IDPASC School of Flavour Physics

València, May 2013

The Standard Model of Electroweak Interactions

Proposed Problems

1.- Introducción a las interacciones electrodébiles. Rotura espontánea de simetrías

Problema 1.1: *La interacción de Fermi entre leptones y neutrinos es*

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[\bar{e}\gamma^{\alpha}(1-\gamma_5)\nu_e\right] \left[\bar{\nu}_{\mu}\gamma_{\alpha}(1-\gamma_5)\mu\right]$$

i) *¿Qué dimensiones tienen los campos fermiónicos? ¿y la constante de Fermi G_F?*
ii) *Usando análisis dimensional y la interacción de Fermi estimad la anchura de desintegración del muón. Estimad el coeficiente numérico estudiando solamente la forma de la integral de espacio fásico a tres cuerpos*
iii) *Usando argumentos similares estimad la sección eficaz total de la colisión $\bar{\nu}_e e \to \mu\bar{\nu}_{\mu}$ para $s \gg m_{\mu}^2$ (añadid ahora los factores apropiados para el espacio fásico de dos cuerpos). ¿Como depende de s?*
iv) *Usando las reglas de Feynman para la interacción de Fermi calculad completamente la sección eficaz de la colisión $\bar{\nu}_e e \to \mu\bar{\nu}_{\mu}$ (Podéis despreciar las masas de todas las partículas). Comparad con el resultado obtenido mediante análisis dimensional.*
v) *Supongamos que la amplitud a segundo orden de $\bar{\nu}_e e \to \mu\bar{\nu}_{\mu} \to \bar{\nu}_e e$ es calculable usando la interacción de Fermi. Usando análisis dimensional estimad cómo contribuiría a la sección eficaz de $\bar{\nu}_e e \to \bar{\nu}_e e$, ¿cómo depende con la energía y cómo se compara esta contribución con la obtenida a nivel árbol? Por simple contaje de potencias del momento comprobad que el diagrama $\bar{\nu}_e e \to \mu\bar{\nu}_{\mu} \to \bar{\nu}_e e$ es divergente. ¿de qué orden es la divergencia?*

Problema 1.2: *En la teoría IVB*

$$\mathscr{L}_W = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_e\gamma^{\sigma}P_L e + \bar{\nu}_{\mu}\gamma^{\sigma}P_L\mu\right) W_{\sigma}^{+} + \text{h.c.}$$

Con $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ ¿que dimensiones tiene g? Usando análisis dimensional estimad la sección eficaz de la colisión $\bar{\nu}_e e \to \mu\bar{\nu}_{\mu}$ para $s \ll m_W^2$ (y $s \gg m_{\mu}^2$) y comparad con los resultados del problema anterior. ¿y para $s \gg m_W^2$, qué se obtiene? ¿Crea algún problema el hecho de que el propagador de campo de Proca del W sea?

$$-(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{m_W^2})\frac{i}{k^2 - m_W^2 + i\varepsilon}$$

Problema 1.3: *Usando análisis dimensional y el hecho de que la suma sobre polarizaciones del campo de Proca es*

$$\sum_{\lambda=1}^{3} \varepsilon_\mu(\vec{k},\lambda)\varepsilon_\nu(\vec{k},\lambda) = -(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2})$$

estimad en la teoría IVB el término dominante, cuando $s \gg m_W^2$ *en la colisión* $e^-e^+ \to W^+W^-$. *¿Como depende de* s*? Haced el cálculo completo en la teoría IVB (sin tener en cuenta la contribución del fotón)*

Problema 1.4: *Estudiad el espectro y las interacciones de una teoría con rotura espontánea de una simetría discreta*

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\;\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$$

y $\mu^2 < 0$.

Problema 1.5: *Estudiad el espectro y las interacciones de una teoría con rotura espontánea de una simetría continua global*

$$\mathscr{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

con

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$$

ϕ *complejo y* $\mu^2 < 0$, *en la parametrización exponencial*

$$\phi = \frac{(v+\rho(x))}{\sqrt{2}}e^{i\theta(x)/v}$$

Problema 1.6: *Encontrad los bosones de Goldstone,* θ^a, *de una teoría con* N_G *escalares reales* Φ, *con* $j_\mu^a = (\partial_\mu\Phi^T)iT^a\Phi$ *corrientes conservadas* $\partial^\mu j_\mu^a = 0$ *y valor esperado en el vacio de los campos* $\langle\Phi\rangle$ *(*iT^a *son matrices reales antisimétricas)*

2.- Construcción del modelo estándar

Problema 2.1: *Sean*

$$T_+ = \int d^3x \left(\nu_L^\dagger(x) e_L(x) + u_L^\dagger(x) d_L(x) \right) \, , \; T_- = (T_+)^\dagger$$

las cargas asociadas a las corrientes cargadas. i$\nu_L^\dagger$ i i$e_L^\dagger$ (igual para u_Li d_L) son los momentos canónicos conjugados de ν_L i e_L i por tanto se satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación a tiempos iguales ($x^0 = y^0$)

$$\left\{ \nu_L(x), \nu_L^\dagger(y) \right\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \, , \quad \left\{ e_L(x), e_L^\dagger(y) \right\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

mientras el resto de los anticonmutadores se anulan. Usando estas reglas de anticonmutación y que para operadores arbitrarios A, B, C tenemos

$$[A, BC] = B\,[A, C] + [A, B]\,C$$

$$[A, BC] = \{A, B\}\,C - B\,\{A, C\}$$

comprobad que (es suficiente considerar los leptones, para los quarks es igual)

$$[T_+, T_-] = 2T_3 \, , \quad \text{con} \quad T_3 = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\nu_L^\dagger \nu_L - e_L^\dagger e_L + u_L^\dagger u_L - d_L^\dagger d_L \right)$$

Comprobad también que T_3 cierra el álgebra de SU(2)

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$$

Problema 2.2: *Para cada multiplete del SM usad la fórmula*

$$Y = 2(Q - T_3)$$

y el valor de la carga de los fermiones para determinar la hipercarga de cada multiplete y comprobad que es la misma para todas las componentes del mismo multiplete.

Problema 2.3: *Escribid todos los bilineales invariantes Lorentz que podéis construir con los multipletes de fermiones del SM y determinad los números cuánticos de los escalares a los que se podrían acoplar con acoplamientos del tipo Yukawa. De éstos ¿cuales tienen alguna componente neutra y sin color?*

3.- El lagrangiano del SM, cuantización y correcciones radiativas

Problema 3.1: *Deducid todos los acoplamientos del bosón de Higgs*

Problema 3.2: *En el caso o de una teoría gauge Abeliana como la discutida en el Tema 1 podemos estudiar el mecanismo de Higgs usando una parametrización lineal para el campo escalar*

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1 + i\phi_2)$$

Comprobad que la simple sustitución de este campo en el lagrangiano original genera términos de la forma $A_\mu \partial^\mu \phi_2$ *que mezclan el campo gauge con el campo escalar* ϕ_2*. Comprobad que estos términos se pueden eliminar si se añade al lagrangiano un término que fija el gauge de la forma*

$$\mathscr{L}_{\rm gf} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu + e\xi v \phi_2\right)^2$$

Comprobad además se modifica el término cinético del campo gauge A_μ *y la masa del escalar* ϕ_2*. ¿Cuales son los propagadores del bosón de gauge y del escalar* ϕ_2 *si usamos este método de fijar el gauge?*

Problema 3.3: *Usando el lagrangiano del SM a nivel árbol determinad* m_W *y* s_W *en términos de* G_F, α *y* m_Z*. ¿Qué valores se obtienen si usamos los valores que aparecen en las tablas para* G_F, α *y* m_Z*? Comparad con los valores que dan las tablas para* m_W *y* s_W*. Ahora usad las expresiones para* m_W *y* s_Z *en el esquema* $\overline{\rm MS}$ *con* $\hat{\rho} = 1.009$ *y* $1/\hat{\alpha}(m_Z) = 127.92$.

4.- Fenomenología del SM: Bosones de Gauge y de Higgs

Problema 4.1: *Usando el lagrangiano del SM a nivel árbol calcular las anchuras de desintegración del bosón Z a fermiones. Para quarks añadid el factor de color efectivo. Expresad los resultados en términos de G_F y de s_W. Usando los valores de las tablas obtened resultados numéricos y comparad con los valores medidos. Ahora expresad las anchuras en términos de α y s_W pero para α usad $\hat{\alpha}(m_Z)$ y para s_W usad s_Z. Comparad los resultados.*

Problema 4.2: *Considerando solo el diagrama con intercambio del bosón Z calculad la distribución angular y la sección eficaz de $e^+e^- \to f\bar{f}$ ($f \neq e$). Dibujad la sección eficaz como función de s. Añadid el efecto de la anchura del bosón Z. Añadid la dependencia en s de la anchura. Añadid los efectos de la radiación inicial usando la fórmula*

$$\sigma_{ISR}(s) \approx \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) \left(\frac{(s - m_Z^2)^2 + s^2\Gamma_Z^2/m_Z^2}{s}\right)^{\beta} \sigma^0(s)$$

con

$$\beta = \frac{4\alpha}{\pi} \ln \frac{m_Z}{m_e}$$

Problema 4.3: *Solo leyendo las interacciones de Yukawa del Higgs y análisis dimensional estimad la anchura de desintegración del bosón de Higgs al leptón τ y al quark b. Calculadlas.*

Problema 4.4: *Considerando solo las interacciones del bosón de Higgs con los fermiones calculad la sección eficaz $\mu^+\mu^- \to b\bar{b}$. Comparad con la que se obtiene solo mediante intercambio de un fotón.*

Problema 4.5: *Para bosones de Higgs suficientemente pesados calculad, a nivel árbol, las anchuras de desintegración de $H \to WW$ y $H \to ZZ$ ¿Cómo dependen de la masa del bosón de Higgs? ¿Para qué valor de la masa del bosón de Higgs las anchuras se hacen tan grandes como la propia masa? Usad este argumento para obtener una cota superior sobre la masa del bosón de Higgs.*

5.- Fenomenología del SM: Masas y mezclas de quarks. Neutrinos.

Problema 5.1: *Usando que una matriz hermítica, H, se puede diagonalizar mediante una unitaria*

$$U^{\dagger}HU = D$$

y que una matriz compleja arbitraria, M, se puede escribir como el producto de una hermítica por otra unitaria comprobad que una matriz compleja arbitraria se puede diagonalizar mediante una transformación bi-unitaria.

$$U^{\dagger}MV = D$$

Encontrad un método para determinar U, V y D a partir de M.

Problema 5.2: *Sea*

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi$$

la proyección levógira de un campo de Dirac. Si ψ se transforma bajo transformaciones de Lorentz como $\psi(x) \to \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ con

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right)$$

i) Comprobad que tanto ψ_L como $\psi_L^c \equiv C\overline{\psi_L}^T$, con C la matriz de conjugación de carga, se transforman igual ($\psi_L \to S(\Lambda)\psi_L$, $\psi_L^c \to S(\Lambda)\psi_L^c$)
ii) Comprobad que $\gamma_5\psi_L^c = +\psi_L^c$, es decir ψ_L se comporta como un espinor dextrógiro.
iii) Esto nos permite escribir el siguiente lagrangiano con un termino de masas invariante Lorentz, comprobadlo (recordad que $\bar{\psi} \to \bar{\psi}S(\Lambda)^{-1}$)

$$\mathscr{L}_M = i\overline{\psi_L}\partial\!\!\!/\psi_L - m\frac{1}{2}(\overline{\psi_L^c}\psi_L + \overline{\psi_L}\psi_L^c)$$

iv) Comprobad que el término de masas que hemos escrito solo existe si los campos ψ_L anti-conmutan.
v) Comprobad que el Lagrangiano se puede diagonalizar y escribir en términos de campos de Majorana $\psi_M = \psi_L + \psi_L^c$ que son autoconjugados ($\psi_M = \psi_M^c$)

$$\mathscr{L}_M = \frac{i}{2}\overline{\psi_M}\partial\!\!\!/\psi_M - m\frac{1}{2}\overline{\psi_M}\psi_M$$

Problema 5.3: *Una matriz simétrica compleja arbitraria, $M = M^T$, se puede diagonalizar mediante una matriz unitaria, U*

$$U^T M U = D$$

donde U^T es la matriz transpuesta de U y D es una matriz diagonal que se puede elegir real y positiva. Comprobad que eso es así usando que una matriz compleja arbitraria se puede diagonalizar con una transformación biunitaria y describid un método para calcular U y D en términos de M. Usadlo para diagonalizar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix}$$

Problema 5.4: *Comprobad que el lagrangiano del "see-saw"*

$$\mathscr{L}_M = i\overline{\psi_L}\partial\!\!\!/\psi_L + i\overline{\psi_R}\partial\!\!\!/\psi_R - d\overline{\psi_R}\psi_L - \frac{1}{2}m\overline{\psi_R}\psi_R^c + \text{h.c.}$$

se puede escribir como

$$\mathscr{L}_M = i\overline{\Psi_L}\partial\!\!\!/\Psi_L - \frac{1}{2}\overline{\Psi_L^c}M\Psi_L + \text{h.c.}$$

con

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R^c \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & d \\ d & m \end{pmatrix}$$

Comprobad que en este caso, d y m se pueden tomar reales sin pérdida de generalidad. Diagonalizad el lagrangiano y obtened los campos de masa definida en la aproximación $m \gg d$.