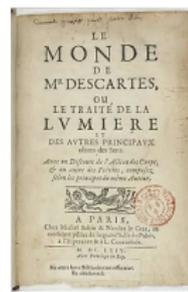


## Tema 3 – Dinámica de la partícula

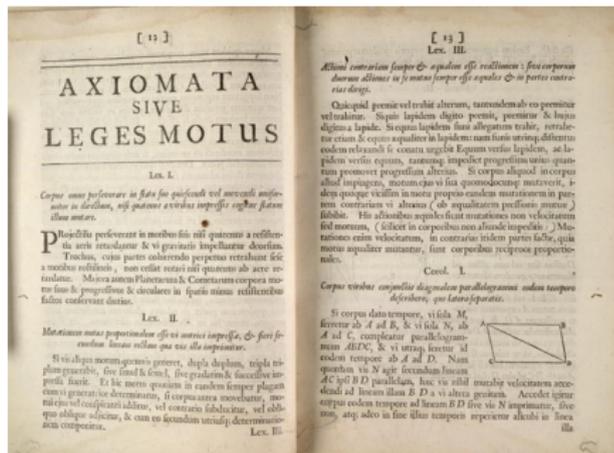
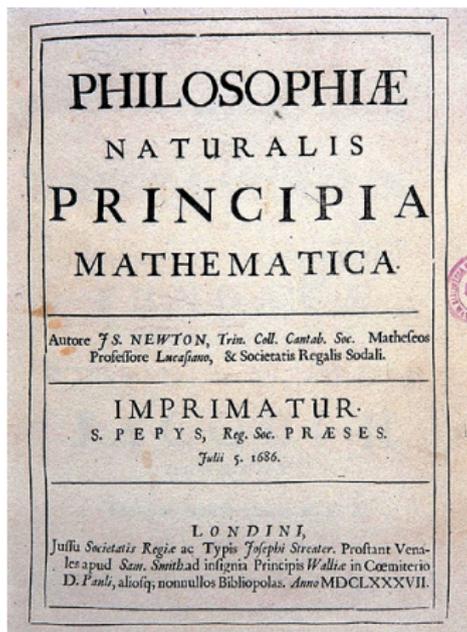
- Leyes de Newton
- Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo
- Tipos de fuerza en la naturaleza
- Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas
- Rozamiento estático y cinético, fuerzas de arrastre en fluidos, velocidad límite
- Movimiento circular y componente centrípeta de la aceleración
- Ausencia de peso

# Leyes de Newton

De **Aristóteles** (384-322 a.C.) a **Isaac Newton** (1642-1727), pasando (entre otros) por **Galileo Galilei** (1564-1642) y **René Descartes** (1596-1650)



# Leyes de Newton



# Leyes de Newton

## Primera ley – Principio de inercia de Galileo y Descartes

*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*

## Segunda ley – Ley fundamental de la dinámica

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

## Tercera ley – Ley de acción-reacción

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*

# Leyes de Newton

## Primera ley – Principio de inercia

Los cuerpos permanecen en su estado de reposo o movimiento uniforme rectilíneo salvo que cambien dicho estado por la acción de fuerzas

## Segunda ley – Ley fundamental de la dinámica

La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre él. Es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de ese cuerpo.

## Tercera ley – Ley de acción-reacción

Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos (acción/reacción). Si un cuerpo 1 ejerce una fuerza sobre el cuerpo 2, este ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el cuerpo 1.

# Leyes de Newton – Primera ley

## Primera ley – Principio de inercia

Los cuerpos permanecen en su estado de reposo o movimiento uniforme rectilíneo salvo que cambien dicho estado por la acción de fuerzas

- El movimiento rectilíneo con velocidad constante es *el natural* de los cuerpos

$$\text{Fuerza } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \text{ constante}$$

- **Fuerza:** agente externo que cambia ese estado (esto es cualitativo). Si la velocidad no cambia (módulo, dirección), la fuerza neta es nula
- En ocasiones contradice parte de nuestra experiencia cotidiana, cambio radical con respecto al paradigma aristotélico
- Necesidad de experimentación cuidadosa y abstracción (Galileo y caída de graves)

# Leyes de Newton – Segunda ley

## Segunda ley – Ley fundamental de la dinámica

La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección que la fuerza externa neta que actúa sobre él. Es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa de ese cuerpo.

$$\vec{F}_{\text{neto}} = m \vec{a}$$

- Suma de fuerzas  $\vec{F}_i$  que actúan sobre un cuerpo dado (partícula puntual)

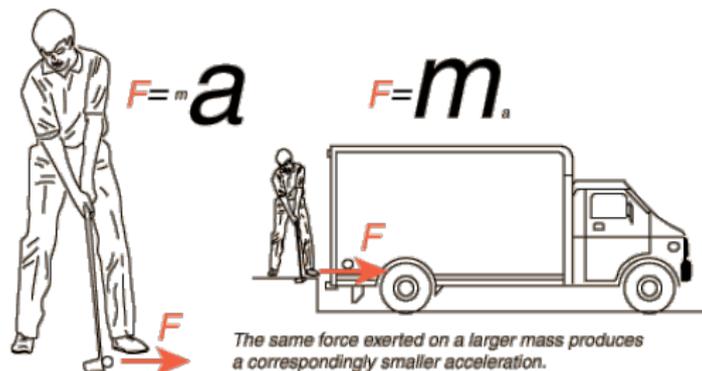
$$\vec{F}_{\text{neto}} = \sum_i \vec{F}_i \quad (\text{fuerza resultante})$$

- Masa de ese cuerpo:  $m$ , medida de su inercia
- Aceleración de ese cuerpo:  $\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$

# Leyes de Newton – Segunda ley

- Masa: propiedad (escalar) intrínseca que mide su resistencia a la aceleración, masa *inercial*
- Aplicando misma fuerza  $F$  a dos cuerpos se producen aceleraciones  $a_1$  y  $a_2$

$$\rightarrow \text{definición de masa: } \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$



# Leyes de Newton – Segunda ley

- Dimensiones

$$[\text{Fuerza}] = M L T^{-2}$$

- Unidades SI:  $\text{kg m s}^{-2}$ ; unidad derivada SI *newton*  
 $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$

- Otras unidades: libra, dina

- **Importante:** en general (necesario para  $m$  variable)

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$  es el *momento (lineal)* o *cantidad de movimiento*

# Leyes de Newton – Tercera ley

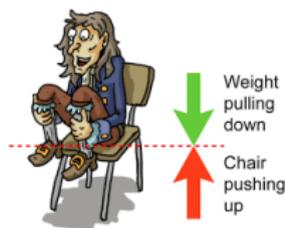
## Tercera ley – Ley de acción-reacción

Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos (acción/reacción). Si un cuerpo 1 ejerce una fuerza sobre el cuerpo 2, este ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el cuerpo 1.

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

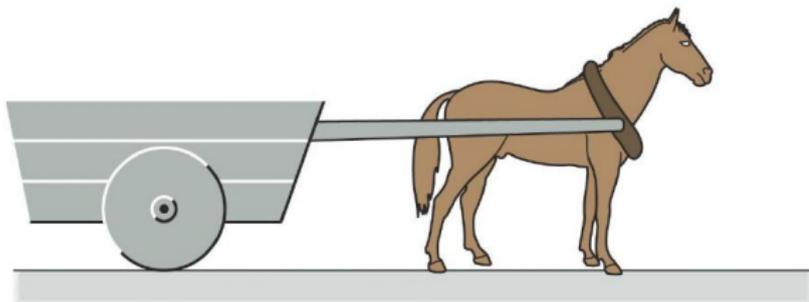
### Importante

- La fuerza (acción) y su opuesta (reacción) actúan sobre cuerpos *diferentes*

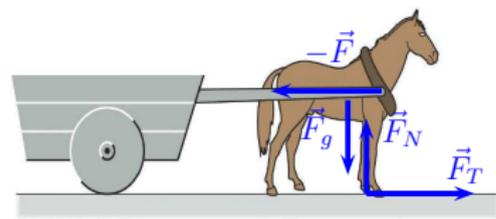
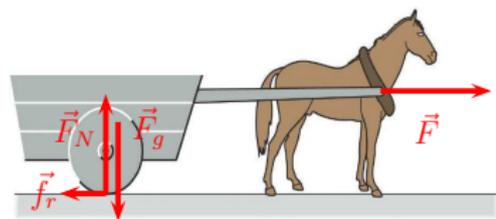


# Leyes de Newton – Tercera ley

- Representación o diagrama de cuerpo libre:  
fuerzas que actúan sobre cada cuerpo
- Ejemplo: el caballo (figura) rechaza tirar del carro: “de acuerdo con la 3ª ley, cualquiera que sea la fuerza que ejerza sobre el carro, este ejercerá una fuerza opuesta sobre mí, con lo que  $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0}$  y no se moverá (acelerará)”



# Leyes de Newton – Tercera ley



Fuerzas ejercidas sobre el carro

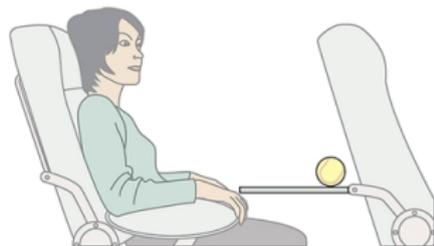
- $\vec{F}$ : por el caballo
- $\vec{F}_g$ : por la Tierra (gravedad)
- $\vec{F}_N = -\vec{F}_g$ : por el suelo (reacción)
- $\vec{f}_r$ : por el suelo (fricción)

Fuerzas ejercidas sobre el caballo

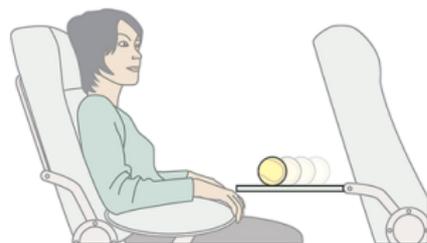
- $-\vec{F}$ : por el carro (reacción)
- $\vec{F}_g$ : por la Tierra (gravedad)
- $\vec{F}_N = -\vec{F}_g$ : por el suelo (reacción)
- $\vec{F}_T$ : por el suelo (“tracción”), reacción a la fuerza ejercida por el caballo sobre el suelo

# Leyes de Newton

## Validez de las leyes de Newton



(a)



(b)

- En (a) el avión *se mueve a velocidad constante*  
La observadora ve la pelota en reposo y aparentemente no actúa sobre esta una fuerza neta  $\neq \vec{0}$
- En (b) el avión *no se mueve a velocidad constante, acelera*  
La observadora ve la pelota en movimiento y aparentemente no actúa sobre esta una fuerza neta  $\neq \vec{0}$
- Es decir, en (a) **sí** se cumplen las leyes de Newton mientras que en (b), aparentemente, **no**

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

- En el tema 2 (*Cinemática*), ya observamos que

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)] = \frac{d^2}{dt^2} [x(t) + \alpha + \beta t] \quad (1D)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2} [\vec{r}(t)] = \frac{d^2}{dt^2} [\vec{r}(t) + \vec{\alpha} + \vec{\beta} t] \quad (3D)$$

- Considerando el papel de  $\vec{a}$  en la 2ª ley ( $\vec{F} \propto \vec{a}$ ), si se cumplen las leyes de Newton en un sistema de referencia **1**, entonces también se cumplen “de la misma forma” en cualquier sistema de referencia **2** que se mueva a velocidad constante con respecto a **1**.
- En general, un *sistema de referencia inercial* (SRI) es un sistema de referencia en el que se cumplen las leyes de Newton. Cualquier sistema de referencia en el que un cuerpo sujeto a fuerza neta nula tenga velocidad constante es un SRI.
- El movimiento *absoluto* no se puede detectar

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

## Principio de relatividad de Galileo

Las leyes de la mecánica son las mismas para cualquier observador inercial, i.e. que se mueve en línea recta con velocidad constante

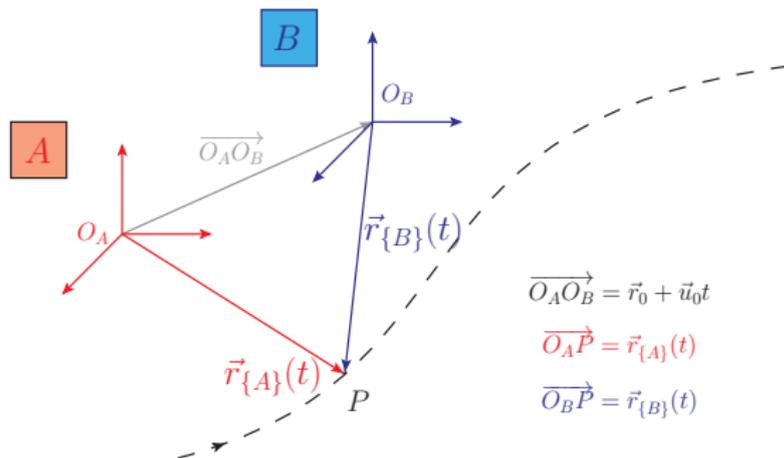
*Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo* (1632)

Matices:

- En general *son las mismas*  $\rightarrow$  *tienen la misma forma*  
(e.g. un cambio de orientación del sistema de referencia)

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

- Sistema de referencia: origen y ejes
- Sistemas de referencia inerciales  $A$  y  $B$
- Tiempo “universal”
- En el sistema de referencia  $A$ , el sistema de referencia  $B$  se mueve según  $\overrightarrow{O_A O_B} = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t$



# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

## Transformaciones de Galileo

- Transformación de coordenadas

$$\vec{r}_{\{B\}}(t) = \vec{r}_{\{A\}}(t) - \vec{r}_0 - \vec{u}_0 t$$

- Transformación de velocidades

$$\vec{v}_{\{B\}} = \vec{v}_{\{A\}} - \vec{u}_0$$

- Transformación de aceleraciones ( $\rightarrow$  la dinámica es *invariante*)

$$\vec{a}_{\{B\}} = \vec{a}_{\{A\}}$$

N.B. En general,  $\{A\}$  y  $\{B\}$  con diferente orientación (i.e. rotación)

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

## Transformaciones de Galileo

- *irreconciliables* con la constancia de la velocidad de la luz en el vacío  $c$ 
  - Experimento de Michelson-Morley, 1887
  - Necesidad de transformaciones de Lorentz (1899) (Poincaré 1905),  
→ relatividad especial de Einstein (1905)
- válidas para velocidades  $\ll c$   
(límite  $v \ll c$  de transformaciones de Lorentz)

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

Ejemplo: una piloto quiere volar con su avión hacia el norte, con respecto al suelo. La velocidad del avión respecto al aire es  $200 \text{ km h}^{-1}$ , el viento sopla de oeste a este con velocidad  $90 \text{ km h}^{-1}$ .

- ¿Cuál debe ser el rumbo del avión?
- ¿Cuál es la velocidad del avión respecto al suelo?

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

Ejemplo: una piloto quiere volar con su avión hacia el norte, con respecto al suelo. La velocidad del avión respecto al aire es  $200 \text{ km h}^{-1}$ , el viento sopla de oeste a este con velocidad  $90 \text{ km h}^{-1}$ .

- Vector unitario dirección este  $\vec{i}$ , vector unitario dirección norte  $\vec{j}$   
[N.B. tierra *plana*]
- Dos sistemas de referencia, **A** ligado al suelo, **B** ligado al aire
- En **A**, **B** se mueve con velocidad  $\vec{u}_{\text{rel}} = u_0 \vec{i}$ ,  $u_0 = 90 \text{ km h}^{-1}$
- En **B**, la velocidad del avión cumple  $|\vec{v}_{\{B\}}| = v_0 = 200 \text{ km h}^{-1}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{\{B\}} = v_0(\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

- Volar en dirección norte en **A**  $\Leftrightarrow \vec{v}_{\{A\}} = v_a \vec{j}$  con  $v_a > 0$

# Movimiento relativo. Transformaciones de Galileo

Ejemplo: una piloto quiere volar con su avión hacia el norte, con respecto al suelo. La velocidad del avión respecto al aire es  $200 \text{ km h}^{-1}$ , el viento sopla de oeste a este con velocidad  $90 \text{ km h}^{-1}$ .

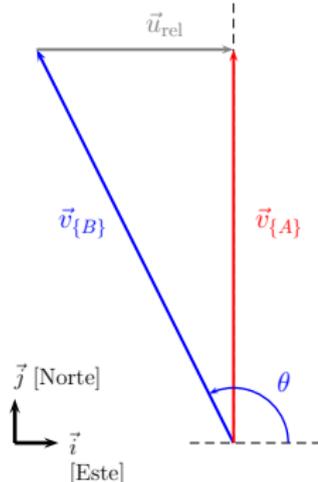
$$\blacksquare \vec{v}_{\{A\}} = \vec{u}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\{B\}}$$

$$v_a \vec{j} = u_0 \vec{i} + v_0 (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = u_0 + v_0 \cos \theta \\ v_a = v_0 \sin \theta \end{cases}$$

$$\cos \theta = -\frac{u_0}{v_0} \Rightarrow \theta = 2.04 \text{ rad } (= 117^\circ)$$

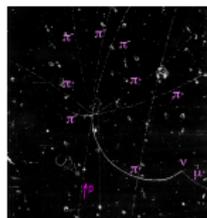
$$v_a = v_0 \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{v_0^2}} = 179 \text{ km h}^{-1}$$



# Tipos de fuerza en la naturaleza

## Fuerzas (interacciones) fundamentales

- fuerza **gravitatoria**, entre *masas*<sup>(\*)</sup>
- fuerza **electromagnética**, entre *cargas eléctricas*
- fuerza **fuerte**, entre hadrones ( $p$ ,  $n$ ,  $\pi$ ,  $K$ , ...) )
- fuerza **débil**, entre leptones (e.g.  $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ 's), hadrones



# Tipos de fuerza en la naturaleza

## Fuerzas (interacciones) fundamentales

- fuerza **gravitatoria**, entre *masas*
  - fuerza **electromagnética**, entre *cargas eléctricas*
  - fuerza **fuerte**, entre hadrones ( $p, n, \pi, K, \dots$ )
  - fuerza **débil**, entre leptones (e.g.  $e, \mu, \nu$ 's), hadrones
- 
- Con efectos “cotidianos” para nosotros: gravitatoria y electromagnética
  - Acción a distancia  $\Rightarrow$  formulación con teorías de campos
  - Generalización del concepto de carga: interacción fuerte  $\rightarrow$  “color”, interacción débil  $\rightarrow$  “isospín débil”
  - *Unificación*: electricidad y magnetismo, teoría electrodébil, teorías de gran unificación, ?

# Tipos de fuerza en la naturaleza

## Fuerzas (interacciones) fundamentales

- fuerza **gravitatoria**, entre *masas*
- fuerza **electromagnética**, entre *cargas eléctricas*
- fuerza **fuerte**, entre hadrones ( $p$ ,  $n$ ,  $\pi$ ,  $K$ , ...) )
- fuerza **débil**, entre leptones (e.g.  $e$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ 's), hadrones

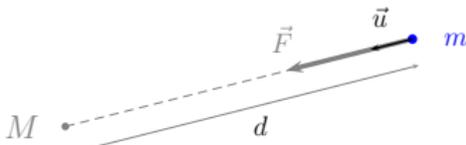
Intensidad relativa

$F_{\text{gravitatoria}}$	1
$F_{\text{electromagnética}}$	$10^{37}$
$F_{\text{fuerte}}$	$10^{39}$
$F_{\text{débil}}$	$10^{34}$

# Tipos de fuerza en la naturaleza

Fuerza gravitatoria: masa *gravitatoria* vs. masa *inercial*

- (Anticipando Tema 7)
- Por una parte, la fuerza gravitatoria que una masa  $M$  ejerce sobre una masa  $m$  es

$$\vec{F} \propto m M \frac{\vec{u}}{d^2}$$


con  $d$  la distancia entre ellas y  $\vec{u}$  unitario en dirección de  $m$  a  $M$   
 $m = m_{\text{grav}}$  indica la intensidad con que participa en la interacción gravitatoria, es la *masa gravitatoria* (“la carga de la gravedad”)

- Por otra parte, de acuerdo con la segunda ley de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$   
 $m = m_{\text{iner}}$  indica la resistencia a cambiar el estado de movimiento, es la *masa inercial*
- $m_{\text{grav}} = m_{\text{iner}}$ : movimiento en campo gravitacional *independiente* de la masa (e.g. caída de graves en ausencia de rozamiento)

# Tipos de fuerza en la naturaleza

## Fuerzas de contacto:

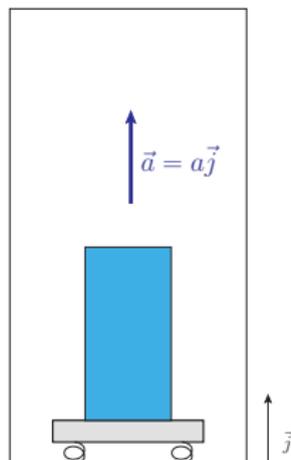
- típicamente, manifestación macroscópica de fuerzas de origen electromagnético (e.g. responsables estructura atómica)
- amplio rango de valores
- Entre cuerpos (no solo sólidos) con una superficie de contacto, distinguimos
  - fuerza normal  $\perp$  (“de contacto”): (componente) perpendicular a la superficie de contacto, típicamente *reacción*
  - fuerza de rozamiento: (componente) paralela a la superficie de contacto, típicamente *dinámica*
- También
  - fuerzas de recuperación o elásticas:  
e.g. muelles y ley de Hooke  $F = -kx$
  - fuerzas de tensión: e.g. cuerdas (sin alargamiento)

# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplos: una persona de 80 kg está de pie sobre una balanza sujeta al suelo de un ascensor. La balanza está calibrada en newtons (N).

¿Cuál es la indicación de la balanza si

- el ascensor se mueve con aceleración  $2 \text{ m s}^{-2}$  hacia arriba?
- el ascensor se mueve con aceleración  $2 \text{ m s}^{-2}$  hacia abajo?
- el ascensor se mueve hacia arriba a  $20 \text{ m/s}$  mientras su velocidad decrece a razón de  $8 \text{ m/s}^2$ ?
- se rompe el cable del ascensor?



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplos: ascensor-balanza

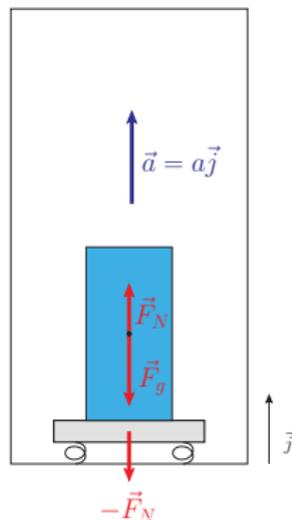
- Tenemos

$$\vec{F}_g + \vec{F}_N = m\vec{a}, \quad \vec{a} = a\vec{j}$$

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}$$

[N.B.  $a > 0$  hacia  $\uparrow$ ,  $a < 0$  hacia  $\downarrow$ ]  
por tanto  $F_N = m(g + a)$

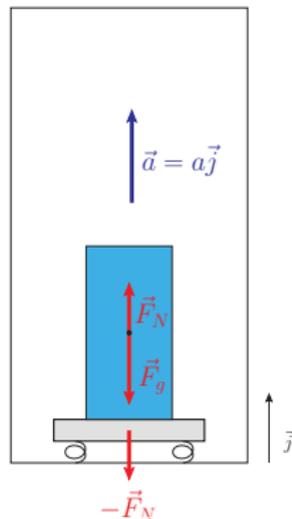
- Para  $a_{\uparrow} = 2 \text{ m s}^{-2}$ ,  
 $F_N = m(g + a_{\uparrow}) = 945 \text{ N}$
- Para  $a_{\downarrow} = -2 \text{ m s}^{-2}$ ,  
 $F_N = m(g + a_{\downarrow}) = 625 \text{ N}$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

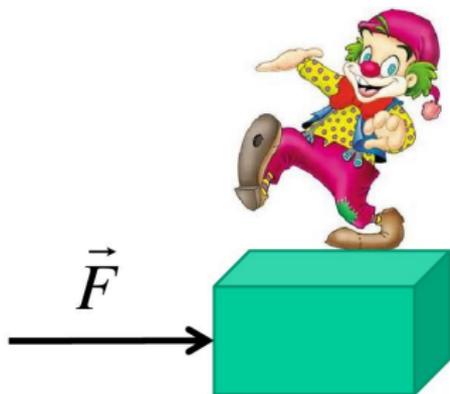
## Ejemplos: ascensor-balanza

- En el tercer caso, la velocidad del ascensor es irrelevante, y la aceleración es  $a = -8 \text{ m s}^{-2}$ , de modo que  $F_N = m(g + a) = 145 \text{ N}$
- Si se rompe el cable del ascensor,  $a = -g$  y  $F_N = 0$  (caída libre)



## Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: un par de payasos hacen lo siguiente como parte de su espectáculo: uno de ellos se sube a un bloque y su compañera empuja el bloque horizontalmente para que el primero deslice y se caiga. Representa y explica todas las fuerzas que actúan sobre el bloque y sobre el payaso que está encima. Considera dos casos: a) sin rozamiento y b) con rozamiento entre las superficies de contacto.

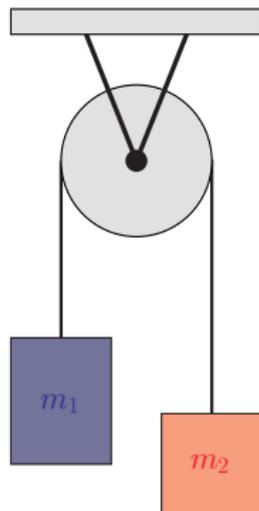


# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

## Ejemplo: máquina de Atwood

El aparato de la figura, una polea de la que cuelgan dos masas, se conoce como *máquina de Atwood*; se emplea para obtener la aceleración debida a la gravedad a partir de la medida de la aceleración de los bloques.

Suponiendo que la cuerda y la polea tienen masa despreciable, y que la polea carece de rozamiento, calcular la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda.



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: máquina de Atwood

Fuerzas

$$\vec{F}_{g1} = -m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_{g2} = -m_2 g \vec{j}$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{j}, \quad \vec{T}_2 = T_2 \vec{j}$$

Segunda ley,

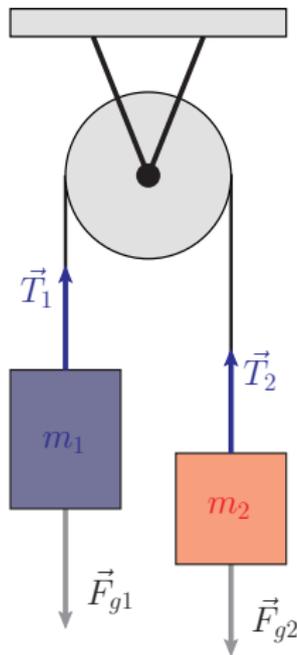
$$\vec{F}_{g1} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{g2} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2$$

Cuerda ideal,

$$T = T_1 = T_2$$

$$\vec{a}_2 = -\vec{a}_1 = a \vec{j}$$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: máquina de Atwood  
Segunda ley,

$$-m_1g + T = -m_1a$$

$$-m_2g + T = m_2a$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

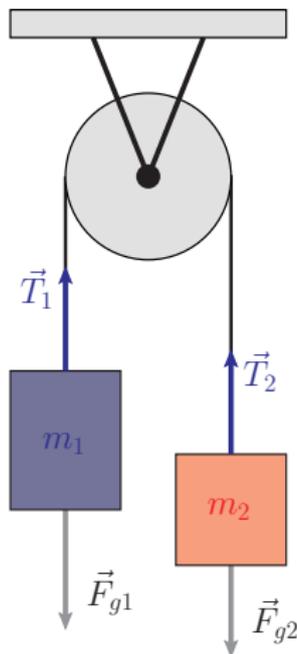
$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2} g$$

Límites “anticipables”:

$$m_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad a \rightarrow -g, \quad T \rightarrow 0$$

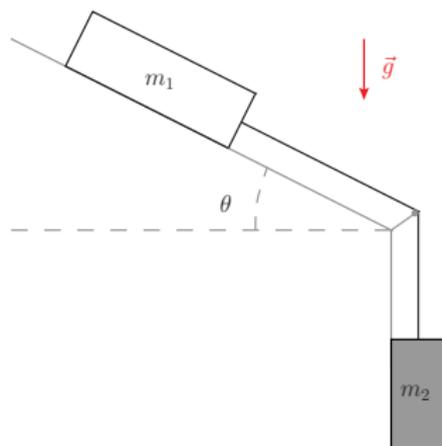
$$m_2 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad a \rightarrow g, \quad T \rightarrow 0$$

$$m_2 \rightarrow m_1 \quad \Rightarrow \quad a \rightarrow 0, \quad T \rightarrow m_1g$$



## Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: dos bloques de masas respectivas  $m_1$  y  $m_2$  se encuentran unidos por una cuerda en la configuración que ilustra la figura, en que  $m_1$  se desliza por un plano inclinado, mientras  $m_2$  tiene movimiento vertical libre. No hay rozamiento de ningún tipo. Determina la aceleración de cada bloque y la tensión de la cuerda.



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: bloques-plano inclinado

Bloque  $m_1$ :  $\vec{i}_1 = \frac{\vec{T}_1}{|\vec{T}_1|}$ ,  $\vec{j}_1 = \frac{\vec{F}_N}{|\vec{F}_N|}$

$$\vec{F}_{g1} = m_1 g (\sin \theta \vec{i}_1 - \cos \theta \vec{j}_1)$$

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{i}_1 \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j}_1$$

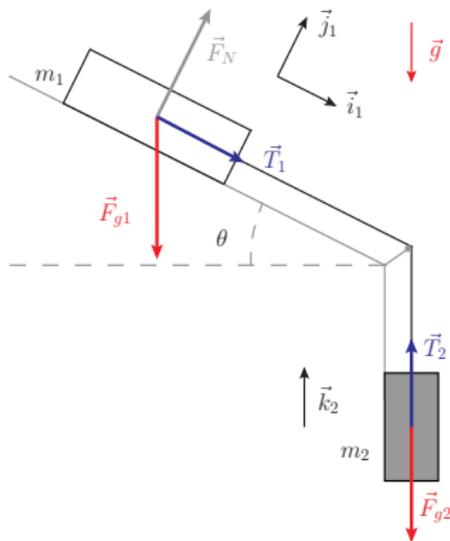
$$\vec{F}_{\text{neta } 1} = \vec{F}_{g1} + \vec{F}_N + \vec{T}_1 =$$

$$[m_1 g \sin \theta + T_1] \vec{i}_1 \\ + [F_N - m_1 g \cos \theta] \vec{j}_1$$

Bloque  $m_2$ :  $\vec{k}_2 = \frac{\vec{T}_2}{|\vec{T}_2|}$

$$\vec{F}_{g1} = -m_2 g \vec{k}_2 \quad \vec{T}_2 = T_2 \vec{k}_2$$

$$\vec{F}_{\text{neta } 2} = \vec{F}_{g2} + \vec{T}_2 = (T_2 - m_2 g) \vec{k}_2$$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: bloques-plano inclinado

Aceleración bloque  $m_1$ :

$$\vec{F}_{\text{neta } 1} = m_1 a_1 \vec{i}_1$$

Aceleración bloque  $m_2$ :

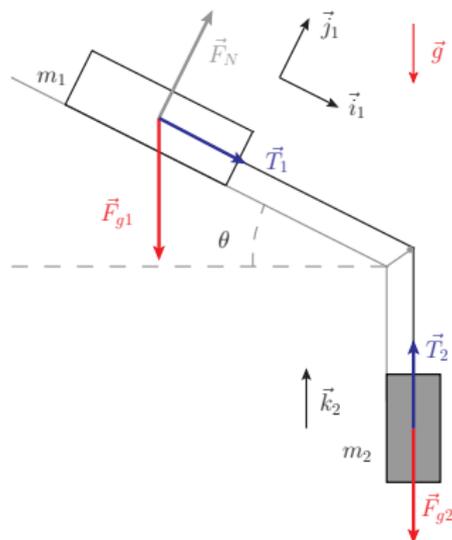
$$\vec{F}_{\text{neta } 2} = m_2 a_2 \vec{k}_2$$

Cuerda:  $T_1 = T_2 = T$ ,  $a_1 = -a_2 = a$

$$m_1 g \sin \theta + T = m_1 a$$

$$F_N - m_1 g \cos \theta = 0$$

$$T - m_2 g = -m_2 a$$



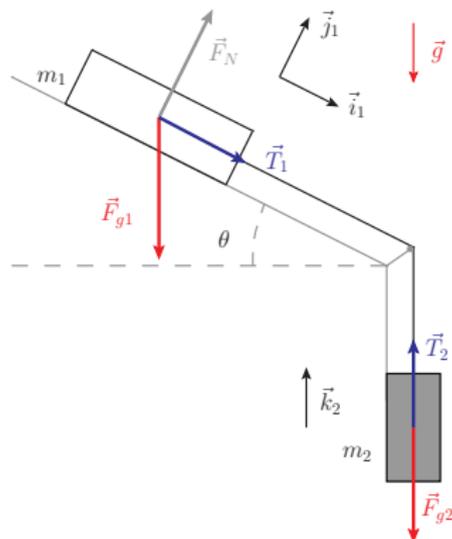
# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: bloques-plano inclinado

$$a = \frac{m_1 \sin \theta + m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = m_2(g - a) = \frac{m_1 m_2 (1 - \sin \theta)}{m_1 + m_2} g$$

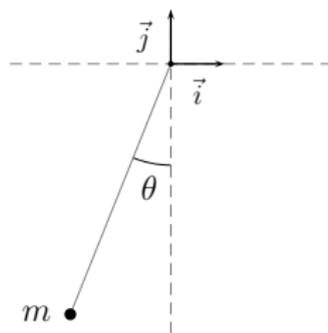
- $\theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$  máquina de Atwood
- $m_1 \rightarrow 0$ , caída libre de  $m_2$



## Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplos: Cuando un avión acelera en la pista del aeropuerto para despegar, un viajero quiere determinar su aceleración mediante un péndulo, y comprueba que la cuerda del mismo forma un ángulo de  $22^\circ$  con la vertical.

- ¿Cuál es la aceleración del avión?
- Si la masa del péndulo es  $m = 40$  g, ¿cuál es la tensión de la cuerda?
- Si la aceleración fuera 4 veces más grande, ¿qué ángulo formaría el péndulo con la vertical?



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplos: avión-péndulo

- Diagrama de fuerzas en S.R.Inercial

$$\vec{F}_g + \vec{T} = \vec{F}$$

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = ma\vec{i}$$

$$\vec{T} = T(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

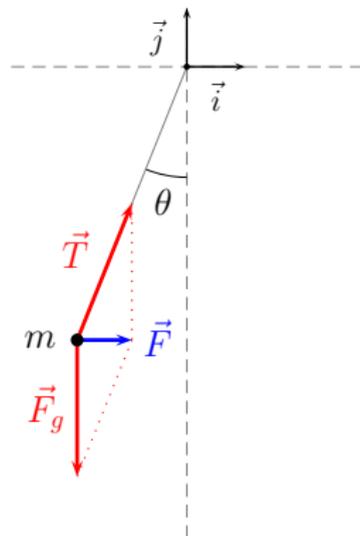
Componentes

$$\vec{i}: \quad T \sin\theta = ma$$

$$\vec{j}: \quad -mg + T \cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow a = g \tan\theta = 3.96 \text{ m s}^{-2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta} = 0.42 \text{ N}$$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

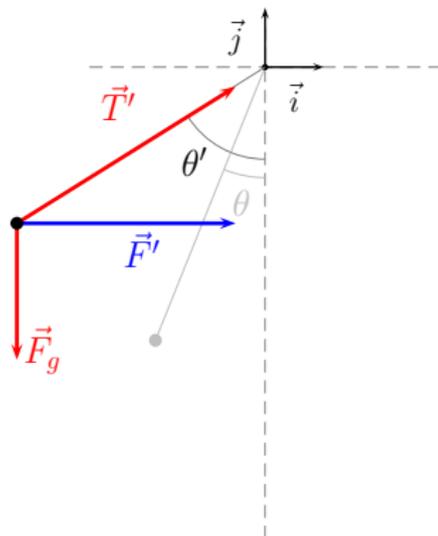
Ejemplos: avión-péndulo

- Si  $a \mapsto a' = 4a$ ,  $\theta \mapsto \theta'$

$$a' = 4g \tan \theta = g \tan \theta'$$

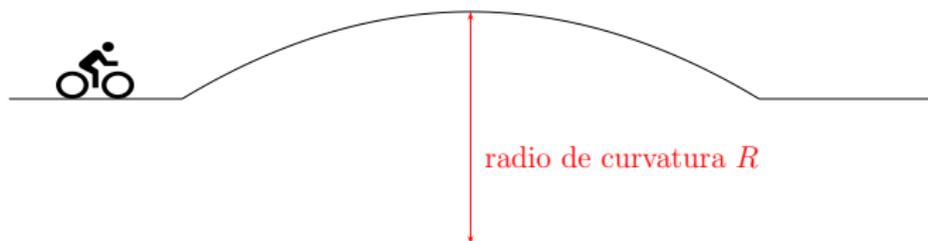
$$\Rightarrow \theta' = \arctan(4 \tan \theta) = 58^\circ$$

$$T \mapsto T' = \frac{mg}{\cos \theta'} = 0.75 \text{ N}$$



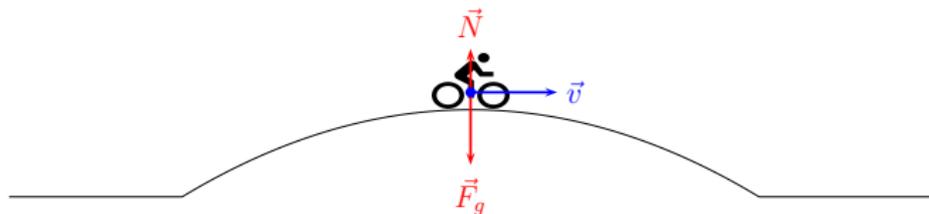
## Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: circulando por una carretera, una motorista se encuentra con una deformación del terreno como la mostrada en la figura. En el punto de máxima elevación el radio de curvatura es  $R$ ; al alcanzar ese punto, ¿cuál es la velocidad máxima a la que la moto no pierde contacto con el asfalto?



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: motorista,  $v_{\max}$

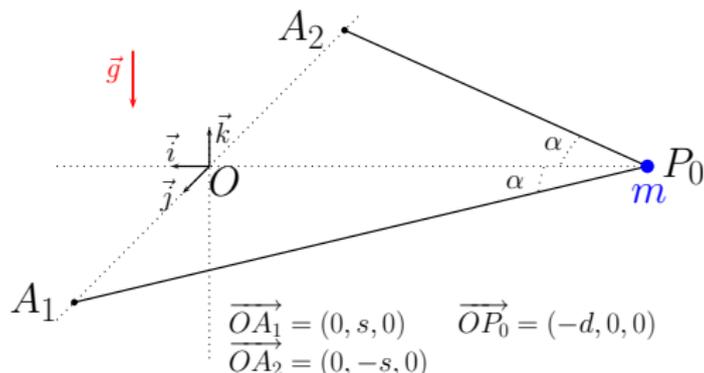


- Pérdida de contacto:  $\vec{N} = \vec{0}$
- en ese caso, aceleración normal  $\vec{a}_{\perp} = \vec{g}$
- Radio de curvatura  $R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_{\perp}|}$ , en ese caso  $|\vec{v}|^2 = R|\vec{a}_{\perp}|$  y por tanto

$$v_{\max} = \sqrt{gR}$$

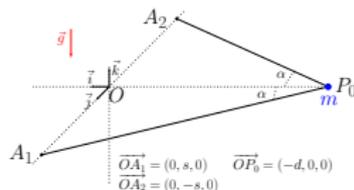
## Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: en una actividad de *puenting*, una persona de masa  $m$  es “atada” a una cuerda de longitud  $2\ell$  con extremos fijos en  $A_1$  y  $A_2$ , separados una distancia  $2s$ , y cae desde el punto  $P_0$  (ver figura). Tanto la tensión inicial de la cuerda como su masa son despreciables. La persona realiza un movimiento pendular en el plano  $xz$ , a distancia  $d = \sqrt{\ell^2 - s^2}$  del origen.



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: *puenting*



Cuando la persona se encuentra en el punto más bajo de la trayectoria,

- representa las fuerzas que actúan sobre ella.
- Suponiendo que  $|\vec{v}| = \sqrt{2gd}$ , ¿cuál es su velocidad  $\vec{v}$ ?
- ¿Qué tensión  $T$  soporta la cuerda?
- Si aumentamos la longitud de la cuerda, aumenta  $|\vec{v}|$  en el punto más bajo de la trayectoria, ¿aumenta también la tensión que soporta la cuerda?
- Aplicación numérica:  $m = 70.0$  kg,  $s = 10.0$  m,  $\ell = 25.0$  m.

# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: *puenting*

Fuerzas:

- Atracción gravitatoria

$$\vec{F}_g = -mg\vec{k}$$

- Tensión

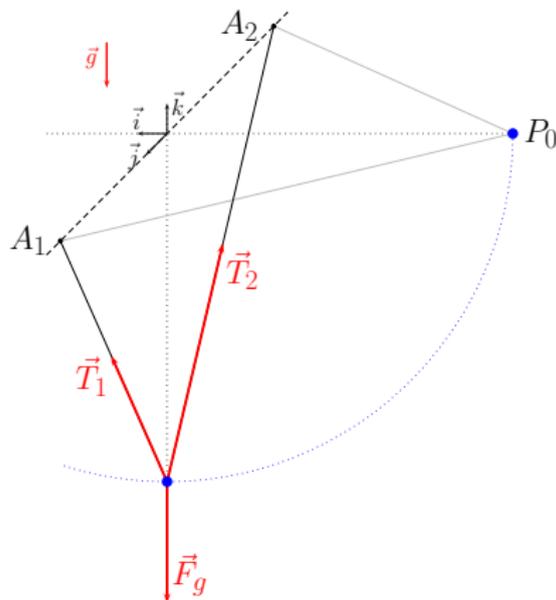
$$\vec{T}_1 = T_1(\sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k})$$

- Tensión

$$\vec{T}_2 = T_2(-\sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k})$$

Velocidad en dirección  $\vec{i}$  ( $\Rightarrow \vec{a}_{\parallel} = \vec{0}$ ):

$$\vec{v} = \sqrt{2gd} \vec{i}$$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: *puenting*

Para determinar la tensión de la cuerda:

Segunda ley:

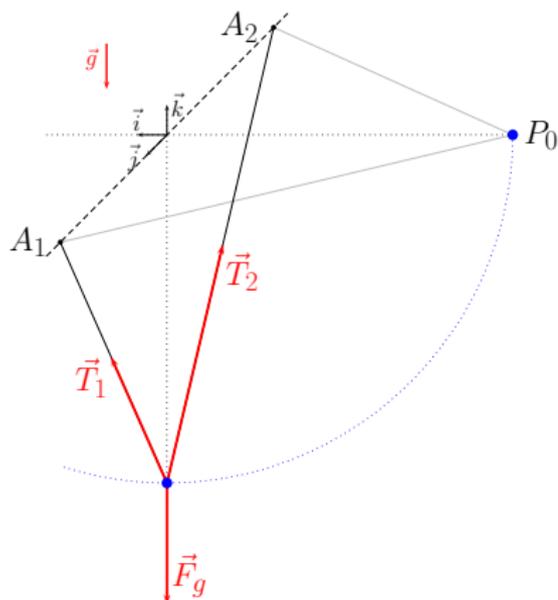
$$\vec{F}_g + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{a}$$

No hay aceleración tangencial:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} \vec{0} + \vec{a}_{\perp} = a_{\perp} \vec{k}$$

La curvatura está fijada:

$$d = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_{\perp}|} = \frac{2gd}{|\vec{a}_{\perp}|} \Rightarrow a_{\perp} = 2g$$



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

Ejemplo: *puenting*

Para determinar la tensión de la cuerda:

Segunda ley, componentes

$$\vec{j}: (T_1 - T_2) \sin \alpha = 0$$

$$\vec{k}: (T_1 + T_2) \cos \alpha - mg = ma_{\perp}$$

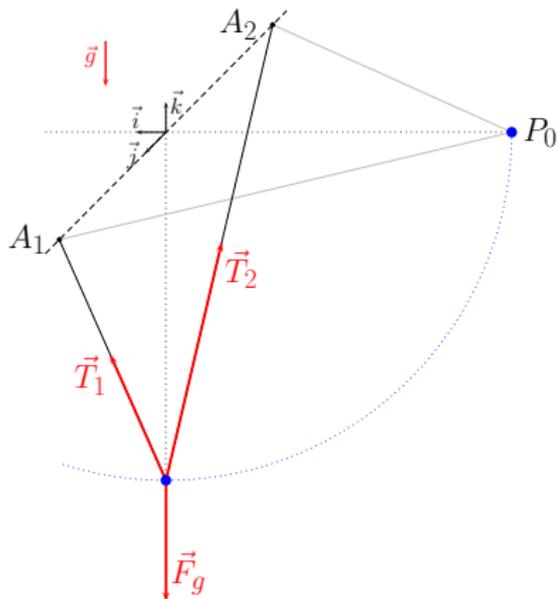
Con lo que  $T = T_1 = T_2$ ,

$$T = \frac{3mg}{2 \cos \alpha} = \frac{3mgl}{2d}$$

Si aumentamos  $\ell$ , *aumenta*  $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{d}{\ell} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{\ell^2}}$$

y por tanto *disminuye*  $T$ !



# Aplicaciones y ejemplos, diagramas de fuerzas

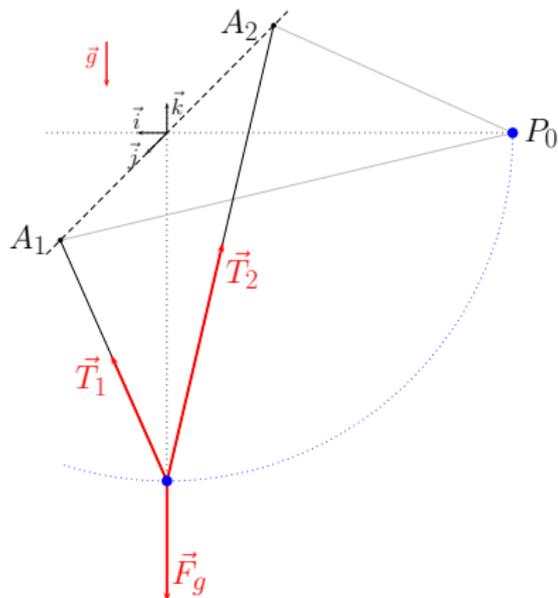
Ejemplo: *puenting*

Aplicación numérica:

$$m = 70 \text{ kg}, s = 10.0 \text{ m}, \ell = 25.0 \text{ m}$$

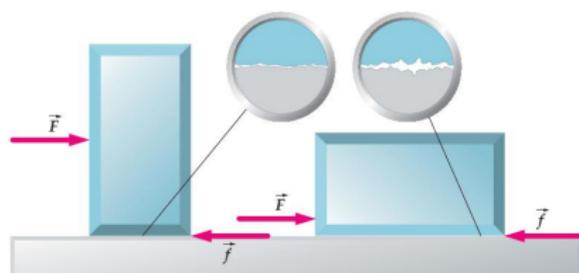
$$d = 22.9 \text{ m} \quad \cos \alpha = 0.917$$

$$|\vec{v}| = 21.2 \text{ m s}^{-1} \quad T = 1124 \text{ N}$$



# Rozamiento

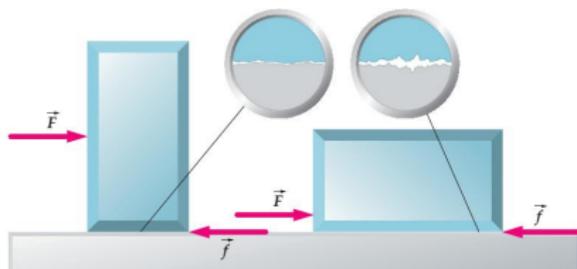
- El rozamiento es una manifestación macroscópica de interacciones, típicamente electromagnéticas, entre superficies de contacto  
(Imagina algunas consecuencias de la ausencia total de rozamiento)



- A escala microscópica, las superficies de contacto son *irregulares* y las interacciones entre las superficies en contacto no involucran la totalidad de las superficies (interacciones muy locales entre irregularidades de las superficies)

# Rozamiento

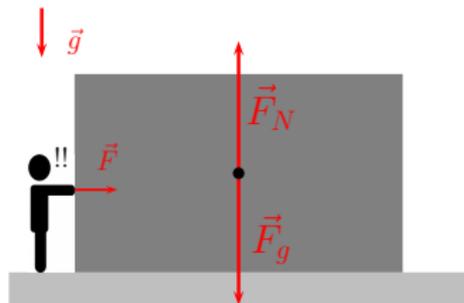
- A mayor fuerza *normal* a la superficie de contacto, mayor superficie de contacto *efectiva* y mayor fuerza de rozamiento



- Distinguimos
  - Rozamiento estático (en ausencia de movimiento)
  - Rozamiento cinético (en presencia de movimiento)

# Rozamiento estático

- Considera un cuerpo  $C$  en contacto con una superficie al que se aplica una fuerza como indica la figura.
- En ausencia de rozamiento, al aplicar la fuerza  $\vec{F}$ ,  $C$  se mueve, por pequeña que sea la fuerza aplicada.
- En presencia de rozamiento, aplicando una fuerza  $\vec{F}$  “pequeña”,  $C$  *no se mueve*. ¿Qué ocurre?



## Rozamiento estático

- La fuerza aplicada es insuficiente para conseguir movimiento entre las superficies (i.e. “despegarlas”): la fuerza externa  $\vec{F}$  produce efectivamente una reacción  $\vec{f}_e$  tal que  $\vec{F} + \vec{f}_e = \vec{0}$ . Este fenómeno es el *rozamiento estático*:  $\vec{f}_e$  es la fuerza de rozamiento estático.
- Aumentando  $\vec{F}$ , existe un valor máximo  $\vec{f}_e^{\max}$  a partir del cual las superficies pueden deslizar.
- Conforme hemos argumentado, a mayor fuerza normal en la superficie de contacto, es esperable mayor fuerza de rozamiento: específicamente mayor  $\vec{f}_e^{\max}$ . Para caracterizar este fenómeno se introduce un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_e$  tal que

$$|\vec{f}_e^{\max}| = \mu_e |\vec{F}_N|$$

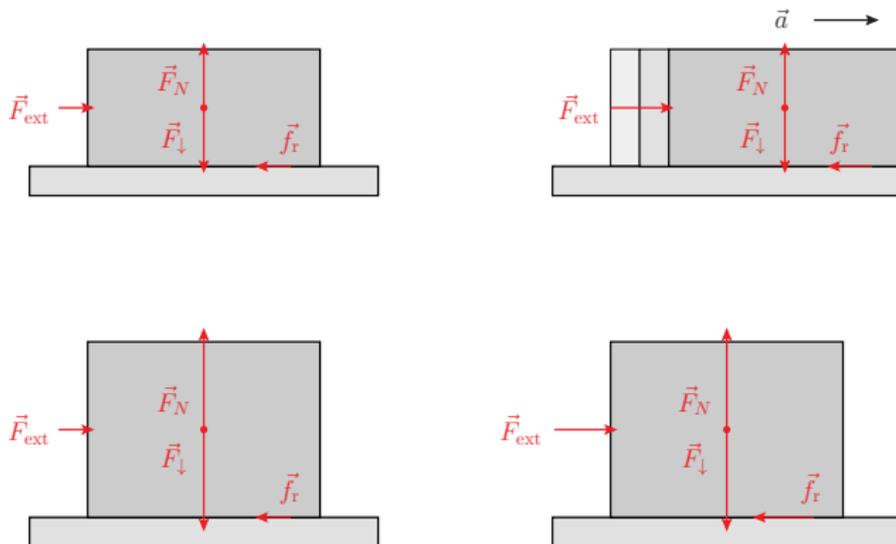
## Rozamiento cinético

- Aumentando  $|\vec{F}|$ , se supera el rozamiento estático, y el cuerpo  $C$  desliza sobre la superficie. En ese caso, la fuerza de rozamiento (con el mismo origen que en el caso estático), se conoce como fuerza de rozamiento cinético  $\vec{f}_c$ .
- También es proporcional a la magnitud de la fuerza normal ejercida en la superficie; se caracteriza mediante el coeficiente de rozamiento cinético  $\mu_c$ :

$$|\vec{f}_c| = \mu_c |\vec{F}_N|$$

- Se cumple  $\mu_c < \mu_e$   
(requiere más fuerza iniciar el movimiento que mantenerlo)

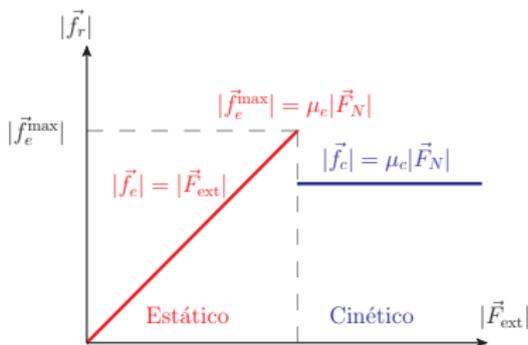
# Rozamiento



# Rozamiento estático y cinético

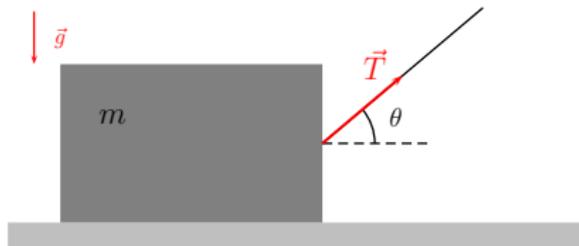
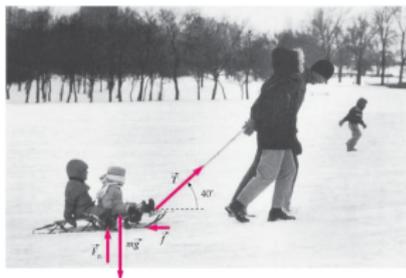
Valores aproximados  
( $\mu_s \rightarrow \mu_e, \mu_k \rightarrow \mu_c$ )

Materials	$\mu_s$	$\mu_k$
Steel on steel	0.7	0.6
Brass on steel	0.5	0.4
Copper on cast iron	1.1	0.3
Glass on glass	0.9	0.4
Teflon on Teflon	0.04	0.04
Teflon on steel	0.04	0.04
Rubber on concrete (dry)	1.0	0.80
Rubber on concrete (wet)	0.30	0.25
Waxed ski on snow (0°C)	0.10	0.05



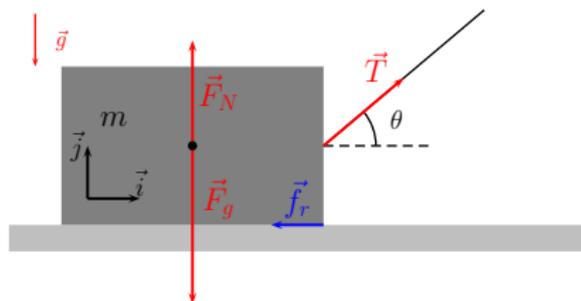
# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: dos niños son arrastrados en un trineo sobre un terreno cubierto de nieve. Se tira del trineo mediante una cuerda que forma un ángulo de  $40^\circ$  con la horizontal. La masa conjunta de los dos niños es de 45 kg y el trineo tiene una masa de 5 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son  $\mu_e = 0.2$  y  $\mu_c = 0.15$ . Determinar la fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el trineo y la aceleración de los niños y el trineo si la tensión de la cuerda es a) 100 N y b) 140 N.



# Rozamiento: ejemplos

## Ejemplo: Trineo Fuerzas



$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}, \quad \vec{T} = T(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j})$$

La fuerza de rozamiento es  $\vec{f}_r$

La fuerza paralela a la superficie trineo-suelo es  $\vec{F}_{\parallel} = T \cos\theta\vec{i}$

- Si  $|\vec{F}_{\parallel}| \leq \mu_e F_N$ , la fuerza de rozamiento estático máxima,  $\vec{f}_r = -\vec{F}_{\parallel}$  y no hay movimiento
- Si  $|\vec{F}_{\parallel}| > \mu_e F_N$ , hay rozamiento cinético  $\vec{f}_r = -\mu_c F_N\vec{i}$

## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: Trineo

Determinamos en primer lugar si  $|\vec{F}_{\parallel}| \leq \mu_e F_N$ .

$$|\vec{F}_{\parallel}| = T \cos \theta = \begin{cases} 76.6 \text{ N} & \text{para } T = 100 \text{ N} \\ 107 \text{ N} & \text{para } T = 140 \text{ N} \end{cases}$$

Dado que  $T \sin \theta < mg$ , la aceleración es horizontal  $\vec{a} = a\vec{i}$  y tenemos

$$F_N + T \sin \theta - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg - T \sin \theta$$

de modo que

$$\mu_e F_N = \mu_e (mg - T \sin \theta) = \begin{cases} 85.2 \text{ N} & \text{para } T = 100 \text{ N} \\ 80.1 \text{ N} & \text{para } T = 140 \text{ N} \end{cases}$$

Por tanto

- $T = 100 \text{ N}$ : no hay movimiento
- $T = 140 \text{ N}$ : el trineo se mueve,  $\vec{f}_r = -\mu_c F_N \vec{i} = -\mu_c (mg - T \sin \theta)$

# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: Trineo

Por tanto

- $T = 100$  N: no hay movimiento
- $T = 140$  N: el trineo se mueve,  $\vec{f}_r = -\mu_c F_N \vec{i} = -\mu_c (mg - T \sin \theta)$

Obtenemos finalmente la aceleración para  $T = 140$  N:

$$ma = T \cos \theta - \mu_c (mg - T \sin \theta) \Rightarrow$$

$$a = \frac{T}{m} (\cos \theta + \mu_c \sin \theta) - \mu_c g = 0.94 \text{ m s}^{-2}$$

## Rozamiento: ejemplos

(\*\*) Ejemplo: trineo, ángulo para maximizar aceleración

Dada una tensión  $T$  de la cuerda, ¿para qué ángulo  $\theta$  obtenemos la mayor aceleración del trineo?

- En primer lugar se tiene que cumplir la condición para que haya movimiento (superar el rozamiento estático máximo)

$$T(\cos \theta + \mu_e \sin \theta) > \mu_e mg$$

- Si se cumple, para obtener la aceleración máxima en función de  $\theta$  para  $T$  fija,

$$\frac{d}{d\theta} a = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{m} (-\sin \theta + \mu_c \cos \theta) = 0 \Rightarrow \tan \theta_0 = \mu_c$$

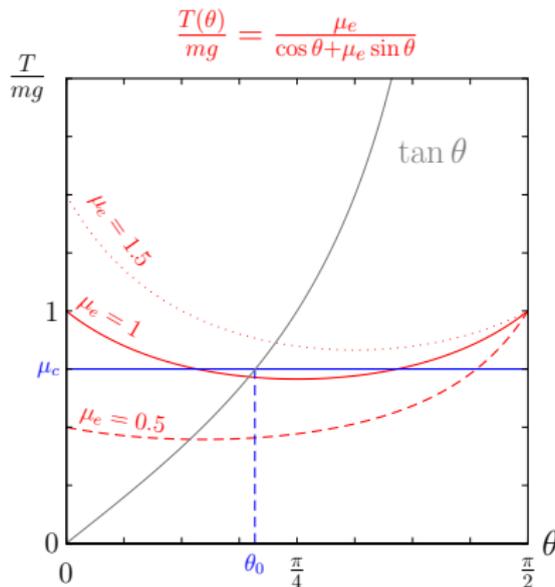
$$\left. \frac{d^2 a}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} = -\frac{T}{m} \cos \theta_0 (1 + \mu_c^2) < 0$$

y por tanto para  $\theta_0$  tendremos  $a_{\max}$

## Rozamiento: ejemplos

(\*\*) Ejemplo: trineo, ángulo para maximizar aceleración

Dada una tensión  $T$  de la cuerda, ¿para qué ángulo  $\theta \in [0; \pi/2[$  obtenemos la mayor aceleración del trineo?



# Rozamiento: ejemplos

(\*\*) Ejemplo: trineo, ángulo para maximizar aceleración

Dada una tensión  $T$  de la cuerda, ¿para qué ángulo  $\theta \in [0; \pi/2[$  obtenemos la mayor aceleración del trineo?

- Pero ¡ojo!, minimización condicionada: para una tensión  $T$  dada,  $\theta_0$  (o equivalentemente  $\mu_c$ ) puede ser tal que no se cumpla la condición para tener movimiento, y en ese caso, hay que maximizar la aceleración dentro del rango permitido (que no incluye  $\theta_0$ ) (ver gráfico).

Ejemplos

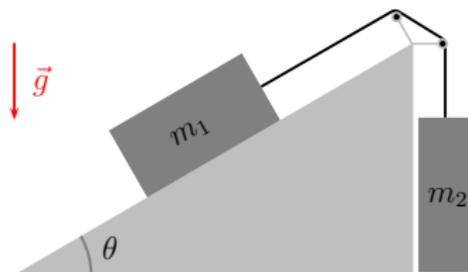
- Para  $\mu_e = 1.0$ ,  $\mu_c = 0.75$ ,  $T = mg$ , aceleración máxima para  $\theta_0 = \arctan(0.75) \simeq 36.9^\circ$
- Para  $\mu_e = 1.5$ ,  $\mu_c = 0.75$ ,  $T = 0.85 mg$ , no hay movimiento para  $\theta = \theta_0!$

(N.B.  $\frac{\mu_e}{\cos \theta_0 + \mu_e \sin \theta_0} \simeq 0.882$ )

(N.B. Como  $\frac{da}{d\theta} < 0$  para  $\theta > \theta_0$ , aceleración máxima para el menor  $\theta$  en el intervalo permitido)

## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: un bloque de masa  $m_1 = 250$  g se encuentra en reposo sobre un plano que forma un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal; está unido a un segundo bloque  $m_2 = 200$  g, que cuelga libremente, mediante una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea, que no produce rozamiento y tiene también masa despreciable (ver figura). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano son  $\mu_e = 0.4$  y  $\mu_c = 0.1$ , respectivamente.



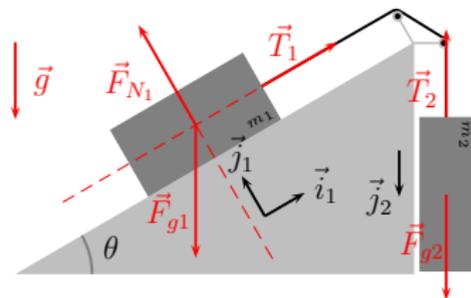
## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: un bloque de masa  $m_1 = 250$  g se encuentra en reposo sobre un plano que forma un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal; está unido a un segundo bloque  $m_2 = 200$  g, que cuelga libremente, mediante una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea, que no produce rozamiento y tiene también masa despreciable (ver figura). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano son  $\mu_e = 0.4$  y  $\mu_c = 0.1$ , respectivamente.

- Desprecia inicialmente el rozamiento y representa las fuerzas que actúan sobre cada bloque. ¿Cuál es la aceleración de  $m_2$ ?
- Considera ahora el rozamiento entre  $m_1$  y el plano inclinado: ¿el sistema permanece en equilibrio? Si  $m_2$  se mueve, ¿cuánto aumenta su velocidad al recorrer 30 cm?
- Si tuviéramos  $m_1 = 4$  kg, ¿para qué rango de valores de  $m_2$  el sistema hubiera permanecido en equilibrio?

# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado



Cuerpo  $m_1$

$$\vec{T}_1 = T_1 \vec{i}_1$$

$$\vec{F}_{g1} = -m_1 g (\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1)$$

$$\vec{F}_{N_1} = F_{N_1} \vec{j}_1$$

$$\text{Aceleración } \vec{a}_1 = a_1 \vec{i}_1$$

$$\text{Cuerda: } T_1 = T_2 = T, a_1 = a_2 = a$$

Cuerpo  $m_2$

$$\vec{T}_2 = -T_2 \vec{j}_2$$

$$\vec{F}_{g2} = m_2 g \vec{j}_2$$

$$\text{Aceleración } \vec{a}_2 = a_2 \vec{j}_2$$

# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado

Segunda ley, cuerpo  $m_1$

$$T - m_1 g \sin \theta = m_1 a$$

$$F_{N_1} - m_1 g \cos \theta = 0$$

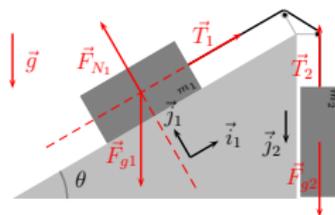
Segunda ley, cuerpo  $m_2$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

De modo que

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1}$$

$$T = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta)$$



## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado

- Con  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{4}{5}$  y  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ,  $a = \frac{1}{6}g$ :  $m_2$  baja (y  $m_1$  sube)

$$a = 1.63 \text{ m s}^{-2}, \quad T = 1.63 \text{ N}$$

- Incluimos el rozamiento; en primer lugar tenemos que analizar si la fuerza que actúa sobre  $m_1$  (en dirección  $\parallel$  a la superficie de contacto, es decir  $\vec{i}_1$ ), es suficiente para superar el rozamiento estático. La fuerza es

$$(T - m_1 g \sin \theta) \vec{i}_1 = m_1 a \vec{i}_1 = g m_1 \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1} \vec{i}_1$$

La fuerza máxima de rozamiento estático es

$$-\mu_e F_{N_1} \vec{i}_1 = -\mu_e m_1 g \cos \theta \vec{i}_1$$

Para tener movimiento

$$g m_1 \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_2 + m_1} > \mu_e m_1 g \cos \theta \Leftrightarrow \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{(m_2 + m_1) \cos \theta} > \mu_e$$

# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado

- Con  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{4}{5}$ ,  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  y  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{(m_2 + m_1) \cos \theta} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \simeq 0.19$$

Con  $\mu_e = 0.4$ , partiendo del equilibrio, los bloques *no se mueven*

- Sin embargo, la fuerza que actúa sobre  $m_1$  *sí es suficiente* para mantener el movimiento si se supera el rozamiento estático: el rozamiento cinético produce una fuerza  $\vec{f}_r = -\mu_c F_{N_1} \vec{i}_1$ , la condición análoga a la anterior para mantener en este caso el movimiento es

$$\frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{(m_2 + m_1) \cos \theta} > \mu_c$$

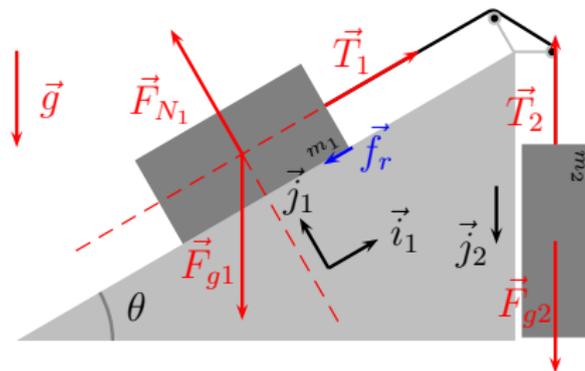
que, con  $\mu_c = 0.1$  sí se cumple. Supongamos ahora que el sistema “ha sido puesto en movimiento” y aparece rozamiento cinético.

# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado

La única modificación a incorporar es la presencia de la fuerza de rozamiento cinético que actúa sobre  $m_1$ :

$$\vec{f}_r = -\mu_c F_{N_1} \vec{i}_1$$



# Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado, incluyendo rozamiento cinético  
Segunda ley, cuerpo  $m_1$

$$T - m_1 g \sin \theta - \mu_c F_{N_1} = m_1 a$$

$$F_{N_1} - m_1 g \cos \theta = 0$$

Segunda ley, cuerpo  $m_2$

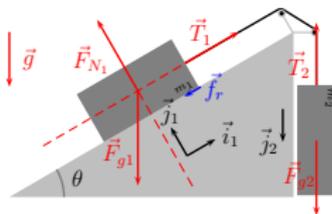
$$m_2 g - T = m_2 a$$

De modo que

$$a = g \frac{m_2 - m_1(\sin \theta + \mu_c \cos \theta)}{m_2 + m_1}$$

$$T = g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta + \mu_c \cos \theta)$$

$$a = 1.16 \text{ m s}^{-2}, \quad T = 1.73 \text{ N}$$



## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado, incluyendo rozamiento cinético  
Movimiento de  $m_2$ : dirección  $\vec{j}_2$ , coordenada  $y_2$ , en  $t = 0$ ,  $y_2 = 0$ ,  
 $\frac{dy_2}{dt} = 0$ :

$$\frac{d^2}{dt^2}y_2 = a$$

$$\frac{d}{dt}y_2 = at$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}at^2$$

Cuando  $y_2(t) = d$ , i.e.  $m_2$  ha recorrido una distancia  $d = 30$  cm,

$$v = \sqrt{2ad} = 0.83 \text{ m s}^{-1}$$

## Rozamiento: ejemplos

Ejemplo: bloques-plano inclinado, equilibrio con rozamiento estático  
Si tuviéramos  $m_1 = 4$  kg, habrá equilibrio para los valores de  $m_2$  tales que

$$T - m_1 g \sin \theta + \alpha \mu_e F_{N_1} = 0$$

$$F_{N_1} - m_1 g \cos \theta = 0$$

$$m_2 g - T = 0$$

donde  $\alpha \in [-1; 1]$  parametriza que la fuerza de rozamiento estático no puede superar el valor máximo  $\mu_e F_{N_1}$  en dirección  $+\vec{i}_1$  o  $-\vec{i}_1$ .

Sustituimos  $T$  y  $F_{N_1}$  en la primera ecuación,

$$m_2 = m_1 (\sin \theta - \alpha \mu_e \cos \theta)$$

y por tanto, si  $m_2$  cumple

$$m_1 \underbrace{(\sin \theta - \mu_e \cos \theta)}_{\simeq 0.15} \leq m_2 \leq m_1 \underbrace{(\sin \theta + \mu_e \cos \theta)}_{\simeq 0.85}$$

habrá equilibrio

Además de las fuerzas de rozamiento debidas a las fuerzas normales que actúan sobre las superficies de contacto de sólidos, aparecen fuerzas análogas al rozamiento cuando por ejemplo un cuerpo sólido se mueve dentro de un fluido. Ejemplo más inmediato: caída libre y rozamiento con el aire.

- ¿Qué ocurre cuando no despreciamos la presencia del aire?
  - Al avanzar, el cuerpo desplaza un cierta cantidad de aire
  - $\Rightarrow$  ejerce una fuerza sobre el aire, la correspondiente reacción se opone a la fuerza de la gravedad
  - A mayor velocidad, más cantidad de aire tendrá que desplazar por unidad de tiempo
  - $\Rightarrow$  fuerza de rozamiento dependerá típicamente de la velocidad
  - N.B. dependerá de las características del cuerpo (forma, densidad)

# Arrastre

- Vamos a analizar de forma genérica qué ocurre cuando este tipo de rozamiento (fuerza de arrastre) tiene una dependencia simple con la velocidad

$$\vec{F}_r = -k|\vec{v}|^{n-1}\vec{v}, \quad n > 0$$

y lo vamos a hacer en dos situaciones,

- 1 en ausencia de otras fuerzas
  - 2 en presencia de una fuerza constante (e.g. caída libre)
- En dinámica de fluidos se utiliza la ecuación de arrastre

$$F_r = \frac{1}{2}\rho C_d A |\vec{v}|^2$$

con  $\rho$  la densidad del fluido,  $A$  la sección (área) y  $C_d$  un coeficiente de arrastre (adimensional, geometría del cuerpo, etc)

- A bajas velocidades  $F_r \propto |\vec{v}|$

# Arrastre

- Nos restringimos a *una* dimensión: tenemos por tanto un cuerpo de masa  $m$ , con velocidad  $v = v_0 > 0$  en  $t = 0$ , sobre el que actúa la fuerza de rozamiento

$$F_r = -kv^n$$

- Análisis dimensional

$$[F_r] = MLT^{-2}, \quad [v^n] = L^n T^{-n}, \quad \Rightarrow \quad [k] = ML^{1-n} T^{n-2}$$

- Segunda ley:  $F_r = ma = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow$

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^n \Rightarrow v^{-n} dv = -\frac{k}{m} dt$$

Integramos entre el punto inicial  $(t, v) = (0, v_0)$  y  $(t, v)$

$$\int_{v_0}^v dv v^{-n} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

Ojo: variables mudas de integración  $v, t$

# Arrastre

- Integral en t

$$-\frac{k}{m} \int_0^t dt = -\frac{k}{m} t$$

- Integral en v: tenemos que distinguir  $n = 1$ ,  $n \neq 1$

- $n = 1$

$$\int_{v_0}^v dv v^{-1} = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

- $n \neq 1$

$$\int_{v_0}^v dv v^{-n} = \frac{v^{1-n} - v_0^{1-n}}{1-n}$$

- Para  $n = 1$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{k}{m} t \Leftrightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m} t}$$

- Para  $n \neq 1$

$$\frac{v^{1-n} - v_0^{1-n}}{1-n} = -\frac{k}{m} t \Leftrightarrow v(t) = \left( v_0^{1-n} - (1-n) \frac{k}{m} t \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

- Para  $n = 1$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) \rightarrow 0 \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

- Para  $n \neq 1$

$$v(t) = \left( v_0^{1-n} - (1-n) \frac{k}{m} t \right)^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\text{para } n > 1, \quad v(t) \rightarrow 0 \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

$$\text{para } n < 1, \quad v(t) = 0 \quad \text{para } t = \frac{mv_0^{1-n}}{k(1-n)}$$

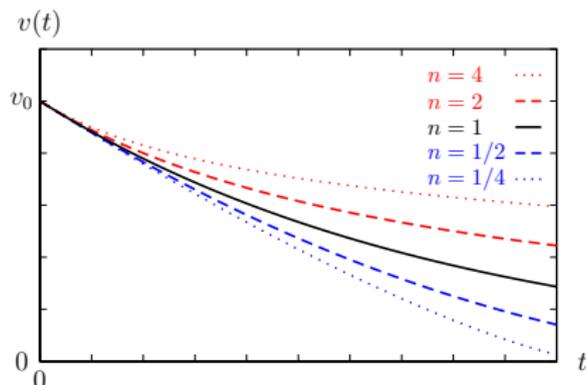
# Arrastre

Para ilustrar, 5 casos con idéntica  $v_0$  y con  $k = m \alpha v_0^{-n}$  de modo que la fuerza en  $t = 0$

$$F_r = -m \alpha \left( \frac{v}{v_0} \right)^n \Rightarrow F_r|_{t=0} = -m \alpha \quad \text{también es idéntica.}$$

Por tanto

$$n = 1, \quad v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha t}{v_0}\right), \quad n \neq 1, \quad v(t) = v_0 \left(1 - (1-n) \frac{\alpha t}{v_0}\right)^{\frac{1}{1-n}}$$



# Arrastre

Con fuerza constante (adoptamos notación de la caída libre) tenemos

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^n$$

Podemos constatar que existe una velocidad tal que la fuerza de rozamiento  $-kv^n$  cancela exactamente la fuerza constante  $mg$ : si se alcanza esa velocidad, la fuerza neta es nula y a partir de ese instante se mantiene un movimiento con *velocidad uniforme* (situación “ideal”, se alcanza asintóticamente): es la **velocidad límite**

$$0 = mg - kv^n \Rightarrow v_\ell = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Reescribimos

$$m \frac{dv}{dt} = k(v_\ell^n - v^n) \Rightarrow \frac{dv}{v_\ell^n - v^n} = \frac{k}{m} dt$$

# Arrastre

Integramos entre  $(t = 0, v = v_0)$  y  $(t, v)$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_\ell^n - v^n} = \frac{k}{m} \int_0^t dt = \frac{k}{m} t, \quad \frac{k}{m} = g v_\ell^{-n}$$

Demasiado complicado en general (funciones hipergeométricas)  
... pero casos  $n = \frac{1}{2}, 1, 2$  “tratables”

$$n = \frac{1}{2}, \quad \frac{k}{m} t = -2(\sqrt{v} - \sqrt{v_0}) - 2\sqrt{v_\ell} \ln \left( \frac{\sqrt{v} - \sqrt{v_\ell}}{\sqrt{v_0} - \sqrt{v_\ell}} \right)$$

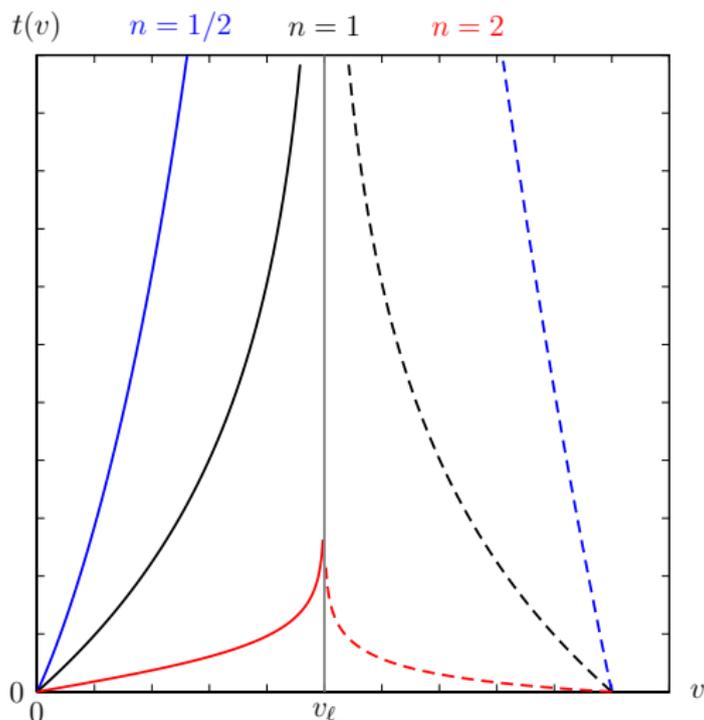
$$n = 1, \quad \frac{k}{m} t = -\ln \left( \frac{v_\ell - v}{v_\ell - v_0} \right)$$

$$n = 2, \quad \frac{k}{m} t = \frac{1}{v_\ell} \left[ \operatorname{arctanh} \left( \frac{v}{v_\ell} \right) - \operatorname{arctanh} \left( \frac{v_0}{v_\ell} \right) \right]$$

[N.B.  $n = 1, 2$  comportamientos típicos en la ecuación de arrastre]

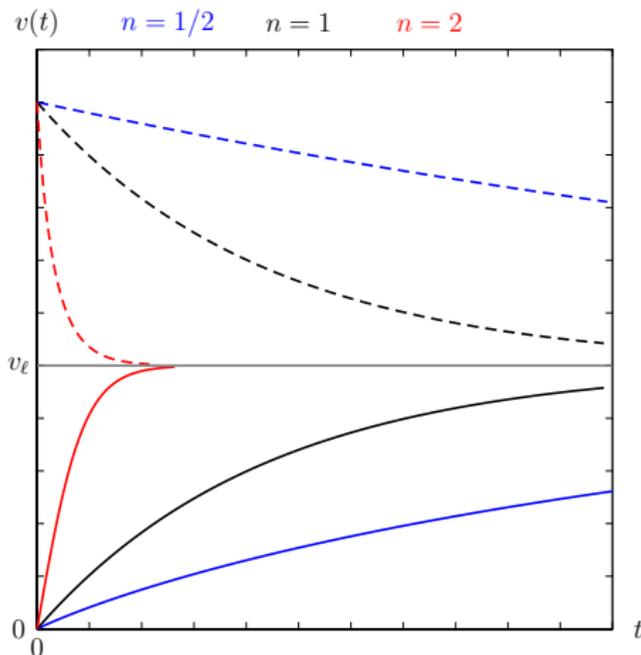
# Arrastre

Acabamos de obtener  $t(v)$



# Arrastre

Aunque analíticamente no seamos necesariamente capaces de obtener  $v(t)$  a partir de  $t(v)$

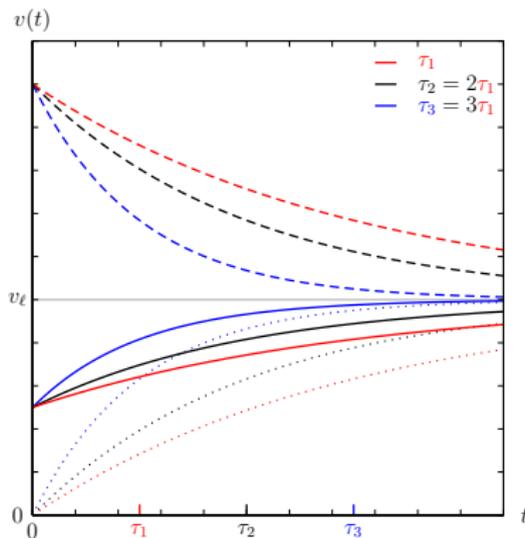


# Arrastre

Para  $n = 1$

$$v(t) = v_\ell - (v_\ell - v_0) \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = v_\ell - (v_\ell - v_0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

con  $\tau = \frac{m}{k}$  (N.B.  $[\tau] = T$ )

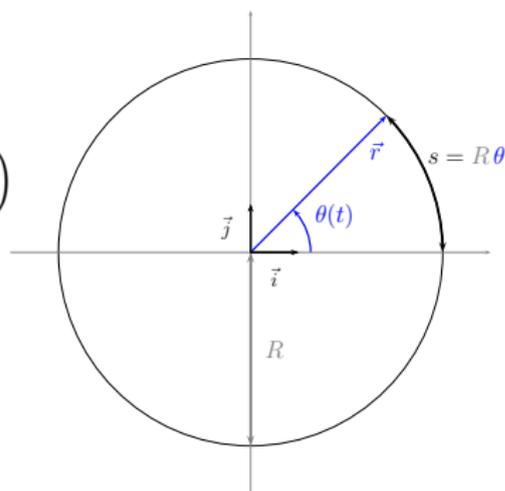


# Movimiento circular

- Trayectoria (de una masa puntual) *circular*:
  - Distancia con respecto a un punto (el centro) constante, radio  $R$
  - En un plano (en 2D)
- Escogemos sistema de coordenadas con origen en el centro y ejes – base  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  – tales que en  $t = 0$ ,  $\vec{r}(t) = R\vec{i}$
- Forma general de la posición:

$$\vec{r}(t) = R \left( \cos(\theta(t)) \vec{i} + \sin(\theta(t)) \vec{j} \right)$$

con  $\theta(t)$  el ángulo con respecto a la posición inicial, i.e.  $\theta(0) = 0$   
 $|\vec{r}(t)| = R$  por construcción



# Movimiento circular

## ■ Velocidad

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R \left( -\sin(\theta(t)) \vec{i} + \cos(\theta(t)) \vec{j} \right)$$

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0, \quad |\vec{v}(t)| = R \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

## ■ Aceleración

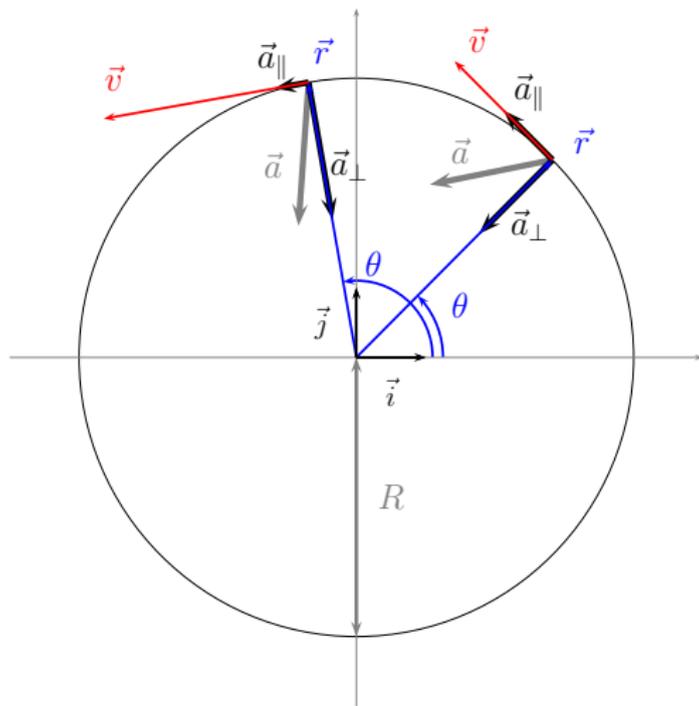
$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel}$$

$$\vec{a}_{\parallel}(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} R \left( -\sin(\theta(t)) \vec{i} + \cos(\theta(t)) \vec{j} \right) = \frac{d^2\theta/dt^2}{d\theta/dt} \vec{v}(t)$$

$$\vec{a}_{\perp}(t) = - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 R \left( \cos(\theta(t)) \vec{i} + \sin(\theta(t)) \vec{j} \right) = - \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{r}(t)$$

$$|\vec{a}_{\perp}(t)| = R \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{R}$$

# Movimiento circular



# Movimiento circular uniforme

- Movimiento circular uniforme cuando

$$\theta(t) = \omega t (+\theta_0), \quad \omega \text{ constante}$$

$\omega$  frecuencia angular;  $[\omega] = T^{-1}$ ; en el S.I.  $\text{rad s}^{-1}$  ( $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz}$ )

- Posición

$$\vec{r}(t) = R \left( \cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j} \right)$$

- Velocidad

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \Rightarrow \vec{v}(t) = R\omega \left( -\sin(\omega t) \vec{i} + \cos(\omega t) \vec{j} \right), \quad |\vec{v}(t)| = R|\omega|$$

- Aceleración

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{\parallel}(t) = \vec{0}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\perp}(t) = -R\omega^2 \left( \cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j} \right) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

**OJO** con “fuerza centrípeta” al considerar la segunda ley.

$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a} = m\vec{a}_{\perp}$  indica que la resultante de las fuerzas que actúan sobre la masa puntual tiene dirección hacia el centro

# Movimiento circular uniforme

- Se introduce un *vector*  $\vec{\omega}$  asociado a la frecuencia angular  $\omega$ , tal que

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega} \times \vec{r}(t), \quad |\vec{\omega}| = \omega$$

Es constante en módulo (la frecuencia angular) y en dirección ( $\perp$  al plano de  $\vec{r}$  y  $\vec{v}$ )

Tenemos

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{R^2} = \omega \vec{k}$$

N.B.  $\left\{ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \right\}$  es ortonormal directa  
(ver (\*\*)) triedro de Frenet-Serret en Cinemática)

- Ejemplo de movimiento circular uniforme (más allá de sistemas mecánicos “por construcción”): movimiento de una carga en un campo magnético uniforme y constante  $\vec{B}$  (fuerza de Lorentz  $\vec{F} \propto \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{a}_{\parallel} = \vec{0}, |\vec{a}_{\perp}| = \text{cte}$ )

# Movimiento circular uniforme

[Resumen]

$$\vec{r}(t) = R \left( \cos(\omega t) \vec{i} + \sin(\omega t) \vec{j} \right)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega \left( -\sin(\omega t) \vec{i} + \cos(\omega t) \vec{j} \right)$$

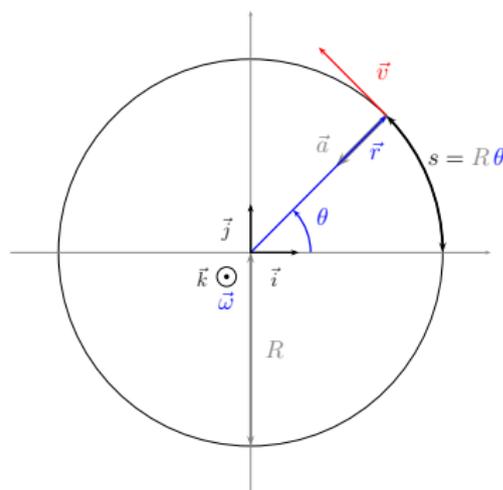
$$\vec{v}(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\perp(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = R^2 \vec{\omega}, \quad \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \vec{v}(t)$$

N.B. Movimiento circular *no* uniforme:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \neq 0, \Rightarrow \frac{d|\vec{v}|}{dt} \neq 0$$



## Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: se hace girar un cubo de agua siguiendo una circunferencia vertical de radio  $R$ . Si la velocidad del cubo en su parte más alta es  $v_a$ , calcular:

- la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en este punto;
- el valor mínimo de  $v_a$  para que el agua no se salga;
- la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja de la trayectoria, donde la velocidad del cubo es  $v_b$ .
- Calcular el período de revolución máximo que evita que el líquido se derrame al hacer girar un cubo de agua en un círculo vertical a velocidad constante con  $R = 1$  m.

# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: cubo de agua

Fuerzas ( $m$  masa de agua, cubo sin masa):

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = -F_N\vec{j}$$

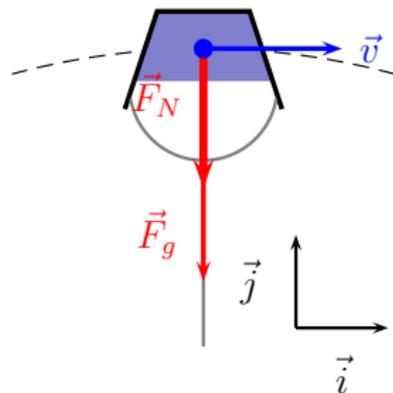
Velocidad:

$$\vec{v} = v_a\vec{i} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_\perp = -a_\perp\vec{j}$$

con  $a_\perp > 0$  (i.e.  $\vec{a}_\perp$  “hacia abajo”)

Segunda ley

$$\begin{aligned}\vec{F}_g + \vec{F}_N &= m\vec{a} \\ -(F_N + mg)\vec{j} &= -ma_\perp\vec{j}\end{aligned}$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: cubo de agua  
Trayectoria

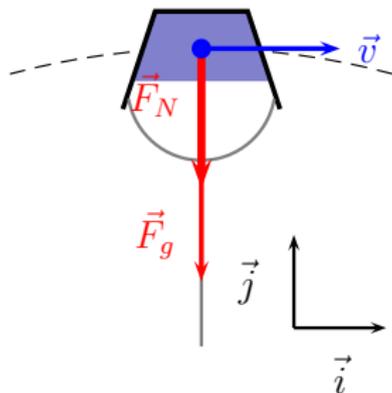
$$R = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{a}_\perp|} = \frac{v_a^2}{a_\perp}$$

Por tanto

$$-F_N = m(g - a_\perp) = m \left( g - \frac{v_a^2}{R} \right)$$

Condición límite para que el agua “no se salga”,  $F_N = 0$

$$F_N = 0 \Rightarrow (v_a)_{\min} = \sqrt{gR}$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: cubo de agua

En la parte más baja de la trayectoria, cambiamos

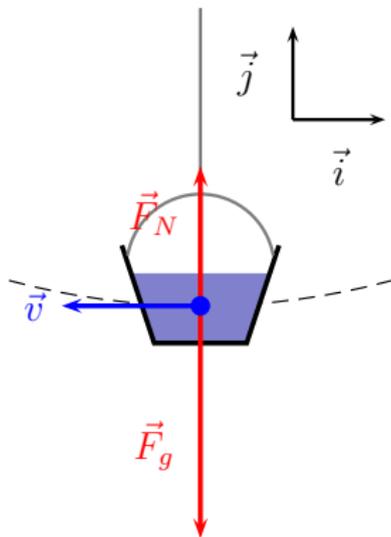
$$\vec{a}_\perp = a_\perp \vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N \vec{j}$$

con  $a_\perp > 0$  (i.e.  $\vec{a}_\perp$  “hacia arriba”)

$$F_N = m(g + a_\perp) = m \left( g + \frac{v_b^2}{R} \right)$$

A velocidad constante, para que el agua “no se salga”, la velocidad mínima es  $(v_a)_{\min}$ , el periodo es  $T = \frac{2\pi R}{|v|}$  con lo que

$$T_{\max} = \frac{2\pi R}{(v_a)_{\min}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2.0 \text{ s}$$



## Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: durante un trabajo de verano, un equipo de estudiantes diseña neumáticos de coche. Se prueba un nuevo prototipo de neumático para ver si su comportamiento cumple las previsiones. En una prueba de deslizamiento el coche es capaz de tomar una curva de 45.7 m de radio con una velocidad máxima de 68 km/h sin derrapar. Asumir que no hay rozamiento con el aire y que la carretera es horizontal.

- ¿Cuánto vale la aceleración centrípeta?
- ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre las ruedas y el suelo?

# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: neumáticos-coche

- Fuerzas

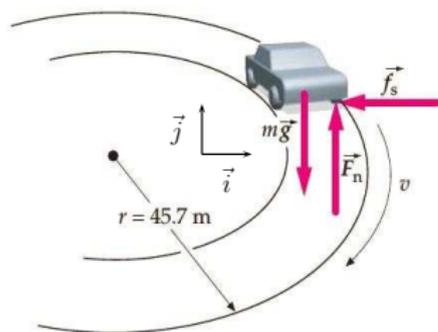
$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{j}, \quad \vec{f}_{r.e.}^{\max} = -f_{r.e.}^{\max}\vec{i} = -\mu_e F_N\vec{i}$$

- Aceleración  $\vec{a} = \vec{a}_\perp = -a_\perp\vec{i}$ , con lo que la condición sobre  $\mu_e$  es

$$m\vec{a}_\perp = \vec{f}_{r.e.}^{\max} \Rightarrow ma_\perp = \mu_e F_N$$

Segunda ley, componente  $\vec{j}$ :  
no hay aceleración vertical  $\Rightarrow$   
 $\vec{F}_g + \vec{F}_N = \vec{0}$  y obtenemos

$$F_N = mg$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: neumáticos-coche

- Obtenemos la aceleración centrípeta a partir de la velocidad y el radio de curvatura

$$|\vec{a}_\perp| = \frac{|\vec{v}|_{\max}^2}{R} = 7.81 \text{ m s}^{-2}$$

N.B.  $|\vec{v}|_{\max} = 68 \text{ km h}^{-1} = 18.9 \text{ m s}^{-1}$

- Por tanto

$$ma_\perp = \mu_e F_N \Leftrightarrow \mu_e = \frac{a_\perp}{g} = \frac{|\vec{v}|_{\max}^2}{gR} = 0.796$$

Si  $\mu_e < 0.796$ , con el coche girando a la misma velocidad  $|\vec{v}|_{\max}$ , la fuerza de rozamiento estático no es suficiente para evitar que el coche derrape

# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: una curva de radio 30 m tiene un ángulo de peralte  $\theta$ .  
Determinar el valor de  $\theta$  para el cual un coche puede tomar la curva a 40 km/h aunque esté cubierta de hielo.

# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: coche-curva-hielo

- Hielo  $\Leftrightarrow$  sin rozamiento
- Fuerzas

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N(\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j})$$

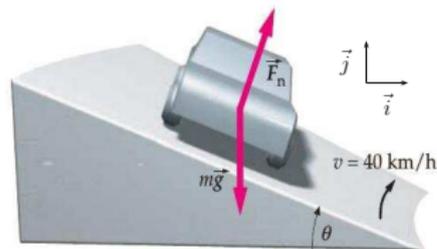
- Aceleración  $\vec{a} = \vec{a}_\perp = a_\perp\vec{i}$
- Segunda ley

$$F_N \sin\theta = ma_\perp$$

$$F_N \cos\theta - mg = 0$$

por tanto

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta}, \quad a_\perp = g \tan\theta$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: coche-curva-hielo

- Trayectoria (localmente) circular:

$$a_{\perp} = \frac{|\vec{v}|^2}{R}$$

imponemos el radio  $R = 30$  m y la velocidad  $|\vec{v}| = 40$  km/h =  $11$  m s<sup>-1</sup>,

$$g \tan \theta = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \Rightarrow \theta = \arctan \left( \frac{|\vec{v}|^2}{gR} \right) = 0.4 \text{ rad} = 23^{\circ}$$

## Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: un juego mecánico de feria llamado El Rotor consta de un tambor giratorio con suelo móvil, que desaparece cuando el tambor gira rápidamente. En su interior, las personas se mantienen pegadas a la pared gracias al rozamiento. El coeficiente mínimo de rozamiento esperado entre las ropas de las personas y la pared es de 0.4. ¿Cuál es la velocidad angular mínima con la que debe girar el tambor para que pueda quitarse el suelo? El radio del tambor es 4.0 m.



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: rotor

- Fuerzas que actúan sobre una persona de masa  $m$

$$\vec{F}_g = -mg\vec{j}, \quad \vec{F}_N = F_N\vec{i},$$

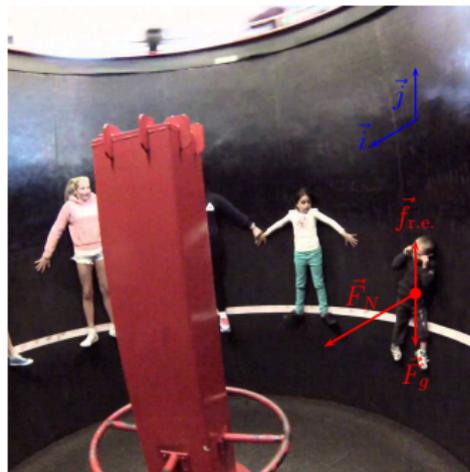
$$\vec{f}_{r.e.} = f_{r.e.}\vec{j}$$

- Retirar el suelo  $\Leftrightarrow$  que las personas no caigan, i.e.

$$f_{r.e.} = mg$$

en cuyo caso

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_N + \vec{f}_{r.e.} = F_N\vec{i}$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: rotor

- La fuerza de rozamiento estático máxima es  $f_{r.e.}^{\max} = \mu_e F_N$
- $F_N$  viene determinado por la trayectoria circular de la persona:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} = a_{\perp} \vec{i} \Rightarrow a_{\perp} = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{F_N}{m}$$

- El valor mínimo de  $|\vec{v}|$  es tal que

$$f_{r.e.}^{\max} = \mu_e F_N = mg$$

es decir

$$\mu_e \frac{m|\vec{v}|_{\min}^2}{R} = mg \Leftrightarrow |\vec{v}|_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_e}}$$



# Movimiento circular, ejemplos

Ejemplo: rotor

- La correspondiente velocidad angular es

$$\omega_{\min} = \frac{|\vec{v}|_{\min}}{R} = \sqrt{\frac{g}{\mu_e R}}$$

- Con  $\mu_e = 0.4$ ,  $R = 4$  m

$$|\vec{v}|_{\min} = 9.9 \text{ m s}^{-1}, \quad \omega_{\min} = 2.5 \text{ s}^{-1}$$

$$a_{\perp} = \frac{g}{\mu_e} = 24.5 \text{ m s}^{-2}$$