

## Tema 6 – Rotación del sólido rígido

- Introducción
- Cinemática del sólido rígido
- Momento de una fuerza. Ecuación fundamental de la dinámica de rotación. Momento de inercia y teorema de Steiner. Aplicaciones y ejemplos de la ecuación fundamental de la rotación
- Energía cinética de rotación. Trabajo y potencia
- Objetos rodantes
- Momento angular. Conservación

## Identidades útiles

- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$   
(Vector; lineal en  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ ; ortogonal a  $\vec{A}$ ; ejemplo  $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})$ )  
Explícito
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

(Propiedades determinante)

## Sólido rígido

Sistema de partículas en el que las distancia entre partículas se mantienen constantes cuando el sistema se mueve, i.e. no se deforma (similarmente para una distribución continua de masa)

- “Mínima” extensión del punto material para describir el movimiento de cuerpos no puntuales: sin cambiar las distancias relativas, el sólido rígido puede cambiar orientación (el desplazamiento más general es la combinación de una traslación y una rotación)
- $\Rightarrow$  necesario analizar la dinámica de las rotaciones
  - Segunda ley de Newton  $\Rightarrow$  fuerza  $\rightarrow$  momento de fuerzas, aceleración  $\rightarrow$  aceleración angular, masa  $\rightarrow$  momento de inercia
  - Energía, trabajo, potencia
  - Momento angular

# Cinemática del sólido rígido

- Consideramos un sistema de  $n$  masas  $m_j$  en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$
- El CM tiene posición  $\vec{r}_{\text{CM}}$  y velocidad  $\vec{v}_{\text{CM}}$

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \vec{r}_j, \quad \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^n m_j \vec{v}_j, \quad M = \sum_{j=1}^n m_j$$

- Posiciones y velocidades relativas al CM

$$\vec{R}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{\text{CM}}, \quad \vec{V}_j = \vec{v}_j - \vec{v}_{\text{CM}}$$

- Sólido rígido  $\Leftrightarrow$  distancias entre masas constantes

$$|\vec{R}_i - \vec{R}_j| = \text{cte}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

# Cinemática del sólido rígido

- Distancias constantes

$$|\vec{R}_i - \vec{R}_j| = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt} |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^2 = \frac{d}{dt} \left\{ (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \cdot (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \right\}$$

$$\frac{d}{dt} |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^2 = 2(\vec{R}_i - \vec{R}_j) \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_j) = 0$$

N.B.  $\Leftrightarrow (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = 0$

- Distancia al CM constante,  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i = 0$

$$\Rightarrow (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_j) = 0 \Leftrightarrow \vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = -\vec{R}_j \cdot \vec{V}_i$$

- $|\vec{R}_i|$  constante y  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i = 0$  coincide con alguna característica de lo visto en el caso de un movimiento circular

# Cinemática del sólido rígido

- Con respecto al CM, *todas* las masas del sistema (sólido rígido) se mueven alrededor de un eje (que pasa por el CM) con la *misma* velocidad angular  $\omega$ , es decir, existe  $\vec{\omega}$  ( $|\vec{\omega}| = \omega$ ) tal que

$$\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

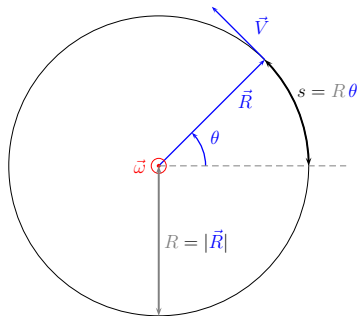
# Cinemática del sólido rígido

Recordatorio: movimiento circular en 2D

- Radio  $|\vec{R}|$  constante
- Velocidad  $\vec{V}$ :  $\vec{R} \cdot \vec{V} = 0$
- Velocidad angular  $\vec{\omega}$  tal que

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

- Además,  $\vec{R} \times \vec{V} = |\vec{R}|^2 \vec{\omega}$ , es decir  $\vec{\omega}$  es  $\perp$  al plano del movimiento  $\{\vec{R}, \vec{V}\}$
- $|\vec{\omega}| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$



# Cinemática del sólido rígido

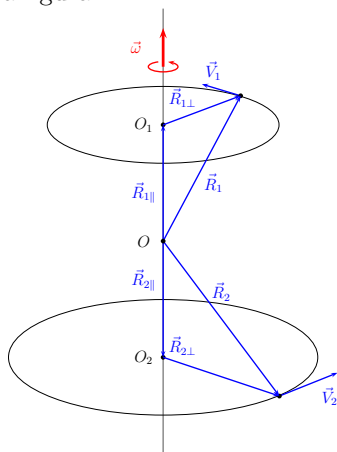
Movimiento circular y cinemática del sólido rígido: consideremos dos movimientos circulares, con eje común e idéntica velocidad angular  $\vec{\omega}$ , en dos planos paralelos, según ilustra la figura.

Aplicando lo anterior (con  $j = 1, 2$ )

- $\vec{R}_j = \vec{R}_{j\perp} + \vec{R}_{j\parallel}$
- Radios  $|\vec{R}_{j\perp}|$  constantes
- Velocidades  $\vec{V}_j$ :  $\vec{R}_{j\perp} \cdot \vec{V}_j = 0$
- Velocidad angular  $\vec{\omega}$  tal que

$$\vec{V}_j = \vec{\omega} \times \vec{R}_{j\perp}$$

- Además,  $\vec{R}_{j\perp} \times \vec{V}_j = |\vec{R}_{j\perp}|^2 \vec{\omega}$ , es decir  $\vec{\omega}$  es  $\perp$  al plano del movimiento  $\{\vec{R}_{j\perp}, \vec{V}_j\}$





# Cinemática del sólido rígido

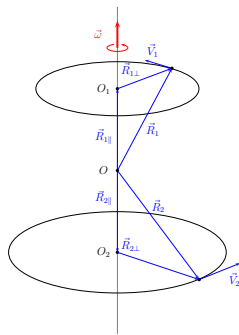
- Hemos descompuesto con respecto a la dirección de  $\vec{\omega}$

$$\vec{R}_j = \vec{R}_{j\perp} + \vec{R}_{j\parallel}, \quad \vec{R}_{j\parallel} = \frac{\vec{R}_j \cdot \vec{\omega}}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}$$

- Con respecto al movimiento circular 2D,  $\vec{R}_{j\perp}$  desempeña ahora el papel de  $\vec{R}$
- Radios  $|\vec{R}_{j\perp}| \neq |\vec{R}_j|$  !!!
- Velocidades  $\vec{V}_j$ :  $\vec{R}_{j\perp} \cdot \vec{V}_j = \vec{R}_j \cdot \vec{V}_j = 0$
- Velocidad angular  $\vec{\omega}$  tal que

$$\vec{V}_j = \vec{\omega} \times \vec{R}_{j\perp} = \vec{\omega} \times \vec{R}_j$$

- $\vec{R}_j \times \vec{V}_j$  no es proporcional a  $\vec{\omega}$ ;  $\vec{\omega}$  es  $\perp$  al plano del movimiento  $\{\vec{R}_{j\perp}, \vec{V}_j\}$ , no a  $\{\vec{R}_j, \vec{V}_j\}$



# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: considera un sistema de tres masas idénticas  $m_0$  que, en un instante dado, se encuentran en

$$\vec{r}_1 = 4\vec{i} \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = 8\vec{i} \text{ m}, \quad \vec{r}_3 = (6\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ m}$$

con velocidades

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_2 = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_3 = \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

- Determina la posición y la velocidad del CM
- Determina las posiciones y velocidades relativas al CM
- Comprueba que el sistema se mueve como un sólido rígido
- Determina la velocidad angular  $\vec{\omega}$  con la que las tres masas giran alrededor del CM

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: tres masas

- Posición del CM

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 + m\vec{r}_3}{3m} = \frac{1}{3} (4\vec{i} + 8\vec{i} + 6\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ m} = (6\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m}$$

- Velocidad del CM

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3}{3m} = \frac{1}{3} (3\vec{i} + 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{j}) \text{ m/s} = (2\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$$

- Posiciones relativas al CM  $\vec{R}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{\text{CM}}$

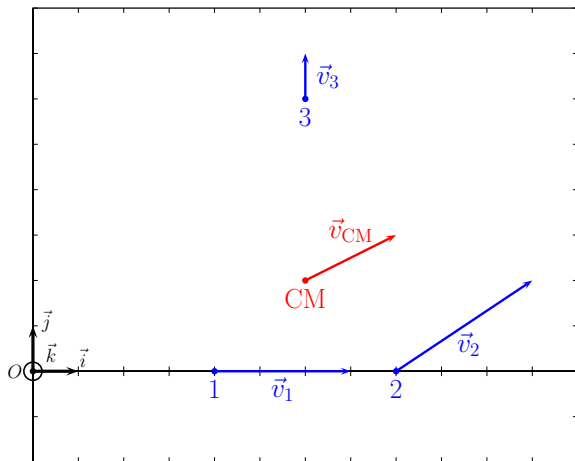
$$\vec{R}_1 = (-2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_2 = (2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_3 = 4\vec{j} \text{ m}$$

- Velocidades relativas al CM  $\vec{V}_j = \vec{v}_j - \vec{v}_{\text{CM}}$

$$\vec{V}_1 = (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_2 = (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_3 = -2\vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: tres masas



# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: tres masas

- Sólido rígido:  $|\vec{R}_j - \vec{R}_k| = \text{cte} \Leftrightarrow (\vec{R}_j - \vec{R}_k) \cdot (\vec{V}_j - \vec{V}_k) = 0$ ,  
 $\vec{R}_j \cdot \vec{V}_j = 0$

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = -4\vec{i} \text{ m}, \quad \vec{R}_1 - \vec{R}_3 = (-2\vec{i} - 6\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_2 - \vec{R}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -2\vec{j} \text{ m/s}, \quad \vec{V}_1 - \vec{V}_3 = (3\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}, \quad \vec{V}_2 - \vec{V}_3 = (3\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$$

$$(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) = 0$$

$$(\vec{R}_1 - \vec{R}_3) \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_3) = (-6 + 6) = 0$$

$$(\vec{R}_2 - \vec{R}_3) \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_3) = (6 - 6) = 0$$

$$\vec{R}_1 \cdot \vec{V}_1 = (-2 + 2) = 0$$

$$\vec{R}_2 \cdot \vec{V}_2 = (2 - 2) = 0$$

$$\vec{R}_3 \cdot \vec{V}_3 = 0$$

$\Rightarrow$  “sólido rígido” ✓

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: tres masas

- Movimiento alrededor del CM,  $\vec{V}_j = \vec{\omega} \times \vec{R}_j$ ,  $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$

$$(\vec{V}_j)_x = \omega_y (\vec{R}_j)_z - \omega_z (\vec{R}_j)_y$$

$$(\vec{V}_j)_y = \omega_z (\vec{R}_j)_x - \omega_x (\vec{R}_j)_z$$

$$(\vec{V}_j)_z = \omega_x (\vec{R}_j)_y - \omega_y (\vec{R}_j)_x$$

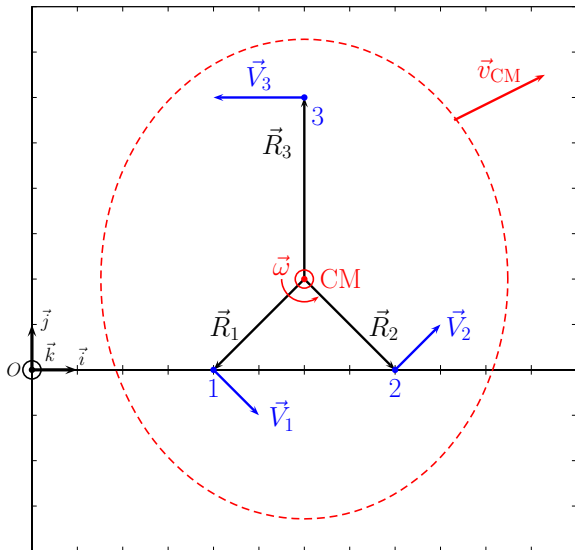
$$\vec{V}_1 = (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s} = (2\omega_z \vec{i} - 2\omega_z \vec{j} + 2(\omega_y - \omega_x) \vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{V}_2 = (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s} = (2\omega_z \vec{i} + 2\omega_z \vec{j} - 2(\omega_y + \omega_x) \vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{V}_3 = -2\vec{i} \text{ m/s} = (-4\omega_z \vec{i} + 4\omega_x \vec{k}) \text{ m}$$

$$\Rightarrow \omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \text{ s}^{-1}$$

## Ejemplo: tres masas



# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular

El ejemplo anterior ilustra como el movimiento del sólido rígido se descompone en

- movimiento del centro de masas
- rotación alrededor del CM con velocidad angular  $\vec{\omega}$

Hemos *asumido* que las velocidades  $\vec{V}_j$  cumplen  $\vec{V}_j = \vec{\omega} \times \vec{R}_j$  y hemos calculado  $\vec{\omega}$ , ... pero no deja de ser un ejemplo: ¿se puede obtener  $\vec{\omega}$  de forma general usando como información las condiciones del sólido rígido?



## Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

- Considerando un sólido rígido, i.e. un conjunto de  $n$  puntos materiales que en un instante dado tienen posiciones  $\vec{R}_i$  y velocidades  $\vec{V}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , relativas a su centro de masas (y cumplen las condiciones ya analizadas), vamos a demostrar que existe un vector velocidad angular  $\vec{\omega}$  tal que  $\forall i \vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$ .
- Constatación: si  $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$ , todas las  $\vec{V}_i$  están en un plano  $\perp$  a  $\vec{\omega}$  y  $\vec{V}_i \times \vec{V}_j \propto \vec{\omega}$
- Empezamos escogiendo  $i, j$ , tales que  $\vec{V}_i \times \vec{V}_j \neq \vec{0}$ , y definimos

$$\vec{\omega}_{ij} = \alpha \vec{V}_i \times \vec{V}_j$$

Queremos determinar  $\alpha$  tal que  $\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = \vec{V}_i$  y  $\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_j = \vec{V}_j$   
(N.B. Excepción 1:  $\forall i, j$ ,  $\vec{V}_i \times \vec{V}_j = \vec{0}$ , es decir  $\forall j \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$ )

# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

- Calculamos

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = \alpha(\vec{V}_i \times \vec{V}_j) \times \vec{R}_i = -\alpha \vec{R}_i \times (\vec{V}_i \times \vec{V}_j)$$

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = -\alpha(\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j)\vec{V}_i + \alpha(\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i)\vec{V}_j = -\alpha(\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j)\vec{V}_i$$

por tanto, con  $\alpha = \frac{-1}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j} = \frac{1}{\vec{V}_i \cdot \vec{R}_j}$ , tenemos

$$\vec{\omega}_{ij} = -\frac{\vec{V}_i \times \vec{V}_j}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j} = \frac{\vec{V}_i \times \vec{V}_j}{\vec{V}_i \cdot \vec{R}_j} \text{ tal que } \vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = \vec{V}_i \checkmark$$

(N.B. Excepción 2: ¿qué ocurre si  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = 0$ ?)

- Además

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_j &= \frac{(\vec{V}_i \times \vec{V}_j)}{\vec{V}_i \cdot \vec{R}_j} \times \vec{R}_j = -\frac{\vec{R}_j \times (\vec{V}_i \times \vec{V}_j)}{\vec{V}_i \cdot \vec{R}_j} \\ &= -\frac{(\vec{R}_j \cdot \vec{V}_j)\vec{V}_i - (\vec{R}_j \cdot \vec{V}_i)\vec{V}_j}{\vec{V}_i \cdot \vec{R}_j} = \vec{V}_j \checkmark \end{aligned}$$

## Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

- Consideremos ahora  $k \neq i, j$ : si  $\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_k = \vec{V}_k$ ,  $\vec{\omega}_{ij}$  es la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y hemos acabado.
- Calculamos

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_k = \frac{\vec{R}_k \times (\vec{V}_i \times \vec{V}_j)}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j} = \frac{(\vec{R}_k \cdot \vec{V}_j)\vec{V}_i - (\vec{R}_k \cdot \vec{V}_i)\vec{V}_j}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j}$$

¿Es esta combinación lineal de  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$  igual a  $\vec{V}_k$ ?

- $\vec{V}_k$  es una combinación lineal de  $\vec{V}_i$  y  $\vec{V}_j$   
 $\Leftrightarrow$  existen  $\alpha_{ki}$ ,  $\alpha_{kj}$  tales que  $\vec{V}_k = \alpha_{ki}\vec{V}_i + \alpha_{kj}\vec{V}_j$ .

Calculamos:

$$\vec{R}_i \cdot \vec{V}_k = \alpha_{ki}\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i + \alpha_{kj}\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = \alpha_{kj}\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j \Leftrightarrow \alpha_{kj} = -\frac{\vec{R}_k \cdot \vec{V}_i}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j}$$

$$\vec{R}_j \cdot \vec{V}_k = \alpha_{ki}\vec{R}_j \cdot \vec{V}_i + \alpha_{kj}\vec{R}_j \cdot \vec{V}_j = \alpha_{ki}\vec{R}_j \cdot \vec{V}_i \Leftrightarrow \alpha_{ki} = \frac{\vec{R}_k \cdot \vec{V}_j}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j}$$

# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

- Tenemos por tanto

$$\vec{V}_k = \frac{(\vec{R}_k \cdot \vec{V}_j)\vec{V}_i - (\vec{R}_k \cdot \vec{V}_i)\vec{V}_j}{\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j}$$

y entonces

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_k = \vec{V}_k$$

de modo que  $\vec{\omega}_{ij} = \vec{\omega}$  es *la* velocidad angular

- Excepciones

- Excepción 1: todas las velocidades son proporcionales,  $\forall j \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$ .
- Excepción 2: qué ocurre si  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = 0$  (con  $\vec{V}_i \times \vec{V}_j \neq \vec{0}$ ).

## Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

Excepción 2:  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = 0$  (con  $\vec{V}_i \times \vec{V}_j \neq \vec{0}$ )

- Con  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_j = \vec{R}_j \cdot \vec{V}_i = 0$ ,  $\vec{V}_j \propto \vec{R}_i \times \vec{R}_j$  salvo si  $\vec{R}_j \propto \vec{R}_i$
- Pero también  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{R}_j \cdot \vec{V}_j = 0$  y por tanto también  $\vec{V}_i \propto \vec{R}_i \times \vec{R}_j$ , es decir  $\vec{V}_j \propto \vec{V}_i$ , contrario a la hipótesis, no puede ser
- Si  $\vec{R}_j = \alpha \vec{R}_i$ , entonces  $\vec{V}_j = \alpha \vec{V}_i$ , y tampoco puede ser

# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

Excepción 1: todas las velocidades son proporcionales,  $\forall j, \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$

- Con  $\vec{R}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{R}_j \cdot \vec{V}_i = 0$ ,  $\vec{R}_i$  y  $\vec{R}_j$  en plano  $\perp$  a  $\vec{V}_i$
- Buscamos  $\vec{\omega}_{ij} = A\vec{R}_i + B\vec{R}_i \times \vec{V}_i$  (ortogonal a  $\vec{V}_i$ ) tal que

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = \vec{V}_i, \quad \vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_j = \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$$

- Obtenemos  $A, B$ :

$$\vec{V}_i = \vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_i = -B\vec{R}_i \times (\vec{R}_i \times \vec{V}_i) = B|\vec{R}_i|^2 \vec{V}_i \Rightarrow B = |\vec{R}_i|^{-2}$$

$$\alpha_j \vec{V}_i = \vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_j =$$

$$A\vec{R}_i \times \vec{R}_j - B\vec{R}_j \times (\vec{R}_i \times \vec{V}_i) = A\vec{R}_i \times \vec{R}_j + B(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_j) \vec{V}_i$$

$$\Rightarrow A = |\vec{V}_i|^2 \frac{\alpha_j - B(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_j)}{\vec{V}_i \cdot (\vec{R}_i \times \vec{R}_j)} \quad (\text{N.B. Subexcepción 1.1: } \vec{R}_j \propto \vec{R}_i)$$

## Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

Excepción 1: todas las velocidades son proporcionales,  $\forall j, \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$

- Para cualquier otro  $\vec{V}_k = \alpha_k \vec{V}_i$ ,  $\vec{R}_k$  está necesariamente en el plano  $\vec{R}_i, \vec{R}_j$ :

$$\vec{R}_k = A_{ki} \vec{R}_i + A_{kj} \vec{R}_j$$

y por tanto  $\vec{V}_k = A_{ki} \vec{V}_i + A_{kj} \vec{V}_j$

- Tenemos entonces

$$\vec{\omega}_{ij} \times \vec{R}_k = \vec{\omega}_{ij} \times (A_{ki} \vec{R}_i + A_{kj} \vec{R}_j) = A_{ki} \vec{V}_i + A_{kj} \vec{V}_j = \vec{V}_k \quad \checkmark$$

- Subexcepción 1.1: si  $\vec{R}_j = \beta \vec{R}_i$ , entonces  $\vec{V}_j = \beta \vec{V}_i$ ,  $\alpha_j = \beta$  y no podemos determinar  $A$  con  $i, j$

## Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

Esto último nos lleva al caso, muy peculiar

$$\forall j, \vec{R}_j = \alpha_j \vec{R}_i, \quad \vec{V}_j = \alpha_j \vec{V}_i$$

En ese caso,

$$\vec{\omega} = \rho \vec{R}_i + \frac{\vec{R}_i \times \vec{V}_i}{|\vec{R}_i|^2}$$

con  $\rho$  arbitrario, es tal que

$$\forall j, \vec{\omega} \times \vec{R}_j = \vec{V}_j$$

es decir, en este caso peculiar, no podemos fijar completamente  $\vec{\omega}$  conociendo posiciones y velocidades



# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular (\*\*)

Dos afirmaciones que no hemos demostrado

- Si  $\vec{R}_k = \alpha \vec{R}_i$ , entonces  $\vec{V}_k = \alpha \vec{V}_i$

$$\frac{d}{dt} |\vec{R}_k|^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\alpha^2 |\vec{R}_i|^2) = \frac{d\alpha^2}{dt} |\vec{R}_i|^2 = 0$$

por tanto  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$  y  $\frac{d}{dt} \vec{R}_k = \vec{V}_k = \alpha \vec{V}_i$

- Si  $\vec{R}_k = \alpha \vec{R}_i + \beta \vec{R}_j$ , entonces  $\vec{V}_k = \alpha \vec{V}_i + \beta \vec{V}_j$

- $|\vec{R}_i|^2, |\vec{R}_j|^2, |\vec{R}_i - \vec{R}_j|^2$  constantes  $\Rightarrow \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j$  constante

- $|\vec{R}_k|^2, |\vec{R}_i - \vec{R}_k|^2$  constantes  $\Rightarrow \vec{R}_i \cdot \vec{R}_k$  constante,

$$\frac{d}{dt} (\vec{R}_i \cdot \vec{R}_k) = \frac{d}{dt} (\alpha |\vec{R}_i|^2 + \beta \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j) = \frac{d\alpha}{dt} |\vec{R}_i|^2 + \frac{d\beta}{dt} \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j = 0$$

- $|\vec{R}_k|^2, |\vec{R}_j - \vec{R}_k|^2$  constantes  $\Rightarrow \vec{R}_j \cdot \vec{R}_k$  constante,

$$\frac{d}{dt} (\vec{R}_j \cdot \vec{R}_k) = \frac{d}{dt} (\beta |\vec{R}_j|^2 + \alpha \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j) = \frac{d\beta}{dt} |\vec{R}_j|^2 + \frac{d\alpha}{dt} \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j = 0$$

Solución  $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\beta}{dt} = 0$  y por tanto  $\vec{V}_k = \frac{d\vec{R}_k}{dt} = \alpha \vec{V}_i + \beta \vec{V}_j$

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo anterior tres masas

- Posiciones relativas al CM

$$\vec{R}_1 = (-2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_2 = (2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_3 = 4\vec{j} \text{ m}$$

- Velocidades relativas al CM

$$\vec{V}_1 = (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_2 = (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_3 = -2\vec{i} \text{ m s}^{-1}$$

- Velocidad angular

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{V}_1 \times \vec{V}_2}{\vec{V}_1 \cdot \vec{R}_2} = \frac{(\vec{i} - \vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j})}{(\vec{i} - \vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 2\vec{j})} = \frac{1}{2} \vec{k} \text{ s}^{-1}$$

# Cinemática del sólido rígido. Velocidad angular

En un instante dado, el movimiento más general de un sólido rígido es la composición de

- un movimiento global de traslación con velocidad  $\vec{v}_{CM}$ ,
- una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masas con velocidad angular  $\vec{\omega}$ .

# Cinemática del sólido rígido. Rotación alrededor de eje

Rotación del sólido rígido alrededor de un eje

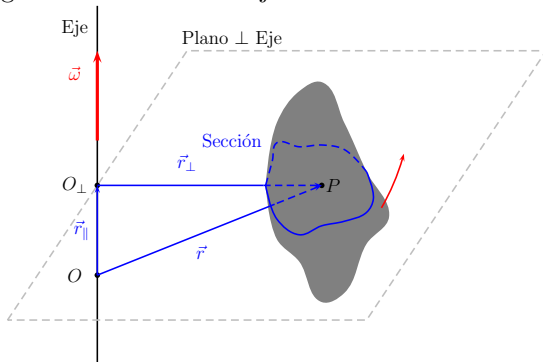
- Para cada  $P$ ,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP},$$

$$\vec{r}_{\parallel} = \overrightarrow{OO_{\perp}}$$

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$$



Consideremos una sección del sólido rígido según un plano perpendicular al eje y  $O_{\perp}$  la intersección del eje y ese plano “Como si  $O$  y  $O_{\perp}$  formaran parte del sólido” o equivalentemente el eje “atraviesa” el sólido rígido

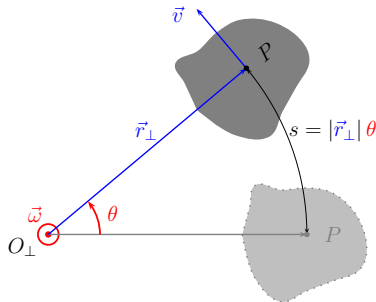
# Cinemática del sólido rígido. Rotación alrededor de eje

- Velocidad angular  $\vec{\omega}$

$$|\vec{\omega}| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Aceleración angular  $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



- $\theta$ ,  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\alpha}$  globales/colectivos (“idénticos para todo  $P$ ”)
- Velocidad de  $P$ ,  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}, \quad |\vec{v}| = \omega |\vec{r}_{\perp}| = |\vec{r}_{\perp}| \frac{d\theta}{dt}$$

- $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  diferentes para cada  $P$

# Cinemática del sólido rígido. Rotación alrededor de eje

## ■ Movimiento del CM

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM}}$$

## ■ Movimiento con respecto al CM: $\vec{R}$ ,

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} \vec{R}$$

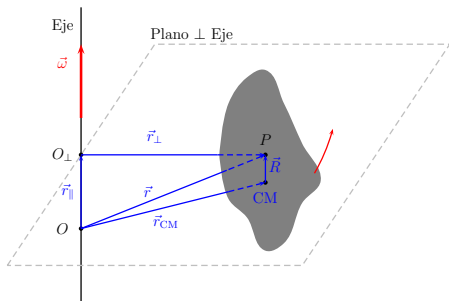
$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_{\text{CM}}$$

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{CM}}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM}}$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Misma  $\vec{\omega}$  que movimiento alrededor del eje  
(N.B. SRCM *no es inercial*)



# Cinemática del sólido rígido. Aceleración angular

- En general

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \omega \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \frac{\vec{\omega}}{\omega} \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right)$$

- El término  $\frac{\vec{\omega}}{\omega} \frac{d\omega}{dt}$  corresponde a una variación del módulo de  $\vec{\omega}$ , no de la dirección (eje de rotación tiene dirección fija)
- El término  $\omega \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right)$  corresponde a una variación de la dirección de  $\vec{\omega}$ , no del módulo
- Si  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = \vec{0}$ , la dirección de  $\vec{\omega}$  no cambia, y entonces

$$\vec{\alpha} = \alpha \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

N.B. Nos ocuparemos principalmente de esta situación (“eje fijo”)

# Cinemática del sólido rígido. Aceleración

- Aceleración del punto  $P$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{\alpha} \times \vec{r} &= \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{\omega} \times \vec{r} + \omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r} = \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{v} + \omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r} \\ \vec{\omega} \times \vec{v} &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r} = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}\end{aligned}$$

- Según estudiamos en Cinemática, la aceleración se descompone según  $\vec{v}$  en aceleraciones tangencial y normal  $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ .  
En la expresión anterior de  $\vec{a}$ , podemos identificar que

- el término  $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{v}$  contribuye a  $\vec{a}_{\parallel}$
- el término  $-\omega^2 \vec{r}_{\perp}$  contribuye a  $\vec{a}_{\perp}$  (dado que  $\vec{r}_{\perp} \cdot \vec{v} = 0$ )

El término restante  $\omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r}$  puede contribuir

tanto a  $\vec{a}_{\parallel}$  como a  $\vec{a}_{\perp}$



# Cinemática del sólido rígido. Aceleración

## Aceleración del punto $P$

- $\vec{a}_\perp$  perpendicular a  $\vec{v}$ , en general tiene componentes no nulas tanto según  $\vec{r}_\perp$  como según  $\vec{\omega}$

- Término  $\omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r}$ :

$\frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt}$  es  $\perp$  a  $\vec{\omega}$  (está en el plano  $\{\vec{r}_\perp, \vec{v}\}$ ), por tanto

$$\omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} = A \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + B \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad \text{con} \quad A = \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \cdot \left( \omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \right)$$

$$B = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot \left( \omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \right)$$

$$\begin{aligned} \left( A \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + B \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \times \vec{r} &= \left( A \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + B \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \times \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{\omega}}{\omega^2} \vec{\omega} + \vec{r}_\perp \right) \\ &= \frac{A(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2 |\vec{r}_\perp|} \underbrace{\vec{r}_\perp \times \vec{\omega}}_{\propto \vec{v}} + \frac{B(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2 |\vec{r}_\perp|} \underbrace{\vec{v} \times \vec{\omega}}_{\propto \vec{r}_\perp} + \frac{B}{|\vec{v}|} \underbrace{\vec{v} \times \vec{r}_\perp}_{\propto \vec{\omega}} \end{aligned}$$

# Cinemática del sólido rígido. Aceleración

Aceleración del punto  $P$

- Término  $\omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r}$ :

$$\begin{aligned}\omega \frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} \times \vec{r} &= \left( A \frac{\vec{r}_{\perp}}{|\vec{r}_{\perp}|} + B \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \times \vec{r} \\ &= \frac{A(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2 |\vec{r}_{\perp}|} \underbrace{\vec{r}_{\perp} \times \vec{\omega}}_{\propto \vec{v}} + \frac{B(\vec{r} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2 |\vec{r}_{\perp}|} \underbrace{\vec{v} \times \vec{\omega}}_{\propto \vec{r}_{\perp}} + \frac{B}{|\vec{v}|} \underbrace{\vec{v} \times \vec{r}_{\perp}}_{\propto \vec{\omega}}\end{aligned}$$

- Término  $\propto \vec{v} \rightarrow \vec{a}_{\parallel}$
- Término  $\propto \vec{r}_{\perp} \rightarrow \vec{a}_{\perp}$
- Término  $\propto \vec{\omega} \rightarrow \vec{a}_{\perp}$

# Cinemática del sólido rígido. Aceleración

- Si nos restringimos a  $\vec{\omega}$  con dirección constante,  $\frac{d(\vec{\omega}/\omega)}{dt} = \vec{0}$ , y resulta:

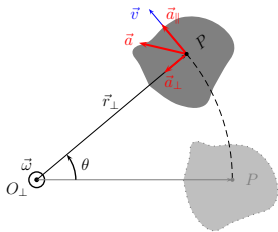
$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\parallel} &= \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \vec{v} = \frac{1}{\omega} \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{v} = \\ &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r} = \alpha \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}\end{aligned}$$

$$|\vec{a}_{\parallel}| = |\vec{r}_{\perp}| |\alpha| = |\vec{r}_{\perp}| \left| \frac{d^2\theta}{dt^2} \right|$$

$$\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}_{\perp}$$

$$|\vec{a}_{\perp}| = |\vec{r}_{\perp}| \omega^2$$



# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: movimiento circular uniformemente acelerado

Con  $\vec{u}$  fijo,  $|\vec{u}| = 1$ ,

$$\alpha = \alpha_0, \quad \vec{\alpha} = \alpha \vec{u}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 t, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$$

# Cinemática del sólido rígido

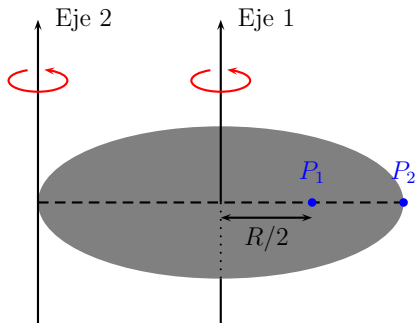
Ejemplo: un disco de radio  $R = 6$  cm gira a partir del reposo hasta alcanzar 500 rpm con aceleración angular constante en 5.5 s.

Consideramos dos situaciones, el eje de rotación, perpendicular al disco, pasa (1) por el centro del disco, (2) por un punto del borde del disco; consideramos también dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  situados según indica la figura.

- Calcula el valor de la aceleración angular
- El número de revoluciones del disco en los 5.5 s de aceleración
- La distancia recorrida por los puntos  $P_1$  y  $P_2$  para ambas posiciones del eje de rotación en los 5.5 s de aceleración
- Alcanzadas las 500 rpm, se mantiene una velocidad angular constante, determina velocidad y aceleración de  $P_1$  y  $P_2$  para ambas posiciones del eje de rotación

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: un disco de radio  $R = 6$  cm gira a partir del reposo hasta alcanzar 500 rpm con aceleración angular constante en 5.5 s. Consideramos dos situaciones, el eje de rotación, perpendicular al disco, pasa (1) por el centro del disco, (2) por un punto del borde del disco; consideramos también dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  situados según indica la figura.



# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: disco

- Movimiento circular uniformemente acelerado

$$\omega = \omega_0 + \alpha_0 t, \quad \omega_0 = 0, \quad t = 5.5 \text{ s} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\omega}{t} = \frac{500 \text{ rpm}}{5.5 \text{ s}} = 9.52 \text{ rad s}^{-2}$$

N.B.  $1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad s}^{-1}$ ,

$$\omega = 500 \text{ rpm} = 50 \frac{\pi}{3} \text{ rad s}^{-1} = 52.4 \text{ rad s}^{-1}$$

- Revoluciones  $n$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_0 t^2 = \frac{\omega t}{2}, \quad n = \frac{\theta}{2\pi} = 22.9$$

- Para un punto a distancia  $r$  del eje, la distancia recorrida es  $s = r\theta$ ,

$$s = \frac{r\alpha_0 t^2}{2}$$

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: disco

- Para un punto a distancia  $r$  del eje, la distancia recorrida es  $s = r\theta$ ,

$$s = \frac{r\alpha_0 t^2}{2}$$

Con el eje 1,  $r(P_1) = \frac{R}{2}$ ,  $r(P_2) = R$ ,

$$s(P_1) = \frac{R\alpha_0 t^2}{4} = 4.32 \text{ m}, \quad s(P_2) = \frac{R\alpha_0 t^2}{2} = 8.64 \text{ m}$$

Con el eje 2,  $r(P_1) = \frac{3R}{2}$ ,  $r(P_2) = 2R$ ,

$$s(P_1) = \frac{3R\alpha_0 t^2}{4} = 12.6 \text{ m}, \quad s(P_2) = R\alpha_0 t^2 = 17.3 \text{ m}$$



# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: disco

- Alcanzada velocidad angular constante  $\omega = 500$  rpm, para un punto a distancia  $r$  del eje,
  - la velocidad es  $|\vec{v}| = v = \omega r$
  - la aceleración tangencial es  $\vec{a}_{\parallel} = \vec{0}$
  - la aceleración normal es  $|\vec{a}_{\perp}| = \omega^2 r$

Con el eje 1,  $r(P_1) = \frac{R}{2}$ ,  $r(P_2) = R$ ,

$$v(P_1) = \frac{R\omega}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ m s}^{-1} = 1.57 \text{ m s}^{-1}, \quad v(P_2) = R\omega = 3.14 \text{ m s}^{-1}$$

$$|\vec{a}_{\perp}(P_1)| = \frac{R\omega^2}{2} = 82.3 \text{ m s}^{-2}, \quad |\vec{a}_{\perp}(P_2)| = R\omega^2 = 164 \text{ m s}^{-2}$$

Con el eje 2,  $r(P_1) = \frac{3R}{2}$ ,  $r(P_2) = 2R$ ,

$$v(P_1) = \frac{3R\omega}{2} = 4.71 \text{ m s}^{-1}, \quad v(P_2) = 2R\omega = 6.28 \text{ m s}^{-1}$$

$$|\vec{a}_{\perp}(P_1)| = \frac{3R\omega^2}{2} = 247 \text{ m s}^{-2}, \quad |\vec{a}_{\perp}(P_2)| = 2R\omega^2 = 329 \text{ m s}^{-2}$$

# Cinemática del sólido rígido

Ejemplo: disco

- Alcanzada velocidad angular constante  $\omega = 500$  rpm, para un punto a distancia  $r$  del eje, base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  tal que  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  y la posición del punto  $\vec{r} = r \vec{i}$ 
  - la velocidad es  $\vec{v} = \omega r \vec{j}$
  - la aceleración tangencial es  $\vec{a}_{\parallel} = \vec{0}$
  - la aceleración normal es  $\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 r \vec{i}$

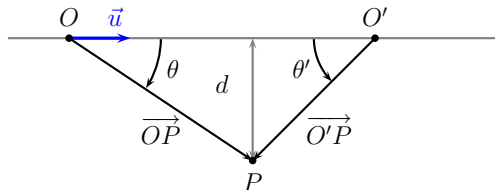
# Momento de una fuerza

Distancia entre un punto y un eje ( $\rightsquigarrow$  de rotación)

- Eje pasa por el punto  $O$  con dirección  $\vec{u}$  (unitario,  $|\vec{u}| = 1$ )
- Distancia  $d$  del punto  $P$  al eje: con  $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$

$$d = |\vec{u} \times \vec{r}|$$

- No depende de  $O$



$$|\vec{u} \times \overrightarrow{OP}| = |\vec{u}| |\overrightarrow{OP}| |\sin \theta| = d$$

$$|\vec{u} \times \overrightarrow{O'P}| = |\vec{u}| |\overrightarrow{O'P}| |\sin \theta'| = d$$

# Momento de una fuerza

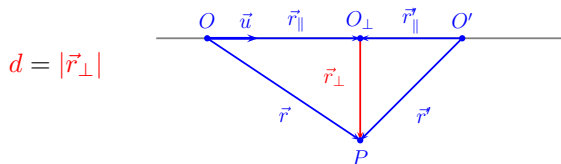
Distancia entre un punto y un eje ( $\rightsquigarrow$  de rotación)  
(Equivalente a lo anterior)

- Eje pasa por el punto  $O$  con dirección  $\vec{u}$  (unitario,  $|\vec{u}| = 1$ )
- Con  $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ ,  $\vec{r}' \equiv \overrightarrow{O'P}$

$$\vec{r}_{\parallel} = (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$
$$\vec{r}'_{\parallel} = (\vec{r}' \cdot \vec{u})\vec{u}, \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}$$

N.B. Con  $\vec{r}' = \vec{r} + \alpha\vec{u}$ ,  $\vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\parallel} + \alpha\vec{u} \Rightarrow \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$

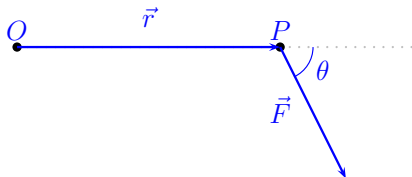
- Distancia  $d$  del punto  $P$  al eje:



# Momento de una fuerza

- El momento  $\vec{M}$  de una fuerza  $\vec{F}$ , aplicada en un punto  $P$ , con respecto a un punto  $O$  dado, es

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{con } \vec{r} = \overrightarrow{OP}, \quad |\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$$



- $||\vec{M}|| = ML^2T^{-2}$ , unidades S.I.  $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ J}$

# Momento de una fuerza

- El momento  $\vec{M}$  de una fuerza  $\vec{F}$ , aplicada en un punto  $P$ , con respecto a un eje dado, es el momento de  $\vec{F}$  aplicada en  $P$  con respecto al punto del eje  $O_{\perp}$  más cercano a  $P$ :

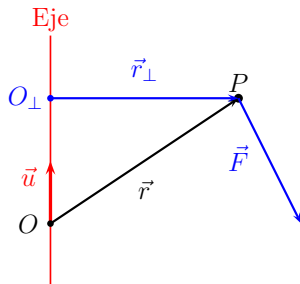
$$\vec{M} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F}, \quad \text{con } \vec{r}_{\perp} = \overrightarrow{O_{\perp}P}$$

$|\vec{r}_{\perp}|$  es “la distancia”  $P$ -Eje

Ojo:  $\vec{F}$  no tiene porqué estar en el plano (ser combinación lineal de)  $\vec{r}_{\perp}$ ,  $\vec{u}$

Si en lugar de (i)  $O_{\perp}$  y  $P$ , conocemos (ii)  $P$ , un punto cualquiera  $O$  del eje y un vector unitario  $\vec{u}$  en la dirección del mismo con  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u}) \vec{u}$$



# Momento de una fuerza

Momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un punto  $O$  es en general diferente del momento de  $\vec{F}$  con respecto a un eje que pasa por  $O$ , con dirección  $\vec{u}$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_{\text{Eje}} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}$$

- Descomposición  $\vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u} + \vec{r}_\perp = (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u} + |\vec{r}_\perp| \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$
- Base  $\left\{ \vec{u}, \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}, \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \right\}$

$$\frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \times \left( \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \right) = \vec{u}, \quad \left( \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \right) \times \vec{u} = \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

$$\vec{u} \cdot \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} = \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \cdot \left( \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \right) = \vec{u} \cdot \left( \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \right) = 0$$

# Momento de una fuerza

Momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un punto  $O$  es en general diferente del momento de  $\vec{F}$  con respecto a un eje que pasa por  $O$ , con dirección  $\vec{u}$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_{Eje} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}$$

## ■ Descomposición

$$\vec{F} = (F_{\vec{u}})\vec{u} + (F_{\vec{r}_\perp})\frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + (F_\times)\vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

## ■ $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{u} & \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} & \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \\ (\vec{r} \cdot \vec{u}) & |\vec{r}_\perp| & 0 \\ F_{\vec{u}} & F_{\vec{r}_\perp} & F_\times \end{vmatrix} = \\ &= (|\vec{r}_\perp|F_\times)\vec{u} - ((\vec{r} \cdot \vec{u})F_\times)\frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + ((\vec{r} \cdot \vec{u})F_{\vec{r}_\perp} - |\vec{r}_\perp|F_{\vec{u}})\vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} \end{aligned}$$



# Momento de una fuerza

Momento de una fuerza  $\vec{F}$  con respecto a un punto  $O$  es diferente del momento de  $\vec{F}$  con respecto a un eje que pasa por  $O$ , con dirección  $\vec{u}$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{M}_{\text{Eje}} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}$$

- $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{M}_O = (|\vec{r}_\perp| F_\times) \vec{u} - ((\vec{r} \cdot \vec{u}) F_\times) \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|} + ((\vec{r} \cdot \vec{u}) F_{\vec{r}_\perp} - |\vec{r}_\perp| F_u) \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

- $\vec{M}_{\text{Eje}} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}$

$$\vec{M}_{\text{Eje}} = (|\vec{r}_\perp| F_\times) \vec{u} - (|\vec{r}_\perp| F_u) \vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$$

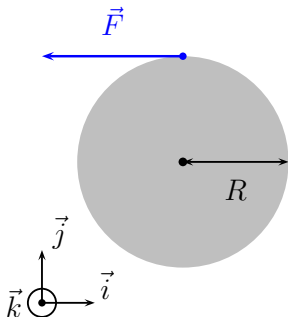
- Misma componente en dirección  $\vec{u}$

- Misma componente en dirección  $\vec{u} \times \frac{\vec{r}_\perp}{|\vec{r}_\perp|}$  si  $F_{\vec{r}_\perp} = 0$

es decir, si  $\vec{r}_\perp \cdot \vec{F} = 0$

# Momento de una fuerza

Ejemplo: se aplica una fuerza  $\vec{F}$ ,  $|\vec{F}| = 10 \text{ N}$ , en un punto del borde de un disco de radio  $R = 10 \text{ cm}$  según indica la figura. ¿Cuál es el momento de  $\vec{F}$  con respecto al centro del disco?



# Momento de una fuerza

Ejemplo:

■  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  con

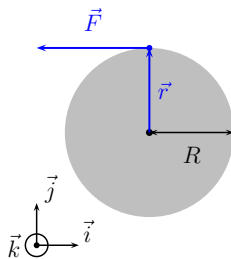
$$\vec{F} = -F\vec{i}, \quad F = 10 \text{ N},$$

$$\vec{r} = R\vec{j}, \quad R = 0.1 \text{ m}$$

$\vec{r}$  vector entre (i) punto con respecto al cual se calcula el momento, y (ii) punto de aplicación de la fuerza

■ Momento  $\vec{M}$

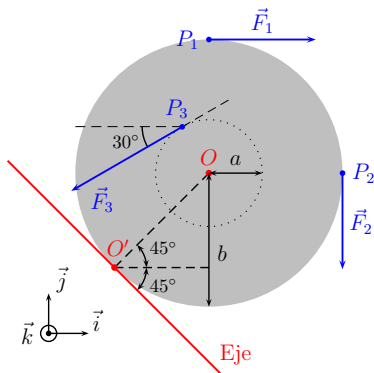
$$\vec{M} = -F R\vec{j} \times \vec{i} = F R\vec{k} = \vec{k} \text{ N m}$$



# Momento de una fuerza

Ejemplo: se aplican fuerzas  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , en diferentes puntos de un disco, según indica la figura. ¿Cuál es el momento total de fuerzas con respecto al centro del disco? ¿Cuál es el momento total de fuerzas con respecto al Eje que pasa por  $O'$ ?

$|\vec{F}_1| = 10 \text{ N}$ ,  $|\vec{F}_2| = 9 \text{ N}$ ,  $|\vec{F}_3| = 12 \text{ N}$ ;  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 25 \text{ cm}$



# Momento de una fuerza

Ejemplo: disco-tres fuerzas

- Posiciones en las que se aplican las fuerzas, relativas al centro del disco,

$$\overrightarrow{OP_1} = b\vec{j}, \quad \overrightarrow{OP_2} = b\vec{i}, \quad \overrightarrow{OP_3} = a(-\sin\theta_3\vec{i} + \cos\theta_3\vec{j}), \quad \theta_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$\vec{r}_1 = b\vec{j}, \quad \vec{r}_2 = b\vec{i}, \quad \vec{r}_3 = \frac{a}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j})$$

- Fuerzas

$$\vec{F}_1 = F_1\vec{i}, \quad \vec{F}_2 = -F_2\vec{j}, \quad \vec{F}_3 = F_3(-\cos\theta_3\vec{i} - \sin\theta_3\vec{j}) = \frac{F_3}{2}(-\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j})$$

$$F_1 = 10 \text{ N}, \quad F_2 = 9 \text{ N}, \quad F_3 = 12 \text{ N}$$

- Momentos con respecto al centro del disco

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -bF_1\vec{k}, \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = -bF_2\vec{k},$$

$$\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{aF_3}{4}(+\vec{k} + 3\vec{k}) = aF_3\vec{k}$$

# Momento de una fuerza

Ejemplo: disco-tres fuerzas

- Momentos con respecto al centro del disco

$$\vec{M}_1 = -bF_1\vec{k}, \quad \vec{M}_2 = -bF_2\vec{k}, \quad \vec{M}_3 = aF_3\vec{k}$$

- Momento total con respecto al centro del disco

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = (aF_3 - b(F_1 + F_2))\vec{k} \\ &= (0.1 \times 12 - 0.25 \times (9 + 10))\vec{k} = -3.55\vec{k} \text{ N m}\end{aligned}$$

# Momento de una fuerza

Ejemplo: disco-tres fuerzas

- Para determinar los momentos con respecto al Eje que pasa por  $O'$  necesitamos

$$\overrightarrow{O'O} = \frac{b}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$$

con  $\vec{u}$  un vector unitario en la dirección del eje

- Para cada  $P_j$ ,  $\vec{r}'_j = \overrightarrow{O'P_j} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_j}$ ,

$$\vec{r}'_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}(\vec{i} + (1 + \sqrt{2})\vec{j}), \quad \vec{r}'_2 = \frac{b}{\sqrt{2}}((1 + \sqrt{2})\vec{i} + \vec{j}),$$

$$\vec{r}'_3 = \frac{b}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{a}{2}(-\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}) = \frac{1}{2}((b\sqrt{2} - a)\vec{i} + (b\sqrt{2} - a\sqrt{3})\vec{j})$$

- Calculamos ahora

$$\vec{r}'_{j\perp} = \vec{r}'_j - (\vec{r}'_j \cdot \vec{u})\vec{u}$$

# Momento de una fuerza

Ejemplo: disco-tres fuerzas

- Calculamos  $\vec{r}_{j\perp} = \vec{r}_j - (\vec{r}_j \cdot \vec{u})\vec{u}$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{u} = -\frac{b}{\sqrt{2}}, \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{u} = \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad \vec{r}_3 \cdot \vec{u} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{r}_{1\perp} = \frac{b(1+\sqrt{2})}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{r}_{2\perp} = \frac{b(1+\sqrt{2})}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{r}_{3\perp} = \frac{2\sqrt{2}b - a(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$$

- Momentos  $\vec{M}_j = \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_j$



# Momento de una fuerza

Ejemplo: disco-tres fuerzas

- Momentos  $\vec{M}_j = \vec{r}'_{j\perp} \times \vec{F}_j$

$$\vec{M}_1 = -\frac{F_1 b(1 + \sqrt{2})}{2} \vec{k} = -3.02 \vec{k} \text{ N m}$$

$$\vec{M}_2 = -\frac{F_2 b(1 + \sqrt{2})}{2} \vec{k} = -2.72 \vec{k} \text{ N m}$$

$$\vec{M}_3 = F_3 \frac{2\sqrt{2}b - a(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2}} (\sqrt{3} - 1) \vec{k} = 0.67 \vec{k} \text{ N m}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = -5.06 \vec{k} \text{ N m}$$

# Momento de un par de fuerzas

Momento  $\vec{M}$  de un par de fuerzas opuestas (aplicadas en puntos diferentes):

$$\vec{F} \text{ en } P_1, \quad -\vec{F} \text{ en } P_2, \quad \overrightarrow{P_2P_1} = \vec{r}$$

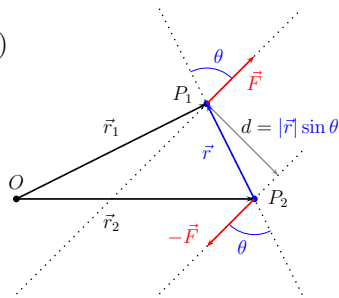
En principio,  $\vec{M}$  con respecto a  $O$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$$

$$\vec{M} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta = |\vec{F}| d$$



- Independiente de  $O$ , mismo  $\vec{M}$  con respecto a cualquier punto
- $d$  es la distancia entre dos rectas de dirección  $\pm \vec{F}$  (paralelas) que pasan por  $P_1$  y  $P_2$

# Dinámica de la rotación

- Sólido rígido como sistema de  $n$  masas puntuales
- Sobre cada masa  $m_j$  actúa una fuerza  $\vec{F}_j$
- El sólido gira alrededor de un eje con dirección fija (el eje “forma parte” del sólido)
- Origen de coordenadas en un punto del eje, posiciones y velocidades de las masas  $\vec{r}_j, \vec{v}_j$
- Movimiento del sólido rígido

$$\vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_{j\perp}$$

con  $\vec{\omega}$  la velocidad angular (N.B. dependiente del tiempo  $t$ ):

$$\text{dirección del eje, vector unitario: } \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \omega = |\vec{\omega}|$$

y la descomposición (habitual)

$$\vec{r}_j = \vec{r}_{j\parallel} + \vec{r}_{j\perp}, \quad \vec{r}_{j\parallel} = \frac{(\vec{r}_j \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} \vec{\omega}$$

# Dinámica de la rotación

- Segunda ley de Newton

$$\vec{F}_j = m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = m_j \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_j) = m_j \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{j\perp})$$

- Eje con dirección fija:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \right) = 0$ , aceleración angular  $\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

$$\vec{F}_j = m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = m_j \left( \frac{d\omega}{dt} \frac{\vec{\omega}}{\omega} \times \vec{r}_j + \vec{\omega} \times \vec{v}_j \right) = m_j (\vec{\alpha} \times \vec{r}_j + \vec{\omega} \times \vec{v}_j)$$

Sumando para todo  $j$  (con  $M = \sum_{j=1}^n m_j$ )

$$\vec{F}_{\text{Neta}} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j = M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{\alpha} \times (M\vec{r}_{\text{CM}}) + \vec{\omega} \times (M\vec{v}_{\text{CM}})$$

- ... que no es más que lo que ya sabíamos sobre el movimiento global de un sistema particularizado para un sólido rígido, no nos permite “resolver” el movimiento del sistema, es decir determinar aceleración o velocidad angular

# Dinámica de la rotación

- Probemos con el momento  $\vec{M}_j$  de  $\vec{F}_j$  con respecto al eje fijo

$$\begin{aligned}\vec{M}_j &= \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_j = m_j \vec{r}_{j\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_j + \vec{\omega} \times \vec{v}_j) \\ &= m_j \vec{r}_{j\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{j\perp} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{j\perp})) \\ &= m_j \vec{r}_{j\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{j\perp} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{j\perp})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_{j\perp}) \\ &= m_j \vec{r}_{j\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{j\perp} - \omega^2 \vec{r}_{j\perp}) = m_j \vec{r}_{j\perp} \times (\vec{\alpha} \times \vec{r}_{j\perp}) \\ &= m_j (|\vec{r}_{j\perp}|^2 \vec{\alpha} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{r}_{j\perp})\vec{r}_{j\perp}) = m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2 \vec{\alpha}\end{aligned}$$

- Sumando para todo  $j$

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = \sum_{j=1}^n \vec{M}_j = \left( \sum_{j=1}^n m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2 \right) \vec{\alpha}$$

- Importante:  $|\vec{r}_{j\perp}|$  constantes!

# Dinámica de la rotación

- Definimos el *momento de inercia*  $I$  con respecto al eje de giro

$$I \equiv \sum_{j=1}^n m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2$$

Suma de (masa)  $\times$  (distancia al eje)<sup>2</sup> para todo el sólido rígido

- Dimensiones  $[I] = ML^2$ , en S.I. unidades  $\text{kg m}^2$
- *Ecuación fundamental de la dinámica de rotación*  
(alrededor de eje con dirección fija)

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = I \vec{\alpha} = I \alpha \frac{\vec{\omega}}{\omega}$$

con  $\vec{M}_{\text{Tot}}$  el momento total de las fuerzas que actúan sobre el sistema, con respecto al eje de giro

# Dinámica de la rotación

- Dado un momento total  $\vec{M}_{\text{Tot}}$  (de las fuerzas  $\vec{F}_j$  con respecto al eje de giro), la aceleración angular resultante es
  - proporcional a  $\vec{M}_{\text{Tot}}$ ,
  - inversamente proporcional a  $I$

Situación análoga a la segunda ley de Newton,  $F = ma$ : dada una fuerza  $F$ ,

- aceleración  $a$  proporcional a  $F$ ,
- aceleración  $a$  inversamente proporcional a  $m$ ,  $m$  da la inercia, “resistencia” a cambiar el estado de movimiento

En el caso de la rotación, aceleración  $a \mapsto$  aceleración angular  $\vec{\alpha}$ , inercia  $m \mapsto I = \sum m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2$  (de ahí *momento de inercia*)

- Sólido rígido continuo

$$I = \int_C |\vec{r}_{j\perp}|^2 dm$$

- Sistema dividido en subpartes: momento de inercial total es la suma de los momentos de inercia de las subpartes

# Dinámica de la rotación

- Separamos fuerzas externas e internas  $\vec{F}_j = \vec{F}_{j,\text{ext}} + \vec{F}_{j,\text{int}} \Rightarrow$

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = \vec{M}_{\text{Ext}} + \vec{M}_{\text{Int}}$$

con

$$\vec{M}_{\text{Ext}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_{j,\text{ext}}, \quad \vec{M}_{\text{Int}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_{j,\text{int}}$$

- Separamos a su vez las fuerzas internas

$$\vec{F}_{j,\text{int}} = \sum_{k=1, k \neq j}^n \vec{F}_{[k \rightarrow j]}$$

- De acuerdo con la tercera ley (acción-reacción)

$$\vec{F}_{[k \rightarrow j]} = -\vec{F}_{[j \rightarrow k]}$$

Importante:  $\vec{F}_{[k \rightarrow j]}$  se aplica en  $\vec{r}_j$ , mientras  $\vec{F}_{[j \rightarrow k]}$  se aplica en  $\vec{r}_k$



# Dinámica de la rotación

- Tenemos por tanto

$$\vec{M}_{\text{Int}} = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]}$$

La doble suma recorre todos los pares  $j, k$ , con  $j \neq k$ , con dos términos en cada caso

$$j \neq k, \quad \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]} + \vec{r}_{k\perp} \times \vec{F}_{[j \rightarrow k]} = (\vec{r}_{j\perp} - \vec{r}_{k\perp}) \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]}$$

es decir

$$\vec{M}_{\text{Int}} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^n (\vec{r}_{j\perp} - \vec{r}_{k\perp}) \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]}$$

→ similar a una suma de momentos de pares de fuerzas

# Dinámica de la rotación

- Típicamente, la fuerza interna entre  $j$  y  $k$  tiene dirección  $\vec{r}_j - \vec{r}_k$ , y en ese caso reescribimos

$$\vec{r}_{j\perp} - \vec{r}_{k\perp} = (\vec{r}_j - \vec{r}_k) - (\vec{r}_{j\parallel} - \vec{r}_{k\parallel})$$

con  $\vec{r}_{j\parallel} - \vec{r}_{k\parallel} \propto \frac{\vec{\omega}}{\omega}$ , de modo que

$$(\vec{r}_{j\perp} - \vec{r}_{k\perp}) \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]} = -(\vec{r}_{j\parallel} - \vec{r}_{k\parallel}) \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]}$$

- Ahora bien, dado que

$$\frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot ((\vec{r}_{j\parallel} - \vec{r}_{k\parallel}) \times \vec{F}_{[k \rightarrow j]}) = 0$$

la fuerza interna entre  $j$  y  $k$  no puede contribuir al momento de fuerzas en  $\vec{M}_{\text{Tot}} = I \alpha \frac{\vec{\omega}}{\omega}$

- $\Rightarrow$  cuando las fuerzas internas son del tipo mencionado (fuerza interna entre  $j$  y  $k$  tiene dirección  $\vec{r}_j - \vec{r}_k$ ), tan solo las fuerzas externas producen momento de fuerzas y resulta

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = \vec{M}_{\text{Ext}}$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: calcula los momentos de inercia de un conjunto de cinco masas puntuales  $m$  idénticas en posiciones

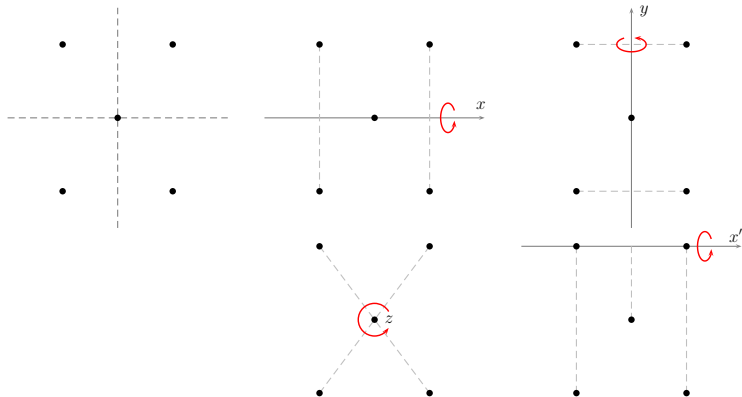
$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (0, 0, 0), & \vec{r}_2 &= (a, b, 0), & \vec{r}_3 &= (a, -b, 0), \\ & & \vec{r}_4 &= (-a, b, 0), & \vec{r}_5 &= (-a, -b, 0)\end{aligned}$$

con respecto a

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $x'$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O' = (0, b, 0)$

# Momentos de inercia

Ejemplo: momentos de inercia 5 masas



# Momentos de inercia

Ejemplo: 5 masas

Momento de inercia

$$I = \sum_{j=1}^5 m d_j^2$$

con  $d_j$  la distancia entre la masa  $j$  y el eje de rotación

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = b, \quad d_3 = b, \quad d_4 = b, \quad d_5 = b$$

$$I_x = 4mb^2$$

- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = a, \quad d_3 = a, \quad d_4 = a, \quad d_5 = a$$

$$I_y = 4ma^2$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: 5 masas

Momento de inercia

$$I = \sum_{j=1}^5 m d_j^2$$

con  $d_j$  la distancia entre la masa  $j$  y el eje de rotación

- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad d_3 = d_2, \quad d_4 = d_2, \quad d_5 = d_2$$

$$I_z = 4m(a^2 + b^2)$$

- eje  $x'$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O' = (0, b, 0)$

$$d_1 = b, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 2b, \quad d_5 = 2b$$

$$I_{x'} = 9mb^2 \quad (= 4mb^2 + 5mb^2)$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: calcula los momentos de inercia de un conjunto de 4 masas puntuales en posiciones

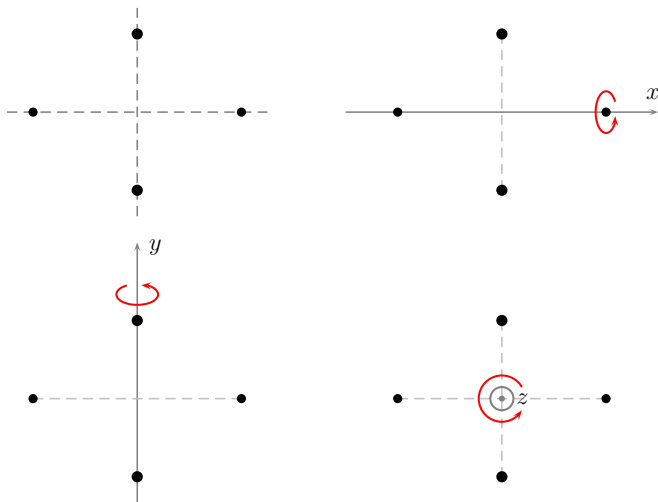
$$\begin{aligned} \text{Masas } m \text{ en } \vec{r}_1 = (a, 0, 0), \vec{r}_2 = (-a, 0, 0), \\ \text{masas } M \text{ en } \vec{r}_3 = (0, b, 0), \vec{r}_4 = (0, -b, 0) \end{aligned}$$

con respecto a

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

# Momentos de inercia

Ejemplo: momentos de inercia 4 masas





# Momentos de inercia

Ejemplo: momentos de inercia 4 masas

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$ ,

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = b, \quad d_4 = b \Rightarrow I_x = 2Mb^2$$

- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

$$d_1 = a, \quad d_2 = a, \quad d_3 = 0, \quad d_4 = 0 \Rightarrow I_y = 2ma^2$$

- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

$$d_1 = a, \quad d_2 = a, \quad d_3 = b, \quad d_4 = b \Rightarrow I_z = 2(ma^2 + Mb^2)$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: calcula los momentos de inercia de un conjunto de 3 masas puntuales idénticas situadas en los vértices de un triángulo equilátero (dos masas sobre el eje  $x$ , una sobre el eje  $y$ ) con respecto a

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$
- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$

# Momentos de inercia

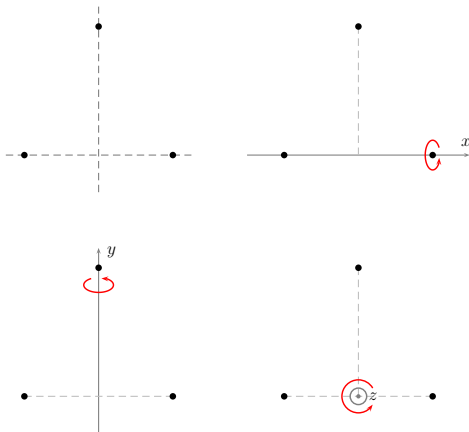
Ejemplo: momentos de inercia 3 masas

- Masas  $m$  en posiciones

$$\vec{r}_1 = (\ell/2, 0, 0)$$

$$\vec{r}_2 = (-\ell/2, 0, 0)$$

$$\vec{r}_3 = (\sqrt{3}\ell/2, 0, 0)$$



# Momentos de inercia

Ejemplo: momentos de inercia 3 masas

- eje  $x$  (dirección  $\vec{i}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$ ,

$$d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad d_3 = \frac{\sqrt{3}\ell}{2} \Rightarrow I_x = \frac{3}{4}m\ell^2$$

- eje  $y$  (dirección  $\vec{j}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$ ,

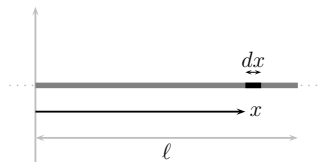
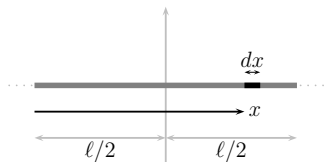
$$d_1 = \frac{\ell}{2}, \quad d_2 = \frac{\ell}{2}, \quad d_3 = 0 \Rightarrow I_y = \frac{1}{2}m\ell^2$$

- eje  $z$  (dirección  $\vec{k}$ ), pasando por  $O = (0, 0, 0)$ ,

$$d_1 = \frac{\ell}{2}, \quad d_2 = \frac{\ell}{2}, \quad d_3 = \frac{\sqrt{3}\ell}{2} \Rightarrow I_z = \frac{5}{4}m\ell^2$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de una varilla homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $m$  con respecto a un eje perpendicular que pasa por (i) el centro, (ii) un extremo de la varilla



# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de una varilla homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $m$  con respecto a un eje perpendicular que pasa por (i) el centro, (ii) un extremo de la varilla

- Densidad lineal de masa  $\lambda = \frac{m}{\ell}$
- Elemento  $dm = \lambda dx$  en posición  $x$  con  $x \in [0; \ell]$ ; distancia al eje (i)  $|\frac{\ell}{2} - x|$ , (ii)  $x$
- Momento de inercia (i)

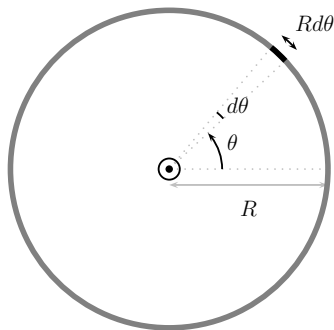
$$I_y = \int_0^{\ell} dx \lambda \left( \frac{\ell}{2} - x \right)^2 = \lambda \ell^3 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12} m \ell^2$$

- Momento de inercia (ii)

$$I_y = \int_0^{\ell} dx \lambda x^2 = \frac{\lambda \ell^3}{3} = \frac{1}{3} m \ell^2$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de un anillo homogéneo de radio  $r$  y masa  $m$  con respecto a eje que pasa por el centro del anillo y perpendicular a su plano



# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de un anillo homogéneo de radio  $R$  y masa  $M$  con respecto a eje que pasa por el centro del anillo y perpendicular a su plano

- Densidad lineal de masa  $\lambda = \frac{M}{2\pi R}$
- Elemento  $dm = \lambda R d\theta$  en posición  $(R \cos \theta, R \sin \theta)$  con  $\theta \in [0; 2\pi]$ ; distancia al eje:  $R$
- Momento de inercia

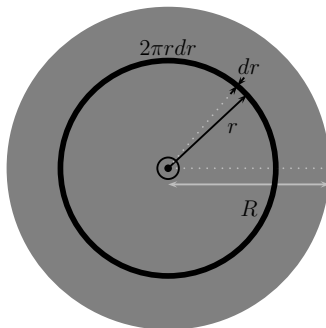
$$I_z = \int_0^{2\pi} d\theta \lambda R^3 = 2\pi \lambda R^3 = MR^2$$

(N.B. Toda la masa está a distancia  $R$  del eje)



# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $M$  con respecto a eje que pasa por el centro del disco y perpendicular a su plano



# Momentos de inercia

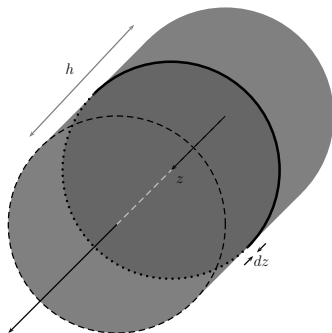
Ejemplo: momento de inercia de un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $M$  con respecto a eje que pasa por el centro del disco y perpendicular a su plano

- Densidad superficial de masa del disco  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$
- Disco como conjunto de anillos infinitesimales (ejemplo anterior), anillo entre  $r$  y  $r + dr$ , tiene una superficie  $2\pi r dr$  y por tanto una masa  $dm = \sigma 2\pi r dr$  a una distancia  $r$  del eje
- Momento de inercia total: integramos  $r^2 dm$  para  $r \in [0; R]$

$$I_z = \int_0^R dr 2\pi\sigma r^3 = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2$$

# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de un cilindro homogéneo de radio  $R$ , altura  $h$  y masa  $M$  con respecto a su eje de revolución



# Momentos de inercia

Ejemplo: momento de inercia de un cilindro homogéneo de radio  $R$ , altura  $h$  y masa  $M$  con respecto a su eje de revolución

- Densidad de masa del cilindro  $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$
- Cilindro como conjunto de discos infinitesimales (ejemplo anterior), disco de radio  $R$  entre  $z$  y  $z + dz$ , tiene un volumen  $\pi R^2 dz$  y por tanto una masa  $dm = \rho \pi R^2 dz$ , que contribuye  $dI_z = \frac{1}{2} dm R^2 = \frac{\rho \pi}{2} R^4 dz$  al momento de inercia
- Para obtener el momento de inercia total, integramos  $dz$  entre 0 y  $h$

$$I_z = \int dI_z = \int_0^h dz \frac{\rho \pi}{2} R^4 = \frac{\rho \pi}{2} h R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

## Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: se quiere abrir una puerta de masa  $m = 50$  kg, una anchura  $\ell = 90$  cm y una altura  $h = 2$  m, tirando de ella con una fuerza  $F$  de 10 N (perpendicularmente a la puerta).

- Calcular el momento de inercia de la puerta, respecto del eje que pasa por las bisagras (como una lámina rectangular uniforme).
- Comparar la aceleración angular que adquiere la puerta si tiramos del extremo o del punto medio.
- Si la anchura de la puerta se reduce a la mitad, manteniendo la misma masa, ¿cuál es la aceleración angular que adquiere, comparada con el caso anterior (tirando del extremo)?

# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: puerta

- Momento de inercia  $I$  con respecto al eje de giro.

Densidad superficial de masa  $\sigma$ , coordenadas según figura (origen  $O$ , base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ); la distancia de un elemento  $dm = \sigma dx dy$  en posición  $(x, y)$  al eje es  $x^2$ , por tanto

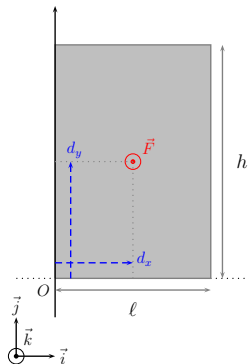
$$I = \int_0^h dy \int_0^\ell dx \sigma x^2 = \frac{\sigma h \ell^3}{3}$$

La masa de la puerta es

$$m = \int_0^h dy \int_0^\ell dx \sigma = \sigma h \ell$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} m \ell^2$$

(N.B. ver ejemplo de la varilla)



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: puerta

- Fuerza  $\vec{F} = F\vec{k}$  aplicada en un punto  $(D_x, D_y)$  de la puerta da un momento con respecto al eje

$$\vec{M} = \vec{r}_\perp \times \vec{F} = (D_x\vec{i}) \times (F\vec{k}) = -D_xF\vec{j}$$

- Con  $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ ,

$$\vec{\alpha} = I^{-1}\vec{M} = -\frac{3D_xF}{m\ell^2}\vec{j} \Rightarrow \alpha = |\vec{\alpha}| = \frac{3D_xF}{m\ell^2}$$

- Casos

$$\text{para } D_x = \frac{\ell}{2}, \quad \alpha = \frac{3F}{2m\ell} = \frac{3 \times 10}{2 \times 50 \times 0.9} = 0.33 \text{ rad s}^{-2}$$

$$\text{para } D_x = \ell, \quad \alpha = \frac{3F}{m\ell} = 0.66 \text{ rad s}^{-2}$$

# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: puerta

- Si cambiamos

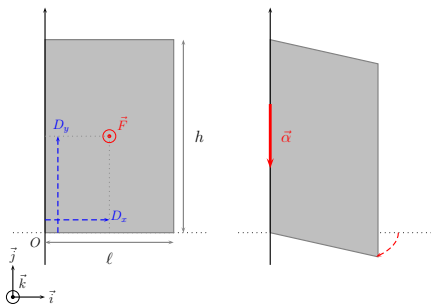
$\ell \mapsto \ell' = \frac{\ell}{2}$  (puerta con la mitad de anchura y misma masa  $m$ ),

$$I \mapsto I' = \frac{1}{3}m\ell'^2 = \frac{1}{12}m\ell^2$$

Para  $D_x = \ell'$ ,

$$\alpha' = \frac{3D_x F}{m\ell'^2} = \frac{3F}{m\ell'} = \frac{6F}{m\ell}$$

$$\alpha' = 1.33 \text{ rads}^{-2}$$

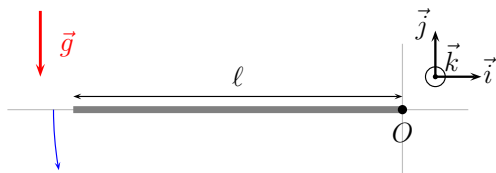




# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: una varilla uniforme de masa  $m$  y longitud  $\ell$  puede girar sin rozamiento alrededor de un extremo; partiendo del reposo en posición horizontal, determina

- la aceleración angular inicial,
- la aceleración tangencial inicial del extremo libre,
- la fuerza de contacto en el extremo fijo en el instante inicial.
- Aplicación numérica:  $\ell = 30$  cm,  $m = 200$  g.



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: varilla uniforme gira

- Posiciones con respecto a  $O$ : CM en  $\vec{r}_{\text{CM}} = -\frac{\ell}{2}\vec{i}$ , extremo libre en  $\vec{r} = -\ell\vec{i}$

- Fuerzas:

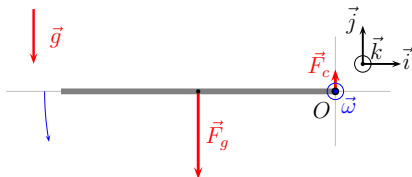
$$\vec{F}_g = -mg\vec{j} \quad \text{aplicada en } \vec{r}_{\text{CM}}$$

$$\vec{F}_c \quad \text{aplicada en } O \quad (\vec{r}_O = \vec{0})$$

- Dinámica:

- movimiento del CM:  $m\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{Neta}}$

- rotación:  $I_O \vec{\alpha} = \vec{M}_{\text{Tot}}$ ,  $I_O$  momento de inercia con respecto a eje  $\vec{k}$  por  $O$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: varilla uniforme gira

- Movimiento del CM: con velocidad angular en el instante inicial  $\vec{\omega} = \vec{0}$ ,

$$m\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{\alpha} \times (m\vec{r}_{\text{CM}}) = \vec{\alpha} \times \left(-m\frac{\ell}{2}\vec{i}\right)$$

$$m\vec{a}_{\text{CM}} = -mg\vec{j} + \vec{F}_c$$

- Rotación: momentos de las fuerzas con respecto a eje  $\vec{k}$  por  $O$ ,  $\vec{M}_{\text{Tot}}$ ,

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = \left(-\frac{\ell}{2}\vec{i}\right) \times (-mg\vec{j}) + \vec{0} \times \vec{F}_c = \frac{mg\ell}{2}\vec{k}$$

Momento de inercia con respecto a eje  $\vec{k}$  por  $O$  (ver ejemplo varilla)

$$I_O = \frac{m\ell^2}{3}$$

# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: varilla uniforme gira

- Dinámica  $\Rightarrow$

$$\vec{\alpha} \times \left( -m \frac{\ell}{2} \vec{i} \right) = -mg \vec{j} + \vec{F}_c$$
$$\frac{mg\ell}{2} \vec{k} = \frac{m\ell^2}{3} \vec{\alpha}$$

es decir

$$\vec{\alpha} = \frac{3g}{2\ell} \vec{k}, \quad \vec{F}_c = \frac{mg}{4} \vec{j}, \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\text{CM}} = -\frac{3}{4}g \vec{j}$$

- Aceleración tangencial del extremo libre

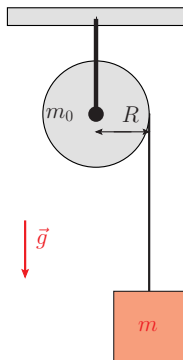
$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{\alpha} \times (-\ell \vec{i}) = 2\vec{a}_{\text{CM}} = -\frac{3}{2}g \vec{j}$$

- Aplicación numérica  $m = 0.2 \text{ kg}$ ,  $\ell = 0.3 \text{ m}$

$$I_O = 6 \times 10^{-3} \text{ kg m}^2, \quad |\vec{\alpha}| = 49 \text{ rad s}^{-2}, \quad |\vec{F}_c| = 0.49 \text{ N}$$

## Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: se sujeta un bloque de masa  $m$  a una cuerda ligera enrollada alrededor de una polea de masa  $m_0$  y radio  $R$ . La polea puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza. Halla la tensión de la cuerda y la aceleración del bloque.



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloque-polea

- Bloque

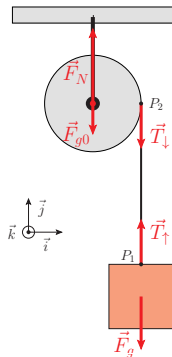
$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{T}_\uparrow = T_\uparrow\vec{j}$$

- Polea

$$\vec{F}_{g0} = -m_0g\vec{j}, \quad \vec{T}_\downarrow = -T_\downarrow\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}$$

Momento de fuerzas con respecto al eje de giro (perpendicular al disco, pasando por el centro del mismo)

$$\vec{M} = (R\vec{i}) \times \vec{T}_\downarrow = -RT_\downarrow\vec{k}$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloque-polea

- Cuerda longitud constante

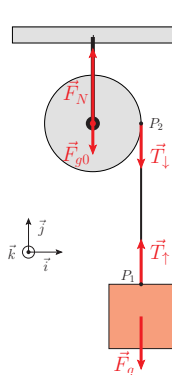
$$T_{\uparrow} = T_{\uparrow} = T$$

Aceleración (vertical) de  $P_1$  (bloque 1) =  
aceleración tangencial de  $P_2$

$$\vec{a}_{P_1} = -a\vec{j}$$

$$\vec{a}_{P_2} = -a\vec{j} = \vec{\alpha} \times (R\vec{i})$$

con  $\vec{\alpha}$  la aceleración angular



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloque-polea

- Segunda ley de Newton (bloque)

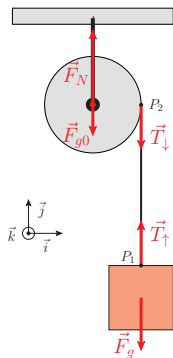
$$(T - mg)\vec{j} = -ma\vec{j}$$

- Rotación de la polea

$$\vec{M} = I \vec{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{RT}{I}\vec{k} = \vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{P_2} = -a\vec{j} = \vec{\alpha} \times (R\vec{i}) = -\frac{R^2T}{I}\vec{j}$$

con  $I$  el momento de inercia de la polea con respecto al eje de giro





# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloque-polea

■ Tenemos

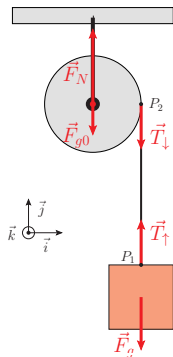
$$(T - mg) = -ma, \quad a = \frac{R^2 T}{I}$$

■ Resolvemos

$$a = g \frac{mR^2}{mR^2 + I}, \quad T = mg \frac{I}{I + mR^2}$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{RT}{I} \vec{k} = -\frac{g}{R} \frac{mR^2}{I + mR^2} \vec{k}$$

N.B.  $I$ : (i) disco homogéneo  $I = \frac{1}{2}m_0R^2$ ,  
(ii) anillo homogéneo  $I = m_0R^2$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloque-polea

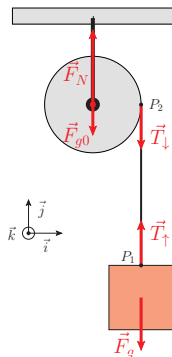
- Casos límite

- $I \rightarrow 0 \rightarrow$  caída libre del bloque  $m$

$$a \rightarrow g, \quad T \rightarrow 0$$

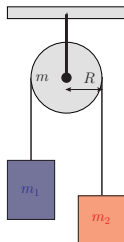
- $I \gg mR^2 \rightarrow$  “no cae”

$$a \rightarrow 0, \quad T \rightarrow mg$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood): dos bloques con masas  $m_1$  y  $m_2$  están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio  $R$  y masa  $m$ . La polea puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza. Determina la aceleración lineal de los bloques y la aceleración angular de la polea.



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood):

## ■ Bloque 1

$$\vec{F}_{g1} = -m_1 g \vec{j}, \quad \vec{T}_{\uparrow 1} = T_{\uparrow 1} \vec{j}$$

$$\vec{F}_{g1} + \vec{T}_{\uparrow 1} = m_1 \vec{a}_1$$

## ■ Bloque 2

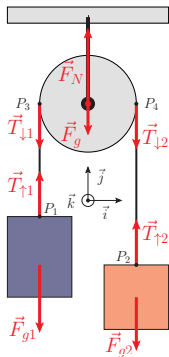
$$\vec{F}_{g2} = -m_2 g \vec{j}, \quad \vec{T}_{\uparrow 2} = T_{\uparrow 2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_{g2} + \vec{T}_{\uparrow 2} = m_2 \vec{a}_2$$

## ■ Polea (traslación)

$$\vec{F}_g = -mg \vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j}, \quad \vec{T}_{\downarrow 1} = -T_{\downarrow 1} \vec{j}, \quad \vec{T}_{\downarrow 2} = -T_{\downarrow 2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{T}_{\downarrow 1} + \vec{T}_{\downarrow 2} = \vec{0}$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood):

- Polea (rotación alrededor de un eje  $\perp$  que pasa por el centro)

$$\vec{M}_{\downarrow 1} = (-R\vec{i}) \times (-T_{\downarrow 1}\vec{j}) = RT_{\downarrow 1}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\downarrow 2} = (R\vec{i}) \times (-T_{\downarrow 2}\vec{j}) = -RT_{\downarrow 2}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\downarrow 1} + \vec{M}_{\downarrow 2} = I\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{R(T_{\downarrow 1} - T_{\downarrow 2})}{I}\vec{k}$$

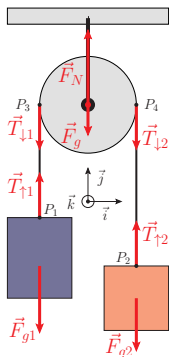
- Cuerda tiene una longitud constante

$$T_{1\uparrow} = T_{1\downarrow} = T_1, \quad T_{2\uparrow} = T_{2\downarrow} = T_2$$

y no desliza en la polea: aceleración de  $P_j$

$$\vec{a}_{P_1} = \vec{a}_{\parallel P_3} = -\vec{a}_{P_2} = -\vec{a}_{\parallel P_4}$$

con  $\vec{a}_{\parallel P_3}$  y  $\vec{a}_{\parallel P_4}$  las aceleraciones tangenciales a la polea en  $P_3$  y  $P_4$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood):

- En términos de  $\vec{a}_1$  y  $\vec{a}_2$  de los bloques

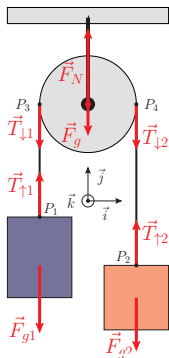
$$\vec{a}_2 = a\vec{j} \Rightarrow \vec{a}_1 = -a\vec{j}, \quad \vec{a}_{\parallel P_4} = a\vec{j}, \quad \vec{a}_{\parallel P_3} = -a\vec{j}$$

- Rotación de la polea (con eje de giro fijo)

$$\vec{a}_{\parallel P_4} = \vec{\alpha} \times (R\vec{i}), \quad \vec{a}_{\parallel P_3} = \vec{\alpha} \times (-R\vec{i})$$

$$\vec{a}_{\parallel P_4} = \frac{R(T_1 - T_2)}{I} \vec{k} \times (R\vec{i}) = \frac{R^2(T_1 - T_2)}{I} \vec{j}$$

$$\vec{a}_{\parallel P_3} = -\frac{R^2(T_1 - T_2)}{I} \vec{j}$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood):

- Tenemos por tanto

$$(T_1 - m_1g)\vec{j} = -m_1\vec{a}\vec{j}$$

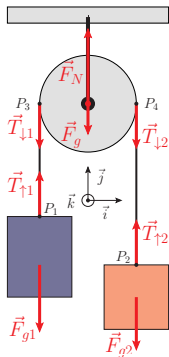
$$(T_2 - m_2g)\vec{j} = m_2\vec{a}\vec{j}$$

$$(F_N - mg - T_1 - T_2)\vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{a}\vec{j} = \frac{R^2(T_1 - T_2)}{I}\vec{j}$$

- Resolvemos

$$T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a = \frac{I}{R^2}a \Rightarrow a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo (máquina de Atwood):

$$a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \Rightarrow T_1 = m_1 g \frac{2m_2 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

$$T_2 = m_2 g \frac{2m_1 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{a}{R} \vec{k}$$

$$F_N = mg + T_1 + T_2 = (m + m_1 + m_2)g - \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + I/R^2} g$$

N.B. Polea:

(i) disco homogéneo  $\rightarrow I/R^2 = \frac{m}{2}$ , (ii) anillo  $\rightarrow I/R^2 = m$

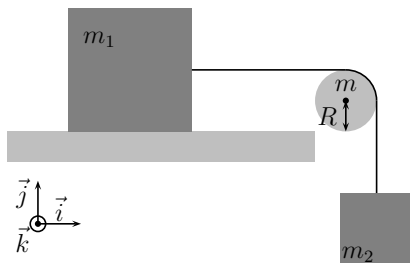
Límites

- $m, I \rightarrow 0$ : máquina de Atwood vista en Tema 3, *Dinámica*
- $m_2 \rightarrow 0$ : ejemplo un único bloque que cuelga de una polea
- $I/R^2 \gg m_1, m_2$ : equilibrio,  $a \rightarrow 0$ ,  $T_1 = m_1 g$ ,  $T_2 = m_2 g$



## Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: dos bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  están conectados por una cuerda que pasa por una polea de masa  $m$  y radio  $R$ . El bloque  $m_1$  se desliza horizontalmente sin rozamiento mientras el bloque  $m_2$  se mueve verticalmente, según indica la figura. Determina la aceleración de los bloques, la aceleración angular de la polea y las tensiones en la cuerda



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloques-polea

- Bloque  $m_1$ , fuerzas

$$\vec{F}_{g1} = -m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j},$$

$$\vec{T}_{\rightarrow} = T_{\rightarrow} \vec{i}$$

- Bloque  $m_2$ , fuerzas

$$\vec{F}_{g2} = -m_2 g \vec{j}, \quad \vec{T}_{\uparrow} = T_{\uparrow} \vec{j}$$

- Polea, fuerzas

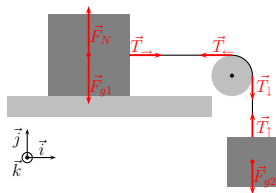
$$\vec{T}_{\leftarrow} = -T_{\leftarrow} \vec{i}, \quad \vec{T}_{\downarrow} = -T_{\downarrow} \vec{j}$$

- Polea, momento de fuerzas con respecto a eje  $\perp$  por el centro

$$\vec{M}_{\leftarrow} = (R\vec{j}) \times \vec{T}_{\leftarrow} = RT_{\leftarrow} \vec{k}$$

$$\vec{M}_{\downarrow} = (R\vec{i}) \times \vec{T}_{\downarrow} = -RT_{\downarrow} \vec{k}$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{\leftarrow} + \vec{M}_{\downarrow} = R(T_{\leftarrow} - T_{\downarrow}) \vec{k}$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloques-polea

## ■ Cuerda

$$T_{\rightarrow} = T_{\leftarrow} = T_1, \quad T_{\downarrow} = T_{\uparrow} = T_2$$

## ■ Dinámica

$$(F_N - m_1 g) \vec{j} + T_1 \vec{i} = m_1 \vec{a}_1 = m_1 a_1 \vec{i}$$

$$(T_2 - m_2 g) \vec{j} = m_2 \vec{a}_2 = m_2 a_2 \vec{j}$$

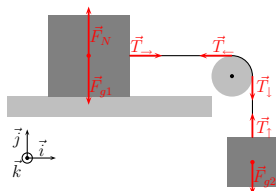
$$\vec{M} = R(T_1 - T_2) \vec{k} = I \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}, \quad \alpha = \frac{R(T_1 - T_2)}{I} \quad \text{con } I \text{ el momento de inercia de la polea}$$

con respecto al eje (e.g. disco homogéneo:  $I = \frac{1}{2} m R^2$ )

## ■ Cuerda de longitud constante

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \vec{i} = \vec{\alpha} \times (R \vec{j}) = \alpha R \vec{k} \times \vec{j} = -\alpha R \vec{i} \\ a_2 \vec{j} = \vec{\alpha} \times (R \vec{i}) = \alpha R \vec{k} \times \vec{i} = \alpha R \vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow a = a_1 = -a_2 = -\alpha R$$



# Dinámica de la rotación. Momento de inercia

Ejemplo: bloques-polea

- Tenemos que resolver

$$(F_N - m_1 g)\vec{j} + T_1\vec{i} = m_1 a\vec{i} \quad (T_2 - m_2 g)\vec{j} = -m_2 a\vec{j}$$
$$R(T_1 - T_2)\vec{k} = -\frac{Ia}{R}\vec{k}$$

por tanto

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \quad F_N = m_1 g$$
$$T_1 = m_2 g \frac{m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2} \quad T_2 = m_2 g \frac{m_1 + I/R^2}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

- Límites particulares

$m_2 \rightarrow 0$ , no hay movimiento,  $a = 0$ ,  $T_1 = T_2 = 0$

$m_1 \rightarrow 0$ , ejemplo bloque-polea

$I/R^2 \gg m_1, m_2$ ,  $m_2$  “suspendida”,  $a = 0$ ,  $T_1 = 0$ ,  $T_2 = m_2 g$

# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

- Recordatorio: momento de inercia  $I$  de un sólido rígido (sistema de  $n$  partículas) con respecto a un eje es

$$I = \sum_{j=1}^n m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2$$

con  $\vec{r}_{j\perp}$  las distancias entre las masas  $m_j$  y el eje

- Consideremos ahora
  - como eje fijo de rotación un eje **que pasa por el CM**, con dirección  $\vec{u}$ ,  $|\vec{u}| = 1$ ; sea  $I_{\text{CM}}$  el momento de inercia con respecto a ese eje
  - posiciones  $\vec{R}_j$  de las masas relativas al CM,  $O_{\text{CM}}$  (i.e. para la masa  $m_j$  en el punto  $P_j$ ,  $\overrightarrow{O_{\text{CM}}P_j} = \vec{R}_j$ )

Por construcción

$$\sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_j = \vec{0}$$

# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

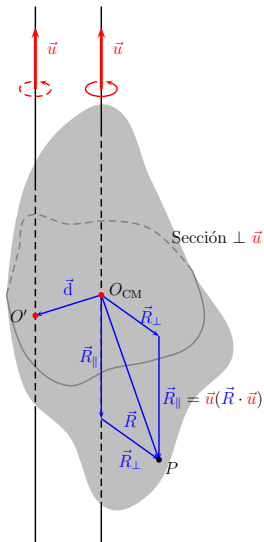
## ■ Descomponiendo

$$\vec{R}_j = \vec{R}_{j\perp} + \vec{R}_{j\parallel} = \vec{R}_{j\perp} + (\vec{R}_j \cdot \vec{u})\vec{u}$$

con  $\vec{u} \cdot \vec{R}_{j\perp} = 0$  y  $\vec{u} \cdot \vec{R}_{j\parallel} = \vec{u} \cdot \vec{R}_j$ ,

$$\sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_{j\parallel} = \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_{j\perp} = \vec{0}$$

- ## ■ Consideramos ahora un nuevo eje
- paralelo al anterior (misma dirección  $\vec{u}$ ) a una distancia  $d$  del CM, es decir, el punto  $O'$  del nuevo eje más cercano al CM tiene  $\overrightarrow{O_{CM}O'} = \vec{d}$  con  $|\vec{d}| = d$  y  $\vec{d} \cdot \vec{u} = 0$ : ¿cómo se relaciona el momento de inercia  $I'$  (con respecto al nuevo eje) con  $I_{CM}$  y  $d$ ?



# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

- Momento de inercia  $I'$

$$I' = \sum_{j=1}^n m_j |\vec{r}_{j\perp}|^2$$

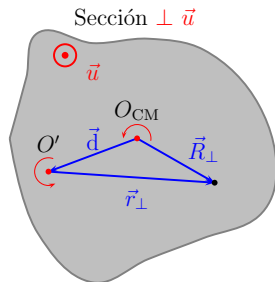
- Con  $\vec{r}_{j\perp} = \vec{R}_{j\perp} - \vec{d}$

$$I' = \sum_{j=1}^n m_j |\vec{R}_{j\perp} - \vec{d}|^2$$

$$I' = \sum_{j=1}^n m_j (|\vec{R}_{j\perp}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2\vec{R}_{j\perp} \cdot \vec{d})$$

$$I' = \left( \sum_{j=1}^n m_j |\vec{R}_{j\perp}|^2 \right) + |\vec{d}|^2 \left( \sum_{j=1}^n m_j \right) - 2 \left( \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_{j\perp} \right) \cdot \vec{d}$$

$$I' = I_{\text{CM}} + Md^2$$



# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

## Teorema de Steiner

Dado el momento de inercia  $I_{\text{CM}}$  de un sólido rígido de masa  $M$  con respecto a un eje que pasa por su centro de masas, el momento de inercia  $I$  con respecto a un segundo eje paralelo al anterior a una distancia  $d$  es

$$I = I_{\text{CM}} + Md^2$$



# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

Ejemplo: momento de inercia de una varilla de masa  $m$  y longitud  $\ell$  con respecto a un eje perpendicular que pasa por un extremo

- Momento con respecto a eje perpendicular que pasa por el CM

$$I_{\text{CM}} = \frac{m\ell^2}{12}$$

- Teorema de Steiner:

$$I = I_{\text{CM}} + m \left( \frac{\ell}{2} \right)^2 = m\ell^2 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = \frac{m\ell^2}{3}$$

## Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

Ejemplo: momento de inercia de un anillo de masa  $m$  y radio  $R$  con respecto a un eje perpendicular (al plano del anillo) que pasa por el propio anillo

- Momento con respecto a eje perpendicular que pasa por el CM

$$I_{\text{CM}} = mR^2$$

- Teorema de Steiner:

$$I = I_{\text{CM}} + mR^2 = 2mR^2$$

# Dinámica de la rotación. Teorema de Steiner

Ejemplo: momento de inercia de un disco de masa  $m$  y radio  $R$  con respecto a un eje perpendicular que pasa por el borde

- Momento con respecto a eje perpendicular que pasa por el CM

$$I_{\text{CM}} = \frac{mR^2}{2}$$

- Teorema de Steiner:

$$I = I_{\text{CM}} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

# Energía cinética de rotación

Sistema rígido de  $j = 1, \dots, n$  partículas, masas  $m_j$ , en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$

(N.B. Posiciones  $\vec{r}_j$  relativas a un origen  $O$  fijo, velocidades  $\vec{v}_j$  independientes de  $O$ )

- La energía cinética es

$$E_c = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j |\vec{v}_j|^2$$

- Descomponemos  $\vec{r}_j = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j$ ,  $\vec{v}_j = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{V}_j$ ,  
con  $\vec{R}_j$ ,  $\vec{V}_j$ , posiciones y velocidades relativas al CM

- Tenemos

$$|\vec{v}_j|^2 = |\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{V}_j|^2 = |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + |\vec{V}_j|^2 + 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{V}_j$$

$$E_c = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j |\vec{v}_j|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \left\{ |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + |\vec{V}_j|^2 + 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \vec{V}_j \right\}$$

# Energía cinética de rotación

Sistema rígido de  $j = 1, \dots, n$  partículas, masas  $m_j$ , en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$

- La energía cinética es

$$E_c = \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \right) |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j |\vec{V}_j|^2 \right) + 2\vec{v}_{\text{CM}} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \vec{V}_j \right)$$

- Masa total  $M$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j = \frac{1}{2} M$$

- Movimiento relativo al CM,

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \vec{V}_j = \vec{0}$$

# Energía cinética de rotación

Sistema rígido de  $j = 1, \dots, n$  partículas, masas  $m_j$ , en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$

- Movimiento relativo al CM,  $\vec{V}_j = \vec{\omega} \times \vec{R}_j$ , con  $\vec{\omega}$  la velocidad angular ( $|\vec{\omega}| = \omega$ )

$$|\vec{V}_j|^2 = |\vec{\omega} \times \vec{R}_j|^2 = \omega^2 |\vec{R}_{j\perp}|^2 = \omega^2 d_j^2$$

con  $d_j$  distancia de  $m_j$  al eje de rotación del sólido rígido alrededor del CM,

$$\left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j |\vec{V}_j|^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^n m_j d_j^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} \omega^2$$

con  $I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}$  el momento de inercia del sólido rígido con respecto a un eje que pasa por el CM con dirección  $\vec{\omega}$

- Obtenemos finalmente

$$E_c = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} \omega^2$$

# Energía cinética de rotación

Sistema rígido de  $j = 1, \dots, n$  partículas, masas  $m_j$ , en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$

- Momento de inercia del sistema con respecto al eje de rotación:

$$I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} = \sum_{j=1}^n m_j d_j^2$$

de modo que la energía cinética de rotación alrededor del CM es simplemente

$$E_c^{\text{Rot CM}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} \omega^2$$

- Analogía con energía cinética de traslación  $\frac{1}{2}mv^2$ , de nuevo

inercia: masa  $m \mapsto$  momento de inercia  $I$

movimiento: velocidad  $v \mapsto$  velocidad angular  $\omega$

# Energía cinética de rotación

Sistema rígido de  $j = 1, \dots, n$  partículas, masas  $m_j$ , en posiciones  $\vec{r}_j$  con velocidades  $\vec{v}_j$

- Energía cinética del sistema

$$E_c = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}\omega^2$$

- Término asociado al movimiento global del sistema:  $\frac{1}{2}M|\vec{v}_{\text{CM}}|^2$   
 $\Leftrightarrow$  movimiento de toda la masa  $M$  con  $\vec{v}_{\text{CM}}$
- Término asociado a la rotación alrededor del CM:  $\frac{1}{2}I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}\omega^2$
- En general  $\vec{v}_{\text{CM}}$  y  $\vec{\omega}$  son independientes, pero hay casos en que están relacionados
  - Giro alrededor de un eje fijo
  - Objetos “rodantes”



# Energía cinética de rotación

Giro alrededor de un eje fijo

- Velocidad del CM

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM}\perp} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 = \omega^2 |\vec{r}_{\text{CM}\perp}|^2$$

$|\vec{r}_{\text{CM}\perp}|$  es la distancia  $d$  del CM al eje fijo

- Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} M \omega^2 d^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} \omega^2 = \frac{1}{2} (M d^2 + I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}) \omega^2$$

- Teorema de Steiner: momento de inercia  $I$  con respecto al eje fijo

$$I = M d^2 + I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}$$

- Energía cinética como energía cinética de rotación alrededor del eje fijo

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Energía cinética de rotación

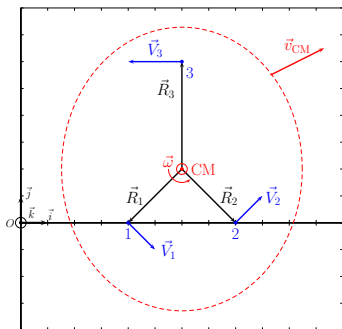
Ejemplo: en un ejemplo anterior, analizamos un sistema de tres masas idénticas  $m_0$  que, en un instante dado, se encuentran en

$$\vec{r}_1 = 4\vec{i} \text{ m}, \quad \vec{r}_2 = 8\vec{i} \text{ m}, \quad \vec{r}_3 = (6\vec{i} + 6\vec{j}) \text{ m}$$

con velocidades

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_2 = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_3 = \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

- Determina el momento de inercia del sistema con respecto a un eje que pasa por el CM con dirección  $\vec{\omega}$
- Comprueba la descomposición de la energía cinética, CM + rotación alrededor de CM



# Energía cinética de rotación

Ejemplo: tres masas

- Velocidades

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_2 = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{v}_3 = \vec{j} \text{ m s}^{-1}$$

- Velocidad del CM,  $\vec{v}_{\text{CM}} = (2\vec{i} + \vec{j}) \text{ m/s}$
- Velocidades relativas al CM,  $\vec{V}_j = \vec{v}_j - \vec{v}_{\text{CM}}$

$$\vec{V}_1 = (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_2 = (\vec{i} + \vec{j}) \text{ m s}^{-1}, \quad \vec{V}_3 = -2\vec{i} \text{ m s}^{-1}$$

- Velocidad angular,  $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{k} \text{ s}^{-1}$
- Posiciones relativas al CM,  $\vec{R}_j = \vec{r}_j - \vec{r}_{\text{CM}}$

$$\vec{R}_1 = (-2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_2 = (2\vec{i} - 2\vec{j}) \text{ m}, \quad \vec{R}_3 = 4\vec{j} \text{ m}$$

- Momento de inercia  $I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}}$  con respecto a eje que pasa por el CM con dirección  $\vec{\omega}$  (dirección  $\vec{k}$ ),

$$I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} = \sum_{j=1}^3 m_j |\vec{R}_{j\perp}|^2 = m_0 \sum_{j=1}^3 |\vec{R}_j|^2 = m_0(8+8+16)\text{m}^2 = 32m_0\text{m}^2$$

# Energía cinética de rotación

Ejemplo: tres masas

- Energía cinética a partir de velocidades  $\vec{v}_j$

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_0 (|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 + |\vec{v}_3|^2) \\ &= \frac{m_0}{2} (9 + 9 + 4 + 1) \text{ m}^2/\text{s}^2 = \frac{23}{2} m_0 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

- Energía cinética asociada a la masa total con velocidad  $\vec{v}_{\text{CM}}$

$$E_{c, \vec{v}_{\text{CM}}} = \frac{1}{2} 3m_0 (4 + 1) \text{ m}^2/\text{s}^2 = \frac{15}{2} m_0 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

- Energía cinética asociada a la rotación alrededor del CM

$$E_{c, \vec{\omega}_{\text{CM}}} = \frac{1}{2} I_{\text{CM}}^{\vec{\omega}} |\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2} 32m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 4m_0 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

- $E_c = E_{c, \vec{v}_{\text{CM}}} + E_{c, \vec{\omega}_{\text{CM}}}$  ✓

## Trabajo y energía cinética de rotación

- En un punto  $P$  de un sólido rígido se aplica una fuerza  $\vec{F}$ ; el sólido rígido gira alrededor de un eje fijo. Origen de coordenadas en  $O$ , un punto del eje fijo.
- ¿Cuál es el trabajo realizado por  $\vec{F}$ ?
- En un intervalo  $dt$ , el punto  $P$  se desplaza

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{v} dt = (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) dt$$

- El trabajo realizado en  $dt$  es  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_\perp \times \vec{F}) dt = \vec{\omega} \cdot \vec{M} dt$$

con  $\vec{M}$  el momento de la fuerza con respecto al eje

- Dinámica de la rotación:  $\vec{M} = I\vec{\alpha} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$  con  $\vec{\omega}$  fijo e  $I$  el momento de inercia del sólido con respecto al eje fijo  $\Rightarrow$

$$dW = \vec{\omega} \cdot \vec{M} dt = \omega \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \left( I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) dt = I\omega \frac{d\omega}{dt} dt = \frac{1}{2} I d(\omega^2)$$

# Trabajo y energía cinética de rotación

- Trabajo entre  $t_i$  y  $t_f$

$$W_{if} = \int_i^f dW = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}I \int_i^f d(\omega^2) = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

es decir

$$W_{if} = \Delta E_c^{\text{rot}} = E_{c,f}^{\text{rot}} - E_{c,i}^{\text{rot}}$$

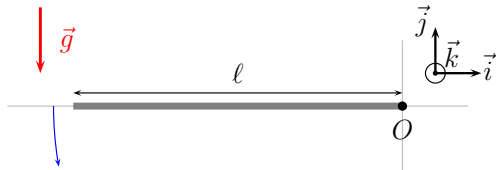
## Teorema Trabajo-energía cinética para la rotación (eje fijo)

El trabajo neto realizado por las fuerzas externas sobre un sólido rígido que gira alrededor de un eje fijo es igual a la variación de la energía cinética de rotación

$$W_{if} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c^{\text{rot}} = E_{c,f}^{\text{rot}} - E_{c,i}^{\text{rot}}$$

# Trabajo y energía cinética de rotación

Ejemplo: una varilla uniforme de masa  $m$  y longitud  $\ell$  puede girar sin rozamiento alrededor de un extremo; partiendo del reposo en posición horizontal, determina la velocidad angular cuando alcanza una posición vertical.

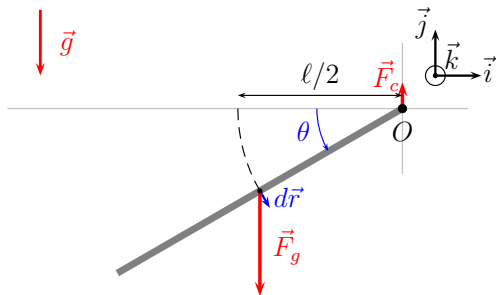


# Trabajo y energía cinética de rotación

Ejemplo: varilla uniforme gira

- $\vec{F}_c$  no realiza trabajo
- $\vec{F}_g = -mg\vec{j}$  realiza trabajo al recorrer el CM un arco de radio  $\ell/2$
- Parametrizamos el recorrido del CM con  $\theta \in [0; \pi/2]$ , el desplazamiento  $d\vec{r}$  es

$$d\vec{r} = \frac{\ell}{2} d\theta (\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j})$$





# Trabajo y energía cinética de rotación

Ejemplo: varilla uniforme gira

- $dW = \vec{F}_g \cdot d\vec{r}$

$$dW = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = (-mg\vec{j}) \cdot \left( \frac{\ell}{2} d\theta (\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}) \right) = \frac{mg\ell}{2} \cos\theta d\theta$$

- Trabajo

$$W_{if} = \int_i^f dW = \frac{mg\ell}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{mg\ell}{2} [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{mg\ell}{2}$$

- Variación de la energía cinética de rotación con  $\omega_i = 0$  y momento de inercia  $I = \frac{m\ell^2}{3}$

$$\Delta E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I (\omega_f^2 - \omega_i^2) = \frac{m\ell^2}{6} \omega_f^2$$

- Teorema Trabajo-energía cinética de rotación

$$W_{if} = \Delta E_c^{\text{rot}} \Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

# Trabajo y potencia

- De forma análoga a lo ya visto en el tema 4, “Trabajo y Energía”, la **potencia**  $P$  es la “velocidad” a la que una fuerza  $\vec{F}$  realiza trabajo (en la rotación del sólido rígido con eje fijo)

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\perp} \times \vec{F}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}$$

- Dinámica de la rotación (eje fijo):  $\vec{M} = I\vec{\alpha} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ , con  $I$  el momento de inercia  $\Rightarrow$

$$P = \vec{\omega} \cdot \vec{M} = \omega \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \left( I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) = I\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I\omega^2 \right)$$

$$P = \frac{d}{dt} E_c^{\text{rot}}$$

De nuevo, **Potencia**  $\leftrightarrow$  variación de la **energía cinética**  
(en este caso de rotación)

# Energía mecánica

- Para fuerzas conservativas introducimos la energía potencial  $U$

$$W_{if}^C = -\Delta U = U_i - U_f$$

- De acuerdo con el teorema Trabajo-energía cinética de rotación

$$W_{if} = W_{if}^C + W_{if}^{\text{NoC}} = W_{if}^{\text{NoC}} - \Delta U = \Delta E_c^{\text{rot}}$$

con  $W_{if}^{\text{NoC}}$  el trabajo de las fuerzas no conservativas, es decir

$$E_{c,f}^{\text{rot}} - E_{c,i}^{\text{rot}} = U_i - U_f + W_{if}^{\text{NoC}}$$

- Definimos la **energía mecánica**  $E_{\text{Mec}} = E_c^{\text{rot}} + U$ , por tanto

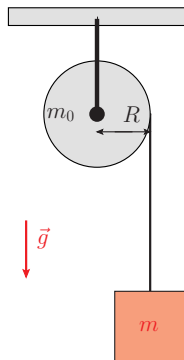
$$E_{\text{Mec},f} = E_{\text{Mec},i} + W_{if}^{\text{NoC}}$$

- Si, de haberlas, las fuerzas no conservativas no realizan trabajo,  $W_{if}^{\text{NoC}} = 0$  y la energía mecánica *se conserva*

# Energía mecánica

Ejemplo: considera de nuevo el ejemplo del bloque de masa  $m$  que cuelga de una polea de masa  $m_0$  y radio  $R$  (la polea puede girar sin rozamiento y la cuerda no desliza). En el instante inicial  $t = 0$  el sistema está en reposo; transcurrido un tiempo  $t$ ,

- determina la energía cinética y potencial del bloque,
- determina la energía cinética de la polea,
- comprueba la conservación de la energía mecánica



# Energía mecánica

Ejemplo: masa-polea

- Con  $\vec{i} = \rightarrow$ ,  $\vec{j} = \uparrow$ ,  $\vec{k} = \odot$ , la aceleración del bloque es

$$\vec{a} = -g \frac{mR^2}{mR^2 + I} \vec{j} = -a \vec{j}$$

y la aceleración angular de la polea

$$\vec{\alpha} = -g \frac{mR}{mR^2 + I} \vec{k} = -\alpha \vec{k} = -\frac{a}{R} \vec{k}$$

- Con  $y(0) = 0$ , la posición del bloque es

$$y(t) = -\frac{1}{2} a t^2$$

- La polea ha girado un ángulo

$$\theta(t) = -\frac{1}{2} \alpha t^2$$

# Energía mecánica

Ejemplo: masa-polea

- Energía cinética del bloque

$$E_c^{\text{bl}}(t) = \frac{1}{2}m \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2$$

- Energía potencial del bloque (origen  $U = 0$  en posición inicial  $y = 0$ )

$$U^{\text{bl}}(t) = mg y(t) = -\frac{mga}{2}t^2$$

- Energía cinética de la polea

$$E_c^{\text{po}}(t) = \frac{1}{2}I \left| \frac{d\theta}{dt} \right|^2 = \frac{1}{2}I\alpha^2t^2 = \frac{1}{2}I \frac{a^2}{R^2}t^2$$

- En  $t = 0$ , la energía mecánica del sistema es

$$E_{\text{Mec}} = E_c^{\text{bl}}(0) + U^{\text{bl}}(0) + E_c^{\text{po}}(0) = 0$$

# Energía mecánica

Ejemplo: masa-polea

$$E_c^{\text{bl}}(t) = \frac{1}{2} m a^2 t^2, \quad U^{\text{bl}}(t) = -\frac{m g a}{2} t^2, \quad E_c^{\text{po}}(t) = \frac{1}{2} I \frac{a^2}{R^2} t^2$$

- Energía mecánica del sistema tras un tiempo  $t$

$$E_{\text{Mec}}(t) = E_c^{\text{bl}}(t) + U^{\text{bl}}(t) + E_c^{\text{po}}(t) = \frac{1}{2} a t^2 \left( m a - m g + \frac{I}{R^2} a \right)$$

- Con  $a = g \frac{m R^2}{m R^2 + I}$ ,

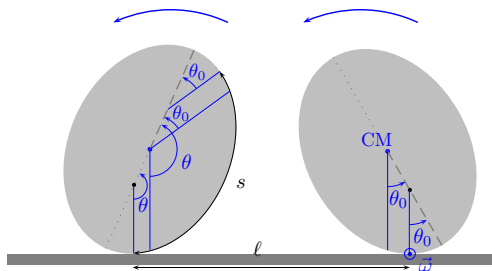
$$m a + \frac{I}{R^2} a = \frac{a}{R^2} (m R^2 + I) = m g$$

y por tanto

$$E_{\text{Mec}}(t) = E_{\text{Mec}}(0) \quad \checkmark$$

# Objetos rodantes

- Objeto rodante: sólido rígido que se mueve en contacto con una superficie *sin deslizar*
- Punto de contacto objeto-superficie fijo  
⇒ movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el punto de contacto  
⇔ rozamiento estático en el punto de contacto



- No desliza ⇔  $l = s$



# Objetos rodantes

Planteamiento general (2D)

- Momento de inercia  $I$  con respecto al eje instantáneo de rotación  $\perp$  al plano de la figura, depende de  $\theta \rightarrow I(\theta)$
- Fuerzas,  $\vec{F}_N$  en punto de contacto,  $\vec{F}_g$  en CM
- Momento de fuerzas con respecto a eje  $\perp$  al plano de la figura, pasando por el punto de contacto

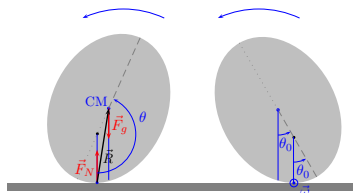
$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_g + \vec{0} \times \vec{F}_N = \vec{R} \times \vec{F}_g$$

con  $\vec{R}$  del punto de contacto al CM

- Dinámica de la rotación, eje con dirección fija

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_g = I\vec{\alpha}$$

para obtener  $\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$



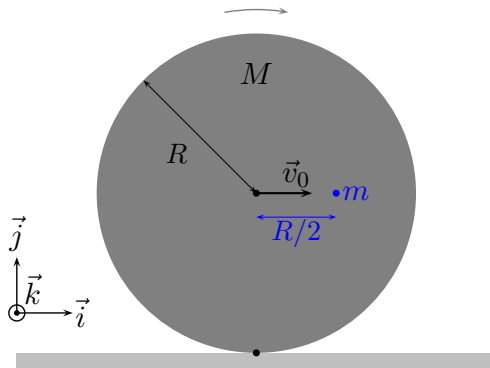
# Objetos rodantes

Ejemplo: un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal; adherida al disco a una distancia  $R/2$  del centro hay una masa puntual  $m$ . En  $t = 0$ , la masa adherida se encuentra en la posición que indica la figura y el centro del disco se mueve con velocidad  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ .

- Determina la velocidad del centro del disco cuando la masa adherida se encuentra alineada verticalmente con el punto de contacto con el plano, por debajo del centro del disco.
- Determina la velocidad del centro del disco cuando la masa adherida se encuentra alineada verticalmente con el punto de contacto con el plano, por encima del centro del disco. ¿Existe un valor mínimo de  $|\vec{v}_0|$  para que se pueda alcanzar esta configuración?
- Plantea las ecuaciones que determinan la dinámica de este sistema (disco + masa adherida)

# Objetos rodantes

Ejemplo: un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal; adherida al disco a una distancia  $R/2$  del centro hay una masa puntual  $m$ . En  $t = 0$ , la masa adherida se encuentra en la posición que indica la figura y el centro del disco se mueve con velocidad  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ .



# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida

- Velocidad del centro del disco  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_\perp$$

con  $\vec{\omega}_0 \propto \vec{k}$  la velocidad angular, en  $t = 0$ , de rotación alrededor de un eje perpendicular al disco por el punto de contacto con el plano horizontal y  $\vec{r}_\perp$  la posición del centro del disco relativa al eje de rotación,  $\vec{r}_\perp = R \vec{j}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega}_0 = -\frac{v_0}{R} \vec{k}$$

- Acudimos a la conservación de la energía mecánica: necesitamos conocer tanto la energía cinética como la potencial del sistema, que obtendremos separando las contribuciones del disco y de la masa adherida

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida

- Energía cinética inicial de la masa adherida:  $E_{c,0}^{(m)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_{i,m}|^2$  con  $\vec{v}_{0,m}$  la velocidad que tiene en  $t = 0$ . Rotación alrededor del punto de contacto con el plano  $\Rightarrow \vec{v}_{0,m} = \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_{\perp m}$  con  $\vec{r}_{\perp m} = R\vec{j} + \frac{R}{2}\vec{i} \Rightarrow$

$$\vec{v}_{0,m} = \left(-\frac{v_0}{R}\vec{k}\right) \times \left(R\vec{j} + \frac{R}{2}\vec{i}\right) = v_0 \left(\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right)$$

$$E_{c,0}^{(m)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_{0,m}|^2 = \frac{5}{8}mv_0^2$$

- Energía potencial inicial de la masa adherida: escogemos la posición inicial como referencia,  $U_0^{(m)} = 0$

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida

- Energía cinética inicial del disco: rotación con momento de inercia ( $\rightarrow$  Steiner)  $I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$  y velocidad angular  $\vec{\omega}_0$ ,

$$E_{c,0}^{(M)} = \frac{1}{2}I|\vec{\omega}_0|^2 = \frac{3}{4}MR^2 \frac{v_0^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

(Equivalentemente, CM + rotación alrededor del CM)

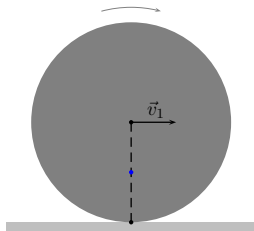
- Energía potencial inicial del disco: escogemos la posición inicial como referencia,  $U_0^{(M)} = 0$
- Energía mecánica inicial del sistema

$$E_{\text{Mec},0} = E_{c,0}^{(m)} + U_0^{(m)} + E_{c,0}^{(M)} + U_0^{(M)} = \frac{v_0^2}{8}(5m + 6M)$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida

- Posición 1, masa adherida en  $\frac{R}{2}\vec{j}$  con respecto a punto de contacto
- Velocidad del centro del disco  $\vec{v}_1 = v_1\vec{i}$ , velocidad angular  $\vec{\omega}_1 = -\frac{v_1}{R}\vec{k}$ , en función de  $v_1$  calculamos la energía mecánica y a partir de su conservación obtenemos  $v_1$



- Energía potencial inicial del disco no cambia,  $U_1^{(M)} = U_0^{(M)} = 0$
- Energía potencial de la masa adherida  $U_1^{(m)} = -mg\frac{R}{2}$
- Energía cinética del disco  $E_{c,1}^{(M)} = \frac{3}{4}Mv_1^2$
- Energía cinética de la masa adherida: la velocidad de la masa adherida es  $\vec{v}_{1,m} = \vec{\omega}_1 \times \left(\frac{R}{2}\vec{j}\right) = \frac{v_1}{2}\vec{i}$

$$\Rightarrow E_{c,1}^{(m)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_{1,m}|^2 = \frac{1}{8}mv_1^2$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida

- Posición 1, masa adherida en  $\frac{R}{2}\vec{j}$  con respecto a punto de contacto
- Energía mecánica

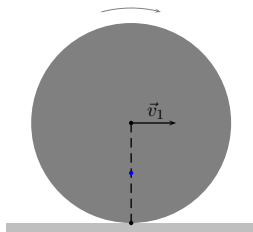
$$E_{\text{Mec},1} = E_{c,1}^{(m)} + U_1^{(m)} + E_{c,1}^{(M)} + U_1^{(M)}$$

$$E_{\text{Mec},1} = \frac{v_1^2}{8}(m + 6M) - mg\frac{R}{2}$$

por tanto, conservación de la energía mecánica  $\Rightarrow$

$$E_{\text{Mec},1} = E_{\text{Mec},0} \Leftrightarrow \frac{v_1^2}{8}(m + 6M) - mg\frac{R}{2} = \frac{v_0^2}{8}(5m + 6M)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2(5m + 6M) + 4mgR}{m + 6M}}$$





# Objetos rodantes

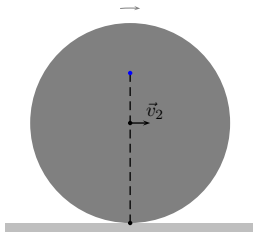
Ejemplo: disco con masa adherida

- Posición 2, masa adherida en  $\frac{3R}{2}\vec{j}$  con respecto a punto de contacto
- El centro del disco tendría en este caso velocidad  $\vec{v}_2 = v_2\vec{i}$ , la velocidad angular sería  $\vec{\omega}_2 = -\frac{v_2}{R}\vec{k}$
- Para el disco  $E_{c,2}^{(M)} = \frac{3}{4}Mv_2^2$ ,  $U_2^{(M)} = 0$
- Para la masa adherida

$$E_{c,2}^{(m)} = \frac{9}{8}mv_2^2, \quad U_2^{(m)} = mg\frac{R}{2}$$

- Energía mecánica  $E_{\text{Mec},2} = E_{c,2}^{(m)} + U_2^{(m)} + E_{c,2}^{(M)} + U_2^{(M)}$

$$E_{\text{Mec},2} = \frac{v_2^2}{8}(9m + 6M) + mg\frac{R}{2}$$



# Objetos rodantes

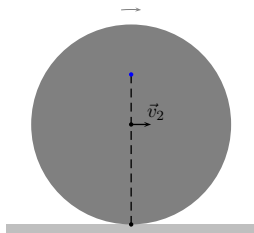
Ejemplo: disco con masa adherida

- Posición 2, masa adherida en  $\frac{3R}{2}\vec{j}$  con respecto a punto de contacto
- Conservación de la energía mecánica daría

$$E_{\text{Mec},2} = E_{\text{Mec},0} \Leftrightarrow$$

$$\frac{v_2^2}{8}(9m + 6M) + mg\frac{R}{2} = \frac{v_0^2}{8}(5m + 6M)$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{v_0^2(5m + 6M) - 4mgR}{9m + 6M}$$



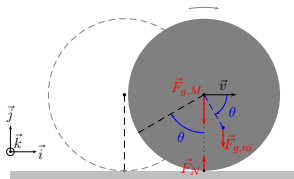
- La velocidad  $v_0$  mínima para que la masa  $m$  pudiera alcanzar la posición 2 corresponde a  $v_2^2 = 0$ , es decir

$$(v_0)_{\text{Min}} = \sqrt{\frac{4mgR}{5m + 6M}}$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida  
Para obtener la dinámica del sólido rígido  
disco+masa adherida

- Rotación de ángulo  $\theta$  con respecto al centro del disco = rotación del centro del disco con respecto al eje instantáneo de rotación (con dirección fija!)  
Ojo! En la figura  $\theta < 0$

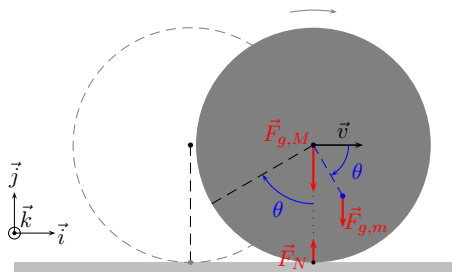


- Fuerzas y punto de aplicación
- Momento  $\vec{M}$  de fuerzas con respecto al eje
- Momento de inercia  $I$  del sistema con respecto al eje (depende del ángulo  $\theta$ )
- Dinámica:  $\vec{M} = I \vec{\alpha} = I \alpha \vec{\omega} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \text{ecuación } \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida



- Fuerzas y punto de aplicación con respecto al eje

$$\vec{F}_{g,m} = -mg\vec{j} \quad \text{en} \quad \vec{r}_{\perp} = \frac{R}{2} \cos\theta \vec{i} + \left(R + \frac{R}{2} \sin\theta\right) \vec{j}$$

$$\vec{F}_{g,M} = -Mg\vec{j} \quad \text{en} \quad \vec{r}_{\perp} = R\vec{j}$$

$$\vec{F}_N \quad \text{en} \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{0}$$

# Objetos rodantes

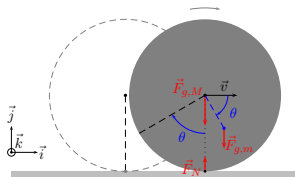
Ejemplo: disco con masa adherida

- Momentos de las fuerzas

$$\vec{M}_{g,m} = -\frac{mgR}{2} \cos \theta \vec{k}$$

$$\vec{M}_{g,M} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_N = \vec{0}$$



- Momento de inercia del sistema: disco (Steiner) + masa adherida

$$I = \frac{3}{2}MR^2 + m \left| \frac{R}{2} \cos \theta \vec{i} + \left( R + \frac{R}{2} \sin \theta \right) \vec{j} \right|^2 = \frac{R^2}{4} (6M + m(5 + 4 \sin \theta))$$

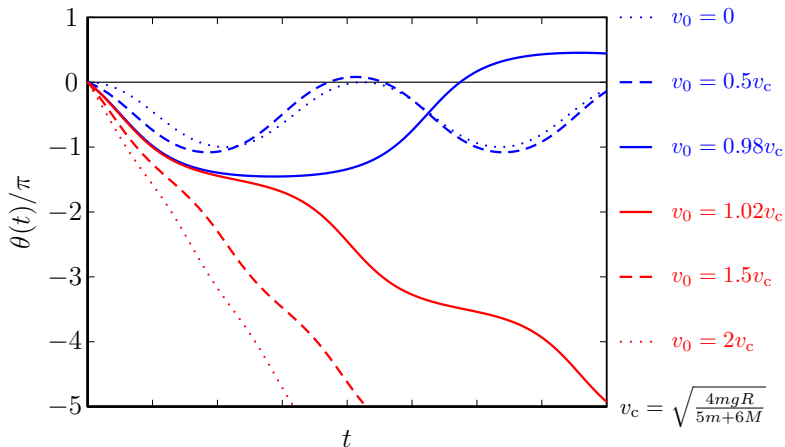
- Dinámica  $\vec{M} = I\vec{\alpha} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\omega} \Rightarrow$

$$-\frac{2mg}{R} \cos \theta = (6M + m(5 + 4 \sin \theta)) \frac{d^2\theta}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$$

Solución difícil

# Objetos rodantes

Ejemplo: disco con masa adherida  
Soluciones numéricas



# Objetos rodantes

Ejemplo: un disco homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin deslizar sobre un plano horizontal; en  $t = 0$ , el centro del disco se mueve con velocidad  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ .

- Mucho más simple que el ejemplo anterior con una masa adherida, basta tomar  $m \rightarrow 0$

- Dinámica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \theta = \omega_0 t + \theta_0 = \frac{v_0}{R} t + \theta_0$$

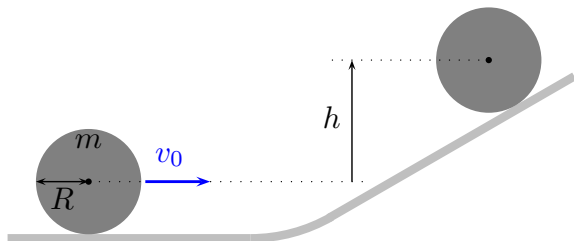
- Centro del disco = CM,

se mueve con velocidad constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$

- Velocidad angular constante  $\omega_0 = \frac{v_0}{R}$  alrededor del eje instantáneo de rotación (que tiene dirección fija)
- $\Leftrightarrow$  movimiento rectilíneo uniforme del CM + rotación alrededor del CM (eje  $\perp$  al disco) con velocidad angular constante  $\omega_0$

# Objetos rodantes

Ejemplo: una bola de bolera homogénea de radio  $R = 11$  cm y masa  $M = 7.2$  kg rueda sin deslizar con  $v_0 = 2.0$  m/s sobre una superficie horizontal. Continúa rodando sin deslizar cuando sube por una rampa, hasta que se para a una altura  $h$ . Determina  $h$ .





# Objetos rodantes

Ejemplo: bola-plano inclinado

- Aplicamos la conservación de la energía mecánica entre el estado inicial y el estado final en que el CM se encuentra a una altura  $h$  por encima de la inicial y tiene velocidad nula
- Estado inicial: energía potencial  $U_i$ , para calcular la energía cinética necesitamos la velocidad angular de rotación, que es

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}:$$

$$E_{c,i} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega_0^2 = \frac{7}{10}Mv_0^2$$

$$\text{con } I = I_{\text{CM}} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

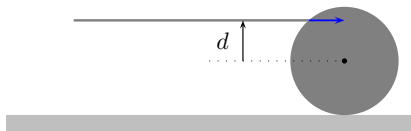
- Estado final: energía potencial  $U_f = U_i + Mgh$ , energía cinética  $E_{c,f} = 0$

$$\text{■ } E_{\text{Mec},i} = U_i + E_{c,i} = E_{\text{Mec},f} = U_f + E_{c,f} = \Rightarrow$$

$$\frac{7}{10}Mv_0^2 = Mgh \Leftrightarrow h = \frac{7v_0^2}{10g} = 28.5 \text{ cm}$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: un taco de billar golpea una bola horizontalmente a una distancia  $d$  por encima del centro de la bola. Hallar el valor de  $d$  para el cual la bola rodará sin deslizamiento desde el comienzo. Considerar despreciable la fuerza de rozamiento de la bola con la superficie en comparación con la fuerza  $\vec{F}$  que ejerce el taco.



# Objetos rodantes

Ejemplo: taco-bola de billar

- Considerando las fuerzas aplicadas (fuerza neta  $\vec{F}_{\text{Neta}}$ ) y los momentos con respecto a un eje en el plano horizontal y ortogonal a  $\vec{F}$  (momento total  $\vec{M}_{\text{Tot}}$ ), la dinámica del sistema viene dada por

$$\vec{F}_{\text{Neta}} = M\vec{a}_{\text{CM}}, \quad \vec{M}_{\text{Tot}} = I\vec{\alpha}$$

con  $M$  la masa de la bola,  $\vec{a}_{\text{CM}}$  la aceleración del CM,  $I = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$  el momento de inercia con respecto al eje (Steiner) ya mencionado y  $\vec{\alpha}$  la aceleración angular.

- Para que la bola ruede sin rozamiento, la aceleración  $\vec{a}_{\text{CM}}$  debe coincidir con la correspondiente a la rotación alrededor del eje, es decir (con  $\vec{r}_{\text{CM}} = R\vec{j}$  la posición  $\perp$  del CM relativa al eje)

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_{\text{CM}} = \vec{a}_{\text{CM}}$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: taco-bola de billar

- Fuerzas y posiciones en que se aplican (relativas al punto de contacto)

$$\vec{F} \text{ en } \vec{r} = -\sqrt{R^2 - d^2} \vec{i} + (R + d) \vec{j}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_g \text{ en } R \vec{j} \\ \vec{F}_N \text{ en } \vec{0} \end{array} \right\} \vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{Neta}} = \vec{F} = F \vec{i}$$

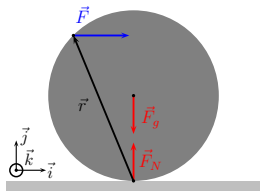
- Momentos de las fuerzas relativos al eje instantáneo de rotación

$$\vec{r} \times \vec{F} = \left( -\sqrt{R^2 - d^2} \vec{i} + (R + d) \vec{j} \right) \times (F \vec{i}) = -F(R + d) \vec{k}$$

$$(R \vec{j}) \times \vec{F}_g = (R \vec{j}) \times (-Mg \vec{j}) = \vec{0}$$

$$\vec{0} \times \vec{F}_N = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{\text{Tot}} = -F(R + d) \vec{k}$$



# Objetos rodantes

Ejemplo: taco-bola de billar

- Dinámica

$$\vec{F}_{\text{Neta}} = M\vec{a}_{\text{CM}} \Leftrightarrow \vec{a}_{\text{CM}} = \frac{F}{M} \vec{i}$$

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = I\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = -\frac{5F(R+d)}{7MR^2} \vec{k}$$

- Del requisito  $\vec{\alpha} \times \vec{r}_{\text{CM}} = \vec{a}_{\text{CM}}$  con  $\vec{r}_{\text{CM}} = R\vec{j}$ ,

$$-\frac{5F(R+d)}{7MR^2} \vec{k} \times (R\vec{j}) = \frac{5F(R+d)}{7MR} \vec{i} = \frac{F}{M} \vec{i}$$

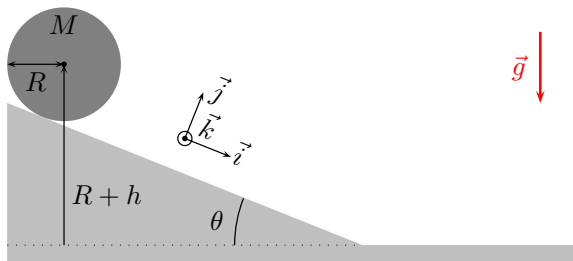
obtenemos finalmente

$$d = \frac{2}{5}R$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: un anillo, un cilindro y una esfera, caen por un mismo plano inclinado, rodando sin deslizar. Calcula

- la aceleración del CM  $\vec{a}_{CM}$ ,
- la velocidad del CM,  $\vec{v}_{CM}$ , en el punto más bajo,
- la fuerza de rozamiento  $\vec{f}_r$ .



# Objetos rodantes

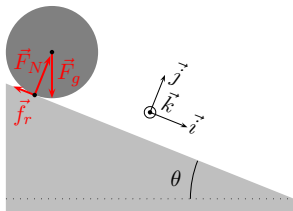
Ejemplo: anillo, cilindro, esfera en plano inclinado

- Fuerzas

$$\vec{F}_N = F_N \vec{j}$$

$$\vec{f}_r = -f_r \vec{i}$$

$$\vec{F}_g = Mg(\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$



- Puntos de aplicación de las fuerzas (posición relativa al punto de contacto)

$$\vec{F}_N, \vec{f}_r \text{ en } \vec{0}, \quad \vec{F}_g \text{ en } R \vec{j}$$

- Dinámica del CM:  $\vec{F}_{\text{Neta}} = M\vec{a}_{\text{CM}} = Ma_{\text{CM}} \vec{i}$

$$(Mg \sin \theta - f_r) \vec{i} + (F_N - Mg \cos \theta) \vec{j} = Ma_{\text{CM}} \vec{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Mg \sin \theta - f_r = Ma_{\text{CM}} \\ F_N - Mg \cos \theta = 0 \end{cases}$$

# Objetos rodantes

Ejemplo: anillo, cilindro, esfera en plano inclinado

- Momentos de fuerzas con respecto a eje instantáneo de rotación

$$\vec{0} \times \vec{F}_N = \vec{0}, \quad \vec{0} \times \vec{f}_r = \vec{0}$$

$$(R\vec{j}) \times \vec{F}_g = MgR\vec{j} \times (\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}) = -MgR\sin\theta\vec{k}$$

- Dinámica de la rotación

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = I\vec{\alpha}, \quad I = I_{\text{CM}} + MR^2 \Rightarrow \vec{\alpha} = -\frac{MgR\sin\theta}{MR^2 + I_{\text{CM}}}\vec{k}$$

- Rodadura:  $\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\text{CM}\perp}$ , con  $\vec{r}_{\text{CM}\perp} = R\vec{j}$ ,

$$\vec{a}_{\text{CM}} = a_{\text{CM}}\vec{i} = -\frac{gMR^2\sin\theta}{MR^2 + I_{\text{CM}}}\vec{k} \times \vec{j} \Leftrightarrow a_{\text{CM}} = g\sin\theta\frac{MR^2}{MR^2 + I_{\text{CM}}}$$



# Objetos rodantes

Ejemplo: anillo, cilindro, esfera en plano inclinado

- Aceleración del CM

$$a_{\text{CM}} = g \sin \theta \frac{MR^2}{MR^2 + I_{\text{CM}}}$$

Anillo tiene  $I_{\text{CM}} = MR^2 \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{1}{2}g \sin \theta$

Cilindro tiene  $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{2}{3}g \sin \theta$

Esfera tiene  $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{5}{7}g \sin \theta$

- Fuerza de rozamiento

$$f_r = Mg \sin \theta - Ma_{\text{CM}} = Mg \sin \theta \frac{I_{\text{CM}}}{MR^2 + I_{\text{CM}}}$$

Anillo:  $f_r = \frac{1}{2}Mg \sin \theta$

Cilindro:  $f_r = \frac{1}{3}Mg \sin \theta$

Esfera:  $f_r = \frac{2}{7}Mg \sin \theta$

# Objetos rodantes

Ejemplo: anillo, cilindro, esfera en plano inclinado

- Velocidad al alcanzar el plano horizontal a partir de la conservación de la energía mecánica (el punto de contacto no desliza  $\Rightarrow$  la fuerza de rozamiento no realiza trabajo)
- Energía potencial inicial  $U_i$ , energía cinética inicial  $E_{c,i} = 0$
- Energía potencial final  $U_f = U_i - Mgh$ , energía cinética final  $E_{c,f}$

$$E_{c,f} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2} = \frac{1}{2}(MR^2 + I_{\text{CM}})\frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2}$$

- Conservación  $E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}(MR^2 + I_{\text{CM}})\frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2} = Mgh \Leftrightarrow v_{\text{CM}} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{MR^2}{MR^2 + I_{\text{CM}}}}$$

Anillo:  $v_{\text{CM}} = \sqrt{gh}$

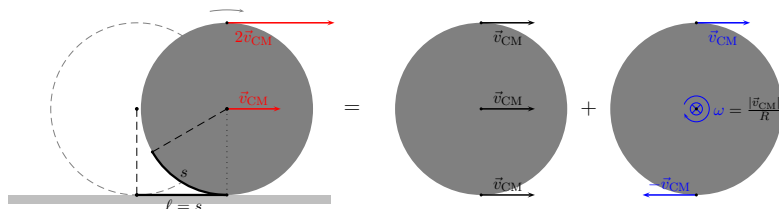
Cilindro:  $v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{gh}$

Esfera:  $v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{10}{7}}\sqrt{gh}$

# Objetos rodantes

## Objetos rodantes y deslizamiento

- En la rodadura sin deslizamiento, el punto de contacto entre el sólido rígido y la superficie tiene velocidad nula, y el movimiento corresponde a una rotación alrededor de un eje (instantáneo) que pasa por ese punto de contacto.
- Descomponiendo el movimiento en términos de traslación global y rotación alrededor del CM



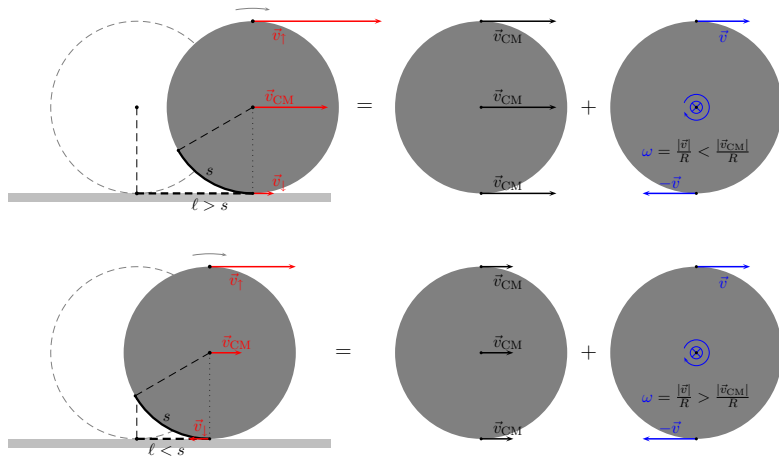
# Objetos rodantes

## Objetos rodantes y deslizamiento

- En la rodadura con deslizamiento, el punto de contacto entre el sólido rígido y la superficie no tiene velocidad nula, y el movimiento ya no corresponde a una rotación alrededor de un eje (instantáneo) que pasa por ese punto de contacto (y por tanto en lugar de rozamiento estático, tenemos rozamiento cinético)
- Descomponemos de nuevo el movimiento en términos de traslación global y rotación alrededor del CM: en la rodadura sin deslizamiento la velocidad del CM y la velocidad angular están relacionadas, dejan de estarlo en general, en presencia de deslizamiento.

# Objetos rodantes y deslizamiento

## Objetos rodantes y deslizamiento

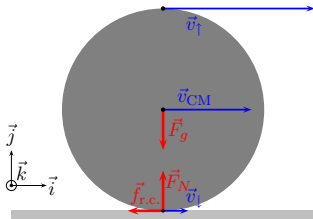


# Objetos rodantes y deslizamiento

Caso I: velocidad del punto de contacto  $\vec{v}_\downarrow$  con mismo sentido que  $\vec{v}_{CM}$  ( $|\vec{v}_{CM}| > R\omega$ )

- Rozamiento  $\vec{f}_{r.c.} = -f_r \vec{i}$  en posición  $-R\vec{j}$  con respecto a CM
- Movimiento CM  $m\vec{a}_{CM} = \vec{f}_{r.c.}$
- Momento de fuerzas con respecto a CM

$$\vec{M}_{f_r} = (-R\vec{j}) \times (-f_r \vec{i}) = -Rf_r \vec{k}$$



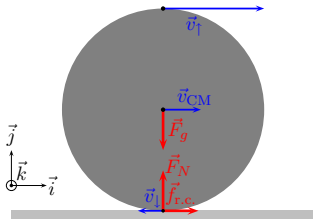
- Dinámica  $\vec{M}_{f_r} = I_{CM} \vec{\alpha} \Rightarrow$
- Aumenta  $\omega$   $\circlearrowleft$  y disminuye  $\vec{v}_{CM} \rightarrow$ , hasta que  $\vec{v}_\downarrow \rightarrow \vec{0}$  y tenemos rodadura sin deslizamiento

# Objetos rodantes y deslizamiento

Caso II: velocidad del punto de contacto  $\vec{v}_\downarrow$  con sentido opuesto a  $\vec{v}_{CM}$  ( $|\vec{v}_{CM}| < R\omega$ )

- Rozamiento  $\vec{f}_{r.c.} = f_r \vec{i}$  en posición  $-R\vec{j}$  con respecto a CM
- Movimiento CM  $m\vec{a}_{CM} = \vec{f}_{r.c.}$
- Momento de fuerzas con respecto a CM

$$\vec{M}_{f_r} = (-R\vec{j}) \times (f_r \vec{i}) = Rf_r \vec{k}$$



- Dinámica  $\vec{M}_{f_r} = I_{CM} \vec{\alpha}$
- Disminuye  $\omega$  y aumenta  $\vec{v}_{CM} \rightarrow$  hasta que  $\vec{v}_\downarrow \rightarrow \vec{0}$  y tenemos rodadura sin deslizamiento

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: una bola homogénea de masa  $M$  y radio  $R$  se lanza de tal modo que cuando toca el suelo se mueve horizontalmente con velocidad  $v_0 = 5 \text{ m/s}$  y avanza sin rodar. El coeficiente de rozamiento cinético entre la bola y el suelo es  $\mu_c = 0,08$ . Determina

- el tiempo durante el cual la bola desliza,
- la distancia recorrida deslizando, antes de que ruede sin deslizar,
- la relación entre las energías cinéticas inicial y final (instante de rodadura).



# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- Ejes  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  como en los casos I, II, anteriores; la bola toca el suelo en  $t = 0$ .
- Velocidad inicial  $\vec{v}_i = v_0 \vec{i} \rightarrow \vec{v}_{CM} = \vec{v}_i$ .
- Fuerza de rozamiento cinético es constante,  $\vec{F}_{Neta} = \vec{f}_{r.c.} = -\mu_c F_N \vec{i} = -\mu_c g M \vec{i}$  (usando ya  $\vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{0}$ ) mientras hay deslizamiento. Cuando la bola rueda empieza a rodar sin deslizar,  $\vec{F}_{Neta} = \vec{0}$  y  $\vec{v}_{CM}$  constante.
- Movimiento del CM con rozamiento cinético:  $M \vec{a}_{CM} = \vec{f}_{r.c.}$

$$\vec{a}_{CM} = -\mu_c g \vec{i}$$

$$\vec{v}_{CM}(t) = (v_0 - \mu_c g t) \vec{i}$$

$$\vec{r}_{CM}(t) = \vec{r}_0 + \left( v_0 t - \frac{1}{2} \mu_c g t^2 \right) \vec{i}$$

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- Rotación alrededor del CM:  $\vec{M}_{\text{Tot}} = I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$ ; al momento de fuerzas con respecto a eje de rotación (dirección  $\vec{k}$ ) tan solo contribuye  $\vec{f}_{\text{r.c.}}$ , aplicada en el punto de contacto, posición  $-R\vec{j}$  con respecto al CM:

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = -R\vec{j} \times \vec{f}_{\text{r.c.}} = \mu_c g MR \vec{j} \times \vec{i} = -\mu_c g MR \vec{k}$$

por tanto

$$\vec{\alpha} = -\frac{\mu_c g}{R} \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} \vec{k}$$

$$\vec{\omega}(t) = -\frac{\mu_c g}{R} \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} t \vec{k}$$

$$\theta(t) = \frac{\mu_c g}{2R} \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} t^2$$

(N.B.  $\theta(t)$  en sentido horario visto desde  $+\vec{k}$ )

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- Condición de rodadura: el punto de contacto tiene  $\vec{v}_{\downarrow} = \vec{0}$
- La velocidad  $\vec{v}_{\downarrow}$  es la combinación de la velocidad de traslación del CM y la velocidad asociada a la rotación alrededor del CM. En un instante  $t$ ,

$$\vec{v}_{\downarrow} = (v_0 - \mu_c g t) \vec{i} + \vec{\omega}(t) \times (-R \vec{j}) = (v_0 - \mu_c g t) \vec{i} + \mu_c g \frac{MR^2}{I_{CM}} t \vec{k} \times \vec{j}$$

$$\vec{v}_{\downarrow} = \left( v_0 - \mu_c g t - \mu_c g t \frac{MR^2}{I_{CM}} \right) \vec{i}$$

El tiempo  $t_r$  en el que  $\vec{v}_{\downarrow} = \vec{0}$  es

$$t_r = \frac{v_0}{\mu_c g} \frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2}$$

- La distancia recorrida por el CM entre  $t = 0$  y  $t = t_r$  (mientras hay deslizamiento) es  $d_{\text{des}} = v_0 t_r - \frac{1}{2} \mu_c g t_r^2$

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- El arco correspondiente al ángulo  $\theta(t_r)$  que ha rotado la bola es

$$s = R\theta(t_r) = \frac{\mu_c g}{2} \frac{MR^2}{I_{CM}} \frac{v_0^2}{(\mu_c g)^2} \left( \frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} \right)^2$$
$$s = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \frac{I_{CM} MR^2}{(I_{CM} + MR^2)^2}$$

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- Energía cinética en  $t = 0$ ,  $E_{c,i}^{\rightarrow} = \frac{1}{2}Mv_0^2$ ,  $E_{c,i}^{\circlearrowleft} = 0$
- Energía cinética en  $t = t_r$ :

$$E_{c,f}^{\rightarrow} = \frac{1}{2}M|\vec{v}_{CM}(t_r)|^2 = \frac{1}{2}M(v_0 - \mu_c g t_r)^2$$

$$E_{c,f}^{\rightarrow} = \frac{1}{2}Mv_0^2 \left(1 - \frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \frac{(MR^2)^2}{(I_{CM} + MR^2)^2}$$

$$E_{c,f}^{\circlearrowleft} = \frac{1}{2}I_{CM}|\vec{\omega}(t_r)|^2 = \frac{1}{2}I_{CM} \left(\frac{\mu_c g}{R} \frac{MR^2}{I_{CM}} t_r\right)^2$$

$$E_{c,f}^{\circlearrowleft} = \frac{1}{2}I_{CM} \left(\frac{\mu_c g}{R} \frac{MR^2}{I_{CM}} \frac{v_0}{\mu_c g} \frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2}\right)^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \frac{I_{CM} MR^2}{(I_{CM} + MR^2)^2}$$

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- Variación de energía cinética

$$E_{c,f}^{\rightarrow} - E_{c,i}^{\rightarrow} = \frac{1}{2} M v_0^2 \left( \frac{(MR^2)^2}{(I_{CM} + MR^2)^2} - 1 \right)$$

$$E_{c,f}^{\rightarrow} - E_{c,i}^{\rightarrow} = \frac{1}{2} M v_0^2 \frac{I_{CM}(I_{CM} + 2MR^2)}{(I_{CM} + MR^2)^2} = \vec{f}_{r.c.} \cdot (d_{des} \vec{i})$$

$$E_{c,f}^{\circlearrowleft} - E_{c,i}^{\circlearrowleft} = \frac{1}{2} M v_0^2 \frac{I_{CM} MR^2}{(I_{CM} + MR^2)^2} = \vec{f}_{r.c.} \cdot (-s \vec{i})$$

# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda

- esfera:  $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ ,  $v_0 = 5 \text{ m/s}$ ,  $\mu_c = 0.08$

$$t_r = \frac{v_0}{\mu_c g} \frac{I_{CM}}{I_{CM} + MR^2} = \frac{2v_0}{7\mu_c g} = 1.82 \text{ s}$$

$$d_{\text{des}} = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} \frac{I_{CM}(I_{CM} + 2MR^2)}{(I_{CM} + MR^2)^2} = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu_c g} = 7.80 \text{ m}$$

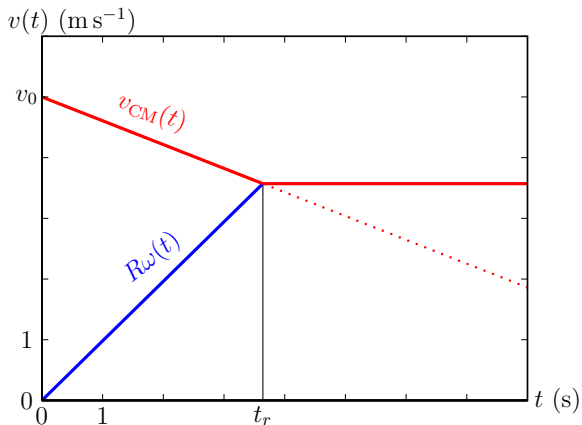
$$|\vec{v}_{CM}(t_r)| = v_0 \frac{MR^2}{I_{CM} + MR^2} = \frac{5}{7} v_0 = 3.57 \text{ m s}^{-1}$$

$$E_{c,f}^{\rightarrow} = \frac{1}{2} M v_0^2 \frac{(MR^2)^2}{(I_{CM} + MR^2)^2} = \frac{25}{49} \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$E_{c,f}^{\circlearrowleft} = \frac{1}{2} M v_0^2 \frac{I_{CM} MR^2}{(I_{CM} + MR^2)^2} = \frac{10}{49} \frac{1}{2} M v_0^2$$

# Objetos rodantes y deslizamiento

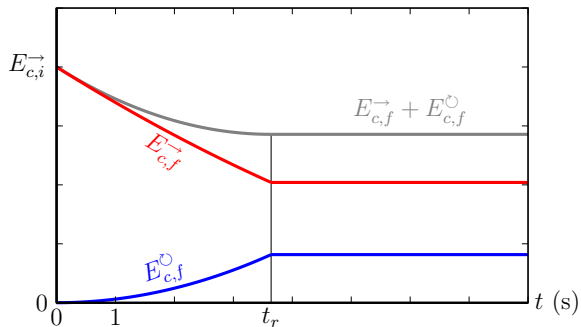
Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda





# Objetos rodantes y deslizamiento

Ejemplo: bola desliza  $\rightarrow$  rueda



# Momento angular

Una masa puntual  $m$  se encuentra en posición  $\vec{r}$  con respecto a  $O$  y se mueve con momento  $\vec{p} = m\vec{v}$

■ El momento angular  $\vec{L}_O$  de  $m$  respecto a  $O$  es  $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$

■  $[|\vec{L}_O|] = ML^2T^{-1}$ , SI  $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ ,  
 $1 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1} = 1 \text{ J s}$

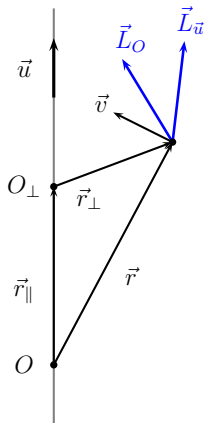
■ El momento angular  $\vec{L}_{\vec{u}}$  de  $m$  respecto a un eje de dirección  $\vec{u}$ ,  $|\vec{u}| = 1$ , que pasa por  $O$  es

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{p}, \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{L}_O - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u} \times \vec{p}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{L}_{\vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{L}_O$$

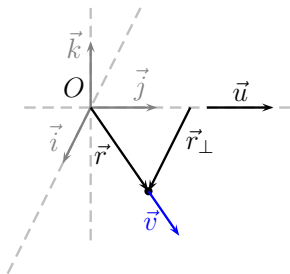
(Misma componente en dirección  $\vec{u}$ )



# Momento angular

Ejemplo: una masa puntual  $m = 0.4 \text{ kg}$  se encuentra en posición  $\vec{r} = \ell(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\ell = 0.5 \text{ m}$ , con respecto a  $O$  y se mueve con velocidad  $\vec{v} = v(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $v = 2.5 \text{ m s}^{-1}$ ; calcula

- su momento angular con respecto a  $O$ ,
- su momento angular con respecto a un eje de dirección  $\vec{u} = \vec{j}$  que pasa por  $O$ .



# Momento angular

Ejemplo: masa puntual

- Momento angular con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = mlv (\vec{i} + \vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j}) = \vec{0}$$

- Momento angular con respecto a eje de dirección  $\vec{u}$  que pasa por  $O$

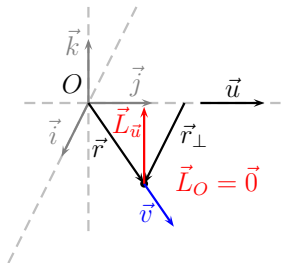
$$\vec{r}_\perp = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

$$\vec{r}_\perp = \ell(\vec{i} + \vec{j}) - \ell \left( (\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{j} \right) \vec{j}$$

$$\vec{r}_\perp = \ell \vec{i}$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{r}_\perp \times \vec{p} = mlv \vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j}) = mlv \vec{k}$$

- $mlv = 0.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = 0.5 \text{ J s}$



# Momento angular

- Si la partícula se mueve con  $|\vec{r}|$  constante, es decir, gira alrededor de  $O$  con velocidad angular (instantánea)  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$  y tenemos

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) = m((\vec{r} \cdot \vec{r}_\perp)\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}_\perp)$$

N.B.  $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$  según  $\vec{\omega}$ , es decir  $\vec{r}_\parallel = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{r}}{\omega} \vec{\omega} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r}_\perp = |\vec{r}_\perp|^2$  y por tanto

$$\vec{L}_O = m(|\vec{r}_\perp|^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r}_\perp)$$

- Si la partícula se mueve a distancia constante de un eje fijo que pasa por  $O$ , es decir, gira con  $|\vec{r}_\perp|$  constante alrededor del eje con velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$ ,  $\vec{u}$  fijo,  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$  y tenemos

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{r}_\perp \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp) = m|\vec{r}_\perp|^2 \vec{\omega}$$

# Momento angular

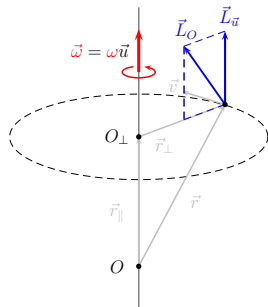
- Momento angular con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = m(|\vec{r}_\perp|^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}_\perp)$$

- Momento angular con respecto a eje  $\vec{u}$  por  $O$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = m|\vec{r}_\perp|^2 \vec{\omega}$$

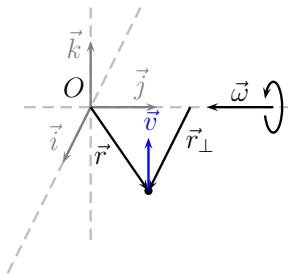
- $\vec{L}_{\vec{u}} = I_{[O\vec{u}]} \vec{\omega}$  con  $I_{[O\vec{u}]} = m|\vec{r}_\perp|^2$  el momento de inercia con respecto al eje de giro



# Momento angular

Ejemplo: una masa puntual  $m = 0.4 \text{ kg}$  se encuentra en posición  $\vec{r} = \ell(\vec{i} + \vec{j})$ ,  $\ell = 0.5 \text{ m}$ , con respecto a  $O$  y gira con velocidad angular  $\vec{\omega} = -\omega\vec{j}$ ,  $\omega = 6.25 \text{ s}^{-1}$ , alrededor de un eje que pasa por  $O$ ; calcula

- su momento angular con respecto a  $O$ ,
- su momento angular con respecto a un eje de dirección  $\vec{u} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$  que pasa por  $O$ .



# Momento angular

Ejemplo: masa puntual

- Velocidad  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_\perp$ ,  $\vec{u} = -\vec{j}$

$$\vec{r}_\perp = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{u})\vec{u} = \ell(\vec{i} + \vec{j}) - \ell((\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{j})\vec{j} = \ell\vec{i}$$

$$\vec{v} = -\omega\ell\vec{j} \times \vec{i} = \omega\ell\vec{k}, \quad \omega\ell = 2.5 \text{ m s}^{-1}$$

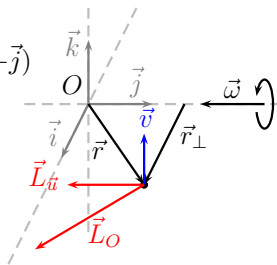
- Momento angular con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \omega m \ell^2 (\vec{i} + \vec{j}) \times \vec{k} = \omega m \ell^2 (\vec{i} - \vec{j})$$

- Momento angular con respecto a eje de dirección  $\vec{u}$  que pasa por  $O$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{r}_\perp \times \vec{p} = \omega m \ell^2 \vec{i} \times \vec{k} = -\omega m \ell^2 \vec{j}$$

- $\omega m \ell^2 = 0.5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = 0.5 \text{ J s}$





# Momento angular

- Variación en el tiempo de  $\vec{L}_O$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Segunda ley:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , fuerza que actúa sobre la masa

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

con  $\vec{M}_O$  el momento de  $\vec{F}$  con respecto a  $O$

- Si consideramos ahora giro a distancia fija de  $O$ , i.e.  $|\vec{r}|$  constante, nada que añadir

# Momento angular

- Variación en el tiempo de  $\vec{L}_{\vec{u}}$

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{\perp} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_{\perp} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Segunda ley:  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , fuerza que actúa sobre la masa

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{F} = \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \times \vec{p} + \vec{M}_{\vec{u}}$$

con  $\vec{M}_{\vec{u}}$  el momento de  $\vec{F}$  con respecto al eje de dirección  $\vec{u}$  que pasa por  $O$

- No resulta particularmente interesante, en general, dada la presencia del término  $\frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} \times \vec{p}$
- Si además el movimiento es una rotación alrededor del eje fijo de dirección  $\vec{u}$ ,  $\frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$  y entonces

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \vec{M}_{\vec{u}}$$

# Momento angular

- En general, la variación con el tiempo del momento angular con respecto a un punto  $O$  viene dada por el momento de las fuerzas con respecto a ese punto

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

- La variación del momento angular con respecto a un eje en el caso de una rotación alrededor de ese eje viene dada por el momento de las fuerzas con respecto al eje

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \vec{M}_{\vec{u}}$$

# Momento angular

Ejemplo: la fuerza ejercida por una carga eléctrica  $q_1$ , sobre una segunda carga  $q_2$ , en posiciones  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  con respecto a  $O$ , es

$$\vec{F}_{[1 \rightarrow 2]} = \kappa q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad \vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} = -\vec{F}_{[1 \rightarrow 2]}$$

En ausencia de otras fuerzas actuando sobre este sistema, el momento angular total es constante

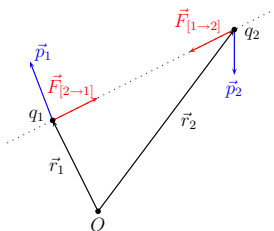
- Momento angular con respecto a  $O$ :  $\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$
- Momento de fuerzas con respecto a  $O$

$$\vec{M}_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{[2 \rightarrow 1]} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{[1 \rightarrow 2]}$$

$$\vec{M}_O = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{[2 \rightarrow 1]}$$

$$\vec{M}_O \propto (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{0}$$

- $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O$  constante



# Momento angular

Ejemplo: en el ejemplo de la máquina de Atwood con una polea de masa  $m$  y radio  $R$ , y una cuerda que no desliza (99), calcula el momento angular del sistema con respecto al centro  $O$  de la polea  $\vec{L}_O$  en función de la velocidad angular de esta, y comprueba que la variación del mismo cumple  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$ , con  $\vec{M}_O$  el momento de las fuerzas con respecto a  $O$ .

- Velocidad angular de la polea  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$
- Velocidad del bloque 1:  $\vec{v}_1 = -\omega R \vec{j}$ , posición (con respecto a  $O$ )  
 $\vec{r}_1 = -R \vec{i} + y_1 \vec{j}$
- Velocidad del bloque 2:  $\vec{v}_2 = \omega R \vec{j}$ , posición (con respecto a  $O$ )  
 $\vec{r}_2 = R \vec{i} + y_2 \vec{j}$
- Momento angular  $\vec{L}_O$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O,1} + \vec{L}_{O,2} + \vec{L}_{O,P_0}$$

# Momento angular

Ejemplo: máquina de Atwood-momento angular

- Momento angular  $\vec{L}_O = \vec{L}_{O,1} + \vec{L}_{O,2} + \vec{L}_{O,P_0}$

$$\vec{L}_{O,1} = \vec{r}_1 \times (m_1 \vec{v}_1) = -\omega R m_1 (-R\vec{i} + y_1 \vec{j}) \times (-\vec{j}) = m_1 R^2 \omega \vec{k}$$

$$\vec{L}_{O,2} = \vec{r}_2 \times (m_2 \vec{v}_2) = \omega R m_2 (R\vec{i} + y_2 \vec{j}) \times (\vec{j}) = m_2 R^2 \omega \vec{k}$$

$$\vec{L}_{O,P_0} = I \vec{\omega} = I \omega \vec{k}$$

$$\vec{L}_O = \omega ((m_1 + m_2)R^2 + I) \vec{k} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\omega}{dt} ((m_1 + m_2)R^2 + I) \vec{k}$$

- Momentos de las fuerzas:
  - las tensiones actúan por pares con separación de los puntos de aplicación en la dirección de la propia fuerza  $\Rightarrow$  no contribuyen al momento de las fuerzas con respecto a  $O$
  - las fuerzas aplicadas en el propio centro de la polea tampoco contribuyen al momento de las fuerzas con respecto a  $O$
  - tan solo es necesario calcular las contribuciones debidas a  $\vec{F}_{g1}$  actuando en  $\vec{r}_1$  y  $\vec{F}_{g2}$  actuando en  $\vec{r}_2$

# Momento angular

Ejemplo: máquina de Atwood-momento angular

- Momentos de las fuerzas:

$$\vec{M}_{O,g1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{g1} = (-R\vec{i} + y_1\vec{j}) \times (-m_1g\vec{j}) = m_1gR\vec{k}$$

$$\vec{M}_{O,g2} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{g2} = (R\vec{i} + y_2\vec{j}) \times (-m_2g\vec{j}) = -m_2gR\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O,g1} + \vec{M}_{O,g2} = (m_1 - m_2)gR\vec{k}$$

- Variación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} ((m_1 + m_2)R^2 + I) = (m_1 - m_2)gR$$

es decir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{R} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + I/R^2} \checkmark$$

tal como obtuvimos

# Momento angular

- Extendemos lo anterior para un sólido rígido, un sistema de  $n$  partículas de masas  $m_j$  en posiciones  $\vec{r}_j$  con respecto a  $O$  y velocidades  $\vec{v}_j$
- Momento angular del sólido rígido con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j$$

- Descomponemos  $\vec{r}_j = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j$ ,  $\vec{v}_j = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{V}_j$ ,

$$\vec{L}_O = \sum_{j=1}^n (\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j) \times (m_j \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{P}_j)$$

con  $\vec{P}_j = m_j \vec{V}_j$  (momento lineal relativo al CM)



# Momento angular

- Descomponemos  $\vec{r}_j = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j$ ,  $\vec{v}_j = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{V}_j$ ,

$$\vec{L}_O = \sum_{j=1}^n (\vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j) \times (m_j \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{P}_j)$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \left( \sum_{j=1}^n m_j \right) \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \left( \sum_{j=1}^n \vec{P}_j \right) \\ &\quad + \left( \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_j \right) \times \vec{v}_{\text{CM}} + \sum_{j=1}^n \vec{R}_j \times \vec{P}_j \end{aligned}$$

$$\left( \sum_{j=1}^n m_j \right) = M, \quad \sum_{j=1}^n \vec{P}_j = \vec{0}, \quad \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_j = \vec{0}$$

Por tanto

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{\text{CM}} \times (M \vec{v}_{\text{CM}}) + \sum_{j=1}^n \vec{R}_j \times \vec{P}_j$$

# Momento angular

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{\text{CM}} \times (M\vec{v}_{\text{CM}}) + \sum_{j=1}^n \vec{R}_j \times \vec{P}_j$$

- El momento angular se descompone en

momento angular orbital  $\vec{r}_{\text{CM}} \times (M\vec{v}_{\text{CM}})$

momento angular intrínseco  $\sum_{j=1}^n \vec{R}_j \times \vec{P}_j$

- Momento angular orbital: momento angular correspondiente a toda la masa del sistema en  $\vec{r}_{\text{CM}}$  con velocidad  $\vec{v}_{\text{CM}}$
- Momento angular intrínseco: momento angular correspondiente al movimiento del sólido rígido alrededor del CM

# Momento angular

- Momento angular del sólido rígido respecto a un eje fijo de rotación  $\vec{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$  ( $|\vec{\omega}| = \omega$ ) que pasa por  $O$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{p}_j$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \sum_{j=1}^n (\vec{r}_{\text{CM}\perp} + \vec{R}_{j\perp}) \times (m_j \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{P}_j)$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \left( \sum_{j=1}^n m_j \right) \vec{r}_{\text{CM}\perp} \times \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM}\perp} \times \left( \sum_{j=1}^n \vec{P}_j \right)$$

$$+ \left( \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_{j\perp} \right) \times \vec{v}_{\text{CM}} + \sum_{j=1}^n \vec{R}_{j\perp} \times \vec{P}_j$$

$$\left( \sum_{j=1}^n m_j \right) = M, \quad \sum_{j=1}^n \vec{P}_j = \vec{0}, \quad \sum_{j=1}^n m_j \vec{R}_{j\perp} = \vec{0}$$

# Momento angular

- Por tanto

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{r}_{\text{CM}\perp} \times (M\vec{v}_{\text{CM}}) + \sum_{j=1}^n \vec{R}_{j\perp} \times \vec{P}_j$$

- Tenemos de nuevo una descomposición en dos términos

momento angular orbital  $\vec{r}_{\text{CM}\perp} \times (M\vec{v}_{\text{CM}})$

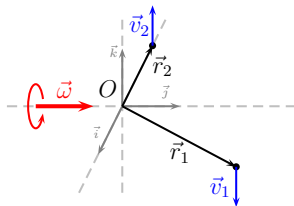
momento angular intrínseco  $\sum_{j=1}^n \vec{R}_{j\perp} \times \vec{P}_j$

con ambos momentos angulares respecto al eje fijo

# Momento angular

Ejemplo: dos masas idénticas  $m = 200$  g unidas por una varilla de masa despreciable se encuentran en  $\vec{r}_1 = \ell(\vec{i} + 2\vec{j})$  y  $\vec{r}_2 = -\ell\vec{i}$ ,  $\ell = 50$  cm, con respecto a  $O$ . Giran con velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega\vec{j}$ ,  $\omega = 2.0\text{ s}^{-1}$ , con respecto a un eje que pasa por  $O$ : tienen velocidades  $\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2$ . Calcula

- momentos angulares y momento angular total de ambas masas
  - con respecto a  $O$ ,
  - con respecto al eje de giro;
- momentos angulares orbitales e intrínsecos
  - con respecto a  $O$ ,
  - con respecto al eje de giro;



# Momento angular

Ejemplo: dos masas idénticas

- Velocidades

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \omega \ell \vec{j} \times (\vec{i} + 2\vec{j}) = -\omega \ell \vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{r}_2 = \omega \ell \vec{j} \times (-\vec{i}) = \omega \ell \vec{k} = -\vec{v}_1$$

$$\omega \ell = 1.0 \text{ m s}^{-1}$$

- CM:  $\vec{r}_{\text{CM}} = \ell \vec{j}$ ,  $\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{0}$

- Momentos angulares con respecto a  $O$

$$\vec{L}_{O,1} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 = \omega m \ell^2 (\vec{i} + 2\vec{j}) \times (-\vec{k}) = \omega m \ell^2 (-2\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{L}_{O,2} = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \omega m \ell^2 (-\vec{i}) \times (\vec{k}) = \omega m \ell^2 \vec{j}$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O,1} + \vec{L}_{O,2} = 2\omega m \ell^2 (-\vec{i} + \vec{j})$$

$$m\omega \ell^2 = 0.1 \text{ kg m s}^{-1}$$

# Momento angular

Ejemplo: dos masas idénticas

- Momentos angulares con respecto a eje de dirección  $\vec{u} = \vec{j}$  por  $O$

$$\vec{r}_{1\perp} = \vec{r}_1 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{u})\vec{u} = \ell \vec{i}$$

$$\vec{r}_{2\perp} = \vec{r}_2 - (\vec{r}_2 \cdot \vec{u})\vec{u} = -\ell \vec{i} = \vec{r}_2$$

$$\vec{L}_{\vec{u},1} = \vec{r}_{1\perp} \times \vec{p}_1 = \omega m \ell^2 (\vec{i}) \times (-\vec{k}) = \omega m \ell^2 \vec{j}$$

$$\vec{L}_{\vec{u},2} = \vec{r}_{2\perp} \times \vec{p}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{L}_{O,2}$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = \vec{L}_{\vec{u},1} + \vec{L}_{\vec{u},2} = 2\omega m \ell^2 \vec{j}$$

- Con  $\vec{v}_{\text{CM}} = \vec{0}$ , momentos angulares orbitales  $\vec{0}$ ,  $\vec{L}_{\vec{u}}$  y  $\vec{L}_O$  son directamente los momentos angulares intrínsecos

# Momento angular

Ejemplo: dos masas idénticas

- Momentos angulares con respecto a  $O$

$$\vec{L}_{O,1} = \omega m l^2 (-2\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{L}_{O,2} = \omega m l^2 \vec{j}$$

$$\vec{L}_O = 2\omega m l^2 (-\vec{i} + \vec{j})$$

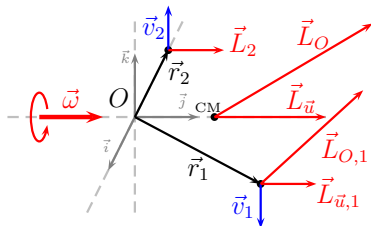
- Momentos angulares con respecto a eje

$$\vec{L}_{\vec{u},1} = \omega m l^2 \vec{j}$$

$$\vec{L}_{\vec{u},2} = \vec{L}_{O,2}$$

$$\vec{L}_{\vec{u}} = 2\omega m l^2 \vec{j}$$

$$\omega m l^2 = 0.1 \text{ kg m s}^{-1}$$





# Momento angular

- Ejemplo: un coche de masa  $m = 1200$  kg se mueve en un plano horizontal siguiendo un círculo de radio  $R = 20$  m con velocidad constante  $|\vec{v}| = 15$  m s<sup>-1</sup> en sentido antihorario (visto desde arriba); calcula su momento angular con respecto al centro del círculo.
- Ejemplo: un coche de masa  $m = 1200$  kg se mueve en un plano horizontal con velocidad constante  $\vec{v} = -15\vec{i}$  m s<sup>-1</sup>, pasando a una distancia mínima  $y_0 = 20$  m de un punto  $O$ ; calcula su momento angular con respecto a  $O$  y con respecto a un eje paralelo a la trayectoria del coche pasando por  $O$ .
- Un disco homogéneo de masa  $m = 1200$  kg y radio  $R = 20$  m se encuentra en un plano horizontal  $xy$  y gira con velocidad angular  $\vec{\omega} = 0.75\vec{k}$  s<sup>-1</sup> alrededor de su centro  $O$  ( $\vec{k} \perp$  plano  $xy$ ); calcula su momento angular con respecto a  $O$ .

# Momento angular

Ejemplo: coche

- $\vec{k} \perp$  plano horizontal, velocidad angular del coche  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ;  
posición relativa al centro del círculo  $\vec{r}$ ,  $|\vec{r}| = R$ ;

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \omega = \frac{|\vec{v}|}{R} = 0.75 \text{ s}^{-1}$$

- Momento angular con respecto a  $O$ ,

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times (\omega\vec{r}) = m|\vec{r}|^2\vec{\omega} = mR^2\omega\vec{k} = mR|\vec{v}|\vec{k}$$

- $m|\vec{v}|R = 3.6 \times 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

# Momento angular

Ejemplo: coche

- Trayectoria del coche, con respecto a  $O$ ,

$$\vec{r}(t) = (x_0 - v_0 t)\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad v_0 = 15 \text{ m s}^{-1}, \quad y_0 = 20 \text{ m}$$

- Momento  $\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} = -mv_0 \vec{i}$
- Momento angular con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = ((x_0 - v_0 t)\vec{i} + y_0\vec{j}) \times (-mv_0 \vec{i}) = mv_0 y_0 \vec{k}$$

$$\text{con } mv_0 y_0 = 3.6 \times 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

- Momento angular con respecto a eje dirección  $\vec{u} = \vec{i}$  pasando por  $O$ :

$$\vec{r}_\perp = y_0\vec{j} \Rightarrow \vec{L}_{\vec{u}} = (y_0\vec{j}) \times (-mv_0 \vec{i}) = \vec{L}_O = mv_0 y_0 \vec{k}$$

# Momento angular

Ejemplo: disco

- Momento de inercia del disco  $I = \frac{1}{2}mR^2$
- Momento angular con respecto al centro del disco ( $\Leftrightarrow$  momento angular con respecto a eje  $\perp$  pasando por el centro)

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \frac{1}{2}mR^2\omega\vec{k}$$

$$\text{con } \frac{1}{2}mR^2\omega = 1.8 \times 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

# Momento angular

- Variación del momento angular del sólido rígido con respecto a  $O$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{p}_j \right) = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

- Segunda ley  $\vec{F}_j = \frac{d\vec{p}_j}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{j=1}^n \vec{r}_j \times \vec{F}_j = \vec{M}_{\text{Tot},O}$$

con  $\vec{M}_{\text{Tot},O}$  el momento total de las fuerzas con respecto a  $O$

- Descomponiendo  $\vec{r}_j = \vec{r}_{\text{CM}} + \vec{R}_j$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{\text{CM}} \times \left( \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \right) + \sum_{j=1}^n \vec{R}_j \times \vec{F}_j = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{Neta}} + \vec{M}_{\text{Tot,CM}}$$

# Momento angular

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot},O} = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{Neta}} + \vec{M}_{\text{Tot,CM}}$$

- $\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{Neta}}$  es el momento de la fuerza neta que actúa sobre el sólido rígido, aplicada en el CM, con respecto a  $O$
- $\vec{M}_{\text{Tot,CM}} = \sum_j \vec{R}_j \times \vec{F}_j$  es el momento total de las fuerzas que actúan sobre el sólido rígido con respecto al CM

# Momento angular

- Variación del momento angular del sólido rígido con respecto a un eje (dirección  $\vec{u}$ ,  $|\vec{u}| = 1$ ) que pasa por  $O$

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{p}_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} \times \vec{p}_j + \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \frac{d\vec{p}_j}{dt}$$

- Segunda ley  $\vec{F}_j = \frac{d\vec{p}_j}{dt}$

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} \times \vec{p}_j + \sum_{j=1}^n \vec{r}_{j\perp} \times \vec{F}_j = \sum_{j=1}^n \frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} \times \vec{p}_j + \vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}}$$

con  $\vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}}$  el momento total de las fuerzas con respecto al eje

- En general, como en el caso de una partícula, la variación del momento angular con respecto a un eje no parece especialmente reveladora: además de  $\vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}}$  tenemos una contribución

$$\sum_j \frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} \times \vec{p}_j = ?$$

# Momento angular

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} \times \vec{p}_j + \vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}}$$

- El interés aparece cuando el eje es un eje fijo de rotación: con  $\vec{\omega} = \omega\vec{u}$  la velocidad angular,  $\vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_{j\perp}$ , en cuyo caso

$$\frac{d\vec{r}_{j\perp}}{dt} = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{v}_j$$

y por tanto

$$\frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}}$$

Es decir, la variación del momento angular del sólido rígido con respecto a un eje fijo de rotación viene dada por el momento total de las fuerzas que actúan sobre el sólido con respecto al eje

- Para un eje fijo,  $\vec{L}_{\vec{u}} = I_{[O\vec{u}]} \vec{\omega}$ ,  $\vec{M}_{\text{Tot},\vec{u}} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}_{\vec{u}}}{dt}$



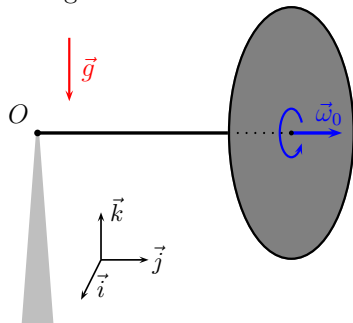
## Momento angular. Efecto giroscópico

Consideramos un sólido rígido formado por (i) un disco homogéneo de masa  $m$  y radio  $R$ , (ii) una varilla (de masa despreciable) y longitud  $\ell$ , unida por un extremo al centro del disco, perpendicularmente, mientras el otro extremo,  $O$ , permanece fijo sobre un soporte vertical, permitiendo que el conjunto varilla+disco gire.

En un instante inicial, la varilla se encuentra en posición horizontal, dirección  $\vec{j}$  con respecto a  $O$ , y el disco gira con velocidad angular  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{j}$ , según ilustra la figura.

Si  $\omega_0 = 0$ , el disco simplemente “caería”, con la varilla rotando alrededor de  $O$  en el plano  $(\vec{j}, \vec{k})$ .

¿Qué ocurre con  $\omega_0 \neq 0$ ?



# Momento angular. Efecto giroscópico

- Aplicaremos la relación entre la variación del momento angular con respecto a  $O$  y el momento (con respecto a  $O$ ) de las fuerzas que actúan sobre el sólido rígido

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot},O}$$

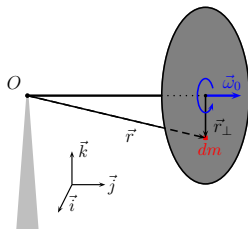
- Momento angular inicial con respecto a  $O$ . Para un elemento  $dm$  en posición  $\vec{r}$  del disco,

$$\vec{r} = \ell\vec{j} + \vec{r}_\perp$$

con  $\vec{r}_\perp$  la posición con respecto al centro/CM del disco.

La contribución al momento angular de este elemento  $dm$  es

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times (dm\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_\perp) = dm|\vec{r}_\perp|^2\vec{\omega}_0 - dm(\vec{r} \cdot \vec{\omega}_0)\vec{r}_\perp$$



## Momento angular. Conservación

$$d\vec{L}_O = dm|\vec{r}_\perp|^2\vec{\omega}_0 - dm\ell\omega_0\vec{r}_\perp$$

- El momento angular inicial total se obtiene integrando a todo el disco,

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \int_D d\vec{L}_O = \left( \int_D dm|\vec{r}_\perp|^2 \right) \vec{\omega}_0 - \ell\omega_0 \int_D dm\vec{r}_\perp \\ \int_D dm|\vec{r}_\perp|^2 &= \frac{mR^2}{2} = I \quad \text{momento de inercia} \\ \int_D dm\vec{r}_\perp &= \vec{0} \quad \text{CM} \\ \vec{L}_O &= I\vec{\omega}_0\end{aligned}$$

# Momento angular

- Actúan dos fuerzas, que en el instante inicial son

$$\vec{F}_g = -mg\vec{k} \text{ en } \vec{r}_{F_g} = \ell\vec{j}$$

$$\vec{F}_c \text{ en } \vec{r}_{F_c} = \vec{0}$$

(posiciones  $\vec{r}$  relativas a  $O$ )

- Momento de las fuerzas con respecto a  $O$

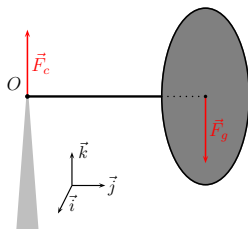
$$\vec{M}_{\text{Tot},O} = \vec{r}_{F_g} \times \vec{F}_g + \vec{r}_{F_c} \times \vec{F}_c$$

$$\vec{M}_{\text{Tot},O} = -mg\ell\vec{j} \times \vec{k} = -mg\ell\vec{i}$$

- Tenemos por tanto

$$\vec{L}_O = I\vec{\omega}_0 = I\omega_0\vec{j},$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot},O} = -mg\ell\vec{i}$$



# Momento angular

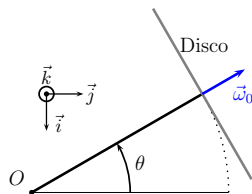
Efecto giroscópico, precesión

- La variación del momento angular inicial  $\vec{L}_O$  es en dirección  $-\vec{i}$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{L}_O = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\vec{L}_O|^2 = 0 \Rightarrow |\vec{L}_O| \text{ constante}$$

- ¡El momento angular  $\vec{L}_O$  parece rotar!
- Planteamos la misma situación para un ángulo  $\theta$  (ver figura)
- La velocidad angular inicial es  $\vec{\omega} = \omega_0(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$
- El centro del disco se encuentra en posición  $\vec{r}_{F_g} = \ell(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$
- Momento angular del disco con respecto a  $O$

$$\vec{L}_O = I\vec{\omega}_0, \quad |\vec{L}_O| = I\omega_0$$



# Momento angular

Efecto giroscópico, precesión

- El momento de las fuerzas con respecto a  $O$  es

$$\vec{M}_{\text{Tot},O} = \vec{r}_{F_g} \times \vec{F}_g + \vec{r}_{F_c} \times \vec{F}_c$$

$$\vec{M}_{\text{Tot},O} = -mgl(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \times \vec{k} = -mgl(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

- Variación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot},O} = -mgl(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{L}_O = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega_0) = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \left( I\omega_0(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \right) = -I\omega_0(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

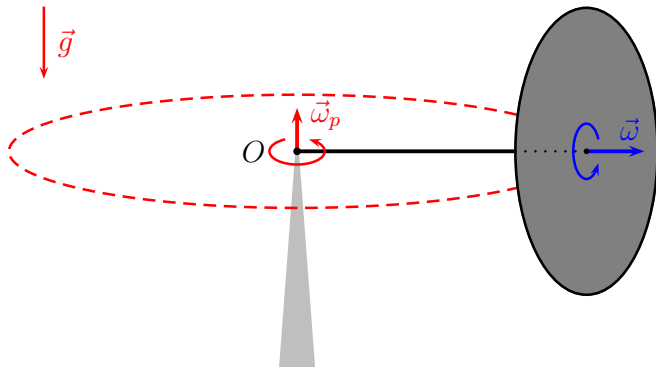
por tanto

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{mgl}{I\omega_0}$$

# Momento angular

## Efecto giroscópico, precesión

- Además de la rotación alrededor del eje de la varilla, el sólido gira con  $\vec{\omega}_p = \frac{mgl}{I\omega_0} \vec{k} = \omega_p \vec{k}$  (constante) alrededor de  $O$ , este movimiento se conoce como *precesión*



# Momento angular

## Efecto giroscópico, precesión

- Para completar la comprensión del ejemplo, veamos qué está ocurriendo con la dinámica del CM

$$\vec{F}_{\text{Neta}} = \vec{F}_c + \vec{F}_g = m \vec{a}_{\text{CM}}$$

- Movimiento de precesión con velocidad angular constante  $\Rightarrow$   
 $\vec{a}_{\text{CM}} = -\omega_p^2 \vec{r}_{\text{CM}}$
- Fuerza de contacto

$$\vec{F}_c = -\vec{F}_g + m \vec{a}_{\text{CM}} = m(g \vec{k} - \omega_p \ell^2 (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}))$$

- Componente  $\vec{k}$  “compensa”  $\vec{F}_g$
- Componente  $-\omega_p^2 \vec{r}_{\text{CM}}$  da la aceleración  $\perp$  del movimiento circular uniforme del CM



# Momento angular. Conservación

## Conservación del momento angular

Si el momento total de las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido es

$$\vec{M}_{\text{Tot}} = \vec{0},$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{Tot}} = \vec{0},$$

y el momento angular se conserva, i.e. es  $\overrightarrow{\text{constanté}}$ .

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: persona en silla giratoria, brazos extendidos con peso vs. brazos plegados; patinadora

# Momento angular. Conservación

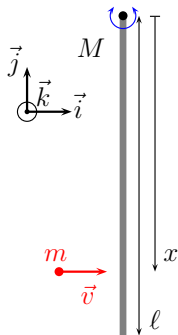
## Conservación del momento angular en colisiones

- Al estudiar colisiones en el Tema 5, el ingrediente fundamental que empleamos fue la conservación del momento lineal en ausencia de fuerzas externas que actuaran sobre el sistema formado por los cuerpos en colisión
- En caso de tener colisiones en que algún cuerpo no tenga libertad para un movimiento de traslación, es decir cuando haya puntos fijos o ejes que tan solo permitan rotaciones, no se cumple la ausencia de fuerzas externas durante la colisión y no podremos emplear la conservación del momento lineal
- Si esas fuerzas externas ejercen un momento de fuerzas nulo sobre el sistema, podremos no obstante emplear la conservación del momento angular del sistema

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: una barra homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $M$ , se encuentra suspendida, en reposo, de un extremo alrededor del cual puede girar libremente (ver figura). Una masa puntual  $m$  impacta en la barra a una distancia  $x$  del extremo con velocidad horizontal  $v$ , quedando adherida a la barra.

- Compara la energía cinética justo después de la colisión con la energía cinética inicial del sistema.



## Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra

- No hay momentos de fuerzas externos con respecto a  $O \Rightarrow$  acudimos a la conservación del momento angular con respecto a  $O$
- Momento angular inicial: la barra no contribuye (en reposo), la masa  $m$  tiene velocidad  $\vec{v} = v\vec{i}$ , y posición de impacto  $-x\vec{j}$ ,

$$\vec{L}_{O,i} = (-x\vec{j}) \times (mv\vec{i}) = xmv\vec{k}$$

- En la configuración final, la barra y la masa puntual forman un único sólido rígido que (i) tiene momento de inercia  $I = \frac{M\ell^2}{3} + mx^2$  con respecto a eje  $\perp$  por  $O$ , y que (ii) justo después de la colisión se mueve con velocidad angular  $\vec{\omega}$ ; su momento angular con respecto a  $O$  es

$$\vec{L}_{O,f} = I\vec{\omega}$$

- Energía cinética final  $E_{c,f} = \frac{1}{2}I|\vec{\omega}|^2 = \frac{|\vec{L}_{O,f}|^2}{2I}$

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra

- Conservación del momento angular  $\vec{L}_{O,f} = \vec{L}_{O,i} \Rightarrow$

$$E_{c,f} = \frac{|\vec{L}_{O,i}|^2}{2I} = \frac{1}{2} \frac{(xmv)^2}{\frac{M\ell^2}{3} + mx^2} = \frac{1}{2} mv^2 \frac{mx^2}{\frac{M\ell^2}{3} + mx^2} = \frac{1}{2} mv^2 \frac{1}{1 + \frac{M\ell^2}{3mx^2}}$$

- Energía cinética inicial  $E_{c,i} = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow$

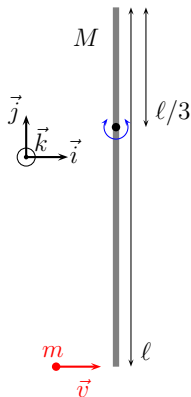
$$\frac{E_{c,f}}{E_{c,i}} = \frac{1}{1 + \frac{M\ell^2}{3mx^2}}$$

(N.B. Choque inelástico)

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: una barra homogénea de longitud  $\ell$  y masa  $M$ , se encuentra suspendida, en reposo, de un punto a una distancia  $\ell/3$  de un extremo alrededor del cual puede girar libremente (ver figura). Una masa puntual  $m$  impacta en el extremo inferior de la barra con velocidad horizontal  $v$ , quedando adherida a la barra.

- Compara la energía cinética justo después de la colisión con la energía cinética inicial del sistema.
- Tras la colisión, la barra gira: determina la velocidad angular justo después de la colisión. ¿Qué ángulo máximo alcanzará en esa rotación?



## Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra (2)

- Seguimos el mismo planteamiento que en el ejemplo anterior, ahora el momento angular justo antes y justo después de la colisión es

$$\vec{L}_O = \left(-\frac{2}{3}\ell\vec{j}\right) \times (v\vec{i}) = \frac{2}{3}m\ell v\vec{k}$$

- El momento de inercia del sólido rígido final con respecto a  $O$  es

$$\text{barra (Steiner)} \quad \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}M\ell^2$$

$$\text{masa } m \left(\frac{2\ell}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}m\ell^2$$

$$I = \frac{\ell^2}{9}(M + 4m)$$



## Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra (2)

- La velocidad angular justo después de la colisión es

$$\vec{\omega} = \frac{1}{I} \vec{L}_O = \frac{\frac{2}{3}mlv}{\frac{\ell^2}{9}(M+4m)} \vec{k} = \frac{v}{\ell} \frac{6m}{M+4m} \vec{k}$$

- Energía cinética final

$$E_{c,f} = \frac{1}{2} I |\vec{\omega}|^2 = \frac{|\vec{L}_O|^2}{2I} = \frac{\left(\frac{2}{3}mlv\right)^2}{2\frac{\ell^2}{9}(M+4m)} = \frac{1}{2} mv^2 \frac{4m}{M+4m}$$

- Energía cinética inicial  $E_{c,i} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$

$$\frac{E_{c,f}}{E_{c,i}} = \frac{4m}{M+4m}$$

$\Rightarrow$  choque inelástico

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra (2)

- Tras la colisión, no hay trabajo de fuerzas no conservativas sobre el sistema  $\Rightarrow$  conservación de la energía mecánica
- Inmediatamente después de la colisión, sistema en posición vertical con energía cinética  $E_{c,f}$
- Movimiento posterior, ángulo de la barra con respecto a posición vertical hasta alcanzar un valor máximo (en el que tendrá velocidad nula), que podemos determinar a través de la conservación de la energía mecánica: la variación de la energía potencial entre la posición vertical, dependiente del ángulo, corresponderá a la variación de la energía cinética, conocida.

# Momento angular. Conservación

Ejemplo: colisión barra (2)

- El centro de masas de la barra sube  $\frac{\ell}{6}(1 - \cos \theta)$ , mientras el extremo de la barra con la masa  $m$  sube  $\frac{2\ell}{3}(1 - \cos \theta)$ ; la variación de la energía potencial  $U_\theta - U_{\theta=0}$  es

$$U_\theta - U_{\theta=0} = Mgh_{\text{CM}} + mgh_m = \frac{g\ell}{6}(1 - \cos \theta)(M + 4m)$$

con

$$h_{\text{CM}} = \frac{\ell}{6}(1 - \cos \theta)$$

$$h_m = \frac{2\ell}{3}(1 - \cos \theta)$$

- Con  $E_{c,f} = U_\theta - U_{\theta=0}$  obtenemos

$$1 - \cos \theta = \frac{v^2}{g\ell} \frac{12m^2}{(M + 4m)^2}$$

