Física General

Tema 1 – Introducción

Magnitudes físicas y unidades

- **Leyes de la física**:
  relaciones (funcionales) entre magnitudes físicas
- Magnitud física: propiedad cuantificables mediante medida
  - Se representa con un símbolo (letra)
    [no es unívoco, puede ser un escalar, un vector, . . .]
  - **Debe** expresarse con un número y una unidad

$$\boxed{\text{Número} \times \text{Unidad}}$$

  - Número:
    - resultado de comparar su medida con la unidad de referencia
    - valor estimado con incertidumbre
  - Unidad:
    - Valor particular usado como referencia estándar
    - Diferentes unidades de una misma magnitud
      (Sistema Internacional, cgs, imperial, . . .)

Magnitudes físicas y unidades




Temperatura T	Volumen V	Presión P	Masa M	Energía E
24℃ 74℉	434.384 m^3	1007 hPa	207.02 g	1806 kWh

- Las magnitudes físicas suelen tener una *definición operacional*: se definen mediante el procedimiento de medida o cálculo a partir de otras magnitudes
- Importancia de contar con un **sistema de unidades**

Magnitudes físicas y unidades

Sistema Internacional de unidades (S.I.)

- Origen: Revolución Francesa

  (Pour tous les temps, pour tous les peuples)

- Establecido en la *XI Conferencia General de Pesos y Medidas (París 1960)*
- Sistema métrico decimal coherente
- Establece
  - las **unidades básicas** y sus **patrones**
  - las **unidades derivadas**
  - los símbolos para todas ellas
  - reglas de adición de prefijos que indican múltiplos y submúltiplos

Magnitudes físicas y unidades

Sistema Internacional de unidades (S.I.)

- 7 unidades básicas o fundamentales

Magnitud	Nombre unidad	Símbolo unidad
longitud	metro	m
masa	kilogramo	kg
tiempo (duración)	segundo	s
corriente eléctrica	amperio	A
temperatura termodinámica	kelvin	K
cantidad de sustancia	mol	mol
intensidad luminosa	candela	cd

N.B. Los símbolos se escriben en minúsculas, salvo que provengan de un nombre propio (1^a en mayúscula)

- unidades derivadas: todas las demás;
  son productos de potencias de unidades básicas;
  algunas reciben nombres y símbolos especiales

Magnitudes físicas y unidades

Bureau International des Poids et Mesures http://www.bipm.org

The SI is the system of units in which:

- the unperturbed ground state hyperfine transition frequency of the caesium 133 atom $\Delta\nu_{Cs}$ is 9 192 631 770 Hz,
- the speed of light in vacuum c is 299 792 458 m/s,
- the Planck constant h is $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J s,
- the elementary charge e is $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C,
- the Boltzmann constant k is $1.380\,649 \times 10^{-23}$ J/K,
- the Avogadro constant N_A is $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ mol^{-1},
- the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency 540×10^{12} Hz, K_{cd}, is 683 lm/W,

where the hertz, joule, coulomb, lumen, and watt, with unit symbols Hz, J, C, lm, and W, respectively, are related to the units second, metre, kilogram, ampere, kelvin, mole, and candela, with unit symbols s, m, kg, A, K, mol, and cd, respectively, according to Hz = s^{-1}, J = kg m^2 s^{-2}, C = A s, lm = cd m^2 m^{-2} = cd sr, and W = kg m^2 s^{-3}.

Definición del S.I.

Magnitudes físicas y unidades

Quantity	SI unit
time	The **second**, symbol s, is the SI unit of time. It is defined by taking the fixed numerical value of the caesium frequency $\Delta\nu_{Cs}$, the unperturbed ground-state hyperfine transition frequency of the caesium 133 atom, to be 9 192 631 770 when expressed in the unit Hz, which is equal to s^{-1}.
length	The **metre**, symbol m, is the SI unit of length. It is defined by taking the fixed numerical value of the speed of light in vacuum c to be 299 792 458 when expressed in the unit $m\ s^{-1}$, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.
mass	The **kilogram**, symbol kg, is the SI unit of mass. It is defined by taking the fixed numerical value of the Planck constant h to be $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ when expressed in the unit J s, which is equal to $kg\ m^2\ s^{-1}$, where the metre and the second are defined in terms of c and $\Delta\nu_{Cs}$.
electric current	The **ampere**, symbol A, is the SI unit of electric current. It is defined by taking the fixed numerical value of the elementary charge e to be $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ when expressed in the unit C, which is equal to A s, where the second is defined in terms of $\Delta\nu_{Cs}$.
thermodynamic temperature	The **kelvin**, symbol K, is the SI unit of thermodynamic temperature. It is defined by taking the fixed numerical value of the Boltzmann constant k to be $1.380\,649 \times 10^{-23}$ when expressed in the unit $J\ K^{-1}$, which is equal to $kg\ m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$, where the kilogram, metre and second are defined in terms of h, c and $\Delta\nu_{Cs}$.
amount of substance	The **mole**, symbol mol, is the SI unit of amount of substance. One mole contains exactly $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ elementary entities. This number is the fixed numerical value of the Avogadro constant, N_A, when expressed in the unit mol^{-1} and is called the Avogadro number. The amount of substance, symbol n, of a system is a measure of the number of specified elementary entities. An elementary entity may be an atom, a molecule, an ion, an electron, any other particle or specified group of particles.
luminous intensity	The **candela**, symbol cd, is the SI unit of luminous intensity in a given direction. It is defined by taking the fixed numerical value of the luminous efficacy of monochromatic radiation of frequency 540×10^{12} Hz, K_{cd}, to be 683 when expressed in the unit $lm\ W^{-1}$, which is equal to $cd\ sr\ W^{-1}$, or $cd\ sr\ kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3$, where the kilogram, metre and second are defined in terms of h, c and $\Delta\nu_{Cs}$.

Unidades del S.I.

Magnitudes físicas y unidades

Derived quantity	Name of derived unit	Symbol for unit	Expression in terms of other units
plane angle	radian	rad	m/m
solid angle	steradian	sr	m^2/m^2
frequency	hertz	Hz	s^{-1}
force	newton	N	$kg\ m\ s^{-2}$
pressure, stress	pascal	Pa	$N/m^2 = kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
energy, work, amount of heat	joule	J	$N\ m = kg\ m^2\ s^{-2}$
power, radiant flux	watt	W	$J/s = kg\ m^2\ s^{-3}$
electric charge	coulomb	C	A s
electric potential difference	volt	V	$W/A = kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$
capacitance	farad	F	$C/V = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^4\ A^2$
electric resistance	ohm	Ω	$V/A = kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-2}$
electric conductance	siemens	S	$A/V = kg^{-1}\ m^{-2}\ s^3\ A^2$
magnetic flux	weber	Wb	$V\ s = kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-1}$
magnetic flux density	tesla	T	$Wb/m^2 = kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
inductance	henry	H	$Wb/A = kg\ m^2\ s^{-2}\ A^{-2}$
Celsius temperature	degree Celsius	^{o}C	K
luminous flux	lumen	lm = cd sr	cd sr
illuminance	lux	$lx = cd\ sr\ m^{-2}$	lm/m^2
activity referred to a radionuclide	becquerel	Bq	s^{-1}
absorbed dose, kerma	gray	Gy	$J/kg = m^2\ s^{-2}$
dose equivalent	sievert	Sv	$J/kg = m^2\ s^{-2}$
catalytic activity	katal	kat	$mol\ s^{-1}$

Unidades derivadas del S.I.

Magnitudes físicas y unidades

Sistema Internacional

- Definiciones operacionales experimentales
- Han ido cambiando con el tiempo (más precisión)
- Desde la revisión de 2019, está completamente basado en constantes naturales (no patrones)

Magnitudes físicas y unidades

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO

Núm. 119 **Miércoles 29 de abril de 2020** **Sec. I. Pág. 30649**

I. DISPOSICIONES GENERALES

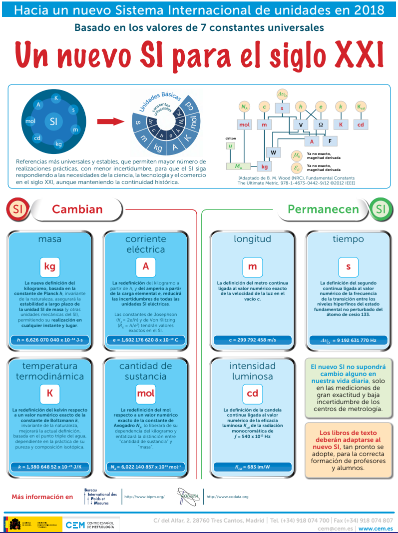
MINISTERIO DE INDUSTRIA, COMERCIO Y TURISMO

4707 *Real Decreto 493/2020, de 28 de abril, por el que se modifica el Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida.*

El sistema legal de unidades de medida vigente en España es, tal y como establece el artículo segundo de la Ley 32/2014, de 22 de diciembre, de metrología, el Sistema Internacional de Unidades (SI) adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) y vigente en la Unión Europea.

El Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida, implanta las definiciones de las unidades, sus nombres y símbolos, así como las reglas para la formación de sus múltiplos y submúltiplos de conformidad con los acuerdos de la CGPM y la normativa de la Unión Europea.

Magnitudes físicas y unidades



Magnitudes físicas y unidades

Factor	Name	Symbol	Factor	Name	Symbol
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Prefijos del S.I.

Magnitudes físicas y unidades

- Notación científica: $x \times 10^{q} \ \times \ (\text{unidad})$

  $x \in \mathbb{R},\ 1 \leq x < 10;\ q$ entero $(q \in \mathbb{Z})$

  Ejemplos

$$0.000\,003\,\mathrm{s} = 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 1\,\mu\mathrm{s}$$

$$100\,000\,000\,\mathrm{W} = 1 \times 10^{8}\,\mathrm{W} = 100\,\mathrm{MW}$$

$$1500\,000\,000\,\mathrm{Hz} = 1.5 \times 10^{9}\,\mathrm{Hz} = 1.5\,\mathrm{GHz}$$

$$0.000\,000\,025\,\mathrm{m} = 2.5 \times 10^{-8}\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{nm}$$

$$2.3\,\mathrm{cm}^{3} = 2.3(\mathrm{cm})^{3} = 2.3 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^{3}$$

[N.B. Prefijo se aplica a la unidad básica $1\,\mathrm{cm}^{3} \neq 1 \times 10^{-2}\mathrm{m}^{3}$!!]

- Conversión de unidades

  Ejemplo

$$55\,\mathrm{mi/h} = 55\,\mathrm{mph} = 55\,\frac{\mathrm{mi}}{\mathrm{h}}\,\frac{1609\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{mi}}\,\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}} = 25\,\mathrm{m\,s}^{-1}$$

Dimensiones y análisis dimensional

- Magnitudes físicas organizadas en un sistema de **dimensiones fundamentales** (en correspondencia con las unidades básicas)

Magnitud	Símbolo
longitud	L
masa	M
tiempo	T
corriente eléctrica	I
temperatura termodinámica	Θ
cantidad de sustancia	N
intensidad luminosa	J

- Las dimensiones de una magnitud son independientes de las unidades en que se expresa
- Dimensiones de una magnitud física Q: $[Q]$

$$[Q] = T^{\alpha} L^{\beta} M^{\gamma} I^{\delta} \Theta^{\epsilon} N^{\xi} J^{\eta}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi, \eta$: exponentes dimensionales

Dimensiones y análisis dimensional

- Homogeneidad dimensional:

$$\text{si } Q_1 = Q_2 + Q_3, \quad [Q_1] = [Q_2] = [Q_3]$$

  N.B. Argumentos de funciones trascendentes (trigonométrica, exponencial, logarítmica): adimensionales
- $[Q_1 \cdot Q_2] = [Q_1] \cdot [Q_2]$
- Insensible a constantes y factores adimensionales:
  $[Q] = [\pi Q] = [23Q]$
- *Ejemplos*
  - Dimensiones de un ángulo plano
  - Dimensiones de la densidad de masa
  - Dimensiones del campo eléctrico

Dimensiones y análisis dimensional

Ejemplos

- Dimensiones de un ángulo plano α:

$$\alpha = \frac{\text{Arco}}{\text{Radio}} \Rightarrow [\alpha] = \frac{L}{L} \text{ adimensional}$$

- Dimensiones de la densidad de masa ρ (en 3D):

$$\rho = \frac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} \Rightarrow [\rho] = ML^{-3}$$

- Dimensiones del campo eléctrico E:

$$E = \frac{\text{Fuerza}}{\text{Carga}} = \frac{\text{Masa} \times \text{Aceleración}}{\text{Intensidad} \times \text{Tiempo}} \Rightarrow [E] = \frac{MLT^{-2}}{IT} = MLT^{-3}I^{-1}$$

N.B. $[E]$ = diferencia de potencial eléctrico / distancia

Dimensiones y análisis dimensional

Análisis dimensional

- Permite comprobar si una expresión es correcta dimensionalmente
  Ejemplo: área A de un disco de radio r

  $$A = 2\pi r\,? \quad A = 2\pi r^2\,? \quad A = \pi r^2\,?$$

  Ejemplo: frecuencia de oscilación de un péndulo de longitud ℓ

  $$f = 2\pi\sqrt{g\ell^2}\,? \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,? \qquad g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

  Ejemplo: ¿cuál es el cociente entre las frecuencias de oscilación de dos péndulos de longitudes respectivas ℓ_1 y ℓ_2?

Dimensiones y análisis dimensional

- Método de Rayleigh: determinar la expresión de una magnitud conociendo las variables de las que depende
  - Ejemplo: se lanza una piedra de masa m verticalmente (hacia arriba) con velocidad inicial v_0, determina la altura h que alcanza, antes de volver a caer, suponiendo que depende de m, v_0 y la aceleración de la gravedad g.
  - Ejemplo: se lanza una piedra de masa m verticalmente (hacia arriba) con velocidad inicial v_0, determina el tiempo t que tarda en alcanzar la altura máxima, antes de volver a caer, suponiendo que depende de m, v_0 y la aceleración de la gravedad g.
  - Ejemplo: determina dimensionalmente la *velocidad escape* de la Tierra suponiendo que depende del radio de la Tierra R_T y la aceleración de la gravedad g.

Dimensiones y análisis dimensional

- Ejemplo: piedra lanzada verticalmente.

$$[h] = L = [g^a v_0^b m^c] = L^{a+b} T^{-2a-b} M^c$$

$$\Rightarrow \ c = 0, \ a = -1, \ b = 2, \ h \propto \frac{v_0^2}{g}$$

$$[t] = T = [g^a v_0^b m^c] = L^{a+b} T^{-2a-b} M^c$$

$$\Rightarrow \ c = 0, \ a = -1, \ b = 1, \ t \propto \frac{v_0}{g}$$

N.B. Las expresiones correctas son $h = \frac{v_0^2}{2g}$, $t = \frac{v_0}{g}$.
N.B. Independencia de la masa m: $[g] = M^0 L T^{-2}$.

Dimensiones y análisis dimensional

- Ejemplo: determina dimensionalmente la *velocidad escape* v_e de la Tierra suponiendo que depende del radio de la Tierra R_T y la aceleración de la gravedad g.

$$[v_e] = LT^{-1} = [g^a R_T^b] = L^{a+b}T^{-2a}$$

$$\Rightarrow \; a = b = \frac{1}{2}, \; v_e \propto \sqrt{gR_T}$$

N.B. La velocidad de escape es $v_e = \sqrt{2gR_T}$

Estimación

- Estimación ("problemas de Fermi"): obtención de órdenes de magnitud mediante hipótesis razonables y cálculos simples
- Ejemplos
  - ¿cuántas pelotas de ping-pong caben en el aula?
  - ¿cuántos días de clase vas a tener hasta acabar el doble grado?
  - ¿cuántos ascensores hay en edificios residenciales en Valencia?
  - ¿cuántos ladrillos tiene el recubrimiento exterior del edificio de la facultad de Matemáticas de la UV?
  - ¿cuál es la masa de una mosca?
  - ¿cuál es la masa del cerebro humano?
  - un paquete de 1 kg de arroz tiene un volumen $V \simeq 1\ell$, ¿qué masa tiene un grano de arroz?

Cifras significativas y órdenes de magnitud

- El valor de cualquier magnitud tiene una incertidumbre asociada (i.e. la precisión con que se determina)
- Este valor se debe escribir con los dígitos cuyo valor se conoce con seguridad (excepto 0 delante de punto decimal),
  número correcto de cifras significativas (notación científica)
- Ejemplo: se determinan varias longitudes con una incertidumbre de $(\pm)0.5\mathrm{m}$

$$\ell_1 = 252.34\,\mathrm{m} \;\rightarrow \ell_1 = 252.3\,\mathrm{m}, \quad 4 \text{ cifras significativas}$$
$$\ell_2 = 6432\,\mathrm{m} \;\rightarrow \ell_1 = 6432.0\,\mathrm{m}, \quad 5 \text{ cifras significativas}$$
$$\ell_3 = 0.08\,\mathrm{m} \;\rightarrow \ell_1 = 0.1\,\mathrm{m}, \quad 1 \text{ cifra significativa}$$

- Ejemplo: $E = 0.00103\,\mathrm{J} = 1.03 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$, 3 cifras significativas

Cifras significativas y órdenes de magnitud

- Magnitudes calculadas a partir de otras: propagación de errores
- Por el momento, 2 reglas básicas
  - Número de cifras significativas en suma o resta debe coincidir con las del término con menor número de cifras significativas
  - Número de cifras significativas en multiplicación o división no debe ser mayor que el menor número de cifras significativas de cualquiera de los factores
- Ejemplo: Velocidad de escape de la Tierra $v_e = \sqrt{2gR_T}$,
  aplicación numérica: $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R_T = 6.4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

Cifras significativas y órdenes de magnitud

- Ejemplo: Velocidad de escape de la Tierra $v_e = \sqrt{2gR_T}$,
  aplicación numérica: $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $R_T = 6.4 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

$$v_e = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6.5 \cdot 10^6}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6.4 \cdot 10^6}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 6.3 \cdot 10^6}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 11.293 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ 11.206 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ 11.118 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{array} \right\}$$

$$= 11.2 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Cifras significativas y órdenes de magnitud

- Orden de magnitud: aproximación a la potencia de 10 más cercana (notación científica)
- Ejemplos

Size or Distance	(m)
Proton	10^{-15}
Atom	10^{-10}
Virus	10^{-7}
Giant amoeba	10^{-4}
Walnut	10^{-2}
Human being	10^{0}
Highest mountain	10^{4}
Earth	10^{7}
Sun	10^{9}
Distance from Earth to the Sun	10^{11}
Solar system	10^{13}
Distance to nearest star	10^{16}
Milky Way galaxy	10^{21}
Visible universe	10^{26}

Mass	(kg)
Electron	10^{-30}
Proton	10^{-27}
Amino acid	10^{-25}
Hemoglobin	10^{-22}
Flu virus	10^{-19}
Giant amoeba	10^{-8}
Raindrop	10^{-6}
Ant	10^{-4}
Human being	10^{2}
Saturn V rocket	10^{6}
Pyramid	10^{10}
Earth	10^{24}
Sun	10^{30}
Milky Way galaxy	10^{41}
Universe	10^{52}

Time Interval	(s)
Time for light to cross nucleus	10^{-23}
Period of visible light radiation	10^{-15}
Period of microwaves	10^{-10}
Half-life of muon	10^{-6}
Period of highest audible sound	10^{-4}
Period of human heartbeat	10^{0}
Half-life of free neutron	10^{3}
Period of Earth's rotation	10^{3}
Period of Earth's revolution around the Sun	10^{7}
Lifetime of human being	10^{9}
Half-life of plutonium-239	10^{12}
Lifetime of mountain range	10^{15}
Age of Earth	10^{17}
Age of universe	10^{18}

Revisión de conceptos básicos: funciones

- Las "leyes físicas" son relaciones funcionales entre magnitudes físicas
  - $f(x)$ representa analíticamente cualquier magnitud física con sus dependencias
  - f es la variable dependiente
  - x es la variable independiente
- Ejemplos

$$x(t) = bt - \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{posición(tiempo)}$$

$$v(t) = v_0(1 - e^{-\beta t}) \qquad \text{velocidad(tiempo)}$$

$$F(x) = -kx \qquad \text{fuerza(posición)}$$

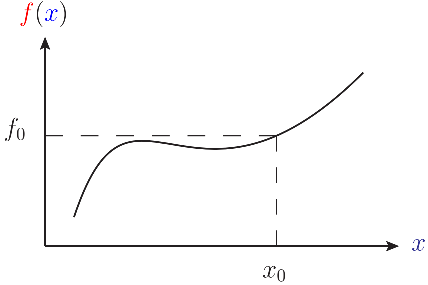
$$F(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \qquad \text{fuerza(distancia)}$$

$$E(v) = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{energía(velocidad)}$$

$$E(y) = mgy \qquad \text{energía(posición)}$$

Revisión de conceptos básicos: funciones

- En física se busca conocer estas dependencias funcionales (analíticamente)
  - No basta con conocer puntos concretos x_0, f_0
- Importancia de la representación gráfica

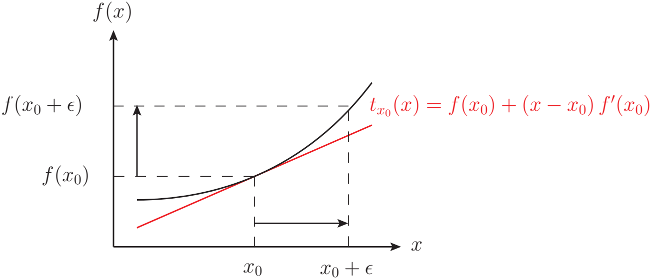


Revisión de conceptos básicos: derivadas

- Definición

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

- Interpretación geométrica: $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$



Revisión de conceptos básicos: derivadas

Funciones u, v; constante c; $\frac{d}{dx}f \to f'$

$$c' = 0$$
$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$
$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$[v\left(u(x)\right)]' = v'\left(u(x)\right)\, u'(x)$$

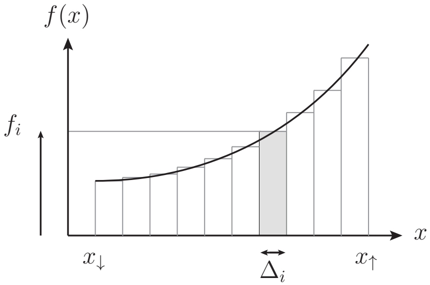
Ejemplos

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1} \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \;\; (a > 0) \qquad \frac{d}{dx}\arcsin\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}\arctan\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

Revisión de conceptos básicos: integrales

- Definición (Riemann)

$$\int_{x_\downarrow}^{x_\uparrow} dx\, f(x) = \lim_{\Delta_i \to 0} \sum_i f_i \Delta_i$$



- Interpretación geométrica: área “bajo la curva” (signo)

Revisión de conceptos básicos: integrales

- $F(x)$ función primitiva de $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

- Integral definida

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$$

- Integral indefinida

$$F(x) = \int dy\, f(y) + c = \int_{x_0}^x dy\, f(y) + c$$

Revisión de conceptos básicos: integrales

Ejemplos

$$\int du\, k = k\, u + c$$

$$\int (du + dv) = \int du + \int dv$$

$$\int du\, u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \;\; (n \neq -1)$$

$$\int du\, e^u = e^u + c$$

$$\int du\, \sin u = -\cos u + c$$

$$\int du\, \cos u = \sin u + c$$

$$\int du\, \frac{1}{u} = \ln |u| + c$$

$$\int du\, a^u = \frac{a^u}{\ln a} + c \;\; (a > 0, a \neq 1)$$

$u = x$ para funciones elementales
$u = f(x)$ para funciones compuestas, $du = \frac{df}{dx} dx$

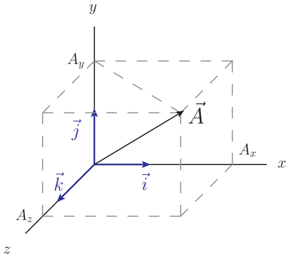
Revisión de conceptos básicos: vectores

Aquí, vectores $\vec{A}$: elementos de $\mathbb{R}^3$

- Se pueden sumar $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$
- Se pueden multiplicar por un escalar (real) $\vec{C} = x\vec{A}$
- Vector nulo $\vec{0}$, $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$
  - $\vec{A} = \vec{B}$ si y solo si $\vec{A} - \vec{B} = \vec{0}$
- N.B. No se puede sumar un vector y un escalar $x + \vec{A} =$???
- Tienen magnitud/módulo $|\vec{A}|$ (ver producto escalar)
- Tienen dirección y sentido: $\vec{B} = c\vec{A}$ ($c \neq 0$)
  - $\vec{B}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$
  - para $c > 0$, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido, para $c < 0$ tienen sentidos opuestos

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Base (ortonormal directa) $\mathbf{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ (base cartesiana)



- Todo $\vec{A}$ tiene una descomposición única

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad (= A_1\vec{u}_1 + A_2\vec{u}_2 + A_3\vec{u}_3)$$

- (A_x, A_y, A_z) son las componentes (en la base $\mathbf{B}$),

"$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$"

- otras notaciones: $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, (x_1, x_2, x_3), (A_1, A_2, A_3)

Revisión de conceptos básicos: vectores

- En términos de componentes

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} A_x+B_x=C_x \\ A_y+B_y=C_y \\ A_z+B_z=C_z \end{array}\right\}$$

$$A_i+B_i=C_i,\;\; i=1,2,3$$

$$\vec{B}=c\vec{A} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} B_x=cA_x \\ B_y=cA_y \\ B_z=cA_z \end{array}\right\}$$

$$B_i=cA_i,\;\; i=1,2,3$$

- Vector nulo $\vec{0}=(0,0,0)$

Revisión de conceptos básicos: vectores

Producto escalar ("producto interno"): asocia un número (real) a dos vectores ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$)

Producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$: $\vec{A} \cdot \vec{B}$

Propiedades

- $(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) \cdot \vec{C} = (\alpha\vec{A}) \cdot \vec{C} + (\beta\vec{B}) \cdot \vec{C} = \alpha\vec{A} \cdot \vec{C} + \beta\vec{B} \cdot \vec{C}$
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- Base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\left\{\begin{matrix} \vec{i}\cdot\vec{i} = 1, & \vec{i}\cdot\vec{j} = 0, & \vec{i}\cdot\vec{k} = 0, \\ & \vec{j}\cdot\vec{j} = 1, & \vec{j}\cdot\vec{k} = 0, \\ & & \vec{k}\cdot\vec{k} = 1 \end{matrix}\right\} \qquad (\vec{u}_a \cdot \vec{u}_b = \delta_{ab})$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Componentes: con $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \cdot (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) =$$

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_iB_i \quad (\text{“}A_iB_i\text{”})$$

- Magnitud o módulo de un vector

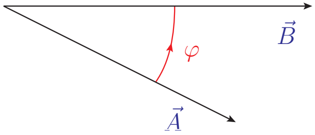
$$|\vec{A}| \equiv \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

- Vector unitario $\vec{a}$: $|\vec{a}| = 1$ (ejemplos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)
- Vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$:

$$\vec{u}_{(\vec{A})} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Interpretación geométrica



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\varphi, \qquad \varphi\in[0;\pi]$$

- Proyección de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$

$$\vec{A}_{(\vec{B}_{\parallel})} = \left(\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \left(\vec{A}\cdot\vec{u}_{(\vec{B})}\right)\vec{u}_{(\vec{B})} = |\vec{A}|\cos\varphi\;\vec{u}_{(\vec{B})}$$

- Descomposición de $\vec{A}$

$$\vec{A} = \vec{A}_{(\vec{B}_{\parallel})} + \vec{A}_{(\vec{B}_{\perp})}$$

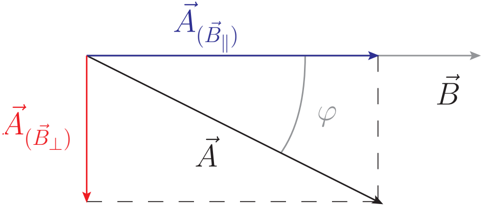
Revisión de conceptos básicos: vectores

- Descomposición de $\vec{A}$

$$\vec{A} = \vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)} + \vec{A}_{(\vec{B}_\perp)},$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)} = \left(\vec{A}\cdot\vec{u}_{(\vec{B})}\right)\vec{u}_{(\vec{B})}, & \vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)}\cdot\vec{B} = \pm|\vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)}|\,|\vec{B}| \\ \vec{A}_{(\vec{B}_\perp)} = \vec{A} - \vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)}, & \vec{A}_{(\vec{B}_\perp)}\cdot\vec{B} = 0 \end{array}\right\}$$

$$|\vec{A}_{(\vec{B}_\parallel)}| = |\vec{A}|\,|\cos\varphi|, \qquad |\vec{A}_{(\vec{B}_\perp)}| = |\vec{A}|\,|\sin\varphi|$$



Revisión de conceptos básicos: vectores

Producto vectorial ("producto exterior"): asocia un vector a dos vectores ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$)

Producto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$: $\vec{A} \times \vec{B}$ (también $\vec{A} \wedge \vec{B}$)

Propiedades

- $(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) \times \vec{C} = (\alpha\vec{A}) \times \vec{C} + (\beta\vec{B}) \times \vec{C} = \alpha\vec{A} \times \vec{C} + \beta\vec{B} \times \vec{C}$
- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \Rightarrow \vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
- [N.B. $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$]
- Base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \\ & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \\ & & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array}\right\} \qquad (\vec{u}_a \times \vec{u}_b = \epsilon_{abc}\vec{u}_c)$$

Orientación "mano derecha" o "sacacorchos"

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Componentes: dados $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) =$$

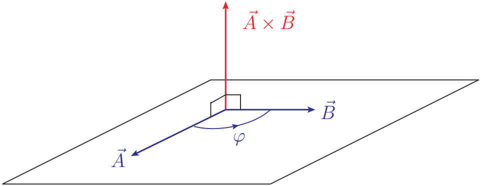
$$\left\{\begin{aligned} A_xB_x\vec{i}\times\vec{i} + A_yB_y\vec{j}\times\vec{j} + A_zB_z\vec{k}\times\vec{k} \\ + A_xB_y\vec{i}\times\vec{j} + A_yB_x\vec{j}\times\vec{i} \\ + A_xB_z\vec{i}\times\vec{k} + A_zB_x\vec{k}\times\vec{i} \\ + A_yB_z\vec{j}\times\vec{k} + A_zB_y\vec{k}\times\vec{j} \end{aligned}\right\}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Interpretación geométrica



$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\,|\sin\varphi|$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Funciones vectoriales, (típicamente) dependientes del tiempo t:
  Dado $\vec{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$,
  - Derivadas

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

[N.B. "$\frac{d}{dt}\vec{i} = \vec{0}, \ldots$"]

  - $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}$
  - $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$
  - Integrales

$$\int dt\,\vec{A}(t) = \left(\int dt\,A_x\right)\vec{i} + \left(\int dt\,A_y\right)\vec{j} + \left(\int dt\,A_z\right)\vec{k}$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

Ejemplos

- Dados $\vec{A} = (2,1,0)$ y $\vec{C} = (0,0,3)$ encuentra $\vec{B}$ tal que $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $|\vec{A} \cdot \vec{B}| = 3$. Representa $\vec{A}$ y $\vec{B}$, comenta el resultado.
- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector unitario

$$\vec{i}' = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

  obtén $\vec{j}'$ tal que $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\}$ sea una base ortonormal directa.
- Dado $\vec{A}(t) = \alpha\, t\, \vec{i} + \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\vec{j} + \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega t)\vec{k}$, ¿qué indica el análisis dimensional de $[\alpha/\beta]$? Calcula $\left|\frac{d}{dt}\vec{A}\right|$, $\frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$.
- Demuestra que para un vector unitario $\vec{u}(t)$

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \qquad \text{i.e. } \vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Ejemplo

- Dados $\vec{A} = (2, 1, 0)$ y $\vec{C} = (0, 0, 3)$ encuentra $\vec{B}$ tal que $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $|\vec{A} \cdot \vec{B}| = 3$. Representa $\vec{A}$ y $\vec{B}$, comenta el resultado.
  - Sea $\vec{B} = (x, y, z)$, convertimos las condiciones en ecuaciones que x, y, z deben resolver:

$$\vec{C} = 3\vec{k} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = z\vec{i} - 2z\vec{j} + (2y - x)\vec{k} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ -2z = 0 \\ 2y - x = 3 \end{array} \right\}$$

$$|\vec{A} \cdot \vec{B}| = 3 = |2x + y|$$

  - Sustituimos 1^a en 2^a,

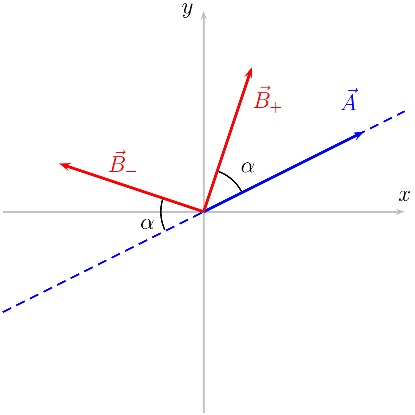
$$|2(2y - 3) + y| = |5y - 6| = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{3}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{5} \end{array} \right\}$$

Dos soluciones $\vec{B}_+ = \frac{1}{5}(3\vec{i} + 9\vec{j})$, $\vec{B}_- = \frac{1}{5}(-9\vec{i} + 3\vec{j})$,

$$\vec{A} \times \vec{B}_\pm = \vec{C}, \ \vec{A} \cdot \vec{B}_\pm = \pm 3$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

Dos soluciones $\vec{B}_+ = \frac{1}{5}(3\vec{i} + 9\vec{j})$, $\vec{B}_- = \frac{1}{5}(-9\vec{i} + 3\vec{j})$



$\vec{A} \cdot (\vec{B}_+ + \vec{B}_-) = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_-$ y $\vec{B}_+$ reflejados respecto a $\perp$ a $\vec{A}$

Revisión de conceptos básicos: vectores

Ejemplo

- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector unitario

$$\vec{i}' = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

  obtén $\vec{j}'$ tal que $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}\}$ sea una base ortonormal directa.
- En general $\vec{j}' = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$
- Ortonormal

$$\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0 \Leftrightarrow c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha = 0$$

$$\vec{j}' \cdot \vec{j}' = 1 \Leftrightarrow c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$$

$$\vec{j}' \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow c_z = 0$$

$$\vec{i}' \times \vec{j}' = \vec{k} \Leftrightarrow c_z \sin\alpha\,\vec{i} - c_z \cos\alpha\,\vec{j} + (c_y \cos\alpha - c_x \sin\alpha)\vec{k} = \vec{k}$$

$$\ldots$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

Ejemplo

- Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y el vector unitario

$$\vec{i}\,' = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

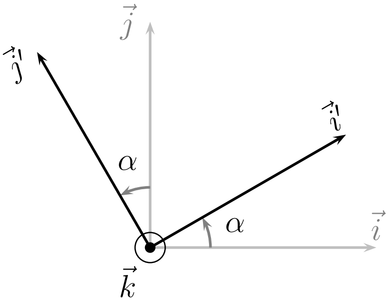
obtén $\vec{j}\,'$ tal que $\{\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\}$ sea una base ortonormal directa.

- En general $\vec{j}\,' = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$
- Ortonormal, $c_z = 0$

$$c_x \cos\alpha + c_y \sin\alpha = 0$$
$$c_y \cos\alpha - c_x \sin\alpha = 1$$

- Solución

$$\vec{j}\,' = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}$$



Revisión de conceptos básicos: vectores

Ejemplo

- Dado $\vec{A}(t) = \alpha\, t\, \vec{i} + \frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\vec{j} + \frac{\beta}{\omega}\sin(\omega t)\vec{k}$, ¿qué indica el análisis dimensional de $[\alpha/\beta]$? Calcula $\left|\frac{d}{dt}\vec{A}\right|$, $\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$.

Dimensionalmente $[\omega] = [t]^{-1}$ y $\left[\frac{\beta}{\omega}\right] = [\alpha t]$, por tanto $[\alpha] = [\beta]$

$$\frac{d}{dt}\vec{A} = \alpha\,\vec{i} + \beta\left[-\sin(\omega t)\vec{j} + \cos(\omega t)\vec{k}\right]$$

$$\left|\frac{d}{dt}\vec{A}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{A} = -\beta\omega\left[\cos(\omega t)\vec{j} + \sin(\omega t)\vec{k}\right]$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 0$$

Revisión de conceptos básicos: vectores

- Demuestra que para un vector unitario $\vec{u}(t)$

$$\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0 \qquad \text{i.e. } \vec{u} \perp \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}(|\vec{u}|^2) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{u}|^2) = \frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$