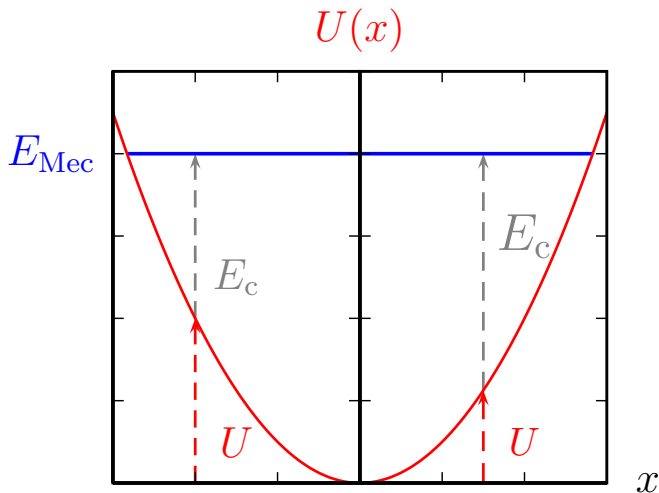
$$E_{\text{Mec}} \equiv E_c + U$$

$$E_{\text{Mec},f} = E_{\text{Mec},i} + W_{if}^{\text{NoC}}$$

Si $W_{if}^{\text{NoC}} = 0$

$$E_{\text{Mec}} = E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i = \text{Constante}$$

Energía mecánica. Conservación



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: próxima al borde de un tejado de un edificio de 12 m de altura, una persona golpea con el pie un balón con una velocidad inicial $v_i = 16$ m/s y un ángulo de tiro de 60° sobre la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, determinar:

- la altura por encima del edificio que alcanza el balón,
- su velocidad justo antes de chocar con el suelo.

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: balón

- Conservación de la energía mecánica entre el punto inicial i y el punto f de altura máxima (condición y_{\max} : $v_{fy} = 0$)

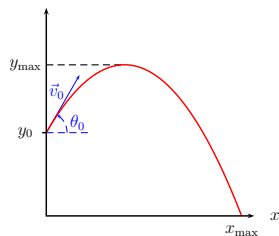
$$E_{\text{Mec}_i} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2 + mgy_0$$

$$= \frac{mv_i^2}{2} + mgy_0$$

$$E_{\text{Mec}_f} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_f|^2 + mgy_{\max}$$

$$= \frac{m}{2} \left(v_{fx}^2 + v_{fy}^2 \right) + mgy_{\max}$$

$$= \frac{mv_i^2 \cos^2 \theta_0}{2} + mgy_{\max}$$



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: balón

- por tanto

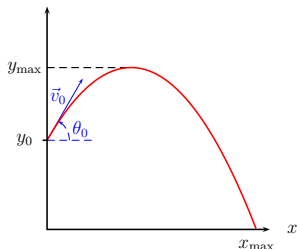
$$E_{\text{Mec}_i} = E_{\text{Mec}_f} \Leftrightarrow y_{\text{max}} = y_0 + \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

- De nuevo conservación de la energía mecánica con ff el punto en que se alcanza el suelo (condición: $y = 0$)

$$E_{\text{Mec}_{ff}} = \frac{1}{2} m v_{ff}^2 \Rightarrow v_{ff}^2 = v_i^2 + 2gy_0$$

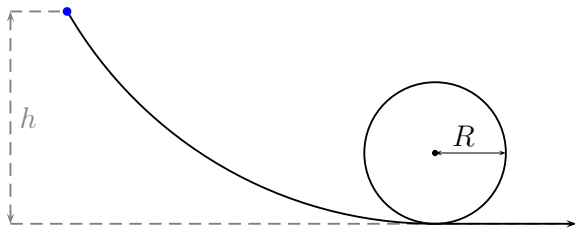
- Sabemos que $v_{ff_x} = v_i \cos \theta_0$, por tanto

$$v_{ff_y} = \pm \sqrt{v_i^2 \sin^2 \theta_0 + 2gy_0} \quad [\text{N.B. signo -}]$$



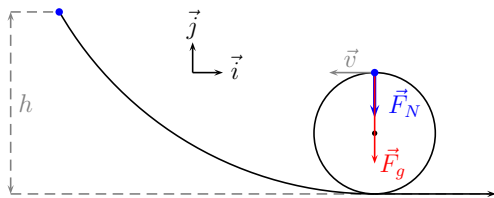
Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: un carrito de montaña rusa se suelta (en reposo) desde una altura h relativa a la parte inferior de una vía sobre la que desliza sin rozamiento. ¿Cuál es valor mínimo de h para completar el rizo de radio R sin “caerse”?



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: montaña rusa-rizo



- Condición límite para “no caerse”: $|\vec{F}_N| = 0$
- La trayectoria impone el radio de curvatura R , y por tanto

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

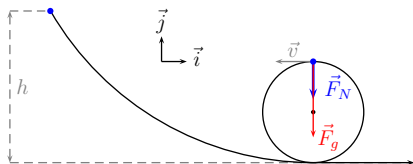
- Conservación de la energía mecánica

posición inicial i : $y_i = h$, $|\vec{v}_i| = 0$, $E_{\text{Mec}} = mgh$

posición final f : $y_f = 2R$, $|\vec{v}_f| = v$, $E_{\text{Mec}} = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: montaña rusa-rizo



- Conservación de la energía mecánica $\Rightarrow v^2 = 2g(h - 2R)$
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad F_N = -F_N\vec{j}, \quad \Rightarrow \vec{F}_{\text{neta}} = -(mg + F_N)\vec{j}$$

- Segunda ley, $\vec{a} = \vec{a}_\perp = -a_\perp\vec{j}$

$$ma_\perp = mg + F_N \Rightarrow \text{condición límite } a_\perp = g$$

- Obtenemos por tanto

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \Leftrightarrow g = 2g \frac{h - 2R}{R} \Leftrightarrow h = \frac{5}{2}R$$

Energía mecánica. Conservación

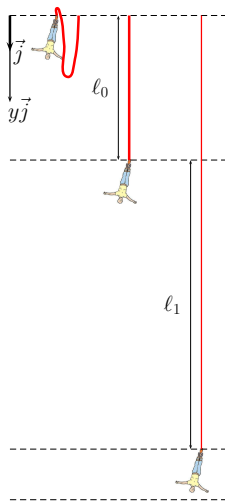
Ejemplo: un muchacho salta desde una plataforma que está a 134 m de altura sobre el río Nevis (Nueva Zelanda). Después de caer libremente 40 m, la cuerda atada a los tobillos del muchacho empieza a alargarse (la longitud en reposo de la cuerda es de 40 m). El muchacho continúa descendiendo durante 80 m más antes de pararse en la parte más baja del descenso. Suponiendo que la masa del muchacho es 100 kg, la cuerda sigue la ley de Hooke, tiene masa despreciable y se desprecia el rozamiento con el aire:

- ¿cuál es la aceleración en la parte más baja del descenso?
- ¿A qué altura se alcanza la velocidad máxima? ¿Qué vale la velocidad máxima?

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- $l_0 = 40$ m
- $l_1 = 80$ m
- En $y = l_0 + l_1$, $\vec{v} = \vec{0}$



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Conservación de la energía mecánica persona + cuerda (sin masa); problema unidimensional,

$$E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgy + \begin{cases} 0, & y < \ell_0 \\ \frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2, & y \geq \ell_0 \end{cases}$$

$$y_0 = 0, \quad E_{\text{Mec}} = 0$$

$$y_1 = \ell_0, \quad E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg\ell_0$$

$$y_2 = \ell_0 + \ell_1, \quad E_{\text{Mec}} = -mg(\ell_0 + \ell_1) + \frac{1}{2}k\ell_1^2$$

con $m = 100$ kg la masa de la persona, k la constante de recuperación de la cuerda, $\ell_0 = 40$ m la longitud en reposo de la cuerda y $\ell_1 = 80$ m el alargamiento de la cuerda (con respecto al reposo) en el punto más bajo.

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Queremos obtener la aceleración en y_2 , para lo cual, de acuerdo con la segunda ley, necesitamos conocer la fuerza de recuperación que ejerce la cuerda

$$m\vec{a} = (mg - k\ell_1)\vec{j} \Rightarrow a = g - \frac{k\ell_1}{m}$$

- Para ello necesitamos conocer k ; obtendremos k de la información que proporciona el punto $y_2 = \ell_0 + \ell_1$: imponiendo la conservación de la energía mecánica

$$0 = -mg(\ell_0 + \ell_1) + \frac{1}{2}k\ell_1^2 \Rightarrow k = \frac{2mg}{\ell_1} \left(1 + \frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = 36.8 \text{ N m}^{-1}$$

con lo que

$$a = g - 2g \left(1 + \frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = -g \left(1 + 2\frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = -2g$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Velocidad máxima \Leftrightarrow energía cinética máxima

Siendo E_{Mec} constante \rightarrow minimización de $E_{\text{Mec}} - E_c$

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = 0, \quad \frac{d^2}{dy^2}(E_{\text{Mec}} - E_c) > 0$$

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = \begin{cases} -mg, & y < \ell_0 \\ -mg + k(y - \ell_0), & y \geq \ell_0 \end{cases}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = 0 \Rightarrow y_{v_{\text{max}}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} = \ell_0 + \frac{1}{2} \frac{\ell_1^2}{\ell_0 + \ell_1} = 66.7 \text{ m}$$

- N.B. Equivalentemente podemos argumentar que, dado que la fuerza gravitatoria es constante y la elástica actúa en dirección contraria, la velocidad máxima se alcanza cuando la fuerza neta sea nula, es decir, cuando:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_g = \vec{0} \Leftrightarrow (-k(y - \ell_0) + mg)\vec{j} = \vec{0}$$

Energía mecánica. Conservación

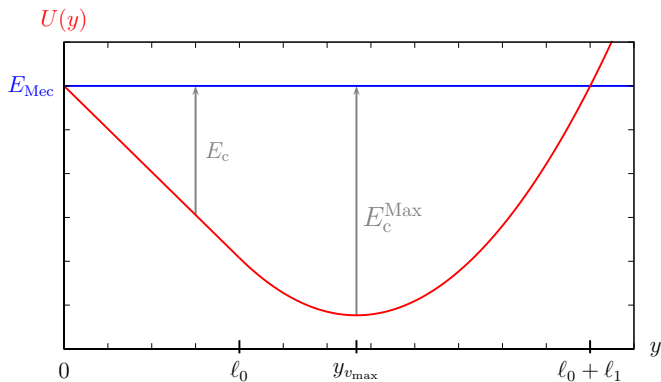
Ejemplo: bungee-jump

- Valor de la velocidad máxima a partir de E_{Mec}

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2 &= mgy_{v_{\text{max}}} - \frac{1}{2}k(y_{v_{\text{max}}} - \ell_0)^2 = mg\ell_0 + \frac{(mg)^2}{k} - \frac{(mg)^2}{2k} \\ &= mg \left(\ell_0 + \frac{\ell_1^2}{4(\ell_0 + \ell_1)} \right) = mg \frac{(2\ell_0 + \ell_1)^2}{4(\ell_0 + \ell_1)} \\ v_{\text{max}} &= (2\ell_0 + \ell_1) \sqrt{\frac{g}{2(\ell_0 + \ell_1)}} = 32.3 \text{ m s}^{-1}\end{aligned}$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump



Energía potencial y equilibrio

- Para una fuerza **conservativa** en una dimensión $\vec{F} = F_x \vec{i}$, la variación de la energía potencial en un desplazamiento $d\vec{r} = dx \vec{i}$, es

$$dU = \frac{dU}{dx} dx = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

es decir, la **fuerza** es la derivada de la **energía potencial**

- Si para x_{eq} , $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_{\text{eq}}} = 0$, el sistema está en **equilibrio** en x_{eq}

- equilibrio estable: $\left\{ \begin{array}{l} \text{para } x_{\text{eq}} + \epsilon > x_{\text{eq}}, F_x < 0 \\ \text{para } x_{\text{eq}} - \epsilon < x_{\text{eq}}, F_x > 0 \end{array} \right\}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} > 0$

i.e. fuerza “ \rightarrow ” posición de equilibrio

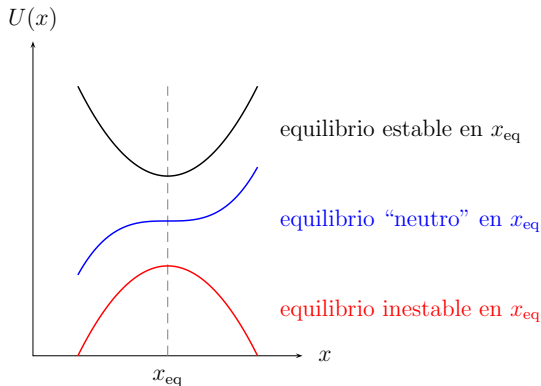
- equilibrio inestable: $\left\{ \begin{array}{l} \text{para } x_{\text{eq}} + \epsilon > x_{\text{eq}}, F_x > 0 \\ \text{para } x_{\text{eq}} - \epsilon < x_{\text{eq}}, F_x < 0 \end{array} \right\}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0$

i.e. fuerza “ \leftarrow ” posición de equilibrio

- equilibrio “neutro”: ni estable ni inestable

Energía potencial y equilibrio

- Equilibrio estable: U tiene un mínimo (local) en x_{eq}
- Equilibrio inestable: U tiene un máximo (local) en x_{eq}
- Equilibrio “neutro”: U tiene un punto de silla en x_{eq}

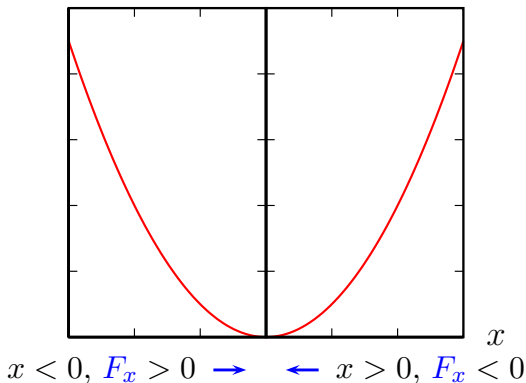


En general, derivada $\neq 0$ de menor orden: par y positiva, **par y negativa**, impar

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: sistema muelle-bloque

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad x_{\text{eq}} = 0, \quad F_x(x) = -kx$$



$$x = 0, F_x = 0$$

Energía potencial y equilibrio

(*) Generalización 3D

- Fuerza conservativa \vec{F}

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

- Desplazamiento $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

- Variación de la energía potencial dU

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) U = -\vec{\nabla} U$$

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: considera, en una dimensión, un sistema sometido a la fuerza conservativa

$$F(x) = x^3 - 4x$$

Analiza la estabilidad y la energía potencial en las posiciones de equilibrio

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo $F(x) = x^3 - 4x$

- Equilibrio: $F(x) = 0$

$$F(x) = 0 = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

Posiciones de equilibrio

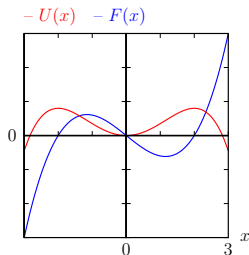
$$x_{\text{eq}} = -2, 0, 2$$

- Estabilidad: $\frac{dF}{dx}$

$$\frac{dF}{dx} = 3x^2 - 4 = \begin{cases} 8 & \text{en } x = -2 \\ -4 & \text{en } x = 0 \\ 8 & \text{en } x = 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{eq}} = -2, 2 \text{ inestables} \\ x_{\text{eq}} = 0 \text{ estable} \end{array} \right\}$$

- $U(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 (+c)$
 - máximos en $x_{\text{eq}} = -2, 2$
 - mínimo en $x_{\text{eq}} = 0$



Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: la energía potencial de una molécula diatómica en función de la distancia r entre átomos tiene muy aproximadamente la forma dada por el *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right)$$

con r_0 y E_0 constantes.

- Representa $U(r)$ y obtén las posiciones de equilibrio
- Interpreta físicamente r_0 y E_0 .

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: molécula diatómica y *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right)$$

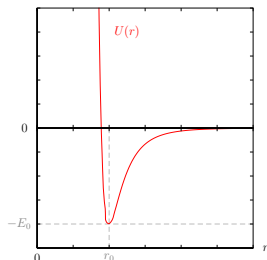
- Equilibrio (estable)

$$\frac{dU}{dr} = -12 \frac{E_0 r_0^6}{r^7} \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - 1 \right)$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow r_{\text{eq}} = r_0$$

- Mínimo del potencial

$$U(r_0) = -E_0$$



Energía potencial y equilibrio

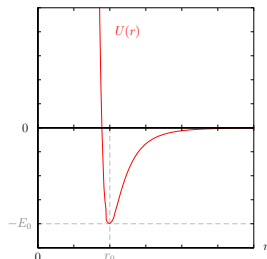
Ejemplo: molécula diatómica y *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right)$$

Molécula	E_0	r_0
H_2	$4.3 \cdot 10^{-22}$ J	$3.3 \cdot 10^{-10}$ m
N_2	$1.31 \cdot 10^{-21}$ J	$4.2 \cdot 10^{-10}$ m
O_2	$1.62 \cdot 10^{-21}$ J	$3.9 \cdot 10^{-10}$ m

N.B. Cambio de variables $\tilde{r} \equiv r/r_0$

$$U(r) = \tilde{U}(\tilde{r}) = E_0 (\tilde{r}^{-12} - 2\tilde{r}^{-6})$$



Principio de conservación de la energía de un sistema

- En presencia de fuerzas no conservativas (rozamiento, deformación permanente, ...) energía mecánica disminuye
- se transforma en otro tipo de energía (térmica, electromagnética, sonora, química, ...)

$$E_{\text{Sist}} = E_{\text{Mec}} + E_{\text{Otras}}$$

Conservación de la energía

En un sistema aislado la energía total se conserva. La energía puede pasar de una forma a otra o de una región a otra, pero no ser creada o destruida.

$$\text{Sistema aislado: } \Delta E_{\text{Sist}} = 0$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

- Si hay transferencia de energía, se produce intercambio de trabajo con el exterior

Teorema Trabajo-Energía

El trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas externas es igual a la variación de la energía total del sistema

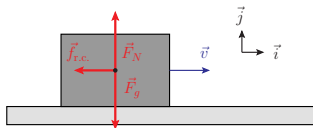
$$W_{\text{Ext}} = \Delta E_{\text{Sist}} = \Delta E_{\text{Mec}} + \Delta E_{\text{Otras}}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: se lanza un bloque de $m = 1$ kg que desliza con una velocidad inicial de 1 m s^{-1} sobre una superficie horizontal; el coeficiente de rozamiento cinético bloque-superficie es $\mu_c = 0.1$.
¿Qué distancia recorre el bloque antes de detenerse?

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: bloque desliza con rozamiento (cinético)



- Velocidad inicial $\vec{v} = v_0 \vec{i}$, energía cinética inicial $E_{c_i} = \frac{1}{2}mv_0^2$
- Fuerzas

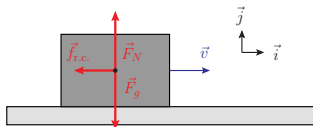
$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}, \quad \vec{f}_{r.c.} = -\mu_c F_N \vec{i}$$

N.B. movimiento horizontal $\Rightarrow F_N = mg$, y por tanto la fuerza de rozamiento cinético es constante

- No hay variación de la energía potencial, la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza neta. El desplazamiento es $d\vec{r} = dx\vec{i}$, con $x \in [0; d]$, siendo d la distancia recorrida hasta detenerse.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: bloque desliza con rozamiento (cinético)



■ Distancia d

$$\vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = (\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{f}_{r.c.}) \cdot (dx \vec{i}) = -\mu_c F_N dx = -\mu_c mg dx$$

$$\Delta E_c = W \Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_i^f \vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = \int_0^d dx (-\mu_c mg) = -\mu_c mgd$$

y por tanto

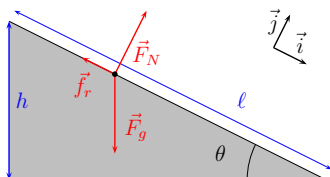
$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = 51 \text{ cm}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: una niña de masa 40 kg se desliza hacia abajo por un tobogán inclinado 30° (con respecto a la horizontal), desde una altura de 4 m sobre el suelo. El coeficiente de rozamiento cinético entre la niña y el tobogán es $\mu_c = 0.35$. La niña parte del reposo y desliza hasta llegar al suelo: ¿a qué velocidad llega al suelo?

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento



- Aplicamos el teorema trabajo-energía para relacionar la variación de la energía mecánica con el trabajo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la niña
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = mg(-\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{i}), \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}, \quad \vec{f}_r = -\mu F_N\vec{i}$$

- Rozamiento: si la fuerza en dirección \vec{i} supera la fuerza de rozamiento estático máxima, entonces $\mu \rightarrow \mu_c$ y proseguimos con el problema.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento

- Rozamiento: no conocemos el coeficiente de rozamiento estático, tan solo podemos verificar hasta qué valor máximo de μ_e la niña no permanecería en equilibrio.

De la componente \vec{j} , $F_N = mg \cos \theta$, por tanto la condición es

$$mg \sin \theta > \mu_e mg \cos \theta \Leftrightarrow \tan \theta > \mu_e$$

Con $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$: si $\mu_e < 0.58$ la niña desliza desde el reposo inicial.

- La fuerza de rozamiento que actúa sobre la niña es

$$\vec{f}_{r.c.} = -mg\mu_c \cos \theta \vec{i}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento

- Para determinar el trabajo realizado por esa fuerza neta entre los puntos inicial y final, tenemos $d\vec{r} = dx \vec{i}$ con $x \in [0; \ell]$,

$$\vec{f}_{r.c.} \cdot (dx \vec{i}) = -\mu_c mg \cos \theta dx$$

$$W_{\text{roz}} = \int_0^{\ell} (-\mu_c mg \cos \theta) dx = -\mu_c mgl \cos \theta = -\frac{mgh\mu_c}{\tan \theta}$$

- La variación de la energía mecánica es

$$\Delta E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

- Con $W_{\text{roz}} = \Delta E_{\text{Mec}}$ obtenemos finalmente

$$v_f = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{\mu_c}{\tan \theta}} = 5.56 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad \sqrt{2gh} = 8.85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}, \quad \sqrt{1 - \frac{\mu_c}{\tan \theta}} = 0.63$$

N.B. Límites $\mu_c \rightarrow 0$, $\tan \theta \rightarrow \mu_c$ y su significado físico

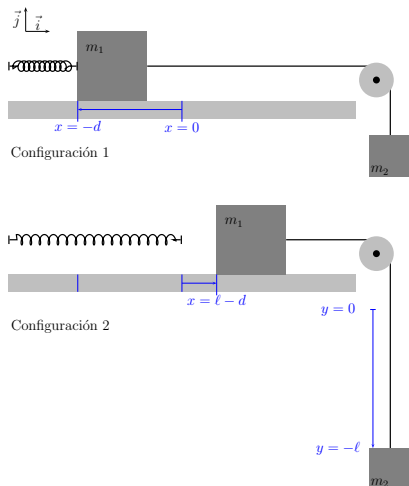
Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: un bloque de masa $m_2 = 4$ kg cuelga de una cuerda (sin masa) que pasa (sin rozamiento) por una polea sin masa y está conectada a un bloque de masa $m_1 = 6$ kg. El bloque m_1 puede deslizarse sobre una plataforma; el coeficiente de rozamiento cinético entre m_1 y la plataforma es $\mu_c = 0.2$. Sobre la plataforma tenemos también un muelle, sin masa, que tiene constante elástica 180 N/m. En la configuración 1, el bloque m_1 se empuja contra el muelle, que se comprime 30 cm; con m_1 y m_2 en reposo, se libera m_1 . En la configuración 2, los bloques se han desplazado 40 cm con respecto a la configuración inicial. (Antes de alcanzar esa configuración, cuando el muelle tiene su longitud en reposo, pierde contacto con m_1 y permanece en ese estado)
(Ver figura)

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- ¿Qué valor mínimo debería tener el coeficiente de rozamiento estático para que, al liberar m_1 , no hubiera movimiento? (Se asume en lo sucesivo que el coeficiente de rozamiento estático es inferior a ese valor)
- ¿Qué valor mínimo tendría que tener la constante elástica del muelle para que, al liberar m_1 , la cuerda no tuviera tensión?
- ¿Cuál es la velocidad de los bloques en la configuración 2?



Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea
Fuerzas

$$\vec{F}_{g_1} = -m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j},$$

$$\vec{f}_e = kd \vec{i}, \quad \vec{f}_r = -\mu_e F_N \vec{i},$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{i},$$

$$\vec{F}_{g_2} = -m_2 g \vec{j}, \quad \vec{T}_2 = T_2 \vec{j}$$

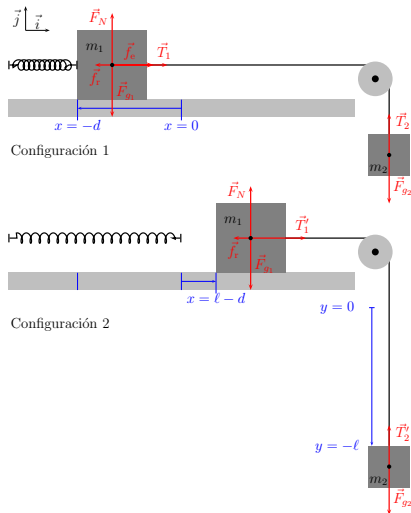
Condición para el equilibrio

$$\vec{F}_{g_1} + \vec{F}_N + \vec{f}_e + \vec{f}_r + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{g_2} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

con $\vec{f}_r = -\mu_e F_N \vec{i}$ fuerza de rozamiento estático máximo

Cuerda: $T_1 = T_2 = T$



Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

$$\vec{F}_{g_2} + \vec{T}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow (T - m_2g)\vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{g_1} + \vec{F}_N + \vec{f}_e + \vec{f}_r + \vec{T}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow (kd + T - \mu_e F_N)\vec{i} + (F_N - m_1g)\vec{j} = \vec{0}$$

De las componentes \vec{j}

$$T = m_2g, \quad F_N = m_1g$$

con lo que, de la componente \vec{i} ,

$$\mu_e = \frac{kd + m_2g}{m_1g} = 1.58$$

(N.B. $k = 180 \text{ N/m}$, $d = 0.3 \text{ m}$, $m_1 = 6 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$)

Si el rozamiento estático tuviera $\mu_e > 1.58$, al liberar m_1 , no se movería.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

La cuerda no tiene tensión $\Leftrightarrow m_2$ en caída libre, m_1 con aceleración

$$\vec{a} = a\vec{i} \text{ con } a > g$$

Por tanto, el valor mínimo de k para el cual la cuerda no tendría tensión se obtiene con

$$\vec{f}_e + \vec{f}_r = (kd - \mu_c F_N)\vec{i} = m_1 g \vec{i}$$

$$\Leftrightarrow (kd - \mu_c m_1 g)\vec{i} = m_1 g \vec{i} \Leftrightarrow k = (1 + \mu_c) \frac{m_1 g}{d} = 235 \text{ N/m}$$

(N.B. rozamiento *cinético*)

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- Velocidad de los bloques: $\vec{v}_1 = v\vec{i}$, $\vec{v}_2 = -v\vec{j}$ (cuerda de longitud constante en tensión)
- Obtendremos v a partir de la conservación de la energía: la variación de la energía mecánica de muelle+bloques entre la configuración 1 y la configuración 2 será el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

Configuración 1:

$$m_1 : E_c = 0, E_{\text{pot}} = 0, \quad m_2 : E_c = 0, E_{\text{pot}} = 0,$$

$$\text{muelle } k : E_c = 0, E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kd^2$$

Configuración 2:

$$m_1 : E_c = \frac{1}{2}m_1v^2, E_{\text{pot}} = 0, \quad m_2 : E_c = \frac{1}{2}m_2v^2, E_{\text{pot}} = -m_2g\ell,$$

$$\text{muelle } k : E_c = 0, E_{\text{pot}} = 0$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- Variación de la energía mecánica de muelle+bloques

$$\Delta E_{\text{Mec}} = E_{\text{Mec}}^{(2)} - E_{\text{Mec}}^{(1)} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - m_2g\ell - \frac{1}{2}kd^2$$

- Trabajo realizado por $\vec{f}_r = -\mu_c F_N \vec{i} = -\mu_c m_1 g \vec{i}$:
desplazamiento $d\vec{r} = dx \vec{i}$, $x \in [-d; \ell - d]$,

$$\vec{f}_r \cdot d\vec{r} = -\mu_c m_1 g dx, \quad W_{f_r} = \int_1^2 \vec{f}_r \cdot d\vec{r} = \int_{-d}^{\ell-d} (-\mu_c m_1 g) dx = -\mu_c m_1 g \ell$$

- Obtenemos finalmente

$$v = \sqrt{\frac{2gl(m_2 - \mu_c m_1) + kd^2}{m_1 + m_2}} = 1.95 \text{ m s}^{-1}$$

(N.B. Caída libre con velocidad inicial nula:

tras 0.4 m de caída $v = 2.43 \text{ m s}^{-1}$)