Tema 4 – Trabajo y energía. Principios de conservación

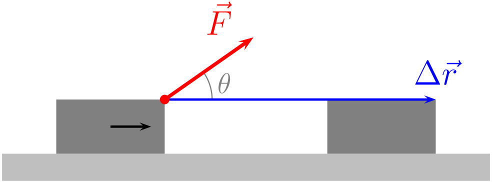
- Trabajo de una fuerza.
- Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética.
- Potencia.
- Fuerzas conservativas. Energía potencial.
- Energía mecánica. Conservación.
- Energía potencial y equilibrio.
- Fuerzas conservativas y no conservativas. Principio de conservación de la energía de un sistema.

Trabajo de una fuerza

Fuerza constante

- El trabajo realizado por una fuerza constante es igual al producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento por la magnitud del desplazamiento.

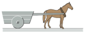
$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}|\,|\Delta\vec{r}|\,\cos\theta$$



- W es una magnitud escalar (puede ser $W > 0$, $W = 0$, $W < 0$)
- $[W] = ML^2T^{-2}$, unidad derivada S.I. $1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{J}$, julio ("joule")

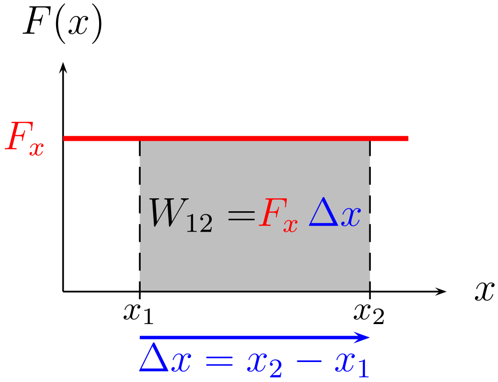
Trabajo de una fuerza

Trabajo de una fuerza constante, ejemplos

- $W > 0$, fuerza ejercida por el caballo que tira del carro 
- $W = 0$, fuerza gravitacional sobre un objecto en reposo sobre una superficie horizontal ($\Delta\vec{r} = \vec{0}$)
- $W = 0$, fuerza gravitacional sobre un objecto que desliza sobre una superficie horizontal ($\Delta\vec{r} \perp \vec{g}$)
- $W < 0$, fuerza de rozamiento

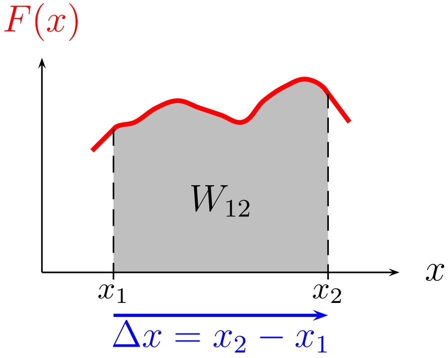
Trabajo de una fuerza

Fuerza constante en una dimensión



Trabajo de una fuerza

Generalizamos a una fuerza variable en una dimensión



$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx$$

$$W_{21} = -W_{12}$$

Trabajo de una fuerza

Generalizamos a una fuerza variable en tres dimensiones

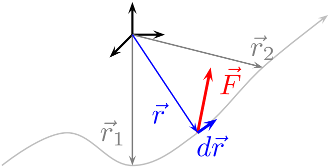
$$W_{12} = \int_{C_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Integral *de camino* entre $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$
$d\vec{r}$ a lo largo de la curva C_{12},

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

con dx, dy, dz relacionados por el camino.
Mismo camino, sentido contrario:

$$W_{12} \mapsto W_{21} = -W_{12}$$



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: una partícula se encuentra sometida a la fuerza

$$\vec{F}(\vec{r}) = 3y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$$

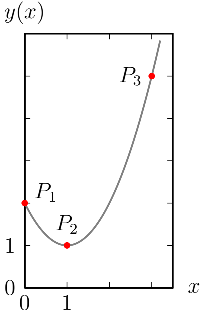
mientras sigue la trayectoria

$$y(x) = x^2 - 2x + 2, \quad z = 0\,.$$

Calcula el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se traslada

(i) entre $P_1 = (0, 2, 0)$ y $P_2 = (1, 1, 0)$,

(ii) entre $P_1 = (0, 2, 0)$ y $P_3 = (3, 5, 0)$.



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$

- Trayectoria $y(x) = x^2 - 2x + 2$, $z = 0$:

  escogemos x para describir la trayectoria

- Información de la trayectoria en $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + (2x-2)dx\,\vec{j},$$

$$dy = \frac{dy}{dx}dx = (2x-2)dx$$

$$dz = \frac{dz}{dx}dx = 0$$

- Información de la trayectoria en $\vec{F}(\vec{r})$

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = \vec{F}(x, y(x), z(x))$$

- Cálculo de $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$

- Cálculo de $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} =& (3y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}) \cdot (dx\,\vec{i} + (2x-2)dx\,\vec{j}) \\ & (3y + (2x-2)xy)\,dx \\ & (x^2 - 2x + 2)(2x^2 - 2x + 3)dx \\ & \left(2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6\right)dx\end{aligned}$$

- Trabajo $W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

$$\int^{x} \left(2\mathrm{x}^4 - 6\mathrm{x}^3 + 11\mathrm{x}^2 - 10\mathrm{x} + 6\right) d\mathrm{x}$$

$$= \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trabajo de $\vec{F}(\vec{r}) = 3y\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$

- Caso (i)

$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{107}{30}$$

- Caso (ii)

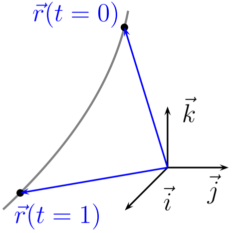
$$W_{P_1 \to P_3} = \int_{P_1}^{P_3} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^3 \left(2x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 10x + 6\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 5x^2 + 6x\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{477}{10}$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: una partícula sigue la trayectoria

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$
$$x(t) = 1 + t$$
$$y(t) = -t^2$$
$$z(t) = 3 - 2t$$



Sobre esta partícula actúa la fuerza

$$\vec{F}(\vec{r}) = -y\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x^2 + y)\vec{k}$$

Calcula el trabajo que realiza la fuerza cuando la partícula se desplaza entre $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0)$ y $\vec{r}_1 = \vec{r}(t=1)$.

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trayectoria parametrizada t

- En primer lugar,

$$\vec{r} = (1+t)\vec{i} - t^2\vec{j} + (3-2t)\vec{k}$$
$$d\vec{r} = \left(\vec{i} - 2t\vec{j} - 2\vec{k}\right) dt$$

- En la expresión de $\vec{F}$, imponemos la trayectoria

$$\vec{F}(\vec{r}) = -y\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x^2+y)\vec{k}$$
$$\vec{F}(t) = t^2\vec{i} + 5\vec{j} + (1+2t)\vec{k}$$

- Calculamos $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(t^2 - 10t - 2(1+2t)\right) dt = \left(t^2 - 14t - 2\right) dt$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: trayectoria parametrizada t

- Trabajo

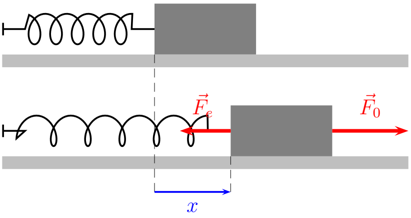
$$W_{\vec{r}_0 \to \vec{r}_1} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} =$$

$$\int_0^1 \left(t^2 - 14t - 2\right) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 7t^2 - 2t\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{26}{3}$$

Trabajo de una fuerza

Ejemplo: en una dimensión, se aplica una fuerza externa constante F_0 a un bloque unido a un muelle; el bloque se desplaza una distancia d desde la posición inicial de equilibrio hasta la posición final de equilibrio. La constante de recuperación del muelle es k (ley de Hooke: fuerza de recuperación elástica $F_e = -kx$ con x el desplazamiento con respecto al equilibrio).

- Expresa F_0 en función de d y k.
- Calcula el trabajo realizado sobre el bloque (el trabajo realizado por la fuerza neta).



Trabajo de una fuerza

Ejemplo: muelle

- Equilibrio final:

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_e = \vec{0} \;\Rightarrow\; F_0 = kd$$

- Trabajo realizado:
  - desplazamiento entre $x = 0$ y $x = d$
  - fuerza neta $F_{\text{neta}} = F_0 - kx$

$$W = \int_0^d F_{\text{neta}}\, dx = \int_0^d (F_0 - kx)\, dx =$$

$$\left[F_0 x - \frac{kx^2}{2}\right]_{x=0}^{x=d} = F_0 d - \frac{kd^2}{2} = \frac{kd^2}{2}$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

- La energía cinética de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ es

$$E_c \equiv \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

  - E_c es una magnitud escalar, $E_c \geq 0$
  - dimensiones $[E_c] = ML^2T^{-2}$, unidad derivada S.I.
    $1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = 1\,\mathrm{J}$, julio ("joule")

Teorema trabajo-energía cinética

El trabajo total realizado sobre una partícula de masa m por la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ que actúa sobre la misma, es igual a la variación de la energía cinética de la partícula

$$W_{if} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Teorema trabajo-energía cinética (forma diferencial)

- Energía cinética en un instante t

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v}$$

- Variación con $t \mapsto t + dt$

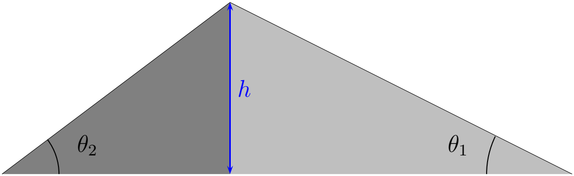
$$dE_c = \frac{dE_c}{dt} dt = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\vec{v} \cdot \vec{v}\right) dt = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt$$

- Tenemos $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{\mathrm{Neta}}$ y $\vec{v}\, dt = d\vec{r}$, de modo que

$$dE_c = \vec{F}_{\mathrm{Neta}} \cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; \Delta E_c = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{\mathrm{neta}} \cdot d\vec{r} = W_{if}$$

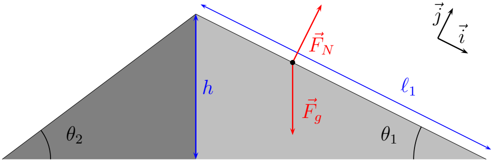
Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: una esquiadora prueba unos esquís experimentales que tienen rozamiento despreciable con la nieve. Los prueba en dos pistas rectilíneas que tienen diferente pendiente y longitud, pero tienen la misma diferencia de altura entre los puntos inicial y final (ver figura). Si la esquiadora inicia cada descenso en reposo, ¿cuál es la diferencia entre las energías cinéticas finales?



Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: esquiadora



- Iniciando en reposo, $\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2$ con $v_f = |\vec{v}_f|$ la velocidad final
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = mg\left(-\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{i}\right), \quad \vec{F}_N = F_N\,\vec{j}$$

- Para calcular el trabajo de la fuerza neta, camino $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$ con $x \in [0; \ell]$
- Trabajo de la fuerza neta

$$W = \int_i^f \vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = \int_0^\ell \Big(mg\sin\theta\,\vec{i} + (F_N - mg\cos\theta)\vec{j}\Big) \cdot (dx\,\vec{i})$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: esquiadora

- Trabajo de la fuerza neta

$$W = \int_0^{\ell} \left(mg \sin\theta \, \vec{i} + (F_N - mg\cos\theta)\vec{j} \right) \cdot (dx\, \vec{i}) =$$

$$mg\sin\theta \int_0^{\ell} dx = mg\,\ell \sin\theta = mgh$$

... que no depende de ℓ, θ.

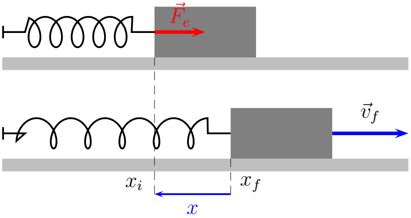
- De acuerdo con el teorema trabajo-energía cinética,

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

en ambos casos, y la diferencia entre las energías cinéticas finales de ambos casos es nula.

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: un bloque de masa $m = 1.6$ kg está unido a un muelle de constante $k = 1000$ N/m. Se comprime 2 cm y se libera desde el reposo. Calcular la velocidad del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio, si la superficie no presenta rozamiento.



Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: bloque-muelle

- Sea x el desplazamiento del bloque con respecto a la posición de equilibrio (que por tanto es $x = x_f = 0$); se comprime el muelle hasta $x = x_i = -2$ cm. La fuerza neta que actúa sobre el bloque es

$$F_{\text{neta}}(x) = -kx$$

(N.B. movimiento en una dimensión)

- Teorema trabajo-energía cinética ($\vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{r} = F_{\text{neta}} dx$)

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{neta}}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_i}^{x_f} =$$

$$\frac{k}{2}\left(x_i^2 - x_f^2\right) = \frac{kx_i^2}{2} = \frac{1000}{2}(-2 \times 10^{-2})^2\,\mathrm{N\,m^{-1}\,m^2} = 0.2\,\mathrm{J}$$

$$\Delta E_c = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{mv_f^2}{2}$$

Energía cinética. Teorema trabajo-energía cinética

Ejemplo: bloque-muelle

- Teorema trabajo-energía cinética

$$W = \Delta E_c \iff \frac{kx_i^2}{2} = \frac{mv_f^2}{2} \iff v_f = \sqrt{\frac{kx_i^2}{m}} = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Potencia

- La potencia suministrada por una fuerza es el trabajo por unidad de tiempo que realiza dicha fuerza.
  Velocidad a la que se transfiere la energía

  Potencia (instantánea) $P = \dfrac{dW}{dt}$;

  dW asociado a desplazamiento $d\vec{r}$: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

  si $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, $P = \dfrac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

  Potencia media $\overline{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t}$

  - Magnitud escalar
  - $[P] = ML^2T^{-3}$, unidad derivada S.I. $1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}} = 1\,\mathrm{W}$, vatio ("watt")

Potencia

En general, para cualquier transferencia de energía,

$$P = \frac{dE}{dt}$$

Es frecuente expresar energías en función de $P \times$ tiempo
(e.g. recibo suministro eléctrico)

$$1\,\mathrm{kWh} = 10^3\,\mathrm{W} \times 3600\,\mathrm{s} = 3.6 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

Potencia

Ejemplo: un ascensor de 1000 kg soporta una carga máxima de 800 kg. Una fuerza de rozamiento constante de 4000 N retarda su movimiento hacia arriba. Calcula

- la potencia que suministra el motor para subir a una velocidad constante de 3 m/s;
- la potencia del motor en cada instante, para proporcionar una aceleración hacia arriba de 1 m/s^2.

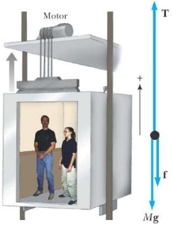
Potencia

Ejemplo: ascensor

- Fuerzas (problema 1D)

$$\vec{T} \rightarrow T,\ \vec{F}_g \rightarrow -mg,\ \vec{f}_r \rightarrow -f_r$$

con $m = 1800$ kg, $f_r = 4000$ N.



- Velocidad constante v

$$T - mg - f_r = 0,\ T = mg + f_r = 2.16 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \rightarrow P = T\,v = 6.50 \times 10^4\ \mathrm{W}$$

- Aceleración constante a

$$T - mg - f_r = ma,\ T = m(g + a) + f_r = 2.35 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) \rightarrow P = T\,v(t) = T(v_0 + at)$$

Potencia y energía cinética

Ejemplo: un coche acelera desde el reposo a 100 km/h en 8 s. La masa del coche es 800 kg. Suponiendo que esta aceleración se produce a potencia constante,

- calcular la potencia desarrollada por el motor.
- ¿Cuánto tiempo necesitará para acelerar de 40 km/h a 80 km/h?
- ¿Cuánto tiempo necesitará para acelerar de 80 km/h a 120 km/h?

Potencia y energía cinética

Ejemplo: aceleración-coche

- Movimiento 1D; potencia P constante,

$$P = \frac{dE_c}{dt} = \frac{(\Delta E_c)_1}{(\Delta t)_1} = \frac{m}{2}\frac{v_{f_1}^2 - v_{i_1}^2}{t_{f_1} - t_{i_1}}$$

$$= \frac{800}{2}\frac{100^2}{8}\frac{\mathrm{kg\,km^2\,h^{-2}}}{\mathrm{s}} = 3.86\times 10^4\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}} = 3.86\times 10^4\,\mathrm{J}$$

- Aceleración de $v_{i_2} = 40$ km/h a $v_{f_2} = 80$ km/h:

$$P = \frac{(\Delta E_c)_2}{(\Delta t)_2} \;\Leftrightarrow\; (\Delta t)_2 = \frac{(\Delta E_c)_2}{P} = \frac{m(v_{f_2}^2 - v_{i_2}^2)}{2P} = 3.9\,\mathrm{s}$$

$$\text{o bien } (\Delta t)_2 = \frac{(\Delta E_c)_2}{P} = \frac{(\Delta E_c)_2}{(\Delta E_c)_1}(\Delta t)_1 = \frac{v_{f_2}^2 - v_{i_2}^2}{v_{f_1}^2 - v_{i_1}^2}(\Delta t)_1$$

- Aceleración de $v_{i_3} = 80$ km/h a $v_{f_3} = 120$ km/h:

del mismo modo, $(\Delta t)_3 = 6.4\,\mathrm{s}$

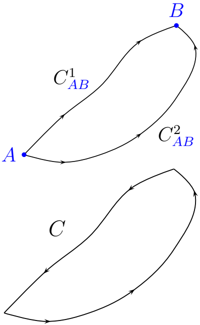
Fuerzas conservativas

Fuerza conservativa

Una fuerza es conservativa si el trabajo realizado por dicha fuerza es independiente de la trayectoria o, equivalentemente, si el trabajo realizado en toda trayectoria cerrada es nulo.

Para cualesquiera A, B, C^1_{AB}, C^2_{AB},

$$W_{AB} = \int_{C^1_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C^2_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



W_{AB} depende únicamente de A y B

Para cualquier C cerrado,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

[N.B. “Circulación” de $\vec{F}$]

Energía potencial

Energía potencial

La diferencia de energía potencial entre dos puntos A y B, $U_A - U_B$, asociada a una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ conservativa, es el trabajo realizado por $\vec{F}(\vec{r})$ entre A y B

$$U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = -\Delta U_{AB} = W_{\vec{r}_A\vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}}$$

$$= \int_{\vec{r}_{\mathrm{ref}}}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}} - \int_{\vec{r}_{\mathrm{ref}}}^{\vec{r}_A} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}}$$

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\mathrm{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}}, \qquad U(\vec{r}_{\mathrm{ref}}) = 0$$

Energía potencial

Energía potencial

La diferencia de energía potencial entre dos puntos A y B, $U_A - U_B$, asociada a una fuerza $\vec{F}(\vec{r})$ conservativa, es el trabajo realizado por $\vec{F}(\vec{r})$ entre A y B

$$U(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_B) = -\Delta U = W_{\vec{r}_A\vec{r}_B} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}}$$

$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{\mathrm{ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\mathrm{r}}) \cdot d\vec{\mathrm{r}}, \qquad U(\vec{r}_{\mathrm{ref}}) = 0$$

- Definición de la *diferencia* de energía potencial entre dos puntos
- Referencia arbitraria ("origen") $\vec{r}_{\mathrm{ref}}$ por comodidad
- Cuando la fuerza realiza un trabajo *positivo*(*negativo*), la energía potencial *disminuye*(*aumenta*)

Energía potencial

Ejemplo: energía potencial gravitacional

- Fuerza gravitatoria conservativa
- Cerca de la superficie terrestre $\vec{g} = -g\vec{k}$ constante
- Masa puntual m, diferencia de energía potencial entre $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ y $\vec{r}_2 = (0, 0, h)$
  - calculamos con camino $(0, 0, z)$ con $z \in [0; h]$, $d\vec{r} = dz\,\vec{k}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mg\,dz$

$$U_g(\vec{r}_2) - U_g(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_h^0 (-mg)dz = mgh$$

  - (Resultado independiente del camino escogido)
    Depende únicamente de la coordenada en la dirección de $\vec{g}$
- Se suele escoger $U_g(z = 0) = 0$ como referencia de modo que

$$U_g(x, y, z) = mgz$$

Energía potencial

Ejemplo: energía potencial de un muelle (fuerza recuperadora), en 1D

- Muelle con constante de recuperación k y desplazamiento con respecto al equilibrio $x \Rightarrow$ fuerza recuperadora $F(x) = -kx$
- $F(x)$ fuerza conservativa
- Diferencia de energía potencial entre la posición x y la de equilibrio $(x = 0)$

$$U_{\mathrm{re}}(x) - U_{\mathrm{re}}(0) = \int_x^0 (-k\mathrm{x})d\mathrm{x} = \frac{1}{2}kx^2$$

- Se suele escoger $U_{\mathrm{re}}(x = 0) = 0$ como referencia de modo que

$$U_{\mathrm{re}}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Energía mecánica. Conservación

- Según el teorema Trabajo-Energía cinética

$$\Delta E_{c_{if}} = E_{c_f} - E_{c_i} = W_{if}^{\mathrm{Tot}} = W_{if}^{\mathrm{C}} + W_{if}^{\mathrm{NoC}} = -\Delta U_{if} + W_{if}^{\mathrm{NoC}}$$

$$\Delta E_{c_{if}} + \Delta U_{if} = (E_{c_f} + U_f) - (E_{c_i} + U_i) = W_{if}^{\mathrm{NoC}}$$

- Definimos la energía mecánica E_{Mec}

$$E_{\mathrm{Mec}} \equiv E_c + U$$

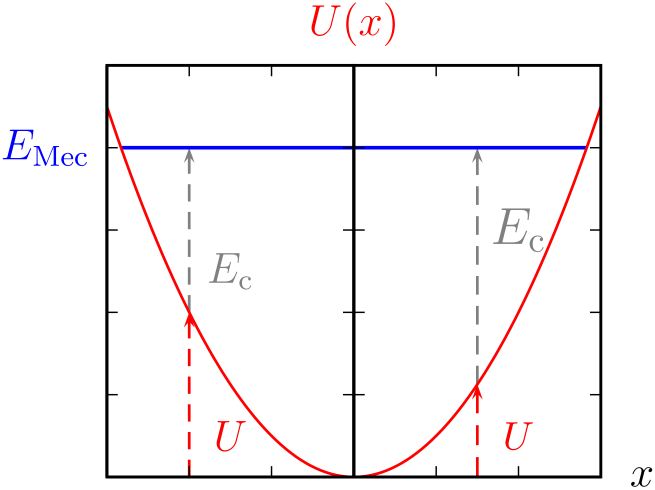
- Por tanto, si $W_{if}^{\mathrm{NoC}} = 0$,

$$E_{c_f} + U_f = E_{c_i} + U_i = \mathrm{Cte}$$

Conservación de la energía mecánica

La energía mecánica de un sistema permanece constante si solo actúan fuerzas conservativas o son las únicas que realizan trabajo

Energía mecánica. Conservación



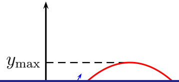
Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: próxima al borde de un tejado de un edificio de 12 m de altura, una persona golpea con el pie un balón con una velocidad inicial $v_i = 16$ m/s y un ángulo de tiro de $60°$ sobre la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, determinar:

- la altura por encima del edificio que alcanza el balón,
- su velocidad justo antes de chocar con el suelo.

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: balón



- Conservación de la energía mecánica entre el punto inicial i y el punto f de altura máxima (condición $y_{\max}$: $v_{f_y} = 0$)

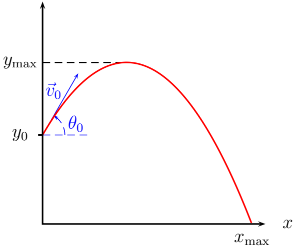
$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{Mec}_i} &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_i|^2 + mgy_0 \\
&= \frac{mv_i^2}{2} + mgy_0 \\
E_{\mathrm{Mec}_f} &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_f|^2 + mgy_{\max} \\
&= \frac{m}{2}\left(v_{f_x}^2 + v_{f_y}^2\right) + mgy_{\max} \\
&= \frac{mv_i^2 \cos^2\theta_0}{2} + mgy_{\max}
\end{aligned}
$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: balón

- por tanto

$$E_{\text{Mec}_i} = E_{\text{Mec}_f} \Leftrightarrow y_{\max} = y_0 + \frac{v_i^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$



- De nuevo conservación de la energía mecánica con ff el punto en que se alcanza el suelo (condición: $y = 0$)

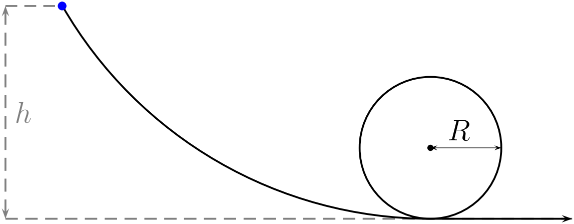
$$E_{\text{Mec}_{ff}} = \frac{1}{2} m v_{ff}^2 \Rightarrow v_{ff}^2 = v_i^2 + 2gy_0$$

- Sabemos que $v_{ff_x} = v_i \cos\theta_0$, por tanto

$$v_{ff_y} = \pm\sqrt{v_i^2 \sin^2\theta_0 + 2gy_0} \quad \text{[N.B. signo -]}$$

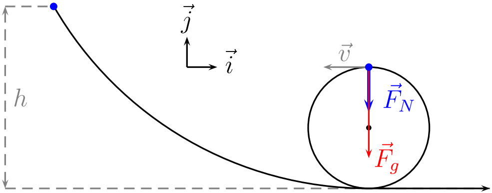
Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: un carrito de montaña rusa se suelta (en reposo) desde una altura h relativa a la parte inferior de una vía sobre la que desliza sin rozamiento. ¿Cuál es valor mínimo de h para completar el rizo de radio R sin "caerse"?



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: montaña rusa-rizo



- Condición límite para "no caerse": $|\vec{F}_N| = 0$
- La trayectoria impone el radio de curvatura R, y por tanto

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

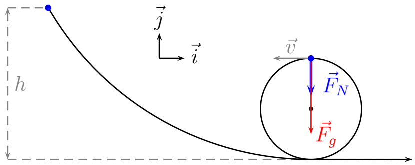
- Conservación de la energía mecánica

posición inicial i : $\quad y_i = h, \quad |\vec{v}_i| = 0, \qquad E_{\text{Mec}} = mgh$

posición final f : $\quad y_f = 2R, \quad |\vec{v}_f| = v, \qquad E_{\text{Mec}} = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: montaña rusa-rizo



- Conservación de la energía mecánica $\Rightarrow v^2 = 2g(h-2R)$
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad F_N = -F_N\vec{j}, \Rightarrow \vec{F}_{\text{neta}} = -(mg + F_N)\vec{j}$$

- Segunda ley, $\vec{a} = \vec{a}_\perp = -a_\perp\vec{j}$

$$ma_\perp = mg + F_N \;\Rightarrow\; \text{condición límite } a_\perp = g$$

- Obtenemos por tanto

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \;\Leftrightarrow\; g = 2g\frac{h-2R}{R} \;\Leftrightarrow\; h = \frac{5}{2}R$$

Energía mecánica. Conservación

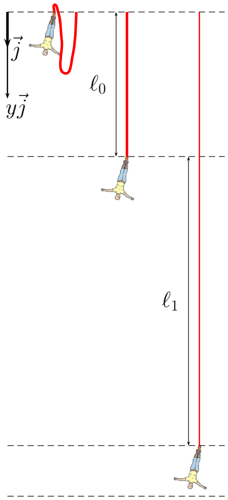
Ejemplo: un muchacho salta desde una plataforma que está a 134 m de altura sobre el río Nevis (Nueva Zelanda). Después de caer libremente 40 m, la cuerda atada a los tobillos del muchacho empieza a alargarse (la longitud en reposo de la cuerda es de 40 m). El muchacho continúa descendiendo durante 80 m más antes de pararse en la parte más baja del descenso. Suponiendo que la masa del muchacho es 100 kg, la cuerda sigue la ley de Hooke, tiene masa despreciable y se desprecia el rozamiento con el aire:

- ¿cuál es la aceleración en la parte más baja del descenso?
- ¿A qué altura se alcanza la velocidad máxima? ¿Qué vale la velocidad máxima?

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- $\ell_0 = 40$ m
- $\ell_1 = 80$ m
- En $y = \ell_0 + \ell_1$, $\vec{v} = \vec{0}$



Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Conservación de la energía mecánica persona + cuerda (sin masa); problema unidimensional,

$$E_{\mathrm{Mec}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgy + \begin{cases} 0, & y < \ell_0 \\ \frac{1}{2}k(y-\ell_0)^2, & y \geq \ell_0 \end{cases}$$

$$y_0 = 0, \quad E_{\mathrm{Mec}} = 0$$

$$y_1 = \ell_0, \quad E_{\mathrm{Mec}} = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg\ell_0$$

$$y_2 = \ell_0 + \ell_1, \quad E_{\mathrm{Mec}} = -mg(\ell_0 + \ell_1) + \frac{1}{2}k\ell_1^2$$

con $m = 100$ kg la masa de la persona, k la constante de recuperación de la cuerda, $\ell_0 = 40$ m la longitud en reposo de la cuerda y $\ell_1 = 80$ m el alargamiento de la cuerda (con respecto al reposo) en el punto más bajo.

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Queremos obtener la aceleración en y_2, para lo cual, de acuerdo con la segunda ley, necesitamos conocer la fuerza de recuperación que ejerce la cuerda

$$m a \vec{j} = (mg - k\ell_1)\vec{j} \;\Rightarrow\; a = g - \frac{k\ell_1}{m}$$

- Para ello necesitamos conocer k; obtendremos k de la información que proporciona el punto $y_2 = \ell_0 + \ell_1$: imponiendo la conservación de la energía mecánica

$$0 = -mg(\ell_0 + \ell_1) + \frac{1}{2}k\ell_1^2 \;\Rightarrow\; k = \frac{2mg}{\ell_1}\left(1 + \frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = 36.8\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

con lo que

$$a = g - 2g\left(1 + \frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = -g\left(1 + 2\frac{\ell_0}{\ell_1}\right) = -2g$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Velocidad máxima $\Leftrightarrow$ energía cinética máxima
  Siendo E_{Mec} constante $\rightarrow$ minimización de $E_{\text{Mec}} - E_c$

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = 0, \quad \frac{d^2}{dy^2}(E_{\text{Mec}} - E_c) > 0$$

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = \begin{cases} -mg, & y < \ell_0 \\ -mg + k(y - \ell_0), & y \geq \ell_0 \end{cases}$$

  Por tanto

$$\frac{d}{dy}(E_{\text{Mec}} - E_c) = 0 \;\Rightarrow\; y_{v_{\max}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} = \ell_0 + \frac{1}{2}\frac{\ell_1^2}{\ell_0 + \ell_1} = 66.7\,\text{m}$$

- N.B. Equivalentemente podemos argumentar que, dado que la fuerza gravitatoria es constante y la elástica actúa en dirección contraria, la velocidad máxima se alcanza cuando la fuerza neta sea nula, es decir, cuando:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_g = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; (-k(y - \ell_0) + mg)\vec{j} = \vec{0}$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump

- Valor de la velocidad máxima a partir de E_{Mec}

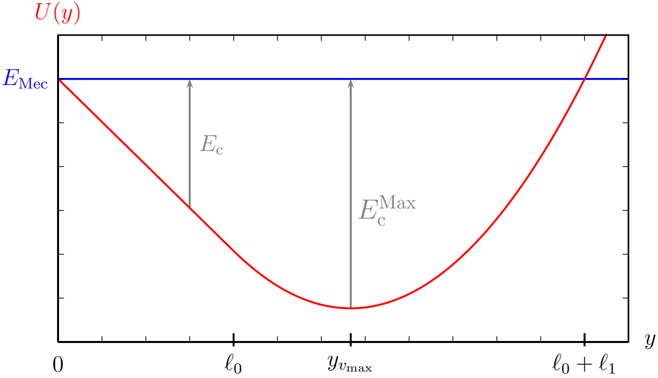
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgy_{v_{\max}} - \frac{1}{2}k(y_{v_{\max}} - \ell_0)^2 = mg\ell_0 + \frac{(mg)^2}{k} - \frac{(mg)^2}{2k}$$

$$= mg\left(\ell_0 + \frac{\ell_1^2}{4(\ell_0 + \ell_1)}\right) = mg\frac{(2\ell_0 + \ell_1)^2}{4(\ell_0 + \ell_1)}$$

$$v_{\max} = (2\ell_0 + \ell_1)\sqrt{\frac{g}{2(\ell_0 + \ell_1)}} = 32.3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Energía mecánica. Conservación

Ejemplo: bungee-jump



Energía potencial y equilibrio

- Para una fuerza conservativa en una dimensión $\vec{F} = F_x \vec{i}$, la variación de la energía potencial en un desplazamiento $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$, es

$$dU = \frac{dU}{dx} dx = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x\, dx \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{dU}{dx}$$

  es decir, la fuerza es la derivada de la energía potencial

- Si para x_{eq}, $\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=x_{eq}} = 0$, el sistema está en equilibrio en x_{eq}

  - equilibrio estable: $\left\{ \begin{array}{l} \text{para } x_{eq} + \epsilon > x_{eq},\ F_x < 0 \\ \text{para } x_{eq} - \epsilon < x_{eq},\ F_x > 0 \end{array} \right\}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} > 0$

    i.e. fuerza "→" posición de equilibrio

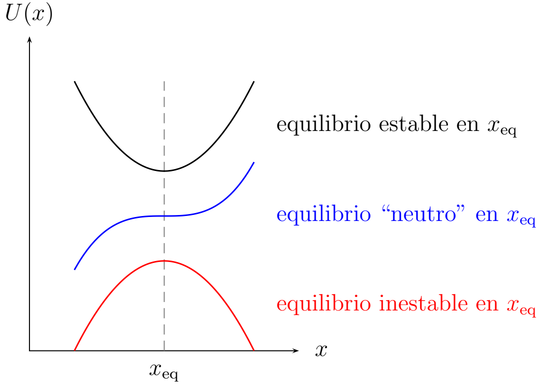
  - equilibrio inestable: $\left\{ \begin{array}{l} \text{para } x_{eq} + \epsilon > x_{eq},\ F_x > 0 \\ \text{para } x_{eq} - \epsilon < x_{eq},\ F_x < 0 \end{array} \right\}, \quad \frac{d^2U}{dx^2} < 0$

    i.e. fuerza "←" posición de equilibrio

  - equilibrio "neutro": ni estable ni inestable

Energía potencial y equilibrio

- Equilibrio estable: U tiene un mínimo (local) en x_{eq}
- Equilibrio inestable: U tiene un máximo (local) en x_{eq}
- Equilibrio "neutro": U tiene un punto de silla en x_{eq}

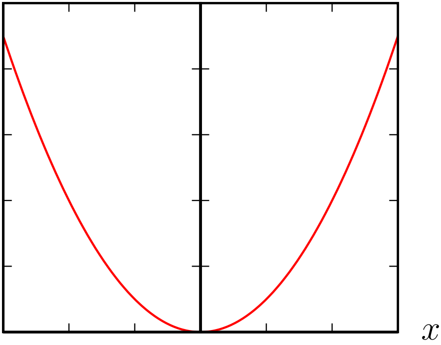


En general, derivada $\neq 0$ de menor orden: par y positiva, par y negativa, impar

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: sistema muelle-bloque

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2,\ x_{\text{eq}} = 0,\ F_x(x) = -kx$$



$x < 0,\ F_x > 0 \rightarrow$ $\leftarrow x > 0,\ F_x < 0$

$$x = 0,\ F_x = 0$$

Energía potencial y equilibrio

(*) Generalización 3D

- Fuerza conservativa $\vec{F}$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

- Desplazamiento $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

- Variación de la energía potencial dU

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

$$dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = -\vec{\nabla}U$$

Energía potencial y equilibrio

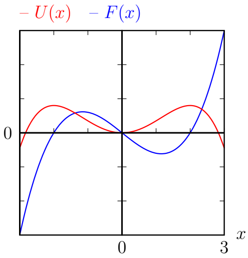
Ejemplo: considera, en una dimensión, un sistema sometido a la fuerza conservativa

$$F(x) = x^3 - 4x$$

Analiza la estabilidad y la energía potencial en las posiciones de equilibrio

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo $F(x) = x^3 - 4x$



- Equilibrio: $F(x) = 0$

  $F(x) = 0 = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

  Posiciones de equilibrio
  $x_{\text{eq}} = -2,\ 0,\ 2$

- Estabilidad: $\frac{dF}{dx}$

$$\frac{dF}{dx} = 3x^2 - 4 = \begin{Bmatrix} 8 \text{ en } x = -2 \\ -4 \text{ en } x = 0 \\ 8 \text{ en } x = -2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{\text{eq}} = -2,\ 2 \text{ inestables} \\ x_{\text{eq}} = 0 \text{ estable} \end{Bmatrix}$$

- $U(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2\ (+c)$,
  - máximos en $x_{\text{eq}} = -2,\ 2$
  - mínimo en $x_{\text{eq}} = 0$

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: la energía potencial de una molécula diatómica en función de la distancia r entre átomos tiene muy aproximadamente la forma dada por el *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right)$$

con r_0 y E_0 constantes.

- Representa $U(r)$ y obtén las posiciones de equilibrio
- Interpreta físicamente r_0 y E_0.

Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: molécula diatómica y *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right)$$

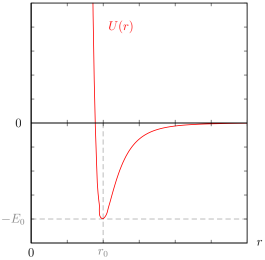
- Equilibrio (estable)

$$\frac{dU}{dr} = -12 \frac{E_0\, r_0^6}{r^7} \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} - 1 \right)$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \;\Rightarrow\; r_{\mathrm{eq}} = r_0$$

- Mínimo del potencial

$$U(r_0) = -E_0$$

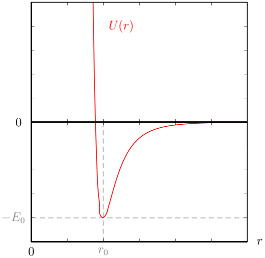


Energía potencial y equilibrio

Ejemplo: molécula diatómica y *potencial de Lennard-Jones*

$$U(r) = E_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{6} \right)$$

Molécula	E_0	r_0
H_2	$4.3 \cdot 10^{-22}$ J	$3.3 \cdot 10^{-10}$ m
N_2	$1.31 \cdot 10^{-21}$ J	$4.2 \cdot 10^{-10}$ m
O_2	$1.62 \cdot 10^{-21}$ J	$3.9 \cdot 10^{-10}$ m



N.B. Cambio de variables $\tilde{r} \equiv r/r_0$

$$U(r) = \tilde{U}(\tilde{r}) = E_0 \left(\tilde{r}^{-12} - 2\tilde{r}^{-6} \right)$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

- En presencia de fuerzas no conservativas (rozamiento, deformación permanente, ...) energía mecánica disminuye
- se transforma en otro tipo de energía (térmica, electromagnética, sonora, química, ...)

$$E_{\text{Sist}} = E_{\text{Mec}} + E_{\text{Otras}}$$

Conservacion de la energía

En un sistema aislado la energía total se conserva. La energía puede pasar de una forma a otra o de una región a otra, pero no ser creada o destruida.

$$\text{Sistema aislado: } \Delta E_{\text{Sist}} = 0$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

- Si hay transferencia de energía, se produce intercambio de trabajo con el exterior

Teorema Trabajo-Energía

El trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas externas es igual a la variación de la energía total del sistema

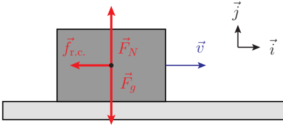
$$W_{\mathrm{Ext}} = \Delta E_{\mathrm{Sist}} = \Delta E_{\mathrm{Mec}} + \Delta E_{\mathrm{Otras}}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: se lanza un bloque de $m = 1$ kg que desliza con una velocidad inicial de 1 $\mathrm{m\,s^{-1}}$ sobre una superficie horizontal; el coeficiente de rozamiento cinético bloque-superficie es $\mu_c = 0.1$. ¿Qué distancia recorre el bloque antes de detenerse?

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: bloque desliza con rozamiento (cinético)



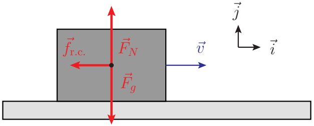
- Velocidad inicial $\vec{v} = v_0\,\vec{i}$, energía cinética inicial $E_{c_i} = \frac{1}{2}mv_0^2$
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = -mg\,\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\,\vec{j}, \quad \vec{f}_{\text{r.c.}} = -\mu_c F_N\,\vec{i}$$

  N.B. movimiento horizontal $\Rightarrow F_N = mg$, y por tanto la fuerza de rozamiento cinético es constante
- No hay variación de la energía potencial, la variación de la energía cinética es igual al trabajo realizado por la fuerza neta. El desplazamiento es $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$, con $x \in [0; d]$, siendo d la distancia recorrida hasta detenerse.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: bloque desliza con rozamiento (cinético)



- Distancia d

$$\vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{f}_{\text{r.c.}}\right) \cdot (dx\,\vec{i}) = -\mu_c F_N\,dx = -\mu_c mg\,dx$$

$$\Delta E_c = W \Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = \int_i^f \vec{F}_{\text{Neta}} \cdot d\vec{r} = \int_0^d dx(-\mu_c mg) = -\mu_c mgd$$

y por tanto

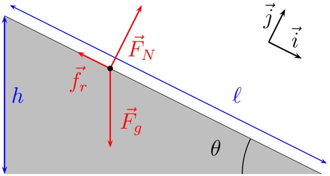
$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = 51\,\text{cm}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: una niña de masa 40 kg se desliza hacia abajo por un tobogán inclinado 30° (con respecto a la horizontal), desde una altura de 4 m sobre el suelo. El coeficiente de rozamiento cinético entre la niña y el tobogán es $\mu_c = 0.35$. La niña parte del reposo y desliza hasta llegar al suelo: ¿a qué velocidad llega al suelo?

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento



- Aplicamos el teorema trabajo-energía para relacionar la variación de la energía mecánica con el trabajo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la niña
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = mg(-\cos\theta\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{i}), \quad \vec{F}_N = F_N\,\vec{j}, \quad \vec{f}_r = -\mu F_N \vec{i}$$

- Rozamiento: si la fuerza en dirección $\vec{i}$ supera la fuerza de rozamiento estático máxima, entonces $\mu \to \mu_c$ y proseguimos con el problema.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento

- Rozamiento: no conocemos el coeficiente de rozamiento estático, tan solo podemos verificar hasta qué valor máximo de μ_e la niña no permanecería en equilibrio.
  De la componente $\vec{j}$, $F_N = mg\cos\theta$, por tanto la condición es

$$mg\sin\theta > \mu_e\, mg\cos\theta \;\Leftrightarrow\; \tan\theta > \mu_e$$

  Con $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$: si $\mu_e < 0.58$ la niña desliza desde el reposo inicial.
- La fuerza de rozamiento que actúa sobre la niña es

$$\vec{f}_{\mathrm{r.c.}} = -mg\mu_c\cos\theta\vec{i}$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: niña-tobogán con rozamiento

- Para determinar el trabajo realizado por esa fuerza neta entre los puntos inicial y final, tenemos $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$ con $x \in [0;\ell]$,

$$\vec{f}_{\text{r.c.}} \cdot (dx\,\vec{i}) = -\mu_c mg\cos\theta\,dx$$

$$W_{\text{roz}} = \int_0^\ell (-\mu_c mg\cos\theta)dx = -\mu_c mg\ell\cos\theta = -\frac{mgh\mu_c}{\tan\theta}$$

- La variación de la energía mecánica es

$$\Delta E_{\text{Mec}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh$$

- Con $W_{\text{roz}} = \Delta E_{\text{Mec}}$ obtenemos finalmente

$$v_f = \sqrt{2gh}\sqrt{1-\frac{\mu_c}{\tan\theta}} = 5.56\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2},\ \sqrt{2gh} = 8.85\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2},\ \sqrt{1-\frac{\mu_c}{\tan\theta}} = 0.63$$

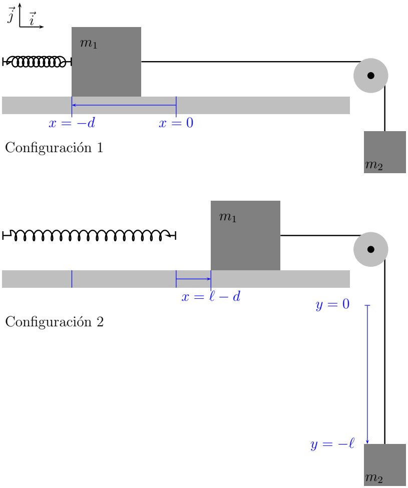
N.B. Límites $\mu_c \to 0$, $\tan\theta \to \mu_c$ y su significado físico

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: un bloque de masa $m_2 = 4$ kg cuelga de una cuerda (sin masa) que pasa (sin rozamiento) por una polea sin masa y está conectada a un bloque de masa $m_1 = 6$ kg. El bloque m_1 puede deslizar sobre una plataforma; el coeficiente de rozamiento cinético entre m_1 y la plataforma es $\mu_c = 0.2$. Sobre la plataforma tenemos también un muelle, sin masa, que tiene constante elástica 180 N/m.
En la configuración 1, el bloque m_1 se empuja contra el muelle, que se comprime 30 cm; con m_1 y m_2 en reposo, se libera m_1.
En la configuración 2, los bloques se han desplazado 40 cm con respecto a la configuración inicial. (Antes de alcanzar esa configuración, cuando el muelle tiene su longitud en reposo, pierde contacto con m_1 y permanece en ese estado)
(Ver figura)

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- ¿Qué valor mínimo debería tener el coeficiente de rozamiento estático para que, al liberar m_1, no hubiera movimiento? (Se asume en lo sucesivo que el coeficiente de rozamiento estático es inferior a ese valor)
- ¿Qué valor mínimo tendría que tener la constante elástica del muelle para que, al liberar m_1, la cuerda no tuviera tensión?
- ¿Cuál es la velocidad de los bloques en la configuración 2?



Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

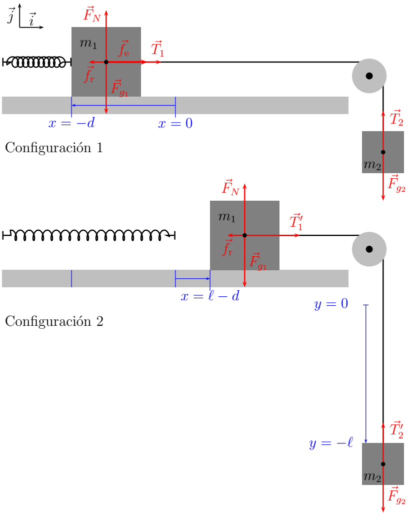
Fuerzas

$$\vec{F}_{g_1} = -m_1 g\,\vec{j}, \qquad \vec{F}_N = F_N\,\vec{j},$$

$$\vec{f}_{\mathrm{e}} = kd\,\vec{i}, \qquad \vec{f}_{\mathrm{r}} = -\mu_?F_N\,\vec{i},$$

$$\vec{T}_1 = T_1\,\vec{i},$$

$$\vec{F}_{g_2} = -m_2 g\,\vec{j}, \qquad \vec{T}_2 = T_2\,\vec{j}$$



Condición para el equilibrio

$$\vec{F}_{g_1} + \vec{F}_N + \vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{r}} + \vec{T}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_{g_2} + \vec{T}_2 = \vec{0}$$

con $\vec{f}_{\mathrm{r}} = -\mu_e F_N \vec{i}$ fuerza de rozamiento estático máximo

Cuerda: $T_1 = T_2 = T$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

$\vec{F}_{g_2} + \vec{T}_2 = \vec{0} \iff (T - m_2 g)\vec{j} = \vec{0}$

$\vec{F}_{g_1} + \vec{F}_N + \vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{r}} + \vec{T}_1 = \vec{0} \iff (kd + T - \mu_e F_N)\vec{i} + (F_N - m_1 g)\vec{j} = \vec{0}$

De las componentes $\vec{j}$

$$T = m_2 g, \quad F_N = m_1 g$$

con lo que, de la componente $\vec{i}$,

$$\mu_e = \frac{kd + m_2 g}{m_1 g} = 1.58$$

(N.B. $k = 180\,\mathrm{N/m}$, $d = 0.3\,\mathrm{m}$, $m_1 = 6\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)
Si el rozamiento estático tuviera $\mu_e > 1.58$, al liberar m_1, no se movería.

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

La cuerda no tiene tensión $\Leftrightarrow$ m_2 en caída libre, m_1 con aceleración $\vec{a} = a\vec{i}$ con $a > g$

Por tanto, el valor mínimo de k para el cual la cuerda no tendría tensión se obtiene con

$$\vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{r}} = (kd - \mu_c F_N)\vec{i} = m_1 g\vec{i}$$

$$\Leftrightarrow\ (kd - \mu_c m_1 g)\vec{i} = m_1 g\vec{i}\ \Leftrightarrow\ k = (1+\mu_c)\frac{m_1 g}{d} = 235\,\mathrm{N/m}$$

(N.B. rozamiento *cinético*)

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- Velocidad de los bloques: $\vec{v}_1 = v\,\vec{i}$, $\vec{v}_2 = -v\,\vec{j}$ (cuerda de longitud constante en tensión)
- Obtendremos v a partir de la conservación de la energía: la variación de la energía mecánica de muelle+bloques entre la configuración 1 y la configuración 2 será el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

  Configuración 1:

$$m_1 :\ E_c = 0,\ E_{\text{pot}} = 0, \quad m_2 :\ E_c = 0,\ E_{\text{pot}} = 0,$$

$$\text{muelle } k :\ E_c = 0,\ E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kd^2$$

  Configuración 2:

$$m_1 :\ E_c = \frac{1}{2}m_1 v^2,\ E_{\text{pot}} = 0, \quad m_2 :\ E_c = \frac{1}{2}m_2 v^2,\ E_{\text{pot}} = -m_2 g\ell,$$

$$\text{muelle } k :\ E_c = 0,\ E_{\text{pot}} = 0$$

Principio de conservación de la energía de un sistema

Ejemplo: muelle-bloques-polea

- Variación de la energía mecánica de muelle+bloques

$$\Delta E_{\mathrm{Mec}} = E^{(2)}_{\mathrm{Mec}} - E^{(1)}_{\mathrm{Mec}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - m_2 g\ell - \frac{1}{2}kd^2$$

- Trabajo realizado por $\vec{f}_{\mathrm{r}} = -\mu_c F_N \vec{i} = -\mu_c m_1 g \vec{i}$: desplazamiento $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$, $x \in [-d; \ell - d]$,

$$\vec{f}_{\mathrm{r}} \cdot d\vec{r} = -\mu_c m_1 g\, dx, \quad W_{f_{\mathrm{r}}} = \int_1^2 \vec{f}_{\mathrm{r}} \cdot d\vec{r} = \int_{-d}^{\ell - d} (-\mu_c m_1 g) dx = -\mu_c m_1 g \ell$$

- Obtenemos finalmente

$$v = \sqrt{\frac{2g\ell(m_2 - \mu_c m_1) + kd^2}{m_1 + m_2}} = 1.95\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(N.B. Caída libre con velocidad inicial nula:
tras 0.4 m de caída $v = 2.43\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)