Física General I

Tema 5 – Sistemas de partículas. Colisiones

- Centro de masas. Ecuaciones del movimiento.
- Momento lineal. Conservación
- Energía cinética y potencial de un sistema de partículas
- Teorema Trabajo-Energía cinética para un sistema de partículas
- Conservación de la energía
- Colisiones

- El punto material es una idealización
- Hemos abordado la cinemática y la dinámica de puntos materiales (o incluso de cuerpos considerándolos como objectos puntuales, sin justificar que esto fuera válido)
- Para abordar el estudio del movimiento de objetos extensos, vamos a tratar estos como colecciones, discretas o continuas (distribuciones), de puntos materiales

Centro de masas

- Conjunto C de n masas puntuales, posiciones $\vec{r}_j$, masas m_j, $j = 1, \ldots, n$.
  La posición del centro de masas $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ es

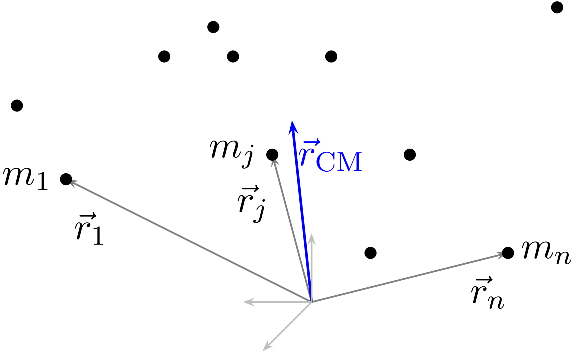
$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} m_j \right)$$

$$\text{La masa total es } M \equiv \sum_{j=1}^{n} m_j \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j = M \vec{r}_{\mathrm{CM}}$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \, x_j \,,\; y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \, y_j \,,\; z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j \, z_j$$

Centro de masas

$$\color{blue}{M\vec{r}_{\mathrm{CM}}} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j$$



Centro de masas

- Separando el conjunto C en dos partes, $C = A + B$,
  A con las masas puntuales $j = 1, \ldots, k$ y
  B con las masas puntuales $j = k+1, \ldots, n$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{A} \equiv \frac{1}{M_A} \sum_{j=1}^{k} m_j \vec{r}_j, \quad M_A = \sum_{j=1}^{k} m_j$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{B} \equiv \frac{1}{M_B} \sum_{j=k+1}^{n} m_j \vec{r}_j, \quad M_B = \sum_{j=k+1}^{n} m_j$$

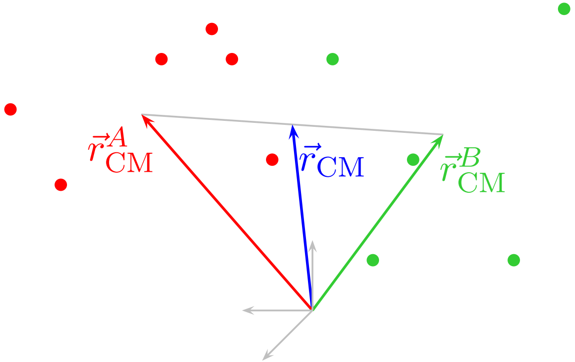
  se cumple

$$M = M_A + M_B, \quad \vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{M_A \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{A} + M_B \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{B}}{M_A + M_B}$$

$\rightarrow$ simplificación de cálculos (composición, simetría)

Centro de masas

$$M\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j\,, \quad M = M_A + M_B, \quad \vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{M_A \vec{r}^{\,A}_{\mathrm{CM}} + M_B \vec{r}^{\,B}_{\mathrm{CM}}}{M_A + M_B}$$



Centro de masas

- Objecto continuo C

$$m_j \mapsto dm, \quad \sum_j m_j \mapsto \int_C dm$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \left(\int_C \vec{r}\, dm\right) \Big/ \left(\int_C dm\right), \quad M = \int_C dm$$

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_C x\, dm, \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_C y\, dm, \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\int_C z\, dm$$

- Como en el caso discreto, separando $C = A + B$

$$M = M_A + M_B, \quad \vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{M_A \vec{r}^{\,A}_{\mathrm{CM}} + M_B \vec{r}^{\,B}_{\mathrm{CM}}}{M_A + M_B}$$

Centro de masas

Ejemplos: Determina la posición del centro de masas del siguiente conjunto de masas puntuales

$$
\begin{aligned}
A: &\quad m_A = 3\,\mathrm{kg}, \quad \vec{r}_A = (2\vec{i} + 2\vec{j})\,\mathrm{m} \\
B: &\quad m_B = 1\,\mathrm{kg}, \quad \vec{r}_B = (\vec{i} + \vec{j})\,\mathrm{m} \\
C: &\quad m_C = 1\,\mathrm{kg}, \quad \vec{r}_C = 3\vec{i}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

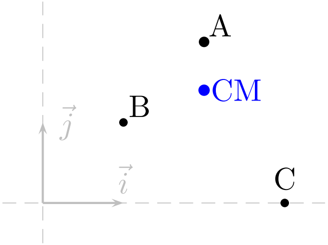
Centro de masas

Ejemplos: 3 masas

$$M = m_A + m_B + m_C = 5\,\mathrm{kg}$$

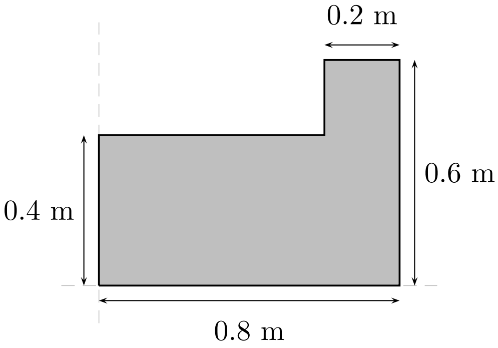
$$m_A\vec{r}_A + m_B\vec{r}_B + m_C\vec{r}_C = (10\vec{i} + 7\vec{j})\,\mathrm{kg\,m}$$

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \left(2\vec{i} + \frac{7}{5}\vec{j}\right)\,\mathrm{m}$$



Centro de masas

Ejemplo: Calcula la posición del centro de masas de una lámina delgada que tiene la forma indicada en la figura y densidad uniforme.



Centro de masas

Ejemplo: lámina

- Centro de masas de un rectángulo de densidad superficial de masa uniforme σ, con vértices $V_1 = (x_0, y_0)$, $V_2 = (x_0 + \ell_x, y_0)$, $V_3 = (x_0 + \ell_x, y_0 + \ell_y)$, $V_4 = (x_0, y_0 + \ell_y)$:

$$M = \int_{x_0}^{x_0+\ell_x} dx \int_{y_0}^{y_0+\ell_y} dy\, \sigma = \sigma\, \ell_x\, \ell_y$$

$$x_{\rm CM} = \frac{1}{M} \int_{x_0}^{x_0+\ell_x} x\, dx \int_{y_0}^{y_0+\ell_y} dy\, \sigma = \frac{\sigma\, \left(\frac{1}{2}(x_0+\ell_x)^2 - \frac{1}{2}x_0^2\right)\, \ell_y}{\sigma\, \ell_x\, \ell_y} = x_0 + \frac{\ell_x}{2}$$

$$y_{\rm CM} = \frac{1}{M} \int_{x_0}^{x_0+\ell_x} dx \int_{y_0}^{y_0+\ell_y} y\, dy\, \sigma = \frac{\sigma\, \ell_x\, \left(\frac{1}{2}(y_0+\ell_y)^2 - \frac{1}{2}y_0^2\right)}{\sigma\, \ell_x\, \ell_y} = y_0 + \frac{\ell_y}{2}$$

Centro de masas

Ejemplo: lámina (densidad superficial de masa σ)

- Separamos la lámina del problema en 2 láminas rectangulares

$$1: x_{0_1} = 0,\ y_{0_1} = 0,\ \ell_{x_1} = 0.8\,\mathrm{m},\ \ell_{y_1} = 0.4\,\mathrm{m}$$

$$m_1 = \sigma \ell_{x_1} \ell_{y_1} = 0.32\,\sigma\,\mathrm{m}^2$$

$$x_{1_{\mathrm{CM}}} = 0.4\,\mathrm{m}, \quad y_{1_{\mathrm{CM}}} = 0.2\,\mathrm{m}$$

$$2: x_{0_2} = 0.6\,\mathrm{m},\ y_{0_2} = 0.4\,\mathrm{m},\ \ell_{x_2} = 0.2\,\mathrm{m},\ \ell_{y_2} = 0.2\,\mathrm{m}$$

$$m_2 = \sigma \ell_{x_2} \ell_{y_2} = 0.04\,\sigma\,\mathrm{m}^2$$

$$x_{2_{\mathrm{CM}}} = 0.7\,\mathrm{m}, \quad y_{2_{\mathrm{CM}}} = 0.5\,\mathrm{m}$$

- Centro de masas de la lámina completa

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 x_{1_{\mathrm{CM}}} + m_2 x_{2_{\mathrm{CM}}}}{m_1 + m_2} = \frac{0.32 \times 0.4 + 0.04 \times 0.7}{0.32 + 0.04} = 0.43\,\mathrm{m}$$

$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 y_{1_{\mathrm{CM}}} + m_2 y_{2_{\mathrm{CM}}}}{m_1 + m_2} = \frac{0.32 \times 0.2 + 0.04 \times 0.5}{0.32 + 0.04} = 0.23\,\mathrm{m}$$

Centro de masas

Ejemplo: lámina
(N.B. densidad superficial de masa σ)

- Separamos la lámina del problema en 2 láminas rectangulares

$$
\begin{aligned}
3: x_{0_3} &= 0,\ y_{0_3} = 0,\ \ell_{x_3} = 0.6\,\mathrm{m},\ \ell_{y_3} = 0.4\,\mathrm{m} \\
m_3 &= \sigma \ell_{x_3} \ell_{y_3} = 0.24\,\sigma\,\mathrm{m}^2 \\
x_{3_{\mathrm{CM}}} &= 0.3\,\mathrm{m}, \quad y_{3_{\mathrm{CM}}} = 0.2\,\mathrm{m} \\
4: x_{0_4} &= 0.6\,\mathrm{m},\ y_{0_4} = 0,\ \ell_{x_4} = 0.2\,\mathrm{m},\ \ell_{y_4} = 0.6\,\mathrm{m} \\
m_4 &= \sigma \ell_{x_4} \ell_{y_4} = 0.12\,\sigma\,\mathrm{m}^2 \\
x_{4_{\mathrm{CM}}} &= 0.7\,\mathrm{m}, \quad y_{4_{\mathrm{CM}}} = 0.3\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

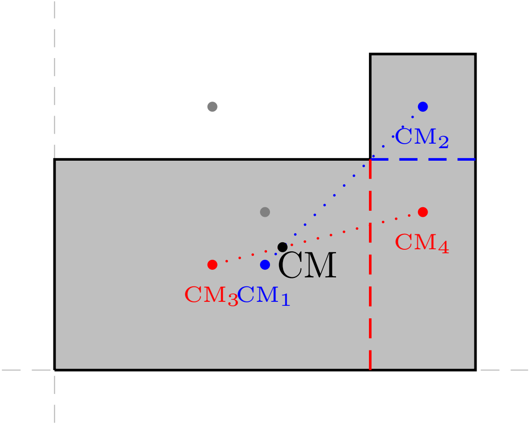
- Centro de masas de la lámina completa

$$
x_{\mathrm{CM}} = \frac{m_3 x_{3_{\mathrm{CM}}} + m_4 x_{4_{\mathrm{CM}}}}{m_3 + m_4} = \frac{0.24 \times 0.3 + 0.12 \times 0.7}{0.24 + 0.12} = 0.43\,\mathrm{m}
$$

$$
y_{\mathrm{CM}} = \frac{m_3 y_{3_{\mathrm{CM}}} + m_4 y_{4_{\mathrm{CM}}}}{m_3 + m_4} = \frac{0.24 \times 0.2 + 0.12 \times 0.3}{0.24 + 0.12} = 0.23\,\mathrm{m}
$$

Centro de masas

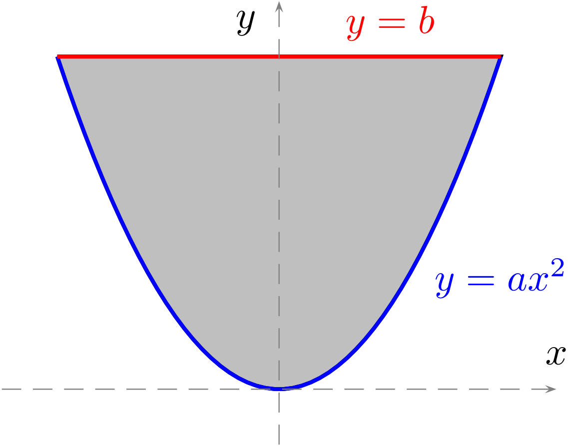
Ejemplo: lámina



(Ojo: 3^a partición en dos láminas rectangulares)

Centro de masas

Ejemplo: determina la posición del centro de masas de una lámina de densidad uniforme con la forma indicada en la figura.



Centro de masas

Ejemplo: lámina parabólica

- Densidad superficial de masa σ
- Masa ($a \searrow \Rightarrow M \nearrow$, $b \nearrow \Rightarrow M \nearrow$)

$$M = \int_{\text{lam}} dm = \int_{\text{lam}} \sigma \, dS = \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} dx \int_{y_{\text{min}}(x)}^{y_{\text{max}}(x)} dy \, \sigma = \int_{y_{\text{min}}}^{y_{\text{max}}} dy \int_{x_{\text{min}}(y)}^{x_{\text{max}}(y)} dx \, \sigma$$

Límites: $x_{\text{min}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$, $x_{\text{max}} = +\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y_{\text{min}}(x) = ax^2$, $y_{\text{max}}(x) = b$ (lámina simétrica)

$$M = \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} dx \int_{y_{\text{min}}(x)}^{y_{\text{max}}(x)} dy \, \sigma = \sigma \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} dx \, \left(b - ax^2\right)$$
$$= \sigma \left[bx - \frac{ax^3}{3} \right]_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} = \sigma \, 2\sqrt{\frac{b}{a}} \, \frac{2b}{3} = \frac{4\sigma}{3} \, b \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Centro de masas

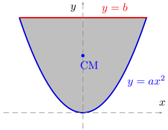
Ejemplo: lámina parabólica

- Centro de masas

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} dy\, \sigma\, x = \frac{\sigma}{M}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\, x(b - ax^2) = 0$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} dy\, \sigma\, y = \frac{\sigma}{M}\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\, \frac{1}{2}\left(b^2 - (ax^2)^2\right)$$

$$= \frac{\sigma}{M} b^2 \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a^2}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{\sigma}{M} b^2 \sqrt{\frac{b}{a}}\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{\sigma}{M}\frac{4b^2}{5}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{3}{5}b$$



Centro de masas

(*) Simetría

- Tanto en el ejemplo de la lámina rectangular como en el de la lámina parabólica, la simetría del sistema proporciona una primera indicación de la posición del centro de masas
- De forma general, si identificamos una operación (reflexión o rotación) bajo la cual el sistema en su conjunto permanece invariante, el centro de masas se encuentra entre los puntos invariantes bajo esa operación.

Movimiento del centro de masas

- Velocidad del centro de masas

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j$$

- Aceleración del centro de masas

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{a}_j$$

- Para cada punto material j, de acuerdo con la segunda ley

$$\vec{F}_j = m_j\,\vec{a}_j$$

con $\vec{F}_j$ la fuerza neta que actua sobre el punto material j y por tanto

$$M\,\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j$$

Movimiento del centro de masas

- Para cada punto material j, separamos $\vec{F}_j$ en términos de la fuerza ejercida por el resto de puntos materiales del sistema, es decir la fuerza "interna" $\vec{F}_{j,\text{int}}$, y la fuerza externa $\vec{F}_{j,\text{ext}}$

$$\vec{F}_j = \vec{F}_{j,\text{int}} + \vec{F}_{j,\text{ext}}$$

- La fuerza interna es la suma de las fuerzas ejercidas por el resto de puntos materiales sobre j

$$\vec{F}_{j,\text{int}} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \vec{F}_{[k\to j]}$$

- De acuerdo con la tercera ley (acción-reacción), si tenemos $\vec{F}_{[k\to j]}$ actuando sobre j, también tendremos $\vec{F}_{[j\to k]} = -\vec{F}_{[k\to j]}$ actuando sobre k, de modo que

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,\text{int}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \vec{F}_{[k\to j]} = \vec{0}$$

Movimiento del centro de masas

- Obtenemos finalmente

$$M\,\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,\mathrm{ext}} = \vec{F}_{\mathrm{Ext}}$$

con $\vec{F}_{\mathrm{Ext}}$ la fuerza neta externa

Movimiento del centro de masas

El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula con la masa total del sistema sometida a la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: tres masas puntuales m_1, m_2, m_3 se mueven sometidas a las siguientes fuerzas externas

$$\vec{F}_1 = \vec{0}, \quad \vec{F}_2 = -m_2\, G\, \vec{k}, \quad \vec{F}_3 = +m_3\, G\, \vec{k}$$

con G constante. (N.B. No hay fuerzas internas)
Las condiciones iniciales del movimiento son

$$\vec{r}_1(0) = \vec{r}_2(0) = \vec{r}_3(0) = \vec{0}, \qquad \vec{v}_1(0) = \vec{v}_2(0) = \vec{v}_3(0) = v_0 \vec{j}$$

- Obtén $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$, $\vec{r}_3(t)$.
- Obtén, en función del tiempo t, la posición del centro de masas de este sistema $\vec{r}_{\mathrm{CM}}(t)$ y su aceleración $\vec{a}_{\mathrm{CM}}(t)$.
- Verifica que el movimiento del centro de masas obedece $M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}_{\mathrm{Ext}}$

Movimiento del centro de masas

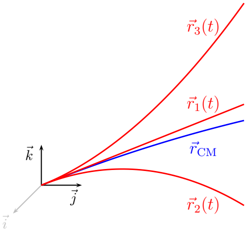
Ejemplo: tres masas puntuales

- Movimientos uniformemente acelerados:

$$\vec{r}_1(t) = v_0 t\, \vec{j}$$

$$\vec{r}_2(t) = v_0 t\, \vec{j} - \frac{1}{2} G t^2\, \vec{k}$$

$$\vec{r}_3(t) = v_0 t\, \vec{j} + \frac{1}{2} G t^2\, \vec{k}$$



- Centro de masas

$$\vec{r}_{\rm CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t) + m_3 \vec{r}_3(t)}{m_1 + m_2 + m_3} = v_0 t\, \vec{j} + \frac{1}{2} G t^2 \frac{m_3 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\, \vec{k}$$

  Masa total $M = m_1 + m_2 + m_3$

- Aceleración del centro de masas

$$\vec{a}_{\rm CM}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\rm CM}(t) = G \frac{m_3 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\, \vec{k}$$

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: tres masas puntuales

- Fuerza externa

$$\vec{F}_{\text{Ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -m_2 G\,\vec{k} + m_3 G\,\vec{k} = G(m_3 - m_2)\vec{k}$$

y verificamos por tanto que se cumple

$$M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{Ext}}$$

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: un proyectil se lanza al aire desde el nivel del suelo y debería aterrizar a 55 m de distancia. Sin embargo, en el punto más alto de su trayectoria, explota en dos fragmentos de igual masa. Justo después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad instantánea cero y cae directamente al suelo. ¿Dónde cae el otro fragmento? Desprecia la resistencia del aire.

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: proyectil

- Si no explotara, aterrizaría a 55 m de distancia del punto de lanzamiento.
- En la explosión no participan fuerzas externas, la fuerza externa (peso) es la misma con o sin explosión $\Rightarrow$ misma trayectoria del CM, con aterrizaje a 55 m de distancia.
- El fragmento que cae "directamente al suelo" aterriza a 55/2 m de distancia del punto inicial.
- Con las distancias d_{CM}, d_1 correspondientes al CM y al primer fragmento, la distancia d_2 correspondiente al primer fragmento cumple

$$(m_1 + m_2)d_{\mathrm{CM}} = m_1 d_1 + m_2 d_2$$

con $d_{\mathrm{CM}} = 55$ m, $d_1 = \frac{55}{2}$ m, $m_1 = m_2$,

$$d_2 = 2d_{\mathrm{CM}} - d_1 = \frac{3}{2} 55\,\mathrm{m} = 77.5\,\mathrm{m}$$

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: dos personas se encuentran en un bote de remos de masa $m_b = 60$ kg; la persona A, de masa $m_A = 80$ kg, se encuentra sentada cerca de un extremo mientras la persona B, de masa $m_B = 120$ kg, rema sentada a $d = 2$ metros de distancia de A. B se cansa y deja de remar; una vez se ha detenido el bote, intercambian sus puestos. ¿Qué distancia se mueve el bote en este intercambio? (Desprecia cualquier fuerza horizontal ejercida por el bote)

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: dos personas-bote

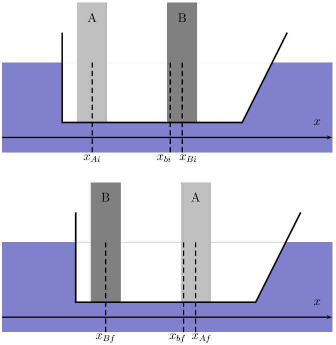
- El centro de masas no se mueve (ausencia de fuerzas externas):

$$x_{\mathrm{CM}_i} = x_{\mathrm{CM}_f}$$

- La posición final de B relativa al bote es la misma que la posición inicial de A relativa al bote:

$$x_{bi} - x_{Ai} = x_{bf} - x_{Bf}$$

$$x_{Bi} - x_{Ai} = x_{Af} - x_{Bf} = d$$



Movimiento del centro de masas

Ejemplo: dos personas-bote

- En la configuración inicial, la posición del centro de masas conjunto de A, B y el bote es

$$x_{\mathrm{CM}_i} = \frac{m_A x_{Ai} + m_B x_{Bi} + m_b x_{bi}}{m_A + m_B + m_b}$$

  con x_{Ai} la posición inicial de A, x_{Bi} la posición inicial de B y x_{bi} la posición inicial del centro de masas del bote

- En la configuración final, con las posiciones de A y B intercambiadas, el centro de masas conjunto de A, B y el bote es

$$x_{\mathrm{CM}_f} = \frac{m_A x_{Af} + m_B x_{Bf} + m_b x_{bf}}{m_A + m_B + m_b}$$

  con x_{Af} la posición final de A, x_{Bf} la posición final de B y x_{bf} la posición final del centro de masas del bote

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: dos personas-bote

- Centro de masas

$$(m_A + m_B + m_b)x_{\mathrm{CM}_i} = m_A x_{Ai} + m_B x_{Bi} + m_b x_{bi}$$

$$(m_A + m_B + m_b)x_{\mathrm{CM}_f} = m_A x_{Af} + m_B x_{Bf} + m_b x_{bf}$$

$x_{\mathrm{CM}_i} = x_{\mathrm{CM}_f} \Leftrightarrow$

$$m_A(x_{Af} - x_{Ai}) + m_B(x_{Bf} - x_{Bi}) + m_b(x_{bf} - x_{bi}) = 0$$

- Condiciones

$$x_{bi} - x_{Ai} = x_{bf} - x_{Bf} \Leftrightarrow x_{bf} - x_{bi} = x_{Bf} - x_{Ai}$$

$$d = x_{Bi} - x_{Ai} = x_{Af} - x_{Bf}$$

- Para resolver $x_{\mathrm{CM}_i} = x_{\mathrm{CM}_f}$

$$x_{Af} - x_{Ai} = x_{bf} - x_{bi} + d$$

$$x_{Bf} - x_{Bi} = x_{bf} - x_{bi} - d$$

Movimiento del centro de masas

Ejemplo: dos personas-bote

- Tenemos

$$m_A(x_{Af} - x_{Ai}) + m_B(x_{Bf} - x_{Bi}) + m_b(x_{bf} - x_{bi}) = 0$$
$$x_{Af} - x_{Ai} = x_{bf} - x_{bi} + d$$
$$x_{Bf} - x_{Bi} = x_{bf} - x_{bi} - d$$

- Por tanto

$$m_A(x_{bf} - x_{bi} + d) + m_B(x_{bf} - x_{bi} - d) + m_b(x_{bf} - x_{bi}) = 0$$

- El bote se desplaza

$$x_{bf} - x_{bi} = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B + m_b} d = 31\,\mathrm{cm}$$

Momento lineal. Conservación

- En el caso de una partícula puntual de masa m, ya mencionamos el *momento lineal* o *cantidad de movimiento*

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

con $\vec{v}$ la velocidad de la misma.
Es una magnitud vectorial, $|\vec{p}| = MLT^{-1}$, en el S.I. en $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

- En general, de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Una fuerza neta $\vec{F}$ actua sobre la partícula
$\Leftrightarrow$ el momento lineal de la partícula cambia

- Si la fuerza neta es $\vec{F} = \vec{0}$,
el momento lineal se mantiene constante, “se conserva”

Momento lineal. Conservación

- Para un sistema de partículas, el momento lineal total $\vec{P}$ es

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{v}_j = M\,\vec{v}_{\rm CM}$$

y por tanto

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{\rm CM})}{dt} = \vec{F}_{\rm Ext}, \qquad M\,\vec{a}_{\rm CM} = \vec{F}_{\rm Ext} \text{ para } M = \text{cte}$$

- Si la fuerza externa resultante es nula, el momento lineal total del sistema permanece constante
"Ley de conservación del momento lineal"

Momento lineal. Conservación

Ejemplo: desintegración/explosión $1 \to 2$ en reposo
Una masa puntual m en reposo se desintegra en dos masas puntuales m_1, m_2, con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.
Conservación del momento lineal:

$$\text{Inicial: } \vec{P} = \vec{0}, \qquad \text{Final: } \vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ en direcciones opuestas, $m_1 > m_2 \Rightarrow |\vec{v}_1| < |\vec{v}_2|$
(N.B. Problema unidimensional)

Momento lineal. Conservación

Ejemplo: un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14000 kg se desplaza horizontalmente a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Supóngase que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.

Momento lineal. Conservación

Ejemplo: vagón ferrocarril

- Sin grano, $t = 500/4\,\mathrm{s} = 125$ s
- Con $m_1 = 2000$ kg de grano: momento inicial, antes de la caída del grano

$$P_i = m_0 v_0 = 56000\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}, \quad m_0 = 14000\,\mathrm{kg},\ v_0 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

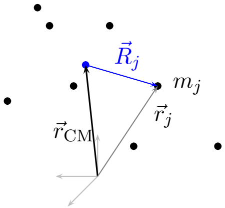
Momento final,

$$P_f = (m_0 + m_1)v = P_i \ \Rightarrow\ v = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0 = 3.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

de modo que el $t = 500/3.5 = 143\,\mathrm{s}$

Energía cinética de un sistema de partículas

Sistema con n partículas de masa m_j en posiciones $\vec{r}_j$, $j = 1, \ldots, n$.
La posición del centro de masas del sistema es $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$



- Descomponemos

$$\vec{r}_j = \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{R}_j$$

  con $\vec{R}_j$ la posición de m_j relativa al centro de masas

- Por construcción,

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{R}_j$$

$$M\vec{r}_{\mathrm{CM}} = M\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{R}_j \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{R}_j = \vec{0}$$

Energía cinética de un sistema de partículas

- Derivando con respecto al tiempo t

$$\vec{v}_j = \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{V}_j$$

con $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ la velocidad del centro de masas y $\vec{V}_j$ la velocidad de m_j relativa al centro de masas

- La energía cinética de cada partícula es $E_{c_j} = \frac{1}{2} m_j |\vec{v}_j|^2$
- La energía cinética del sistema es

$$E_c = \sum_{j=1}^{n} E_{c_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\vec{v}_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\vec{v}_{\mathrm{CM}} + \vec{V}_j|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left(|\vec{v}_{\mathrm{CM}}|^2 + |\vec{V}_j|^2 + 2\vec{v}_{\mathrm{CM}} \cdot \vec{V}_j \right)$$

Energía cinética de un sistema de partículas

- La energía cinética del sistema es

$$E_c = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left(|\vec{v}_{\rm CM}|^2 + |\vec{V}_j|^2 + 2\vec{v}_{\rm CM} \cdot \vec{V}_j \right)$$

$$= \frac{1}{2} M |\vec{v}_{\rm CM}|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\vec{V}_j|^2 + 2\vec{v}_{\rm CM} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \vec{V}_j \right)$$

pero

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \vec{V}_j = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \vec{R}_j \right) = \vec{0}$$

de modo que

$$E_c = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{\rm CM}|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\vec{V}_j|^2$$

Energía cinética de un sistema de partículas

- La energía cinética del sistema es

$$E_c = \frac{1}{2} M |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\vec{V}_j|^2$$

Hemos descompuesto la energía cinética E_c en dos términos,

  - el primero es la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas (toda la masa M moviéndose con $\vec{v}_{\text{CM}}$)
  - el segundo es la energía cinética asociada al movimiento de las m_j con respecto al centro de masas

Energía cinética de un sistema de partículas

Ejemplo: dos bloques de masa $m_1 = m_2 = 2$ kg se mueven en una dimensión con velocidades $v_1 = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y $v_2 = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calcula

- la energía cinética del sistema,
- la velocidad del centro de masas,
- la velocidad de los bloques con respecto al centro de masas.
- Comprueba que la energía cinética del sistema es igual a la suma de la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas más la energía cinética asociada al movimiento con respecto al centro de masas

Energía cinética de un sistema de partículas

Ejemplo: dos bloques

- Energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 25 + 4 = \frac{1}{2} 2 \times 5^2 + \frac{1}{2} 2 \times 2^2 = 29\,\mathrm{J}$$

- Velocidad del centro de masas

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 5 + 2 \times (-2)}{2 + 2} = 1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

- Velocidad con respecto al centro de masas

$$V_j = v_j - v_{\mathrm{CM}} \;\Rightarrow\; V_1 = 3.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad V_2 = -3.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

- Descomposición de la energía cinética, $E_c = E_{c_{\mathrm{CM}}} + E_{c_{\mathrm{rel}}}$ ✓

$$\text{Del CM}: \; E_{c_{\mathrm{CM}}} = \frac{1}{2}(2+2)(1.5)^2 = 4.5\,\mathrm{J}$$

$$\text{Relativo al CM}: \; E_{c_{\mathrm{rel}}} = \frac{1}{2} 2 \times 3.5^2 + \frac{1}{2} 2 \times (-3.5)^2 = 2 \times 12.25 = 24.5\,\mathrm{J}$$

Energía potencial, campo gravitatorio uniforme

Sistema con n partículas de masa m_j en posiciones $\vec{r}_j$, $j = 1, \ldots, n$ en un campo gravitatorio uniforme $\vec{g} = -g\vec{k}$

- Coordenadas en la dirección $\vec{k}$ (opuesta a $\vec{g}$): $\vec{r}_j \cdot \vec{k} = z_j$
- Energía potencial gravitatoria de m_j

$$U_j = m_j g z_j$$

(N.B. referencia $U(z = 0) = 0$)

- Energía potencial gravitatoria del sistema

$$U = \sum_{j=1}^{n} U_j = \sum_{j=1}^{n} m_j g z_j = g \sum_{j=1}^{n} m_j z_j = M g \, z_{\mathrm{CM}}$$

La energía potencial gravitatoria del sistema es la misma que tendría toda la masa del mismo situada en el CM.

Energía de un sistema de partículas

- Aplicamos el teorema *Trabajo-Energía cinética* al sistema de n partículas anterior siguiendo el análisis para una única partícula y atendiendo a la naturaleza conservativa o no de las fuerzas externas e internas,
- Sobre la partícula j, recordamos, actúa una fuerza

$$\vec{F}_j = \vec{F}_{j,\mathrm{int}} + \vec{F}_{j,\mathrm{ext}}$$

- De acuerdo con el teorema Trabajo-Energía cinética, en un tiempo dt, la partícula j se desplaza $d\vec{r}_j$, y la variación de su energía cinética es

$$dE_{c_j} = \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j$$

Separamos de nuevo $\vec{r}_j = \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{R}_j$,

$$dE_{c_j} = \vec{F}_j \cdot (d\vec{r}_{\mathrm{CM}} + d\vec{R}_j)$$

Energía de un sistema de partículas

- La variación de la energía cinética E_c del sistema es

$$
\begin{aligned}
dE_c^{\text{Sis}} &= \sum_{j=1}^{n} dE_{c_j} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \cdot (d\vec{r}_{\text{CM}} + d\vec{R}_j) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \right) \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \cdot d\vec{R}_j \\
&= \vec{F}_{\text{Ext}} \cdot d\vec{r}_{\text{CM}} + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,\text{ext}} \cdot d\vec{R}_j + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{j,\text{int}} \cdot d\vec{R}_j
\end{aligned}
$$

- En un intervalo finito $[t_i; t_f]$, $\int_i^f (\ldots)$, tendremos por tanto

$$
(\Delta E_c)_{if} = (E_c^{\text{Sis}})_f - (E_c^{\text{Sis}})_i = W_{\text{Ext},if}^{\text{CM}} + W_{\text{ext},if}^{\text{rel}} + W_{\text{int},if}^{\text{rel}}
$$

Energía de un sistema de partículas

Teorema Trabajo-Energía cinética para un sistema de partículas

$$(\Delta E_c)_{if} = (E_c^{\mathrm{Sis}})_f - (E_c^{\mathrm{Sis}})_i = W^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{Ext},if} + W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{ext},if} + W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{int},if}$$

- $W^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{Ext},if} = \int_i^f \vec{F}_{\mathrm{Ext}} \cdot d\vec{r}_{\mathrm{CM}}$: trabajo de la fuerza externa neta asociado al movimiento del centro de masas
- $W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{ext},if} = \sum_j \int_i^f \vec{F}_{j,\mathrm{ext}} \cdot d\vec{R}_j$: trabajo de las fuerzas externas asociado al movimiento de cada masa relativo al centro de masas
- $W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{int},if} = \sum_j \int_i^f \vec{F}_{j,\mathrm{int}} \cdot d\vec{R}_j$: trabajo de las fuerzas internas asociado al movimiento de cada masa relativo al centro de masas

Con respecto al caso de una partícula, tenemos

- distinción entre fuerzas internas y externas,
- separación movimiento CM y movimiento relativo a CM,
- las fuerzas internas no realizan trabajo asociado al movimiento del CM

Energía de un sistema de partículas

- Si las fuerzas internas son conservativas, tenemos la energía potencial interna U_{int},

$$W^{\text{rel}}_{\text{int},if} = -(\Delta U_{\text{int}})_{if}$$

y por tanto

$$\Delta(E_c + U_{\text{int}})_{if} = W^{\text{CM}}_{\text{Ext},if} + W^{\text{rel}}_{\text{ext},if}$$

- Se define la *energía propia del sistema* $E_{\text{prop}} = E_c + U_{\text{int}}$, por tanto

$$(\Delta E_{\text{prop}})_{if} = W^{\text{CM}}_{\text{Ext},if} + W^{\text{rel}}_{\text{ext},if}$$

- Si el sistema está aislado, $\vec{F}_{j,\text{ext}} = \vec{0}$, $W^{\text{CM}}_{\text{Ext},if} = W^{\text{rel}}_{\text{ext},if} = 0$, y

$$(\Delta E_{\text{prop}})_{if} = 0 \;\Leftrightarrow\; E_{\text{prop},i} = E_{\text{prop},f}$$

es decir, *la energía propia del sistema se conserva*

Energía de un sistema de partículas

- Si las fuerzas externas también son conservativas, tenemos la energía potencial externa U_{ext},

$$W^{\text{CM}}_{\text{Ext},if} + W^{\text{rel}}_{\text{ext},if} = -(\Delta U_{\text{ext}})_{if}$$

y por tanto

$$(\Delta E_{\text{prop}})_{if} = -(\Delta U_{\text{ext}})_{if} \;\Leftrightarrow\; \Delta(E_{\text{prop}} + U_{\text{ext}})_{if} = 0$$

Se define la *energía mecánica total del sistema* E_{Mec}

$$E_{\text{Mec}} = E_{\text{prop}} + U_{\text{ext}} = E_c + U_{\text{int}} + U_{\text{ext}}$$

que se conserva

$$(\Delta E_{\text{Mec}})_{if} = 0 \;\Leftrightarrow\; E_{\text{Mec},f} = E_{\text{Mec},i}$$

Energía de un sistema de partículas

- Si hay fuerzas *no conservativas* y realizan trabajo, este corresponde a la variación de la energía mecánica total del sistema

$$(\Delta E_{\mathrm{Mec}})_{if} = W_{if}^{\mathrm{NoC}}$$

- Como en el caso de una partícula, incluyendo otros tipos de energía (química, térmica, etc) y la transferencia de energía fuera del sistema

$$-(\Delta E_{\mathrm{Otros}})_{if} = W_{if}^{\mathrm{NoC}}$$

$\Rightarrow$ conservación de la energía total

$$(\Delta E_{\mathrm{Mec}})_{if} + (\Delta E_{\mathrm{Otros}})_{if} = (\Delta E_{\mathrm{Tot}})_{if} = 0$$

Energía de un sistema de partículas

Ejemplo: dos bloques de masas m_1, m_2 están unidos por un muelle (sin masa) de constante elástica k. Partiendo de una situación inicial en que el muelle se ha comprimido y las masas están en reposo, analiza la variación de la energía cinética, de la energía propia, y de la energía mecánica total del sistema masas+muelle cuando

- el sistema se mueve en un plano horizontal sin rozamiento
- el sistema se encuentra en caída libre, sin rozamiento
- el sistema se encuentra en caída libre y se produce rozamiento con el aire

Energía de un sistema de partículas

Ejemplo: dos bloques m_1, m_2 unidos por un muelle

- Movimiento en un plano horizontal sin rozamiento: no hay fuerzas externas $W^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{Ext},if} = W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{ext},if} = 0$ y las fuerzas internas son conservativas $W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{int},if} = -(\Delta U_{\mathrm{int}})_{if}$; se conserva la energía propia $E_{\mathrm{prop}} = E_c + U_{\mathrm{int}}$
- Caída libre sin rozamiento: las fuerzas externas $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, son conservativas $W^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{Ext},if} + W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{ext},if} = -(\Delta U_{\mathrm{ext}})_{if} \neq 0$ (de hecho $W^{\mathrm{CM}}_{\mathrm{Ext},if} \neq 0$, $W^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{ext},if} = 0$), se conserva la energía mecánica total $E_{\mathrm{Mec}} = E_{\mathrm{prop}} + U_{\mathrm{ext}} = E_c + U_{\mathrm{int}} + U_{\mathrm{ext}}$
- Caída libre con rozamiento con el aire: hay fuerzas no conservativas, la variación de la energía mecánica total es $(\Delta E_{\mathrm{Mec}})_{if} = W^{\mathrm{NoC}}_{if}$

Colisiones

- Colisión: interacción "cercana" entre cuerpos
- El *impulso* $\vec{I}$ de la fuerza $\vec{F}$ durante el intervalo Δt entre t_i y $t_f = t_i + \Delta t$

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}$$

Dimensiones $[|\vec{I}|] = MLT^{-1}$, unidades S.I. $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} = \mathrm{N\,s}$

- $\vec{I}$ refleja la intensidad y la duración de una colisión
- Si $\vec{F}_{\text{Neta}}$ es la fuerza neta que actúa sobre una partícula,

$$\int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F}_{\text{Neta}} = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

- Teorema del impulso

para una partícula: $\vec{I}_{\text{Neto}} = \Delta \vec{p}$

para un sistema: $\vec{I}_{\text{Neto ext}} = \Delta \vec{p}_{\text{sist}}$

Colisiones

- Fuerza media

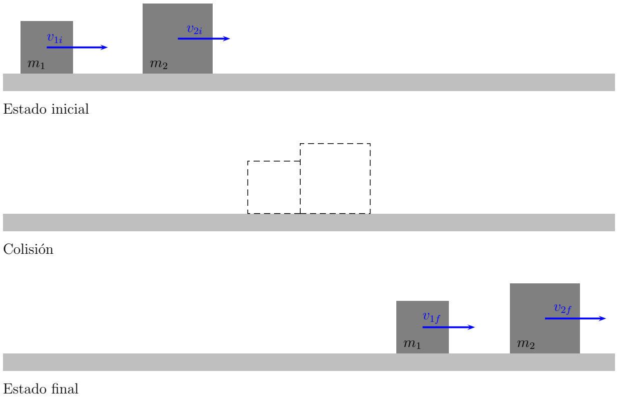
$$\vec{F}_{\text{media}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} dt\, \vec{F} = \frac{1}{\Delta t}\vec{I} \;\Leftrightarrow\; \vec{I} = \vec{F}\,\Delta t$$

  fuerza constante que produce el mismo impulso que $\vec{F}$ en Δt

- Si, durante la colisión, cualquier fuerza externa es mucho *menor* que las fuerzas de interacción entre los objetos que colisionan (fuerzas internas del sistema formado por los objetos que colisionan), podemos considerar que la colisión es *instantánea* y que el momento lineal *se conserva*
- N.B. Si el sistema formado por los objetos que colisionan está aislado, $\vec{F}_{\text{Neta,Ext}} = \vec{0}$

Colisiones

Colisión en una dimensión:
entre dos bloque con masas m_j y velocidades iniciales v_{ji}, $j = 1, 2$;
queremos obtener las velocidades del estado final, v_{jf}



Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Conservación del momento lineal

$$P = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \;\Leftrightarrow\; P = p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

  Proporciona una única condición, insuficiente para obtener tanto v_{1f} como v_{2f}

- Analizamos qué ocurre al añadir una segunda condición, la conservación de la energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\Leftrightarrow\; E_c = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

  Tenemos ahora dos condiciones, que deben ser suficientes para obtener tanto v_{1f} como v_{2f}

Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Tenemos
$$P = p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$
$$E_c = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$
y queremos determinar tanto p_{1f} como p_{2f} en función de p_{1i}, p_{2i}, m_1, m_2
- Podemos proceder "por fuerza bruta" sustituyendo por ejemplo $p_{2f} = p_{1i} + p_{2i} - p_{1f}$ en $E_c = \ldots$ y resolviendo $p_{1f} = \ldots$
- …o podemos observar que existe una solución trivial $p_{1f} = p_{1i}$, $p_{2f} = p_{2i}$ (ausencia de colisión), que, aunque no nos interesa, facilita obtener la solución deseada

Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Tenemos

$$P = p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}$$

$$E_c = \frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}$$

  que reescribimos

$$p_{1f} - p_{1i} = p_{2i} - p_{2f}$$

$$m_2(p_{1i}^2 - p_{1f}^2) = m_1(p_{2f}^2 - p_{2i}^2)$$

- Arreglamos la segunda ecuación

$$m_2(p_{1i} - p_{1f})(p_{1i} + p_{1f}) = m_1(p_{2f} - p_{2i})(p_{2f} + p_{2i})$$

$$m_2(p_{1i} - p_{1f})(p_{1i} + p_{1f}) = m_1(p_{1i} - p_{1f})(p_{1i} - p_{1f} + 2p_{2i})$$

$$(p_{1i} - p_{1f})\left(m_2(p_{1i} + p_{1f}) - m_1(p_{1i} - p_{1f} + 2p_{2i})\right) = 0$$

Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Tan solo queda resolver

$$(p_{1i} - p_{1f})\,(m_2(p_{1i} + p_{1f}) - m_1(p_{1i} - p_{1f} + 2p_{2i})) = 0$$

Además de $p_{1i} = p_{1f}$, con el segundo factor tenemos

$$\begin{aligned} m_2(p_{1i} + p_{1f}) - m_1(p_{1i} - p_{1f} + 2p_{2i}) &= 0 \\ (m_2 + m_1)p_{1f} + (m_2 - m_1)p_{1i} - 2m_1 p_{2i} &= 0 \end{aligned}$$

- y obtenemos los dos soluciones

$$\begin{aligned} p_{1f} &= p_{1i}, & p_{2f} &= p_{2i} \\ p_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}p_{1i} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_{2i}, & p_{2f} &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}p_{2i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}p_{1i} \end{aligned}$$

Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Soluciones

$$\left\{ \begin{aligned} p_{1f} &= p_{1i} \\ p_{2f} &= p_{2i} \end{aligned} \right\}, \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{1f} &= \tfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} p_{1i} + \tfrac{2m_1}{m_1 + m_2} p_{2i} \\ p_{2f} &= \tfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_{2i} + \tfrac{2m_2}{m_1 + m_2} p_{1i} \end{aligned} \right\}$$

- En términos de las velocidades

$$\left\{ \begin{aligned} v_{1f} &= v_{1i} \\ v_{2f} &= v_{2i} \end{aligned} \right\}, \qquad \left\{ \begin{aligned} v_{1f} &= \tfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \tfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} &= \tfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} + \tfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{aligned} \right\}$$

(Tan solo nos interesa la solución no trivial)

Colisiones

Colisión en una dimensión:

- Diferencia de velocidades $v_{2f} - v_{1f}$:

$$v_{2f} - v_{1f} = \frac{(2m_1 - (m_1 - m_2))v_{1i} + ((m_2 - m_1 - 2m_2))v_{2i}}{m_1 + m_2}$$
$$= v_{1i} - v_{2i} = -(v_{2i} - v_{1i})$$

  es decir, velocidades relativas inicial/final *opuestas*

- Hemos resuelto v_{1f}, v_{2f} asumiendo la conservación de la energía cinética; en general se introduce un *coeficiente de restitución* e

$$e \equiv -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}}$$

  Hemos analizado el caso $e = 1$: una colisión en que se conserva la energía cinética se denomina *elástica*. Cuando no se conserva la energía cinética tenemos *inelasticidad* ($e \neq 1$)

Colisiones

Colisión en una dimensión:
Analizamos ahora el caso general en términos del coeficiente de restitución

- Conservación del momento

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

- Restitución

$$e(v_{1i} - v_{2i}) = v_{2f} - v_{1f}$$

- Combinando ambas ecuaciones

$$v_{1f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - e m_2 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1i} + (1+e) m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - e m_1 (v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2} = \frac{(1+e) m_1 v_{1i} + (m_2 - e m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Colisiones. Sistema de referencia del centro de masas

Colisión en una dimensión, centro de masas

- El centro de masas tiene velocidad (y momento) constante

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}}{m_1 + m_2} = \frac{P}{M}$$

  con $M = m_1 + m_2$ la masa total
- Un sistema de referencia inercial que se mueve con v_{CM} es el (un) "sistema de referencia del centro de masas" (SRCM)
- Velocidades y momentos iniciales en SRCM $v'_{ji} = v_{ji} - v_{\mathrm{CM}}$, p'_{ji}

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{\mathrm{CM}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(v_{1i} - v_{2i})$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{\mathrm{CM}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(v_{2i} - v_{1i})$$

$$p'_{1i} = m_1 v'_{1i} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_{1i} - v_{2i}) = -m_2 v'_{2i} = -p'_{2i}$$

  Los momentos iniciales son *opuestos*

  $\Leftrightarrow$ en SRCM el momento total es $P' = 0$

Colisiones. Sistema de referencia del centro de masas

Colisión en una dimensión, centro de masas

- Velocidades y momentos finales en SRCM v'_{jf}, p'_{jf}, $j = 1, 2$

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{\mathrm{CM}} = -e\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{1i} - v_{2i}) = -ev'_{1i}$$
$$v'_{2f} = v_{2i} - v_{\mathrm{CM}} = -e\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_{2i} - v_{1i}) = -ev'_{2i}$$
$$p'_{1f} = m_1 v'_{1f} = -e\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_{1i} - v_{2i}) = -ep'_{1i} = ep'_{2i} = -p'_{2f}$$

  Velocidades y momentos finales son $-e \times$ los iniciales

- Energía cinética inicial E'_{ci}, final $E'_{cf} = e^2 E'_{ci}$
  - Colisión elástica $e = 1$: $v'_{jf} = -v'_{ji}$
  - Colisión perfectamente inelástica $e = 0$

    $v'_{jf} = 0$, movimiento final con el CM
  - Colisión inelástica $0 \leq |e| < 1$

Colisiones

Ejemplo: colisión en una dimensión con

$$m_1 = m_0, \quad m_2 = 2m_0, \quad v_{1i} = 2v_0, \quad v_{2i} = v_0, \quad e = \frac{1}{2}$$

Determina

- Momento total P, energía cinética inicial E_{ci} y final E_{cf}
- Velocidad v_{CM} del CM
- Velocidades y momentos iniciales y finales en el SRCM
- Energías cinéticas iniciales y finales asociadas al CM
- Energías cinéticas asociadas al movimiento relativo al CM

Colisiones

Ejemplo: colisión en una dimensión con

$$m_1 = m_0, \quad m_2 = 2m_0, \quad v_{1i} = 2v_0, \quad v_{2i} = v_0, \quad e = \frac{1}{2}$$

- Tenemos

$$P = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 4 m_0 v_0, \quad E_{ci} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = 3 m_0 v_0^2$$

$$\begin{array}{llll} v_{1i} = 2v_0, & v_{2i} = v_0, & p_{1i} = 2m_0 v_0, & p_{2i} = 2m_0 v_0 \\ v_{1f} = v_0, & v_{2f} = \frac{3}{2} v_0, & p_{1f} = m_0 v_0, & p_{2f} = 3 m_0 v_0 \end{array}$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{11}{4} m_0 v_0^2$$

Colisiones

Ejemplo: colisión en una dimensión con

$$m_1 = m_0, \quad m_2 = 2m_0, \quad v_{1i} = 2v_0, \quad v_{2i} = v_0, \quad e = \frac{1}{2}$$

- Centro de masas $v_{\rm CM} = \frac{4}{3}v_0$, $P' = 0$,

$$\begin{array}{llll} v'_{1i} = \dfrac{2}{3}v_0, & v'_{2i} = -\dfrac{1}{3}v_0, & p'_{1i} = \dfrac{2}{3}m_0 v_0, & p'_{2i} = -\dfrac{2}{3}m_0 v_0 \\ v'_{1f} = -\dfrac{1}{3}v_0, & v'_{2f} = \dfrac{1}{6}v_0, & p'_{1f} = -\dfrac{1}{3}m_0 v_0, & p'_{2f} = \dfrac{1}{3}m_0 v_0 \end{array}$$

$$E'_{ci} = \frac{1}{3}m_0 v_0^2, \qquad E'_{cf} = \frac{1}{12}m_0 v_0^2 = e^2 E'_{ci}$$

$$E_{c,\rm CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{\rm CM}^2 = \frac{8}{3}m_0 v_0^2 = E_{ci} - E'_{ci} = E_{cf} - E'_{cf}$$

Colisiones

Ejemplo:
choque completamente inelástico en una dimensión con $v_{2i} = 0$

- Velocidades finales

$$v_{1f} = v_{2f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Colisiones

Ejemplo: choque elástico en una dimensión con $v_{2i} = 0$

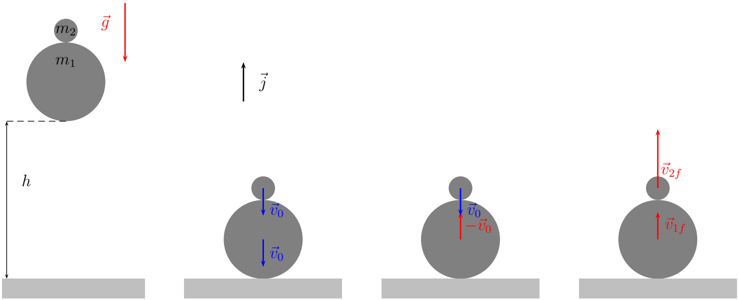
- Velocidades finales

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}, \qquad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } m_1 = m_2, & v_{1f} = 0, & v_{2f} = v_{1i} \\
\text{Si } m_1 < m_2, & |v_{1f}| < |v_{1i}|, & |v_{2f}| < |v_{1i}| \\
\text{Si } m_1 \ll m_2, & v_{1f} \to -v_{1i}, & v_{2f} \to 0 \\
\text{Si } m_1 > m_2, & |v_{1f}| < |v_{1i}|, & |v_{2f}| > |v_{1i}| \\
\text{Si } m_1 \gg m_2, & v_{1f} \to v_{1i}, & v_{2f} \to 2v_{1i}
\end{array}$$

Colisiones

Ejemplo: dos bolas de masas m_2, m_1 ($m_1 > m_2$), inicialmente en reposo caen según indica la figura desde una altura h; al alcanzar el suelo, m_1 choca con el suelo y m_2 choca con m_1 de forma prácticamente instantánea. Ambos choques son elásticos. Tras los choques, ¿qué alturas alcanzan, respectivamente, m_1 y m_2?



Colisiones

Ejemplo: dos bolas

- La colisión final tiene $\vec{v}_{i1} = v_0\vec{j}$, $\vec{v}_{2i} = -v_0\vec{j}$, por tanto

$$\vec{v}_{1f} = \frac{m_1 v_0 - m_2 v_0 - m_2(v_0 + v_0)}{m_1 + m_2}\vec{j} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_0 \vec{j}$$
$$\vec{v}_{2f} = \frac{m_1 v_0 - m_2 v_0 - m_1(-v_0 - v_0)}{m_1 + m_2}\vec{j} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \vec{j}$$

- Dada la altura inicial h, $v_0 = \sqrt{2gh}$ (conservación de la energía)
- Con respecto a la posición en el momento de la colisión, alcanzan alturas $h_j = \frac{|\vec{v}_{jf}|^2}{2g}$

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = h\left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$
$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = h\left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Si $m_1 \gg m_2$, $h_1 \to h$, $h_2 \to 9h$

Colisiones

Ejemplo: dos bolas

- ¿Qué ocurre con el momento lineal?
  m_1 choca con el suelo, tras ese choque el sistema de dos bolas tiene
  $$\vec{P}_i = (m_1 - m_2)v_0\vec{j}$$
  El momento final es
  $$\begin{aligned}\vec{P}_f &= \left(m_1\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} + m_2\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_0\vec{j} \\ &= \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1 + m_2}v_0\vec{j} = \vec{P}_i\end{aligned}$$
  como cabía esperar

Colisiones

Ejemplo: se dispara un proyectil de masa m_1 y velocidad horizontal v_1, que impacta en un bloque de madera de masa m_2 suspendido y en reposo; el dispositivo se denomina *péndulo balístico*.

1. Si la colisión proyectil-bloque es completamente inelástica y el conjunto alcanza una altura h con respecto a la posición inicial: si conocemos m_1, m_2 y h, obtén v_1.
2. Si en cambio el proyectil atraviesa el bloque y sigue moviéndose con velocidad $v_1/2$ horizontal, ¿cuánto se elevará el bloque tras la colisión? ¿Cuánto vale el coeficiente de restitución en la colisión proyectil-bloque?
3. Aplicación numérica, $m_1 = 50$ g, $m_2 = 1$ kg, $v_1 = 50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Colisiones

Ejemplo: péndulo balístico

- Caso completamente inelástico: aplicamos (i) conservación del momento para obtener el momento final del conjunto tras la colisión, (ii) conservación de la energía mecánica para relacionar ese momento final con la altura alcanzada
- Momento inicial $\vec{P}_i$, final $\vec{P}_f$, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$\vec{P}_i = m_1 v_1 \vec{i}, \quad \vec{P}_f = (m_1 + m_2) v_f \vec{i} \;\Rightarrow\; v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

- Energía mecánica tras colisión, con y coordenada vertical hacia arriba (origen de energía potencial en $y = 0$)

$$E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\vec{v}|^2 + mgy$$

  - en $y = 0$, $|\vec{v}|^2 = v_f^2 \Rightarrow E_{\text{Mec}} = \frac{m_1^2}{2(m_1+m_2)} v_1^2$
  - en $y = h$, $|\vec{v}|^2 = 0 \Rightarrow E_{\text{Mec}} = (m_1 + m_2)gh$

Colisiones

Ejemplo: péndulo balístico

- (N.B. Tensión del péndulo no hace trabajo)
- Conservación de la energía mecánica entre $y = 0$ e $y = h$,

$$h = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{v_1^2}{2g}$$

- Aplicación numérica, $m_1 = 50$ g, $m_2 = 1$ kg, $v_1 = 50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$$v_f = 2.38\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad h = 28.9\,\mathrm{cm}$$

- Cuando el proyectil continua con velocidad $v_i/2$, el momento inicial $\vec{P}_i = m_1 v_1 \vec{i}$ se reparte tras la colision entre el momento del bloque $\vec{p}_{2f} = m_2 v_{2f} \vec{i}$ y el momento del proyectil $\vec{p}_{1f} = m_1 \frac{v_1}{2} \vec{i}$, $\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$

Colisiones

Ejemplo: péndulo balístico

- Con la conservación del momento obtenemos v_{2f}, con la conservación de la energía obtenemos la altura que alcanza el bloque conociendo v_{2f}

$$\vec{P}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \;\Leftrightarrow\; m_1 v_1 = m_2 v_{2f} + m_1 \frac{v_1}{2} \;\Rightarrow\; v_{2f} = \frac{m_1}{m_2}\frac{v_1}{2}$$

- Altura h_2 (con respecto a posición inicial) tal que

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = m_2 g h_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{m_1^2}{m_2}\frac{v_1^2}{8} = m_2 g h_2 \;\Leftrightarrow\; h_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}\frac{v_1^2}{8g}$$

- Coeficiente de restitución (Ojo! $e < 0$ porque el proyectil atraviesa el bloque)

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = -\frac{\frac{m_1}{2m_2} - \frac{1}{2}}{0 - 1} = \frac{m_1 - m_2}{2m_2}$$

- Aplicación numérica, $m_1 = 50$ g, $m_2 = 1$ kg, $v_1 = 50\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

$$v_{2f} = 1.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad h_2 = 8\,\mathrm{cm}, \quad e = -0.475$$

Colisiones en dos dimensiones

Colisión entre dos cuerpos

- Colisión entre dos cuerpos de masas m_1, m_2 y velocidades $\vec{v}_{1i\,\mathrm{lab}}$, $\vec{v}_{2i\,\mathrm{lab}}$, en un sistema de referencia inercial "laboratorio"
- La conservación del momento

$$m_1\vec{v}_{1i\,\mathrm{lab}} + m_2\vec{v}_{2i\,\mathrm{lab}} = m_1\vec{v}_{1f\,\mathrm{lab}} + m_2\vec{v}_{2f\,\mathrm{lab}}$$

  da dos ecuaciones, una por componente
- Con una condición adicional en términos del coeficiente de restitución, podemos tratar de obtener $\vec{v}_{1f\,\mathrm{lab}}$, $\vec{v}_{2f\,\mathrm{lab}}$.
  - tenemos *tres* condiciones para obtener las *cuatro* componentes de $\vec{v}_{1f\,\mathrm{lab}}$, $\vec{v}_{2f\,\mathrm{lab}}$: son insuficientes para fijar completamente el estado final.
  - En lugar de continuar con el análisis del problema en el sistema de referencia "laboratorio", como hemos constatado en la colisión en una dimensión, es conveniente acudir al SRCM, en el que el momento total es $\vec{0}$.

Colisiones en dos dimensiones

Colisión entre dos cuerpos

- El centro de masas tiene velocidad

$$\vec{v}_{\rm CM} = \frac{m_1 \vec{v}_{1i\,\rm lab} + m_2 \vec{v}_{2i\,\rm lab}}{m_1 + m_2}$$

- En un sistema de referencia CM tenemos velocidades iniciales

$$\vec{v}_{1i} = \vec{v}_{1i\,\rm lab} - \vec{v}_{\rm CM}, \qquad \vec{v}_{2i} = \vec{v}_{2i\,\rm lab} - \vec{v}_{\rm CM}$$

  y momentos iniciales

$$\vec{p}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1i}, \qquad \vec{p}_{2i} = m_2 \vec{v}_{2i} = -\vec{p}_{1i}$$

  Definen *una única dirección*

- Del mismo modo, los momentos finales $\vec{p}_{1f}$ y $\vec{p}_{2f} = -\vec{p}_{1f}$ definen también *una única dirección*

Colisiones en dos dimensiones

Colisión entre dos cuerpos

- Sin pérdida de generalidad, podemos escoger coordenadas (x, y) o base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de modo que

$$\vec{p}_{1i} = p_i\,\vec{i}, \qquad \vec{p}_{2i} = -p_i\,\vec{i}, \qquad p_i = |\vec{p}_{1i}|$$

  y $\vec{p}_{1f}$ sea una combinación de $\vec{i}$, $\vec{j}$, es decir, el plano (x, y) es el formado por momentos iniciales y momentos finales

- Tras la colisión, tendremos velocidades y momentos

$$\vec{v}_{1f} = (v_{1f})_x\vec{i} + (v_{1f})_y\vec{j}, \qquad \vec{p}_{1f} = m_1(v_{1f})_x\vec{i} + m_1(v_{1f})_y\vec{j}$$
$$\vec{v}_{2f} = (v_{2f})_x\vec{i} + (v_{2f})_y\vec{j}, \qquad \vec{p}_{2f} = -\vec{p}_{1f}$$

  que queremos determinar en términos de m_1, m_2 y las velocidades o momentos iniciales

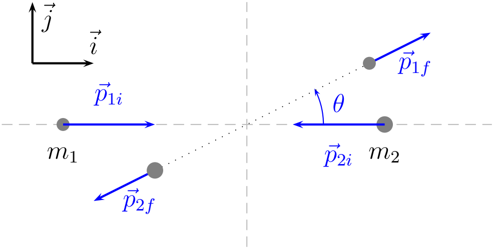
Colisiones en dos dimensiones

Colisión entre dos cuerpos

- Satisfecha la conservación del momento, observamos que sin más condiciones, $\vec{p}_{1f}$ es arbitrario, tanto $|\vec{p}_{1f}|$ (módulo) como $\frac{\vec{p}_{1f}}{|\vec{p}_{1f}|}$ (dirección): el movimiento final tiene lugar en *una* dimensión, con dirección arbitraria

$$\frac{\vec{p}_{1f}}{|\vec{p}_{1f}|} = (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

θ es el ángulo entre el momento final $\vec{p}_{1f}$ y el momento inicial $\vec{p}_{1i}$



Colisiones en dos dimensiones

Colisión entre dos cuerpos

- Siguiendo el análisis del caso general en una dimensión, añadimos una condición en términos del coeficiente de restitución

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}},$$

con

$$\vec{v}_{ji} = v_{ji}\,\vec{i}, \quad \vec{v}_{jf} = v_{jf}\,\frac{\vec{p}_{1f}}{|\vec{p}_{1f}|}$$

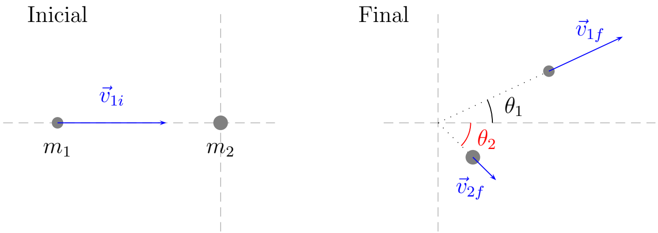
- De ese modo la descripción de la colisión se reduce a la descripción de la colisión en una dimensión con una única diferencia: el movimiento unidimensional en el estado final tiene lugar en la dirección

$$\frac{\vec{p}_{1f}}{|\vec{p}_{1f}|} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

en lugar de la inicial $\vec{i}$, con θ arbitrario

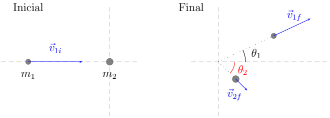
Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: un objeto de masa m_1 y velocidad inicial 20 m/s colisiona con un segundo objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo. Después de la colisión, el primer objeto se mueve a 15 m/s con un ángulo de 25° con respecto a la dirección inicial. ¿En qué dirección se mueve el segundo objeto?



Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo:



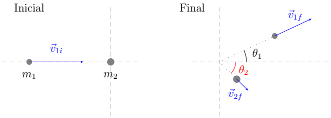
- Conocemos

$$\vec{v}_{1i} = v_{1i}\,\vec{i}, \qquad v_{1i} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$\vec{v}_{1f} = v_{1f}(\cos\theta_1\,\vec{i} + \sin\theta_1\,\vec{j}), \qquad v_{1f} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \theta_1 = 25^\circ$$
$$\vec{v}_{2i} = \vec{0}$$

  y queremos θ_2, con $\vec{v}_{2f} = v_{2f}(\cos\theta_2\,\vec{i} - \sin\theta_2\,\vec{j})$, $v_{2f} = |\vec{v}_{2f}|$
- Ni siquiera necesitamos conocer el coeficiente de restitución, la conservación del momento proporciona dos condiciones: dado que involucra $\vec{v}_{2f}$ (dos componentes), las masas y velocidades anteriores, conocidas, podremos resolver $\vec{v}_{2f}$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo:



- Momento inicial

$$\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{i1} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1 v_{1i}\vec{i}$$

- Momento final

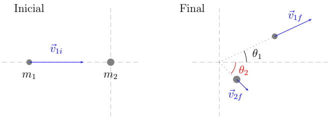
$$\begin{aligned}\vec{P}_f &= m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \\ &= (m_1 v_{1f}\cos\theta_1 + m_2 v_{2f}\cos\theta_2)\vec{i} + (m_1 v_{1f}\sin\theta_1 - m_2 v_{2f}\sin\theta_2)\vec{j}\end{aligned}$$

- Conservación del momento $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$\vec{v}_{2f} = \frac{m_1}{m_2}(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{i1}) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} v_{2f}\cos\theta_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_{i1} - v_{1f}\cos\theta_1) \\ v_{2f}\sin\theta_2 = \frac{m_1}{m_2}v_{1f}\sin\theta_1 \end{cases}$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo:



- Dirección θ_2

$$\left\{\begin{matrix} v_{2f}\cos\theta_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_{i1} - v_{1f}\cos\theta_1) \\ v_{2f}\sin\theta_2 = \frac{m_1}{m_2}v_{1f}\sin\theta_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \arctan\left(\frac{\tan\theta_1}{\frac{v_{i1}}{v_{1f}\cos\theta_1} - 1}\right)$$

$$\theta_2 = 44.7°$$

- Módulo

$$v_{2f} = |\vec{v}_{2f}| = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v_{1f}^2 + v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\theta_1} = 9\,\frac{m_1}{m_2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: un coche de masa $m_1 = 1200$ kg circula hacia el este; en un cruce colisiona con un camión de masa $m_2 = 3000$ kg que circula hacia el norte. El coche y el camión quedan unidos en el choque. El conductor del camión y la conductora del coche están de acuerdo en: i) no hay marcas de frenado, ii) el tacómetro del camión indica que circulaba a 50 km/h y iii) el conjunto coche-camión se ha dirigido, tras la colisión, en dirección $\cos\theta\,\overrightarrow{\text{este}} + \sin\theta\,\overrightarrow{\text{norte}}$, con $\theta = 60°$. El conductor del camión cree que la conductora del coche circulaba a una velocidad superior a la permitida, 80 km/h. La conductora, sin embargo, estudió “Física General I”: ¿puede demostrar que el conductor del camión se equivoca?

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión coche-camión

- En lo sucesivo $\overrightarrow{\text{este}} = \vec{i}$, $\overrightarrow{\text{norte}} = \vec{j}$
- Coche y camión unidos en el choque: choque completamente inelástico
- Aplicaremos la conservación del momento
- Valores iniciales: no hay marcas de frenado, conocemos $\vec{v}_{2i} = v_{2i}\,\vec{j}$, $v_{2i} = 50$ km/h (velocidad del camión), no conocemos $\vec{v}_{1i} = v_{1i}\vec{i}$ (velocidad del coche, $\overrightarrow{\text{este}}$); momento inicial

$$\vec{P}_i = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1 v_{1i}\,\vec{i} + m_2 v_{2i}\,\vec{j}$$

- Valores finales: masa única final $m_1 + m_2$ con velocidad $\vec{v}_f = v_f(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$: conocemos $\theta = \pi/3$, no conocemos v_f; momento final

$$\vec{P}_f = (m_1 + m_2)\vec{v}_f = (m_1 + m_2)v_f(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión coche-camión

- Conservación $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Leftrightarrow$

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \cos\theta$$
$$m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \sin\theta$$

de modo que

$$v_{1i} = \frac{m_2}{m_1} \frac{v_{2i}}{\tan\theta} = \frac{3000}{1200} \frac{50}{\sqrt{3}} \,\mathrm{km\,h^{-1}} = 72.2\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

$\Rightarrow$ el conductor se equivoca

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: dos masas $m_1 = m_0$ y $m_2 = 2m_0$ colisionan en el sistema de referencia "laboratorio" con velocidades iniciales

$$\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}, \qquad \vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$$

y velocidades finales $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$. El coeficiente de restitución es $e = \frac{1}{2}$.

- Determina $|\vec{v}\,'_{1f}|$, $|\vec{v}\,'_{2f}|$, $|\vec{p}\,'_{1f}|$, $|\vec{p}\,'_{2f}|$ (módulos de velocidades y momentos) en el SRCM.
- Si $\vec{v}\,'_{1f} = |\vec{v}\,'_{1f}|\,\vec{j}$, determina $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$, $\vec{p}_{1f}$, $\vec{p}_{2f}$ y el ángulo entre $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{1f}$.
  (N.B. $\{\vec{i}, \vec{j}\}$: base ortonormal)

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}$, $\vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$

- Centro de masas

$$\vec{v}_{\rm CM} = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{4}{3}v_0\,\vec{i}$$

- Las velocidades iniciales en el SRCM son

$$\vec{v}\,'_{1i} = \vec{v}_{1i} - \vec{v}_{\rm CM} = \frac{2}{3}v_0\,\vec{i}, \quad \vec{v}\,'_{2i} = \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{\rm CM} = -\frac{1}{3}v_0\,\vec{i}$$

- Los momentos iniciales en el SRCM son

$$\vec{p}\,'_{1i} = \frac{2}{3}m_0 v_0\,\vec{i}, \quad \vec{p}\,'_{2i} = -\frac{2}{3}m_0 v_0\,\vec{i}$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}$, $\vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$

- En el estado final, movimiento de m_1 y m_2 unidimensional con dirección arbitraria, obtenemos directamente

$$|\vec{v}\,'_{1f}| = e|\vec{v}\,'_{1i}| = \frac{1}{3}v_0, \qquad |\vec{v}\,'_{2f}| = e|\vec{v}\,'_{2i}| = \frac{1}{6}v_0$$

$$|\vec{p}\,'_{1f}| = \frac{1}{3}m_0 v_0, \qquad |\vec{p}\,'_{2f}| = \frac{1}{3}m_0 v_0 = |\vec{p}\,'_{1f}|$$

- Si $\vec{v}\,'_{1f} = |\vec{v}\,'_{1f}|\,\vec{j}$

$$\vec{v}\,'_{1f} = \frac{1}{3}v_0\,\vec{j}, \qquad \vec{v}\,'_{2f} = -\frac{1}{6}v_0\,\vec{j}$$

$$\vec{p}\,'_{1f} = \frac{1}{3}m_0 v_0\,\vec{j}, \qquad \vec{p}\,'_{2f} = -\frac{1}{3}m_0 v_0\,\vec{j} = -\vec{p}\,'_{1f}$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}$, $\vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$

- En el sistema de referencia "laboratorio", velocidades

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}'_{1f} + \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{v_0}{3}(4\vec{i} + \vec{j})$$
$$\vec{v}_{2f} = \vec{v}'_{2f} + \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{v_0}{6}(8\vec{i} - \vec{j})$$

y momentos

$$\vec{p}_{1f} = \vec{v}'_{1f} + \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_0 v_0}{3}(4\vec{i} + \vec{j})$$
$$\vec{p}_{2f} = \vec{v}'_{2f} + \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{m_0 v_0}{3}(8\vec{i} - \vec{j})$$

Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}$, $\vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$

- Ángulo θ_{lab} entre $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{1f}$

$$\theta_{\text{lab}} = \arccos\left(\frac{\vec{v}_{1i}\cdot\vec{v}_{1f}}{|\vec{v}_{1i}|\,|\vec{v}_{1f}|}\right)$$

con

$$|\vec{v}_{1i}| = 2v_0, \quad |\vec{v}_{1f}| = \frac{v_0\sqrt{17}}{3}, \quad \vec{v}_{1i}\cdot\vec{v}_{1f} = \frac{8v_0^2}{3}$$

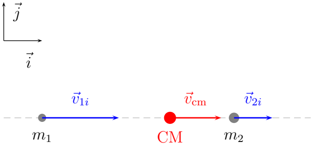
obtenemos

$$\theta_{\text{lab}} = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = 0.24\,\text{rad} = 14^\circ$$

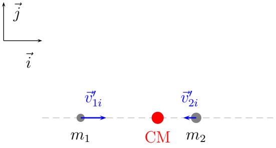
Colisiones en dos dimensiones

Ejemplo: colisión $m_1 = m_0$, $m_2 = 2m_0$, $\vec{v}_{1i} = 2v_0\,\vec{i}$, $\vec{v}_{2i} = v_0\,\vec{i}$

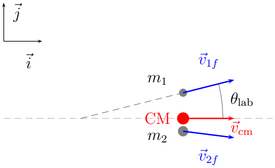
"Laboratorio", estado inicial



Centro de masas, estado inicial



"Laboratorio", estado final



Centro de masas, estado final