

Laboratorio de Física Nuclear y de Partículas (1.5 créditos)

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear



Programa

Contenidos teóricos (Teoría + Sesión introductoria al laboratorio)

Clases teoría

- Fuentes de radiación
- Interacción de las radiaciones con la materia
- Propiedades generales de los detectores de radiación
- Generalidades de los detectores
- Aspectos generales de los detectores gaseosos y de semiconductores
- Calorímetros

Sesión
introductoria al
laboratorio

- Los detectores de radiación y de partículas del laboratorio
- Espectroscopía de la radiación con detectores de centelleo
- APÉNDICE: Estadística de recuento y predicción de errores

Referencia básica:

“Radiation Detection and Measurements”,
Glenn F. Knoll, Thrid edition, John Wiley & Sons Inc., 2000

Programa

Práctica 1: El Geiger-Müller

- Curva “plateau”
- Fondo del detector
- Error estadístico de las medidas de radiación
- Test de funcionamiento del tubo
- Tiempo muerto

Referencia básica:

“Guiones de Laboratorio”

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Programa

Práctica 2: Espectroscopía con un detector de NaI (TI)

- Calibración energética del sistema de detección
- Espectros gammas de fuentes radiactivas
- Estudio de la dispersión Compton
- Pico de aniquilación, picos de escape simple y doble, pico suma
- Atenuación de fotones en plomo
- Determinación de la constante de desintegración de un isótopo de vida corta

Referencia básica:

“Guiones de Laboratorio”

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Programa

Práctica 3: La cámara de niebla

- Observación directa de diferentes tipos de trayectorias procedentes de la radiación de fondo atmosférica y cósmica
- Pérdida de energía específica y discriminación entre los distintos tipos de radiaciones (partículas α , β , γ , protones, muones)
- Determinación "on-line" y "off-line" de la concentración de radón atmosférico
- Búsqueda de sucesos "V" (desintegraciones en cascada y procesos de materialización). Rayos δ
- Búsqueda de desintegraciones de muones en el interior de la cámara

Referencia básica:

"Guiones de Laboratorio"

Departamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear

Evaluación

- La asistencia a las prácticas es obligatoria
- Las fuentes radiactivas que se manejan son de baja actividad, pero requieren una manipulación adecuada
- Cada alumno tendrá un pequeño cuaderno de laboratorio
- En la siguiente sesión a la finalización de cada práctica se entregará una breve memoria de la misma. La memoria de la última práctica se entregará una semana después de la finalización del laboratorio
- La evaluación global del laboratorio es en buena medida "continua", e incluye i) el trabajo en el laboratorio, ii) la supervisión del cuaderno, iii) la memoria
- El laboratorio contribuye un 20% a la nota global de la asignatura

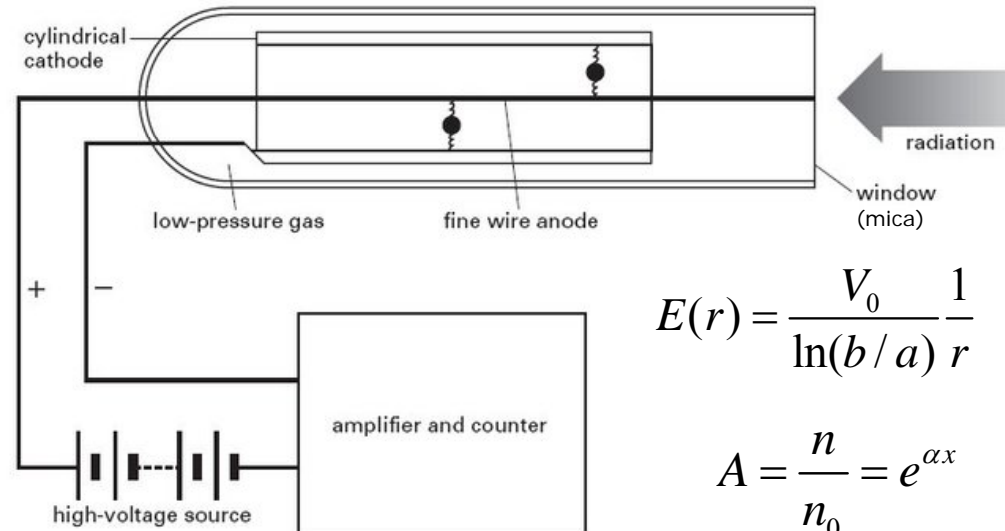
Detectores de radiación y de partículas del laboratorio

Índice:

- El detector Geiger-Müller
- La cámara de niebla
- Detectores de centelleo. Fotomultiplicadores

El contador Geiger-Müller

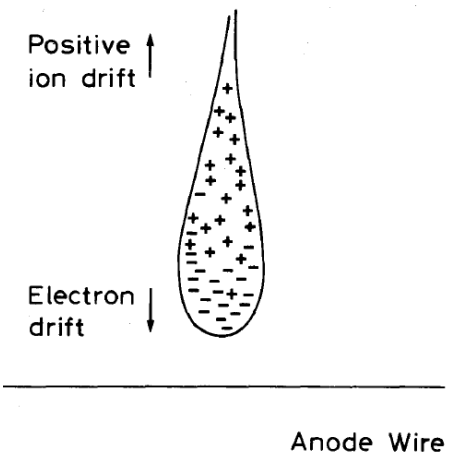
- Los electrones primarios de ionización son fuertemente acelerados por el campo E cerca del hilo anódico ($v \propto \mu E$)
 - ⇒ producen otros electrones por ionización
 - ⇒ la "avalancha" se desplaza hacia el hilo
 - ⇒ formación de la señal



$$E(r) = \frac{V_0}{\ln(b/a)} \frac{1}{r}$$

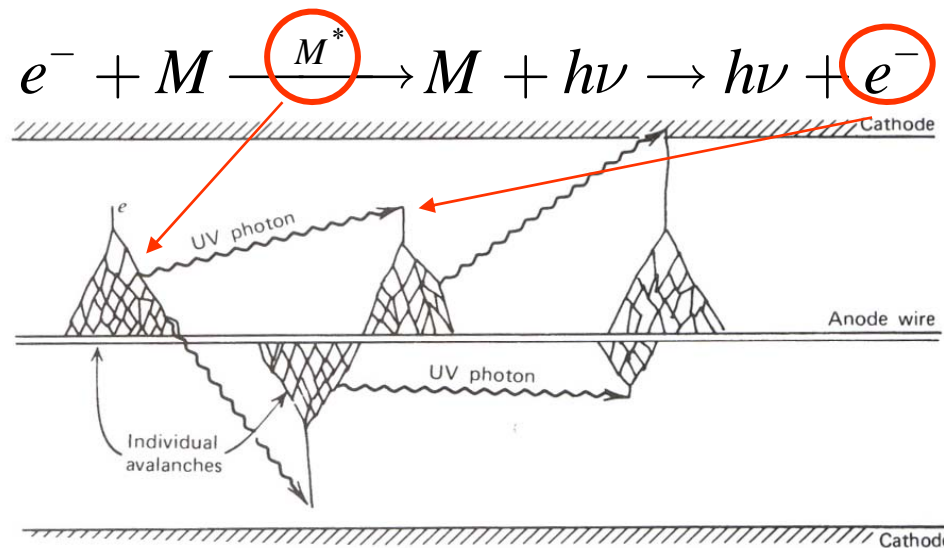
$$A = \frac{n}{n_0} = e^{\alpha x}$$

- Multiplicación en las cercanías del ánodo:
 - Tamaño del pulso independiente de la posición de la partícula, pero en general depende de la magnitud de ionización primaria (régimen proporcional)
 - Tiempo de formación de la avalancha \sim unos pocos tiempos de deriva de los electrones \sim ns
- Gases de llenado: que formen iones positivos (baja afinidad electrónica), como gases nobles (argón, helio), con algunos aditivos ("quenchers")



El contador Geiger-Müller

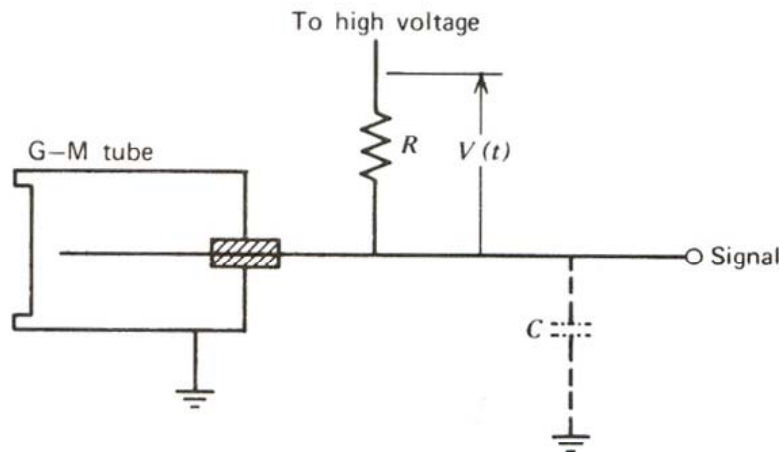
- Si el voltaje es lo suficientemente elevado, la avalancha primaria es más violenta que a menores voltajes (régimen proporcional), con amplificación $A \sim 10^7 - 10^8$
- **Avalanchas Townsend encadenadas.** El número de fotones ultravioleta producidos es lo suficientemente grande como para no ser todos absorbidos por el "quencher" \Rightarrow los fotones no absorbidos generan avalanchas secundarias, esparcidas a lo largo de todo el hilo anódico



- La carga total de la avalancha es independiente de la magnitud y localización de la ionización primaria \Rightarrow voltaje umbral de operación y señal uniforme \Rightarrow "plateau"

Extinción de la descarga del contador

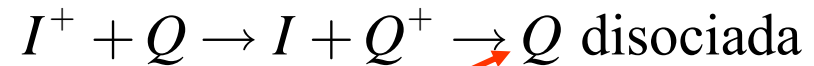
- Energía de ionización del gas > 2 veces la función trabajo del cátodo \Rightarrow descarga continua
- El proceso de descarga se detiene como consecuencia de la reducción del campo efecto debido al plasma producido, debido al movimiento lento de los I^+ hacia el cátodo
- “Quenching” externo: $R \sim 10^8 \Omega$. Reduce $V(t)$ un Δt después de cada pulso para que no se produzca multiplicación gaseosa



$$\Delta t > t_{\text{desplazamiento } I^+} + t_{\text{desplazamiento } e^-}$$

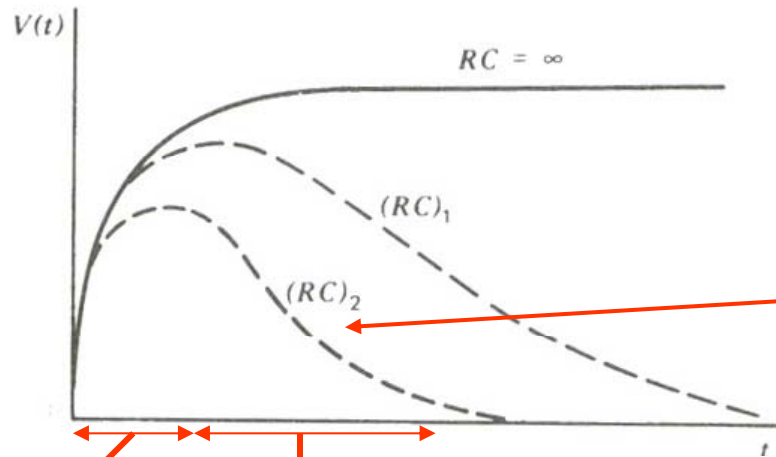
$\underbrace{\hspace{10em}}_{100 \mu s} \quad + \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{1 \mu s}$

$$RC \sim 1 \text{ ms}$$



- “Quenching” interno: gases poliatómicos que absorben fotones y disipan su energía al disociarse o por colisiones elásticas. Pueden ser orgánicos (metano, isobutano, polimerizan en los electrodos) o inorgánicos (usualmente halógenos, como Cl o Br, no polimerizan, pero menos eficientes)

Características temporales del contador



Perfil del pulso

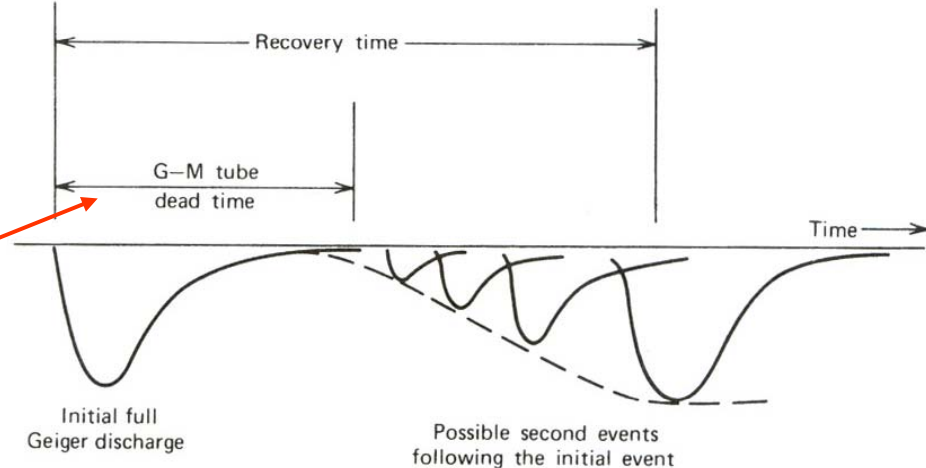
$RC < 100 \mu s$

Recolección e⁻

Desplazamiento I⁺

Tiempo muerto

50-100 μs



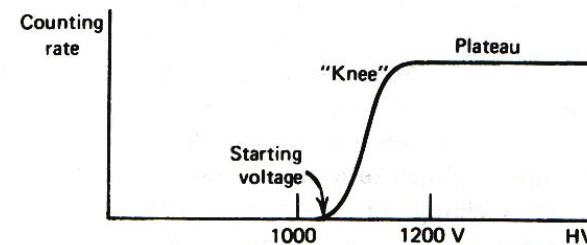
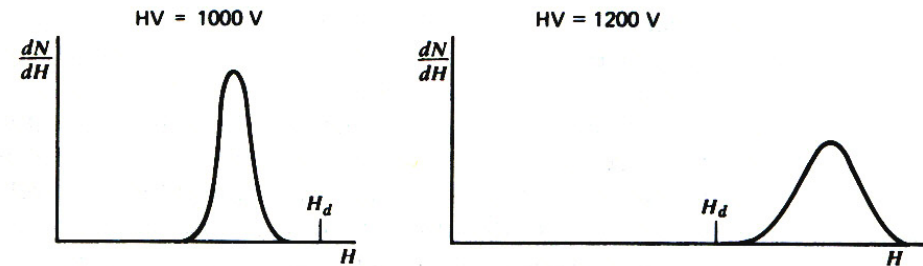
Largo tiempo muerto (recuperación de la descarga)

⇒ Limitado a contajes ~ 100 Hz

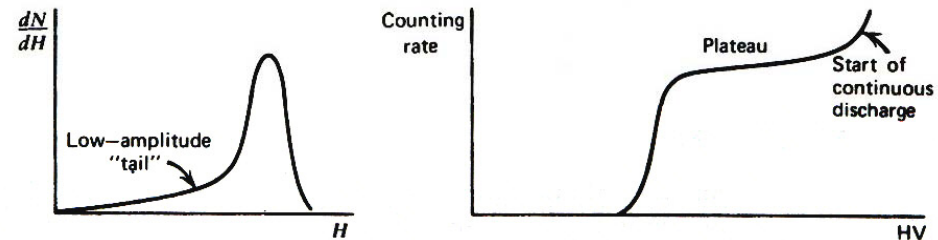
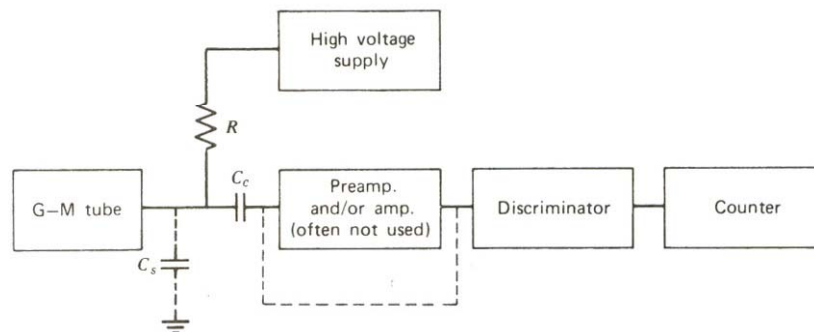
⇒ Correcciones por tiempo muerto en función de la tasa de contaje

Curva plateau del contador Geiger-Müller

- Se establece un nivel de discriminación H_d : la señal ha de superar este nivel para que se acepte
- ¿Cómo establecer H_d para que pequeñas variaciones no influyan en el espectro? Plateau
- Variación de la ganancia del amplificador o del voltaje aplicado al detector

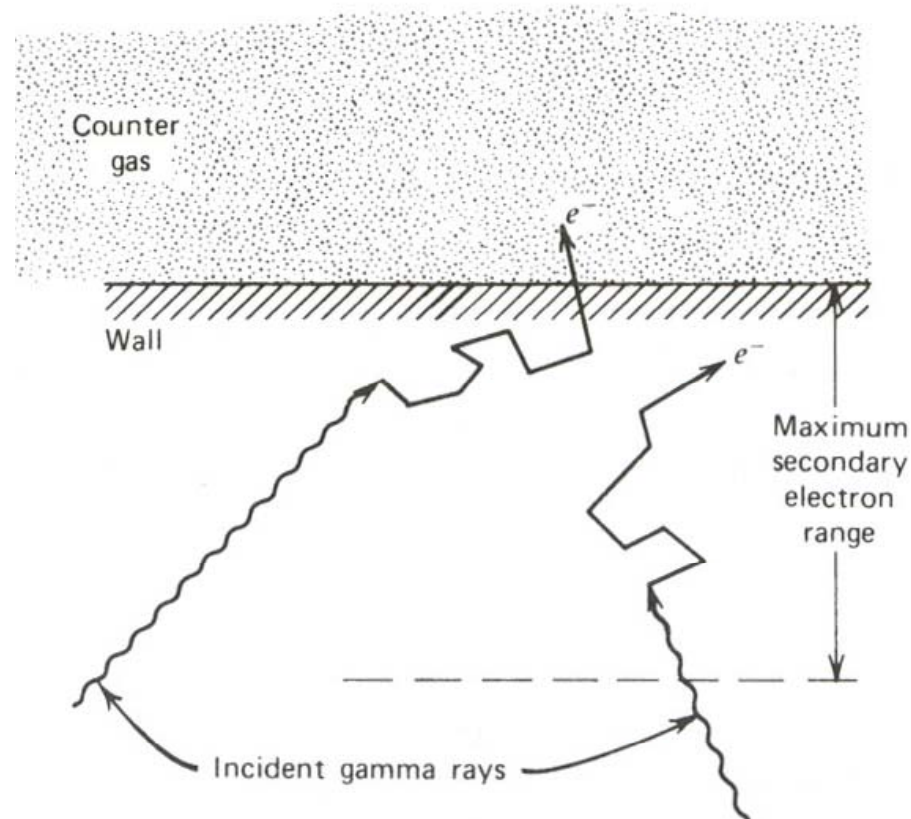


(a)



Eficiencia del contador Geiger-Müller

- Eficiencia para partículas cargadas, 100%
- Pobre sensibilidad a rayos γ , 1%



- Utilizado hoy fundamentalmente como monitor de radiación

Introducción al Laboratorio de Física Nuclear y de Partículas

Algunos contadores Geiger-Muller portátiles



El montaje del laboratorio



Tubo GM con castillete para fuente y absorbentes



Alta tensión y contador

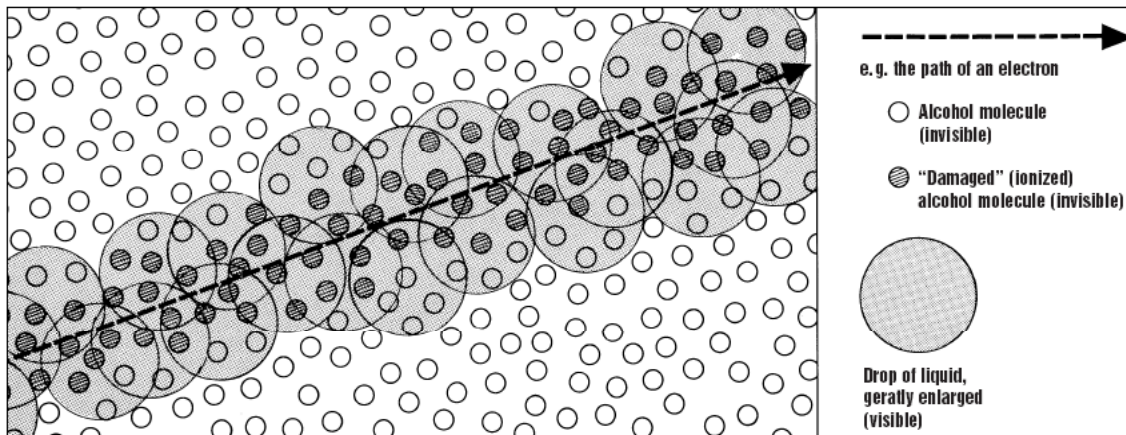
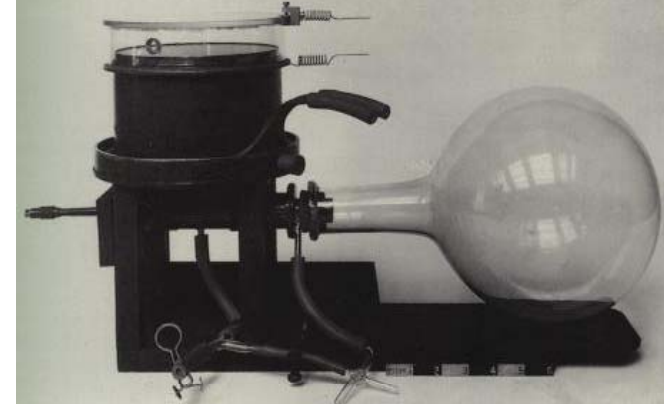


Absorbentes

La cámara de niebla

- Desarrollada por C. Wilson (1912)
- Constituida por una cámara con gas sobresaturado (o sobreenfriado), es decir, en equilibrio inestable a una temperatura inferior a la de condensación

Cámara de Wilson (expansión)



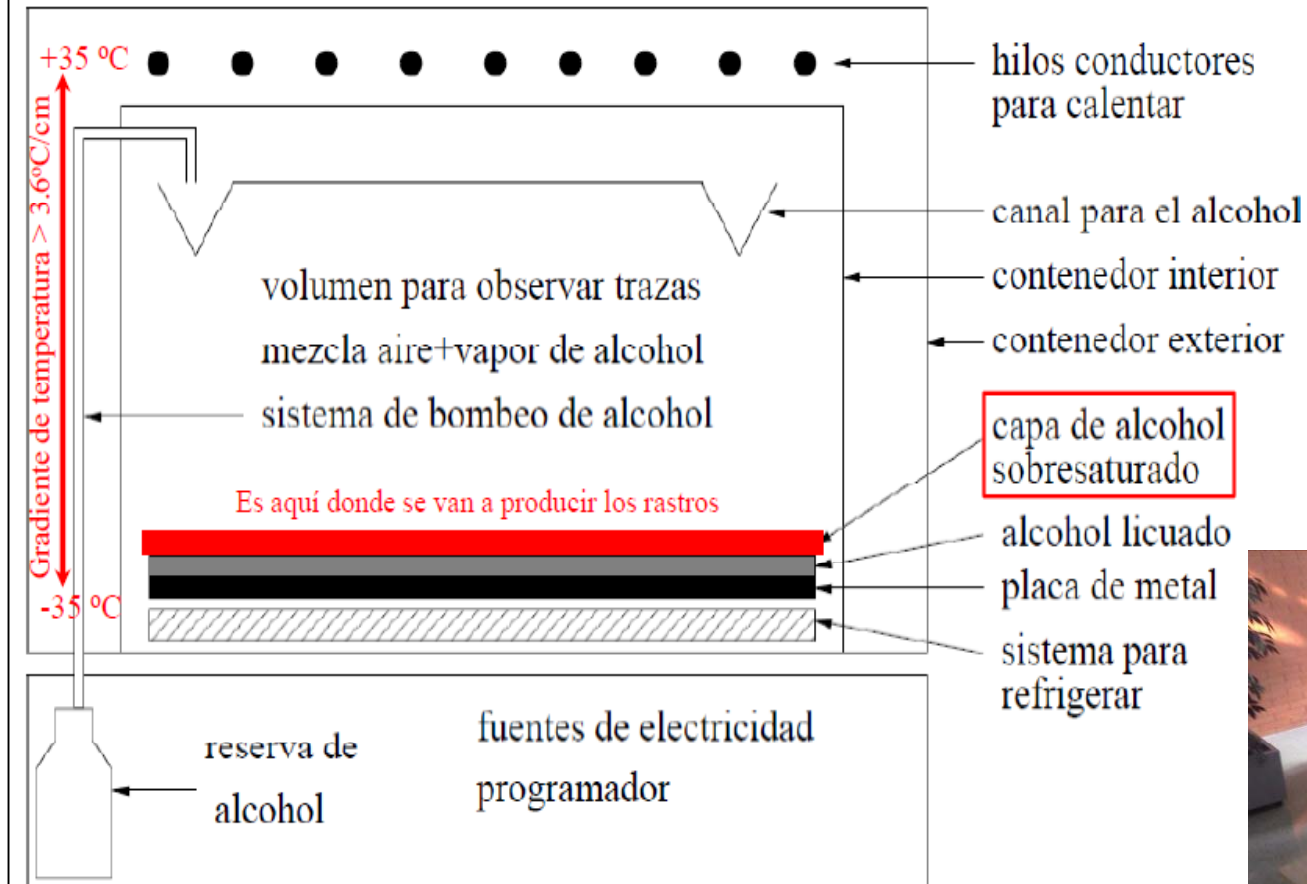
Estela similar a la que dejan los aviones en la troposfera...



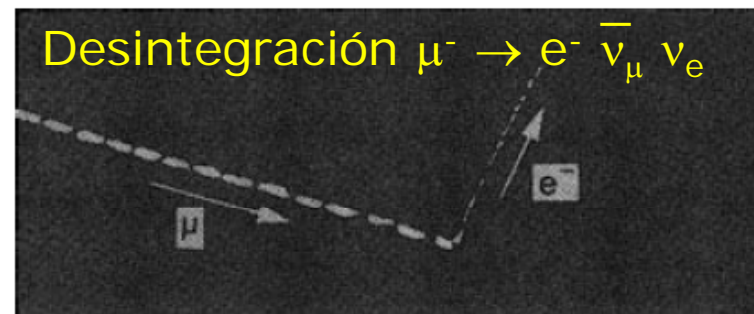
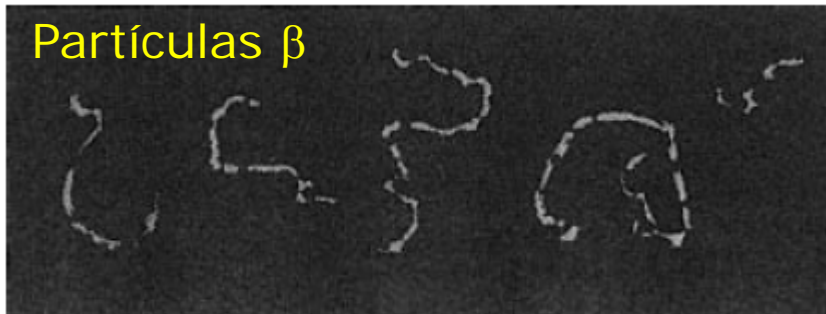
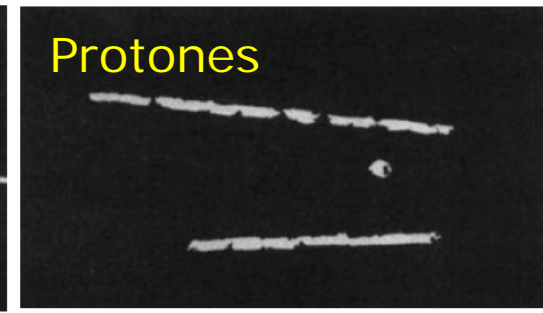
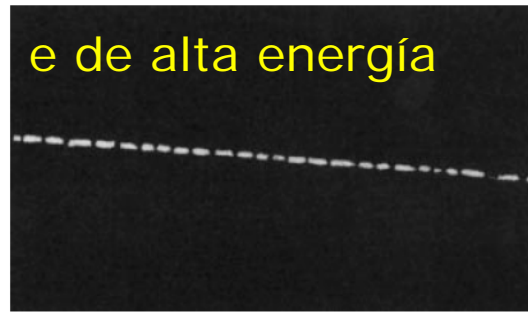
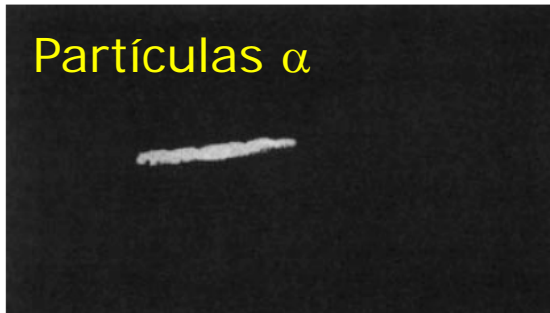
- La partícula cargada ionizan átomos y moléculas a lo largo de su trayectoria \Rightarrow los iones actúan como núcleos de condensación (perturbación)
- Se trata por tanto de un dispositivo de visualización de trazas (trayectorias) de las partículas y radiaciones. También dan información de dE/dx

La cámara de niebla del laboratorio

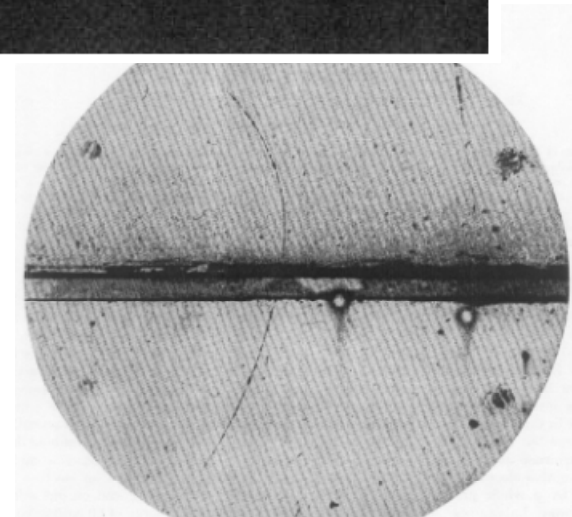
- La cámara de niebla del IFIC es de difusión, así que se encuentra activa en todo momento, al contrario que la original de Wilson que es de expansión



La cámara de niebla



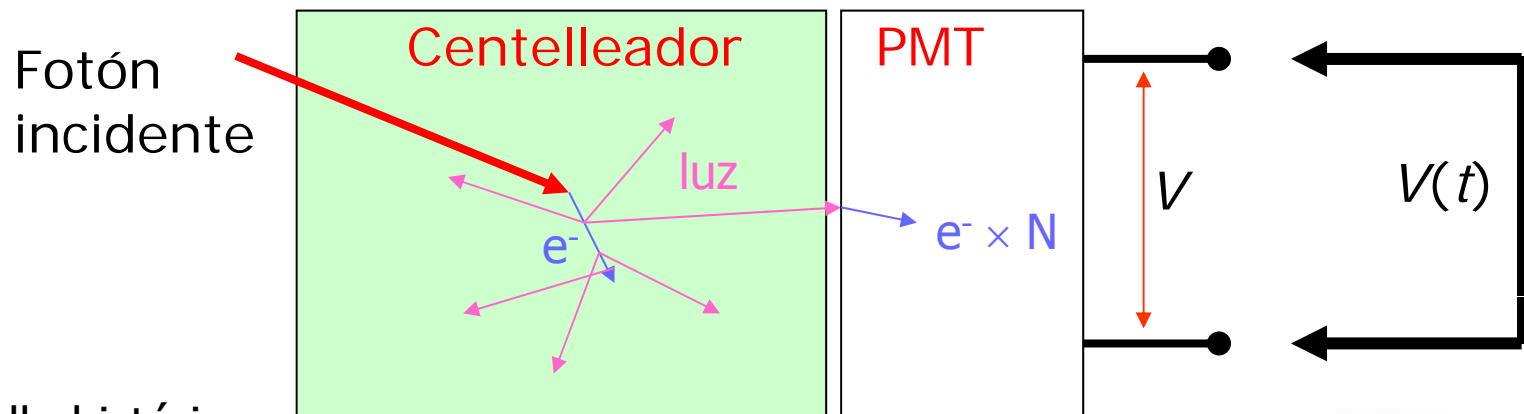
- Las cámaras de niebla se han utilizado hasta los años 1950
- Son responsable de grandes descubrimientos (positrón, muon, partículas extrañas, etc.)
- Hoy son una herramienta única de formación académica (nuestro caso), y se usan ampliamente en exhibiciones



Descubrimiento positrón (Anderson, 1932)

Detectores de centelleo

- Se trata de uno de los dispositivos más ampliamente utilizados en Física Nuclear y Física de Partículas (investigación, medicina, etc.)
- Basados en la emisión de un destello de luz (generalmente visible o UV) por ciertos materiales al paso de la radiación
- El dispositivo luminiscente se acopla óptimamente (directamente o a través de una guía de luz) a un tubo fotomultiplicador (PMT), que convierte y amplifica el destello de luz en un pulso eléctrico



- Desarrollo histórico:
 - Crookes (1903) desarrolla el “espintariscopio”
 - Geiger y Marsden (1909): experimento del núcleo
 - Curran y Baker (1944): lente+ojo \Rightarrow fotomultiplicador



Espintariscopio: Pantalla fluorescente (ZnS)+lente

El detector de centelleo ideal

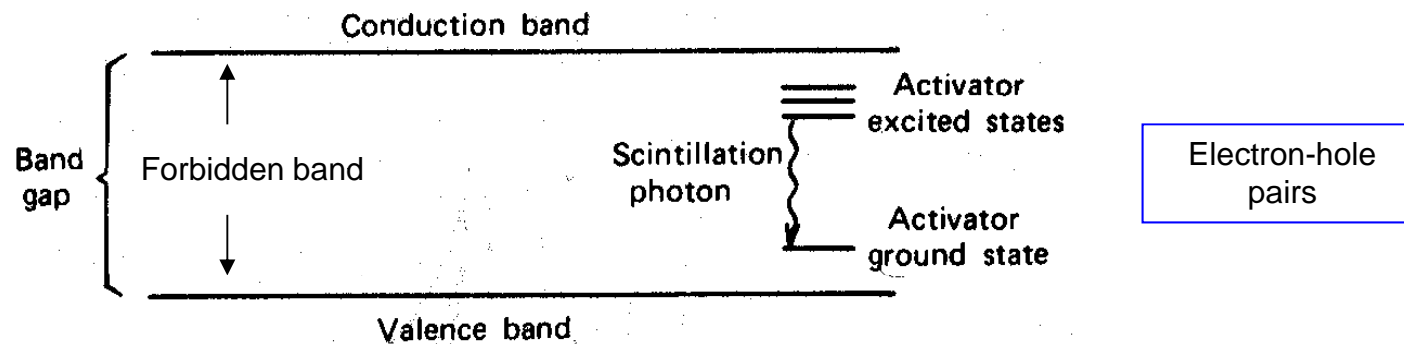
- Convertir la energía cinética de la partícula cargada en luz con la **máxima eficiencia de centelleo**
 - Esta conversión ha de ser **lineal**: la intensidad de luz ha de ser proporcional a la energía depositada por la partícula cargada
 - El **medio** ha de ser **transparente** a la longitud de onda de su propia emisión para una buena recolección de luz
 - El **tiempo de emisión** de la luminiscencia inducida ha de ser **corto** para que se puedan generar los pulsos (rápidamente)
 - Fluorescencia: emisión de la luz inmediatamente después (tiempos menores de 10^{-8} s) de la absorción de la radiación
 - Fosforescencia: emisión retardada (\sim ms, incluso horas)
- $$\left. \begin{array}{l} N \simeq Ae^{-t/\tau_f} + Be^{-t/\tau_s} \\ \approx Ae^{-t/\tau_f} \end{array} \right\}$$
- El material ha de ser de **buena calidad óptica** y construido de un tamaño lo suficientemente grande
 - El índice de refracción ha de ser cercano al del vidrio (~ 1.5) para permitir un **acoplamiento óptico** de la luz de centelleo con el PMT u otro sensor de luz
 - El **espectro de emisión** ha de ser similar al del PMT

Tipos de centelleadores

- El mecanismo de absorción de energía y emisión de luz depende del tipo de material centelleador
- **Orgánicos:**
 - ✓ Cristales puros, por ej. antraceno, $C_{14}H_{10}$
 - ✓ Disoluciones líquidas de dopante centelleador
 - ✓ Plásticos: disoluciones de los mismos centelleadores anteriores en plásticos sólidos
- **Inorgánicos:** cristales inorgánicos con impurezas activadoras
 - ✓ Haluros alcalinos: NaI(Tl), CsI(Tl), CsI(Na), LiI(Eu), CsF₂, etc.
 - ✓ No alcalinos: BGO (permanganato de bismuto, $Bi_4Ge_3O_{12}$), BaF₂
 - ✓ Alta densidad, alto Z
 - Alto poder de frenado
 - Muy adecuados para **rayos γ** y **electrones de alta energía**
 - ✓ Gases
 - Generalmente gases nobles, también N₂
 - Emiten en UV \Rightarrow requieren desplazadores de longitud de onda
 - ✓ Vidrios, como silicato de boro

Centelleadores inorgánicos

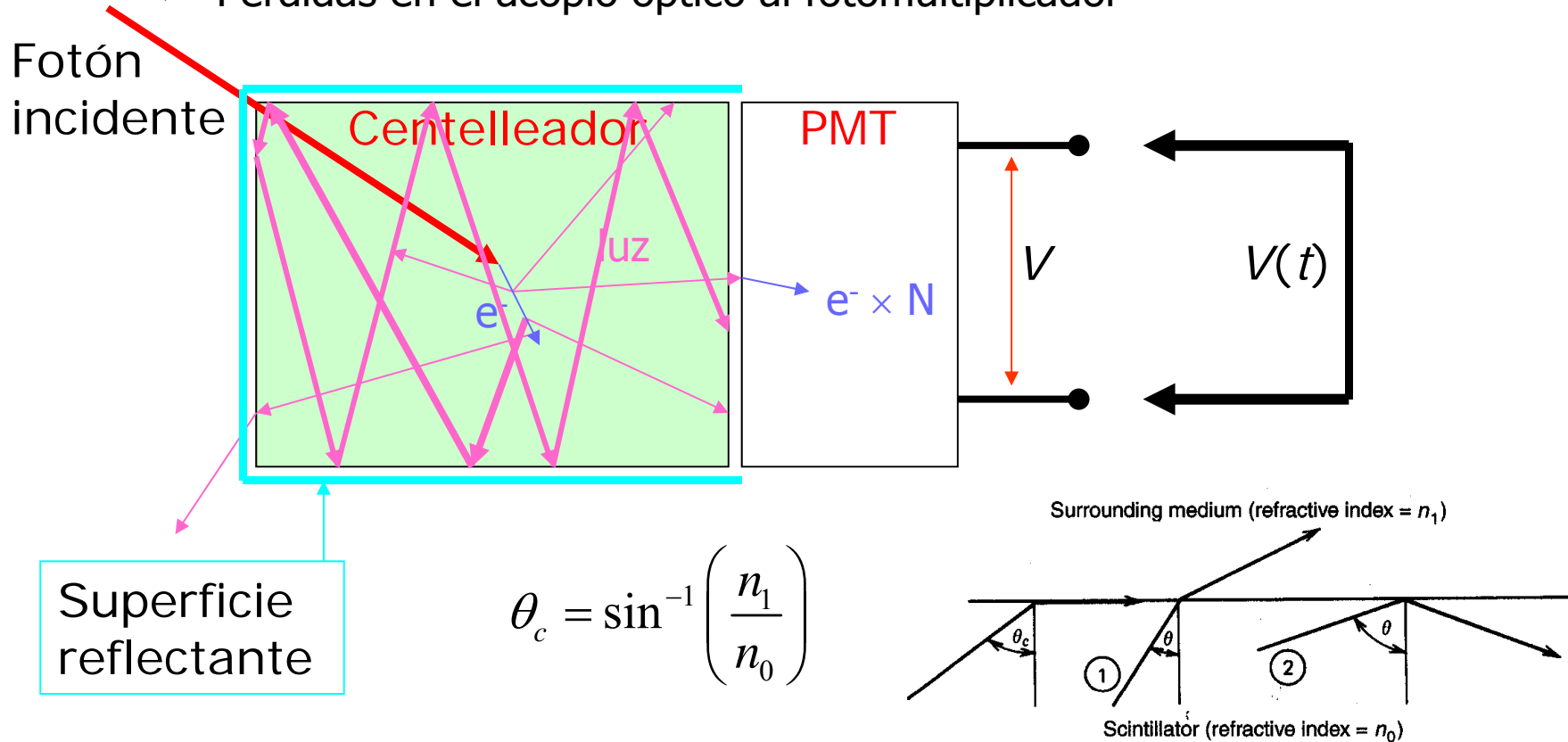
- Cristales inorgánicos con impurezas activadoras
⇒ estructura electrónica de bandas con centros de activación
- La luz se produce por captura de electrones en los centros de activación



- Eficiencia del proceso de centelleo
 - ✓ Energía para crear un par e-h $\approx 3 \times \text{band_gap} = 20 \text{ eV}$ para NaI(Tl)
 - ✓ 1 MeV depositado en el centelleador $\rightarrow 5 \times 10^4$ pares e-h
 - ✓ La eficiencia absoluta para NaI(Tl) es 12% $\rightarrow 10^6 \text{ eV} \times 0.12$ (en forma de luz) = 4×10^4 fotones de 3 eV
 - ✓ Es decir, ≈ 1 fotón de 3 eV por cada par e-h creado

Recolección de luz

- Recoger la mayor fracción de luz posible y dirigirla al PMT
- Transporte de luz en el centelleador:
 - ✓ Autoabsorción óptica (atenuación), poco importante
 - ✓ Pérdidas en las superficies del centelleador (reflexión total, reflectantes)
 - ✓ Pérdidas en el acoplo óptico al fotomultiplicador

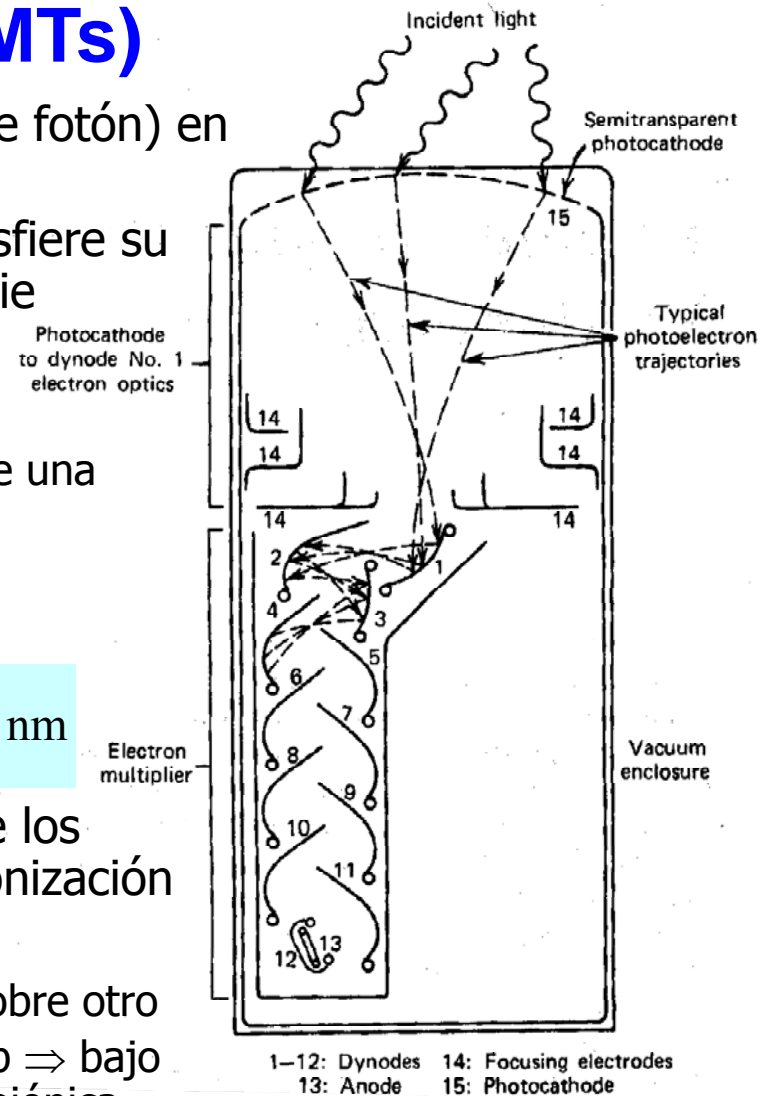


Tubos fotomultiplicadores (PMTs)

- Convierten los pulsos de luz (incluso un simple fotón) en pulsos eléctricos
- El fotocátodo absorbe el fotón (~ 3 eV) y transfiere su energía a un electrón, que migra a la superficie (función trabajo 1.5-2 eV)
 - ✓ Semiconductor (ej. Sb), mezclado con metales alcalinos (ej. Cs), depositados sobre una lamina de vidrio o cuarzo
 - ✓ Alta probabilidad de efecto fotoeléctrico
 - ✓ Eficiencia cuántica:

$$\eta(\lambda) = \frac{\text{\#fotoelectrones}}{\text{\#fotones incidentes}} \sim 10 - 30\% , \lambda = 400 - 500 \text{ nm}$$

- En los dínodos se produce la multiplicación de los fotoelectrones en varias etapas (10-14) por ionización y aceleración por alto campo eléctrico
 - ✓ Metal alcalino o alcalinotérreo depositado sobre otro metal noble (Cu, Ag,...): Ag-Mg, Cu-Be, Cs-Sb \Rightarrow bajo potencial de ionización y baja emisión termoiónica
- El ánodo recoge la avalancha de electrones $\Rightarrow V(t), I(t)$



Multiplicación electrónica y formación de la señal

- Ganancia del PMT:

$$G = \alpha \delta^n = \alpha (kV_d)^n$$

$$\text{Ganancia} = 10^7 \begin{cases} \delta \rightarrow 5 \\ n \rightarrow 10 \\ \alpha \rightarrow 1 \end{cases}$$

n : número de etapas

δ : factor de emisión secundaria

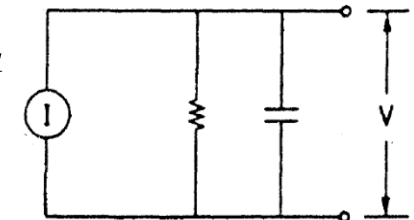
α : fracción de los fotoelectrones recolectados

V_d : voltaje en una etapa = V_T/n

$$\frac{dG}{G} = n \frac{dV_d}{V_d} = n \frac{dV_T}{V_T}$$

- Número de etapas que maximiza la ganancia para un voltaje total fijo:

$$V_T = nV_d = \frac{n}{k} G^{1/n} \Rightarrow \frac{dV_T}{dn} = \frac{1}{k} G^{1/n} - \frac{n}{k} \frac{G^{1/n}}{n^2} \ln G = 0 \Rightarrow n = \ln G$$



- Forma del pulso electrónico:

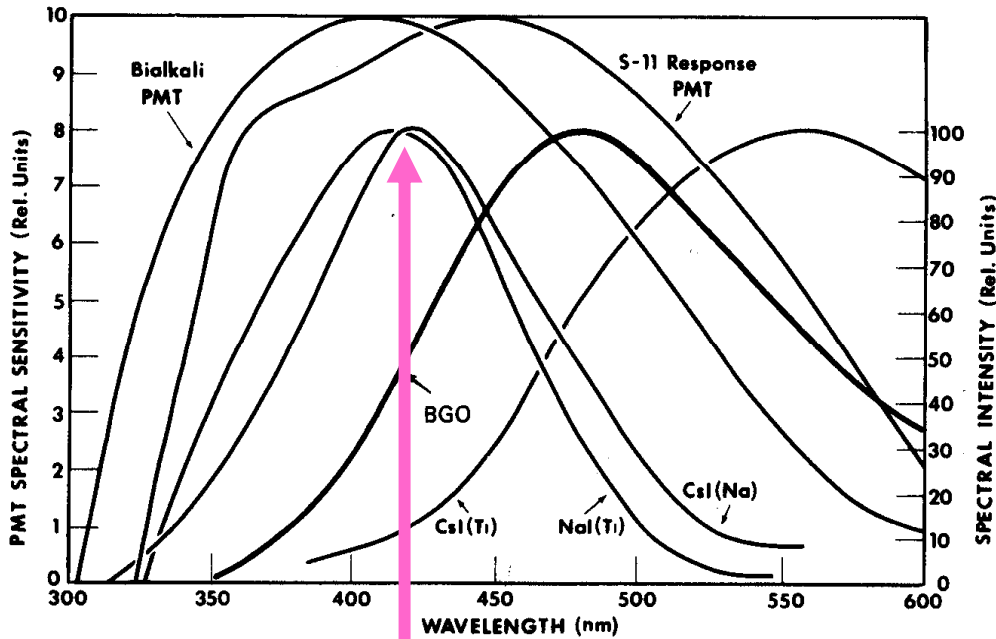
✓ PM \equiv generador de corriente: $I(t) = \frac{GNe}{\tau_f} e^{-t/\tau_f}$

✓ Para un circuito RC en paralelo: $I(t) = \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} \Rightarrow V(t) = \begin{cases} \frac{GNeR}{\tau_f^2} t e^{-t/\tau_f} & \tau = \tau_f \\ -\frac{GNeR}{\tau - \tau_f} [e^{-t/\tau_f} - e^{-t/\tau}] & \tau \neq \tau_f \end{cases}$

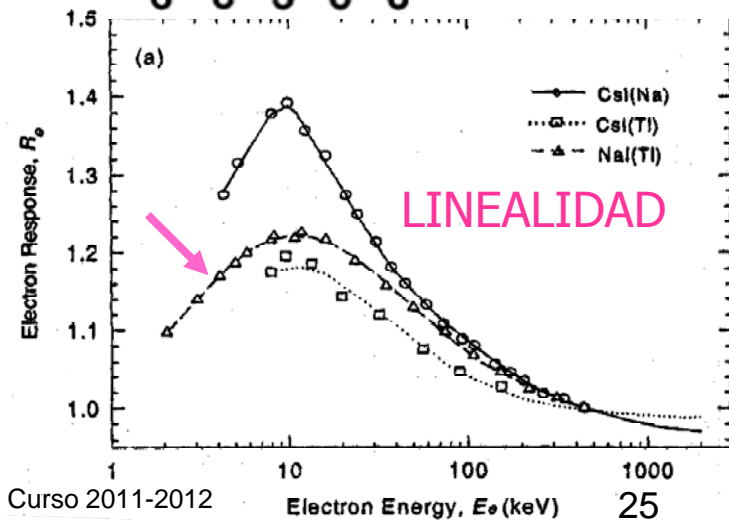
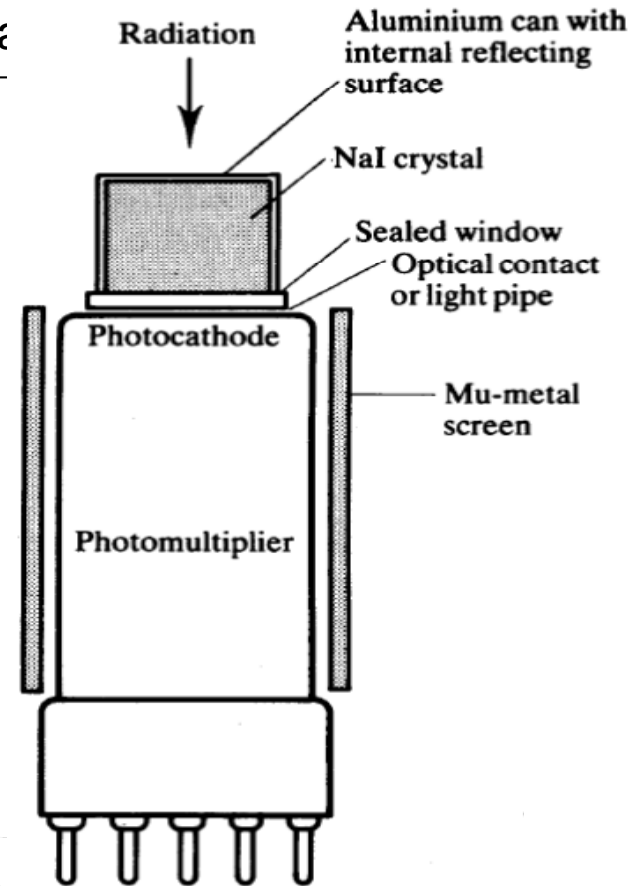
- ✓ Dos modos de operación:

- Si $t \ll \tau_f \Rightarrow$ amplitudes pequeñas y "rise-time" rápido \Rightarrow **modo corriente**
- Si $t \gg \tau_f \Rightarrow$ más lento y pero mayor amplitud \Rightarrow **modo pulso**

Características de los NaI(Tl)

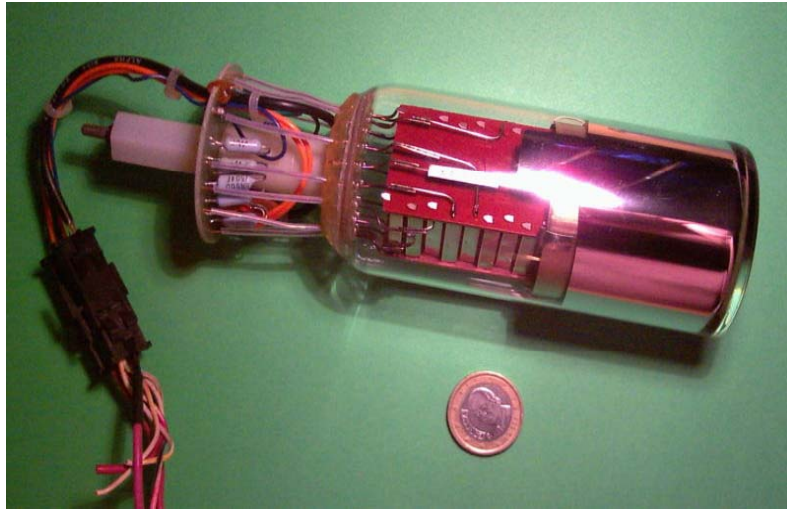


- Densidad 3.67
- Máxima emisión $\lambda = 415 \text{ nm}$
- Índice de refracción 1.85
- Constante de desintegración 230 ns
- Intensidad de luz 38×10^3 fotones/MeV



Introducción al Laboratorio de Física Nuclear y de Partículas

Algunos PMTs de alta sensibilidad



El montaje del laboratorio (Equipos PHYWE and PASCO)

Espectroscopía de la radiación con centelleadores

Índice:

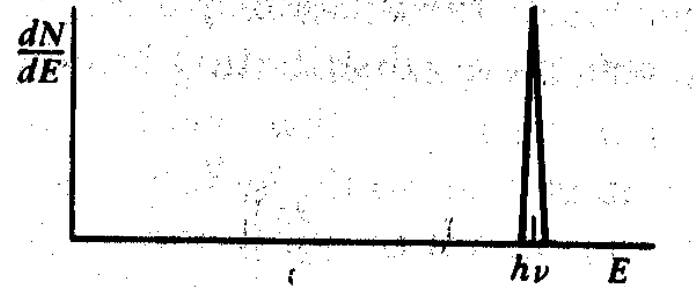
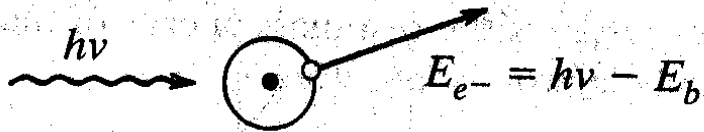
- Consideraciones generales
- Interacción de los rayos gamma
- Funciones de respuesta predichas
- Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

Consideraciones generales

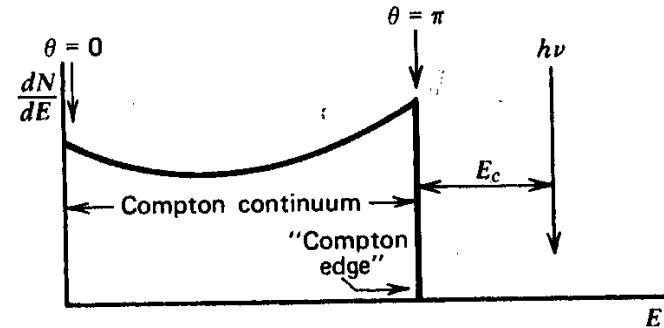
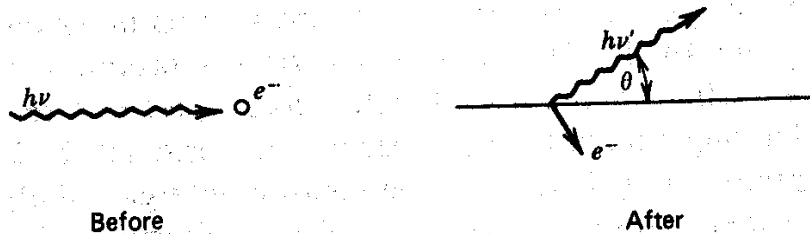
- Interacción de fotones con la materia
- La información sobre el fotón incidente se extrae del electrón secundario creado en la interacción fotón detector
- La energía de los electrones secundarios es como máximo la del fotón incidente
- Para que un material sirva como espectrómetro gamma:
 - ✓ Medio de conversión fotón-electrón con probabilidad elevada
 - ✓ Debe actuar como un detector convencional para estos electrones

Interacción de los rayos gamma

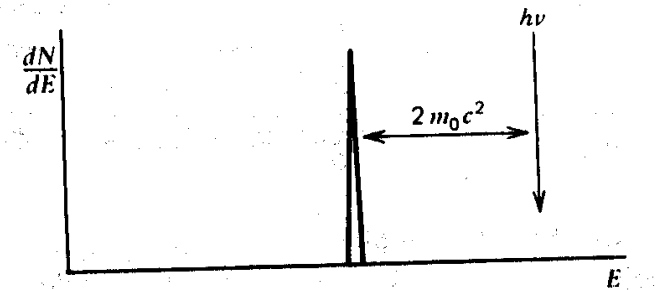
Efecto fotoeléctrico



Efecto Compton

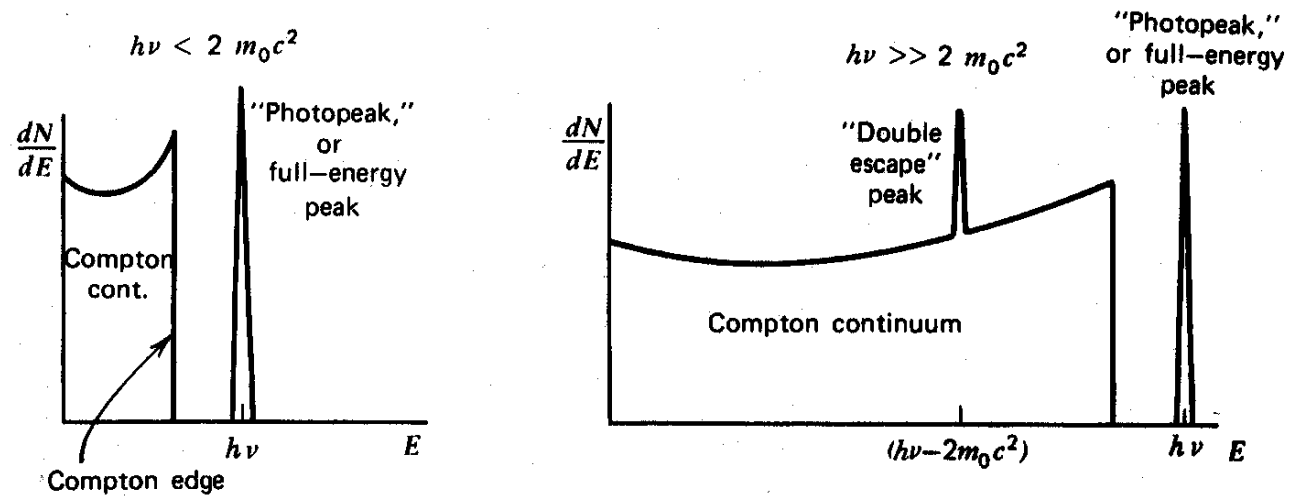
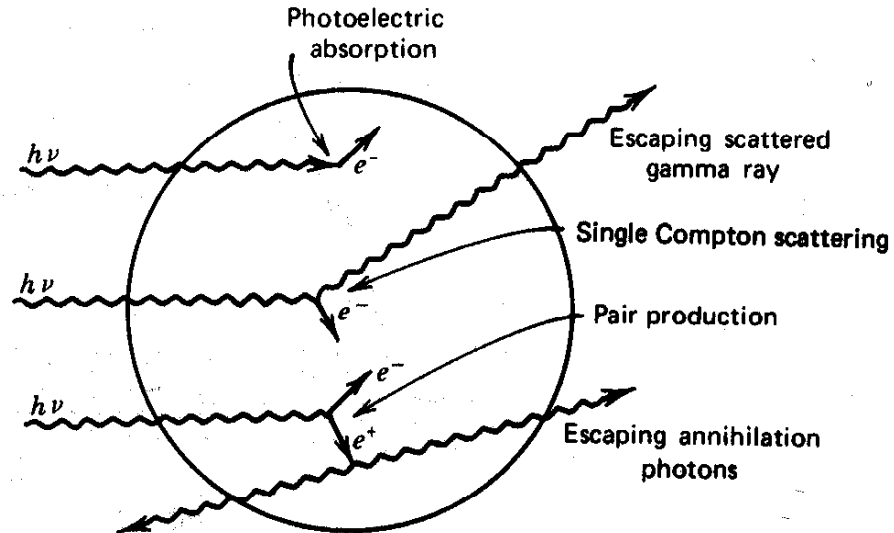


Producción de pares



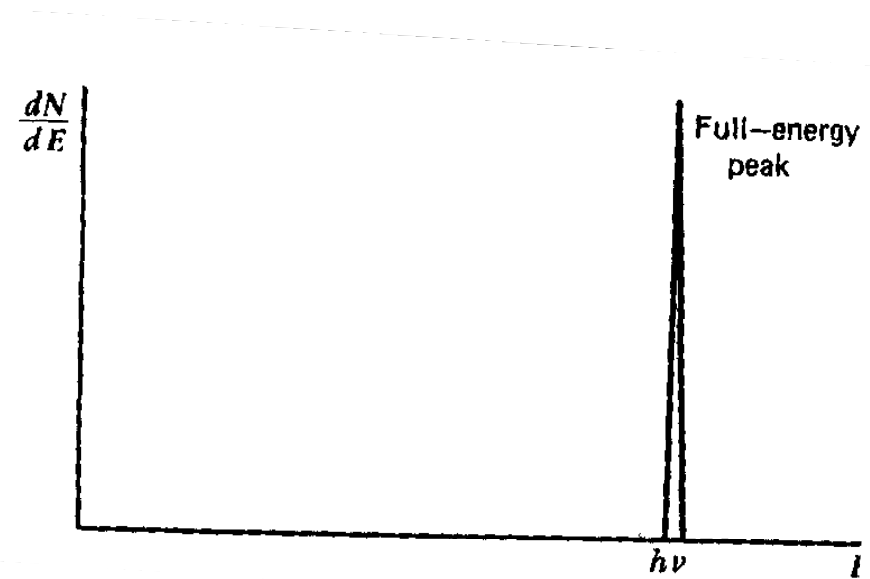
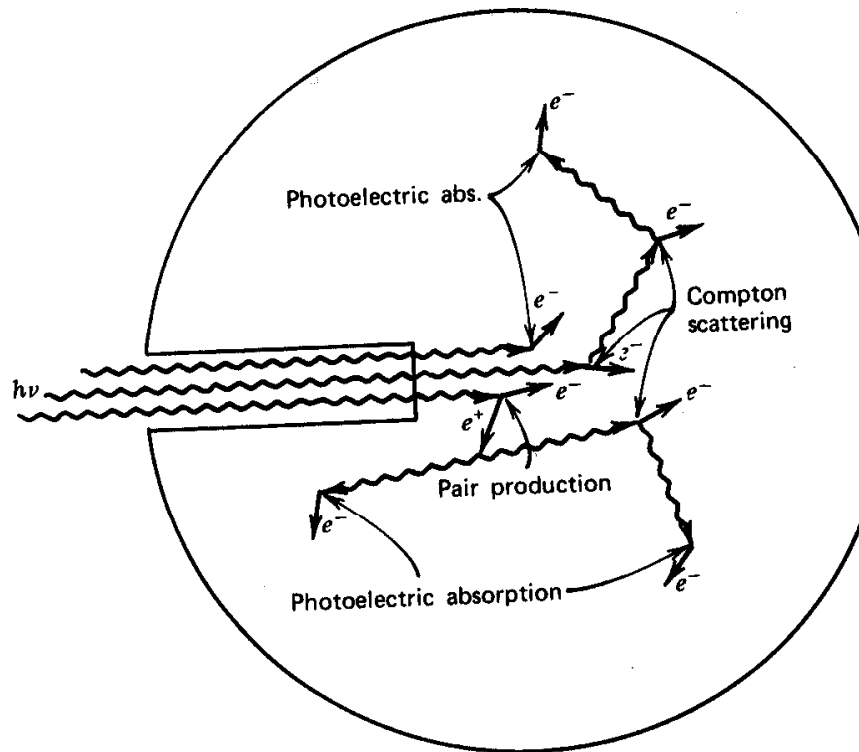
Funciones de respuesta predichas

Detectores pequeños



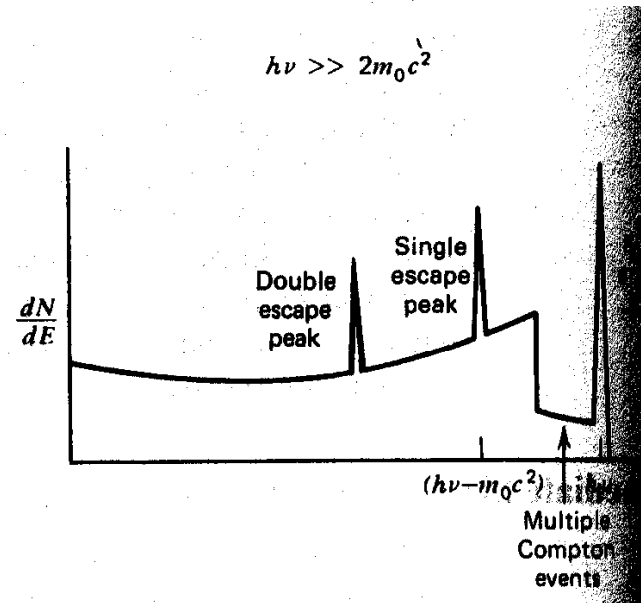
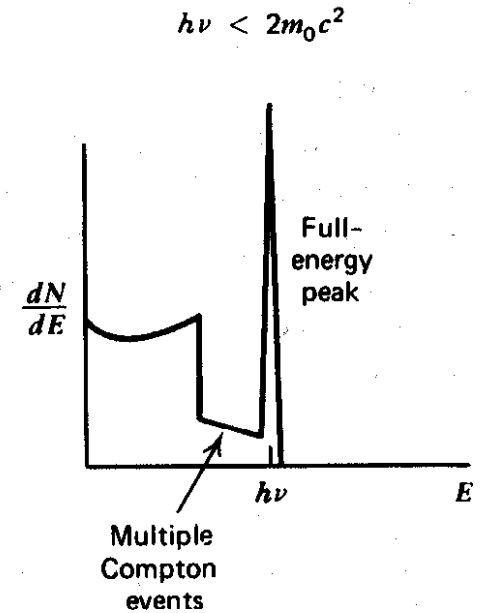
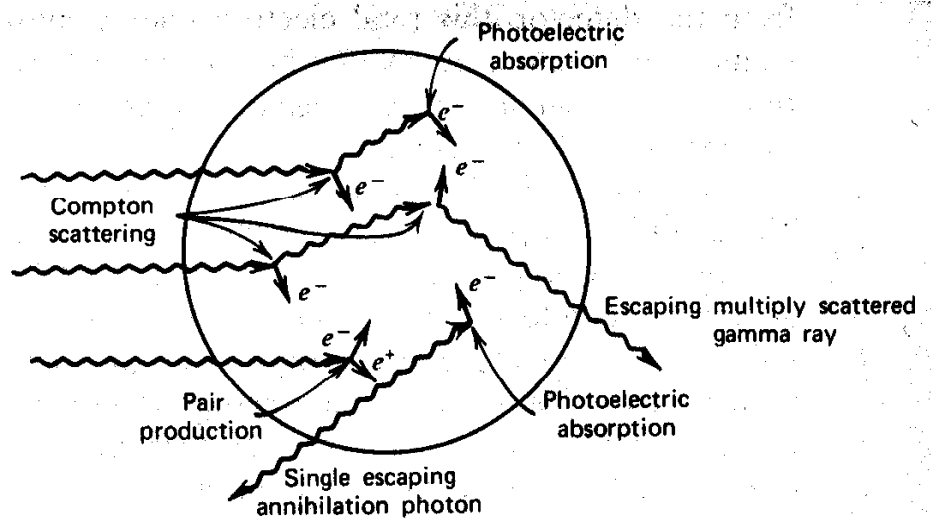
Funciones de respuesta predichas

Detectores grandes



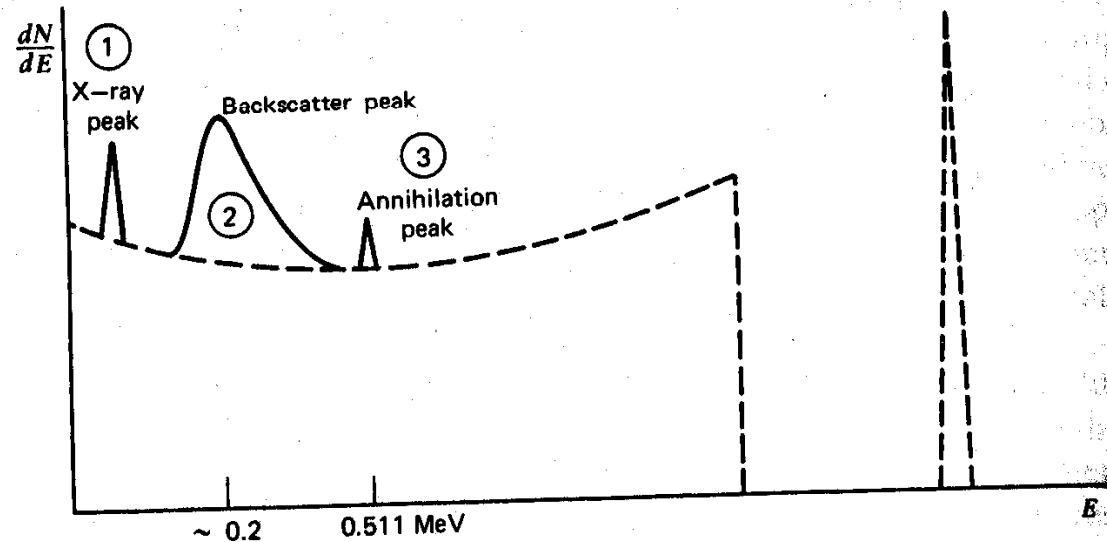
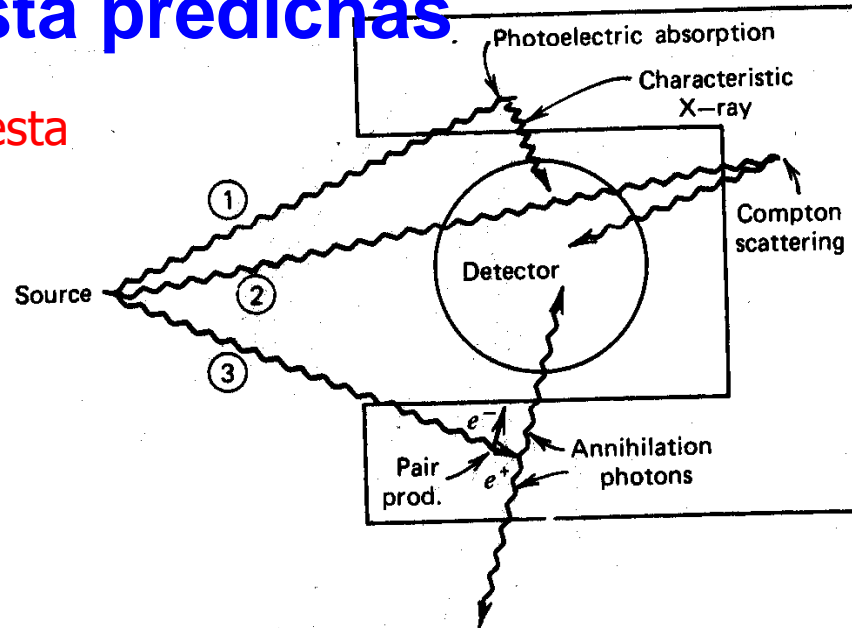
Funciones de respuesta predichas

Detectores intermedios



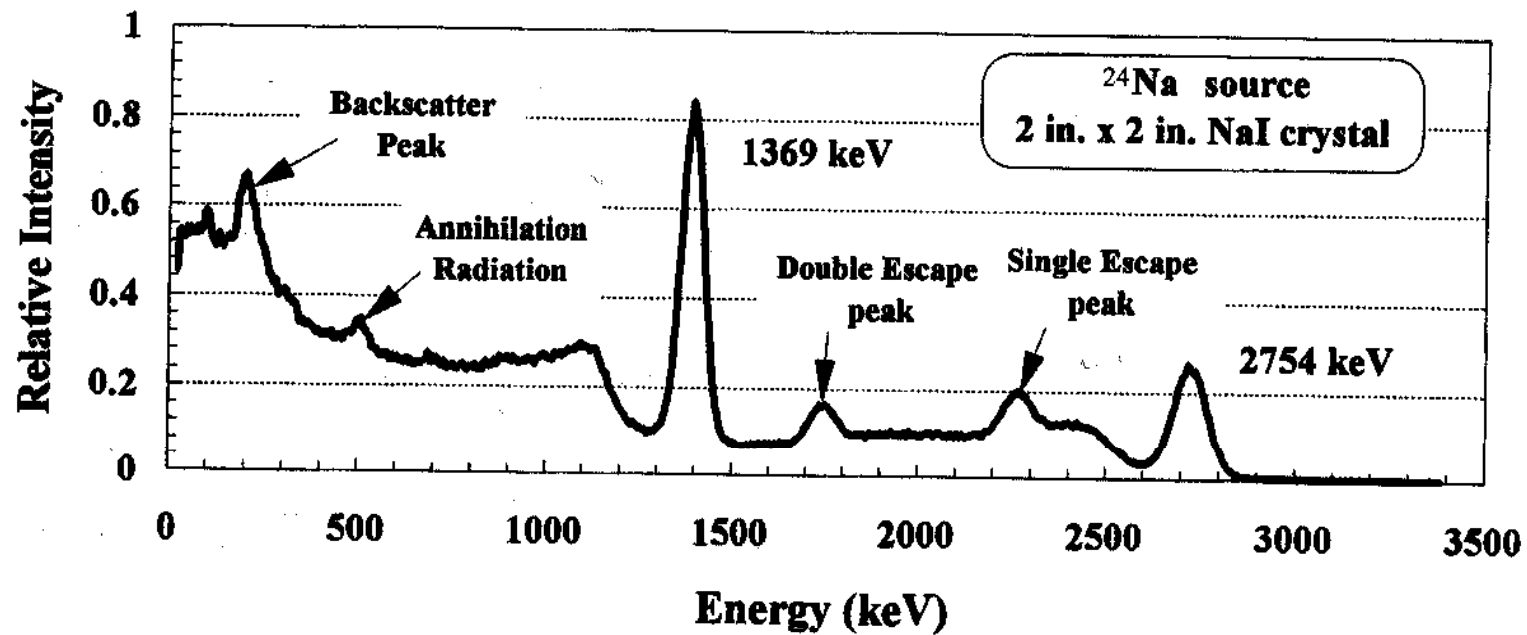
Funciones de respuesta predichas

Complicaciones de la función respuesta



Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

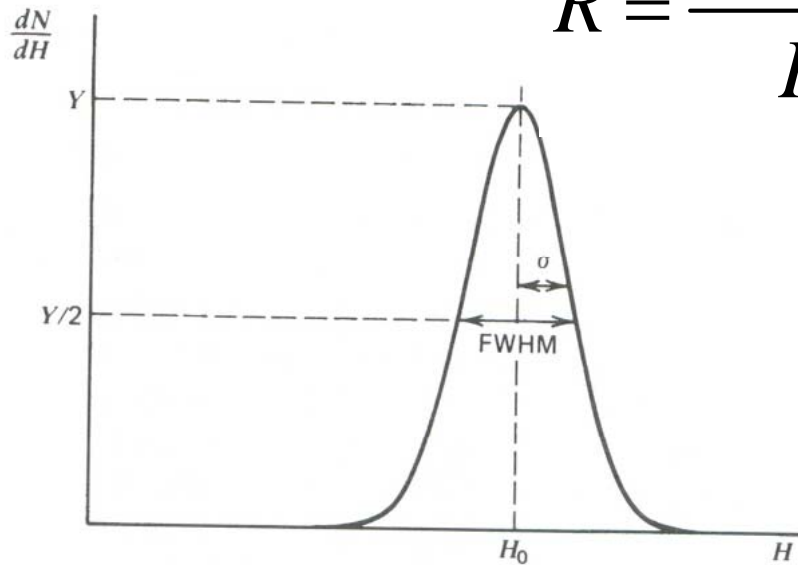
Función respuesta



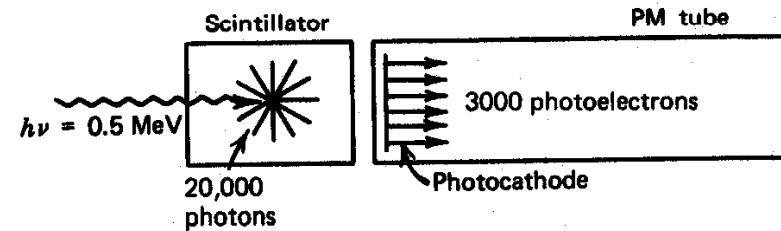
Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

Resolución energética

$$R = \frac{FWHM}{H_0}$$



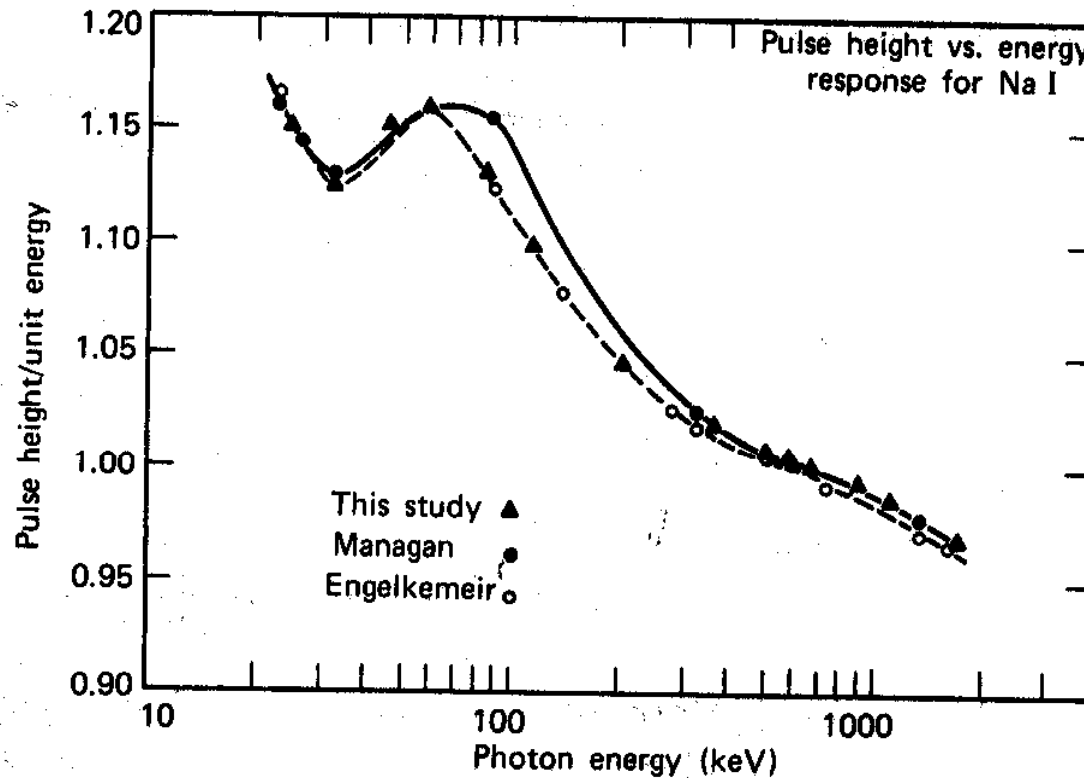
$$\left. \begin{aligned} H_0 &= kE \\ FWHM &= 2.35k\sqrt{E} \end{aligned} \right)$$



$$R = \frac{K}{\sqrt{E}}$$

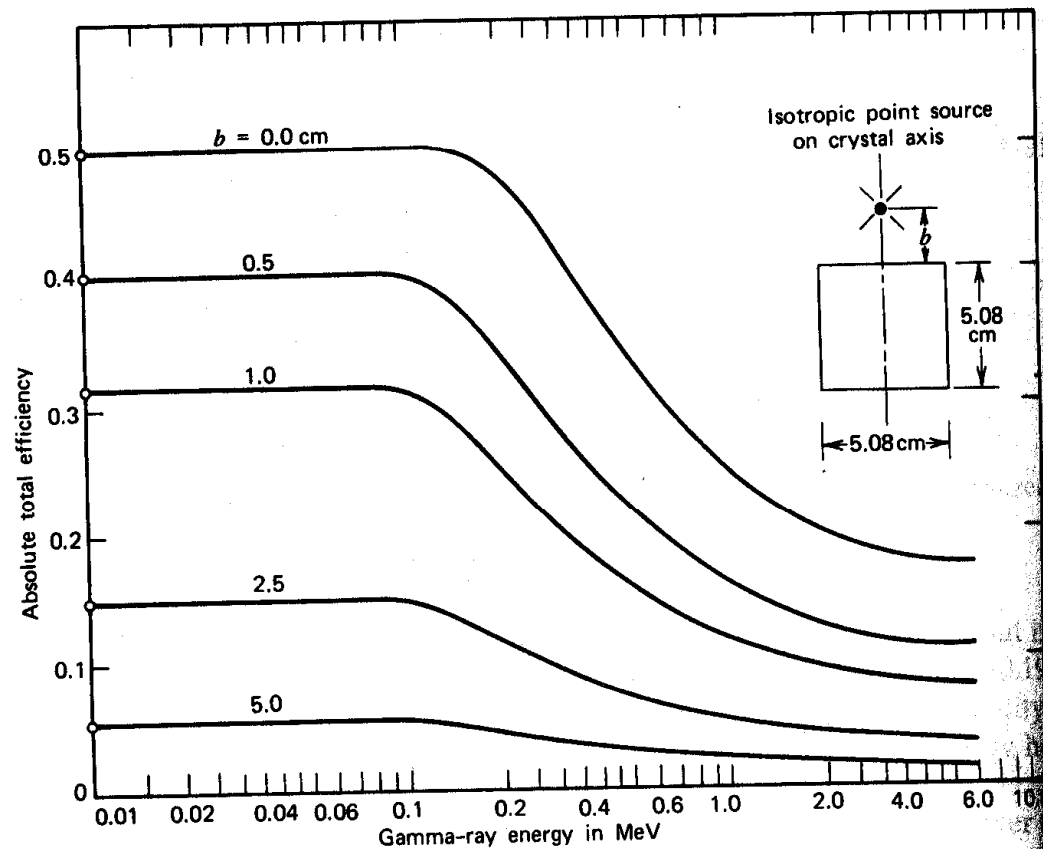
Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

Linealidad



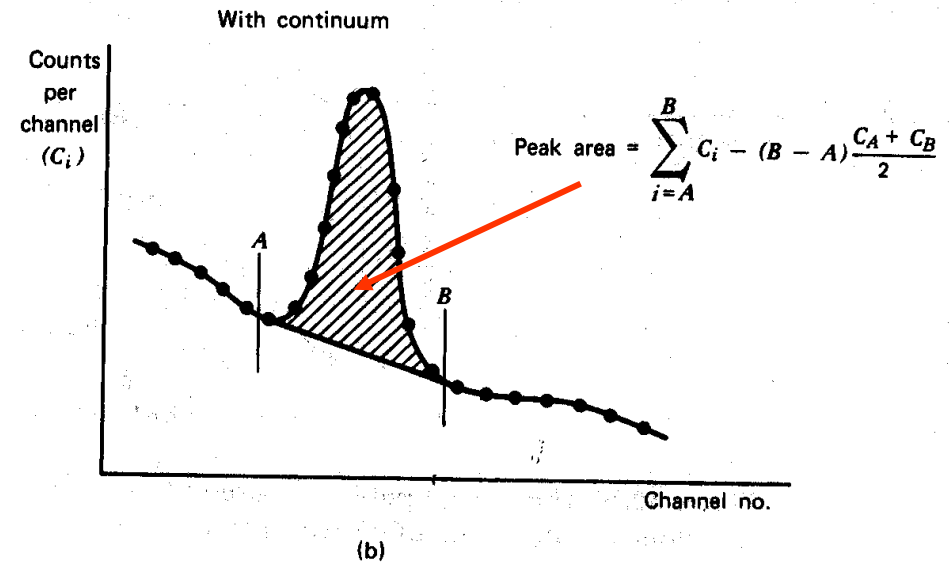
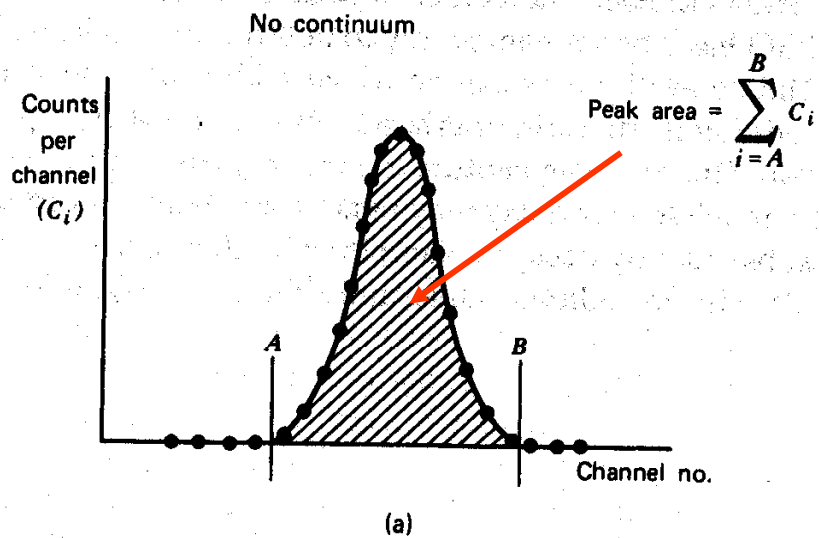
Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

Eficiencia



Propiedades de los espectrómetros centelleadores de rayos gamma

Area del pico



APÉNDICE

Estadística de recuento y predicción de errores

Índice:

1. Caracterización de datos
 - Modelos estadísticos
 - La distribución de Poisson
2. La distribución de Gauss
 - Aplicaciones de los modelos estadísticos
 - Test de un sistema de recuento
3. Estimación de la incertidumbre de una sola medida
4. Propagación de incertidumbres
5. Optimización de experimentos de recuento

Caracterización de los datos

N medidas independientes de la misma magnitud x (números enteros):

$$x_1, x_2, \dots, x_N \quad F(x_i) = \frac{\text{frecuencia de } x_i}{N}$$

$$\bar{x}_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_j F(x_j)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{j=0}^{\infty} (x_j - \bar{x})^2 F(x_j) = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

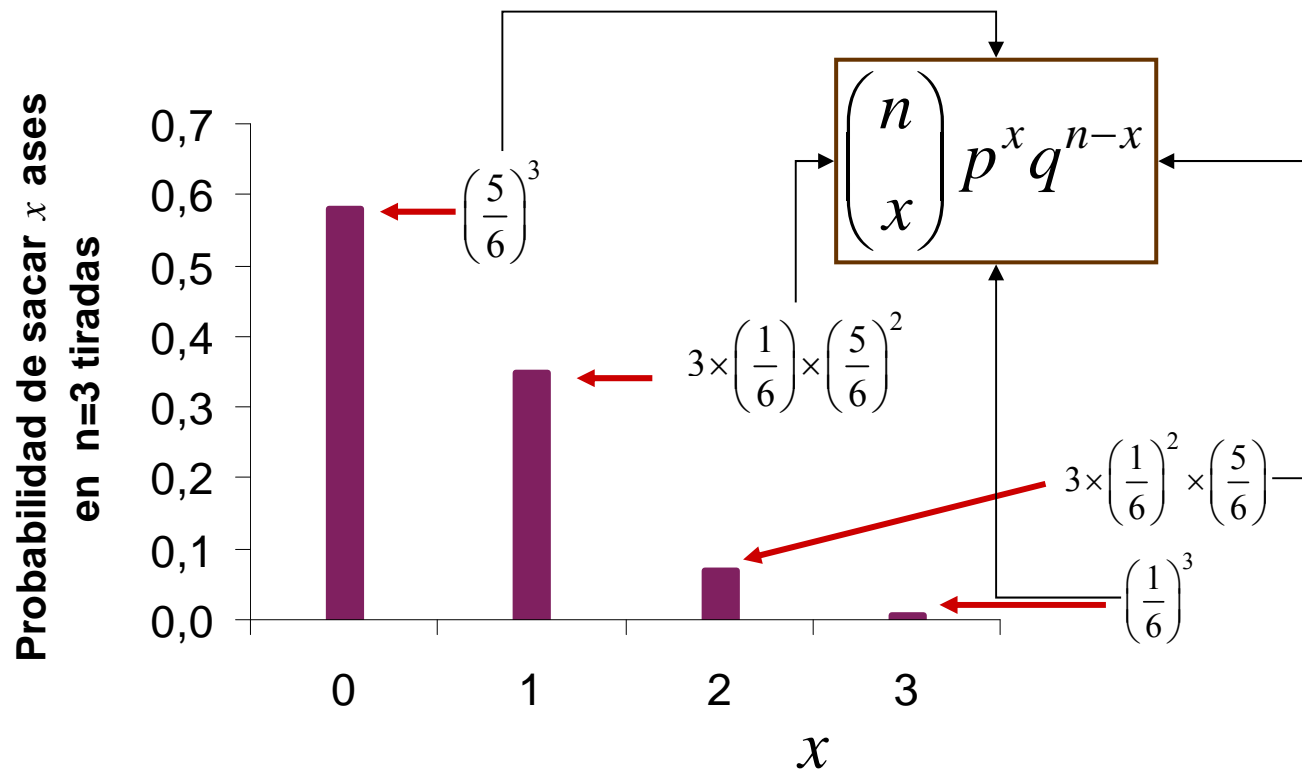
Concepto de probabilidad

Ejemplo: lanzar un dado.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar x veces As en $n = 3$ lanzamientos:

$$p = \frac{1}{6}$$

$$q = 1 - p = \frac{5}{6}$$



La distribución Binomial

$$B_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Propiedades:

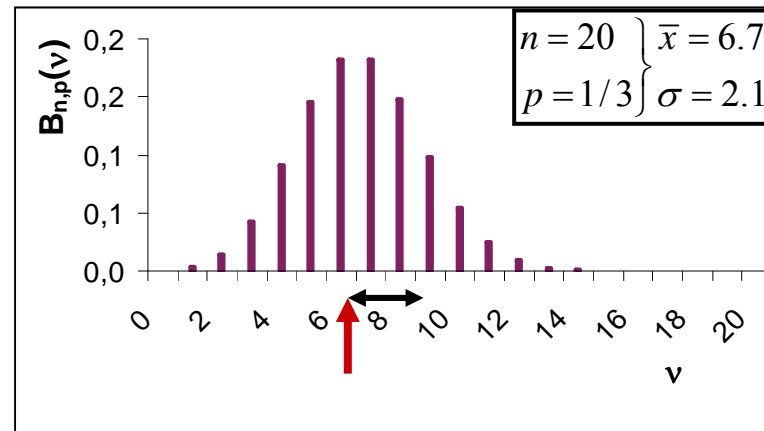
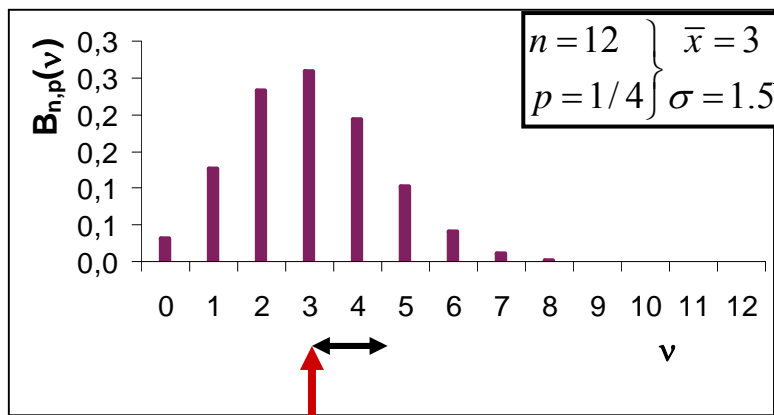
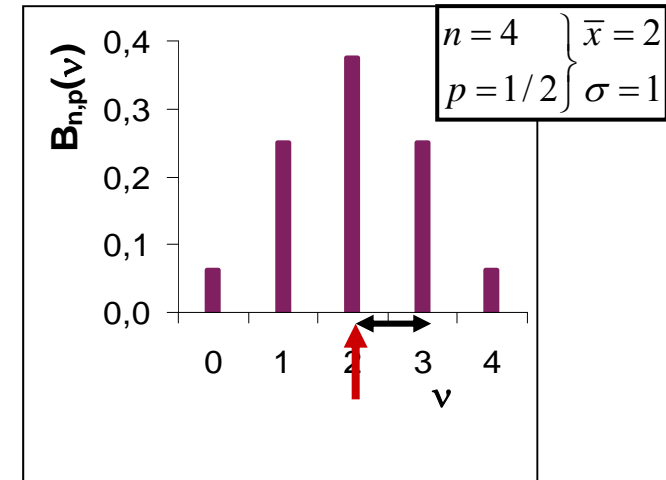
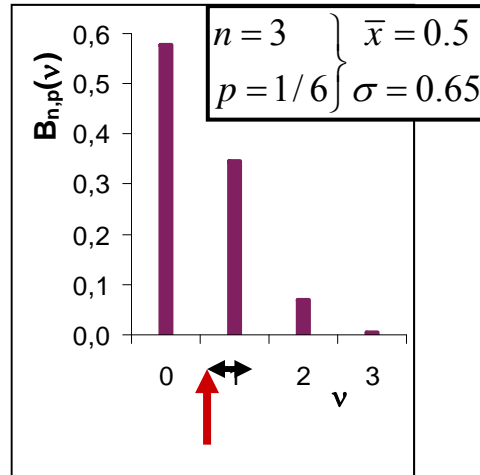
- Valor medio: $\bar{x} = \sum_{v=0}^n x B_{n,p}(x) = np$
- Varianza $\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = np(1 - p)$

La distribución Binomial (cont.)

$$B_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$\bar{x} = np$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$



La distribución de Poisson

$$B_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \xrightarrow{p=\text{cte}, p \ll 1} B_{n,p}(x) = \frac{(pn)^x}{x!} e^{-pn} = P_{\bar{x}}(x)$$

$$P_{\bar{x}}(x) = \frac{\bar{x}^x}{x!} e^{-\bar{x}}$$

Propiedades:

- Valor medio: $\bar{x} = np$
- Varianza $\sigma^2 = np = \bar{x}$

La distribución de Poisson: ejemplo

$$P_{\bar{x}}(x) = \frac{\bar{x}^x}{x!} e^{-\bar{x}}$$

$$\bar{x} = np$$

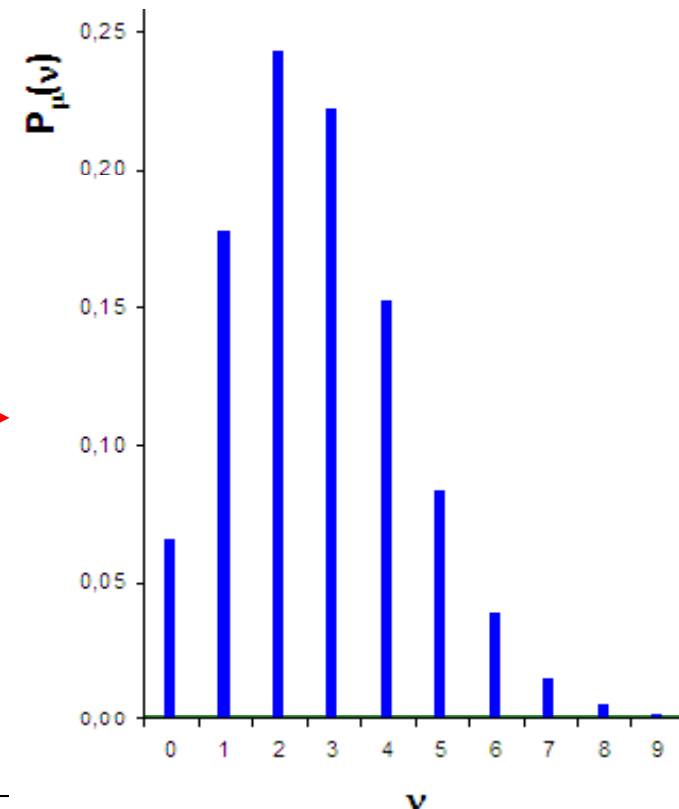
$$\sigma^2 = np = \bar{x}$$

En una muestra de $n = 1000$ personas, ¿cuántas habrá cuyo cumpleaños sea hoy?

$$\left. \begin{array}{l} n = 1000 \\ p = \frac{1}{365} \ll 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{x} = np = 2.74 \\ \sigma = \sqrt{2.74} = 1.66 \end{array}$$

⇓

$$P_{\bar{x}=2.74}(x) = \frac{2.74^x}{x!} e^{-2.74}$$



La distribución de Gauss

$$B_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \xrightarrow{p=\text{cte}, p \ll 1, pn \gg 1} B_{n,p}(x) = G_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}}$$

$$G_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}}$$

Propiedades:

- Valor medio: $\bar{x} = np$
- Varianza $\sigma^2 = np = \bar{x}$

La distribución de Gauss: ejemplo

$$G_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}}$$

$$\bar{x} = np$$

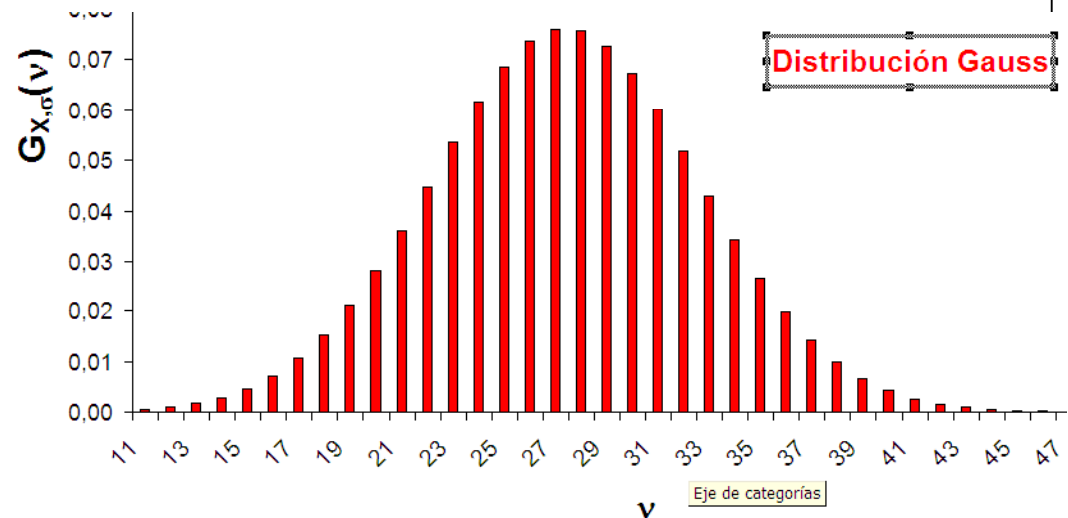
$$\sigma^2 = np = \bar{x}$$

En una muestra de $n = 10000$ personas, ¿cuántas habrá cuyo cumpleaños sea hoy?

$$\left. \begin{array}{l} n = 10000 \\ p = \frac{1}{365} \ll 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bar{x} = np = 27.4 \\ \sigma = \sqrt{27.4} = 5.23 \end{array}$$

⇓

$$G_{\bar{x}=27.4}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 5.23}} e^{-\frac{(x-27.4)^2}{2 \times 27.4}}$$



La distribución de χ^2

- Supongamos que tenemos n variables aleatorias e independientes x_1, x_2, \dots, x_n , que pertenecen a distribuciones normales de medias $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, con desviaciones típicas $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

- Calculamos el estadístico:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

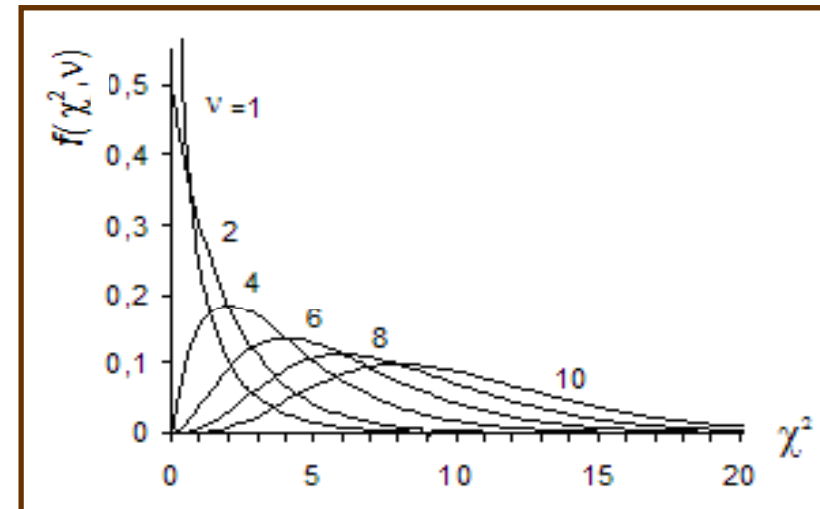
- La probabilidad de obtener un valor entre χ^2 y $\chi^2 + d\chi^2$ viene dado por:

- n es el número de variables aleatorias, y k son las ligaduras (número de parámetros estimados a partir de la misma muestra)

$$f(\chi^2, \nu) = \frac{e^{-\chi^2/2} (\chi^2)^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)}$$

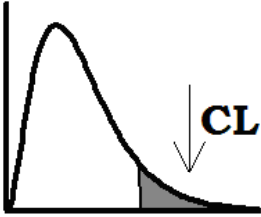
Propiedades:

- ☑ **Grados de libertad:** $\nu = n - k$
- ☑ **Máximo:** $\chi^2 = \nu - 2$
- ☑ **Valor medio:** $\overline{\chi^2} = \nu$
- ☑ **Desviación típica:** $\sigma(\chi^2) = \sqrt{2\nu}$



Probabilidades de χ^2

- Conocida la densidad de probabilidad del estadístico χ^2 , podemos establecer criterios para juzgar la precisión (“bondad”) de la descripción de los datos utilizando el nivel de confianza
 - Si las fluctuaciones de los datos son Gaussianas $\rightarrow \overline{\chi^2} = \nu$ y en cada muestra el valor χ^2 fluctuará según $f(\chi^2, \nu)$.
 - Dado un valor de χ_o^2 , podemos calcular la probabilidad que el χ^2 sea inferior o superior a este valor.
- ¿Cual es la probabilidad de obtener un valor χ_o^2 o mayor?
 - Se define la función acumulativa $\rightarrow F(\chi_o^2) = P(\chi^2 < \chi_o^2) = \int_0^{\chi_o^2} f(\chi^2, \nu) d\chi^2$
 - Se define el **nivel de confianza (CL)** $\rightarrow CL(\chi_o^2) = 1 - F(\chi_o^2)$

$$CL(\chi_o^2) = P(\chi^2 \geq \chi_o^2) = \int_{\chi_o^2}^{\infty} f(\chi^2, \nu) d\chi^2$$

- El nivel de confianza representa la probabilidad de obtener un valor $\chi^2 \geq \chi_o^2$, es decir, la probabilidad de obtener un resultado peor, caso de repetir el experimento.

Probabilidades de χ^2 (cont.)

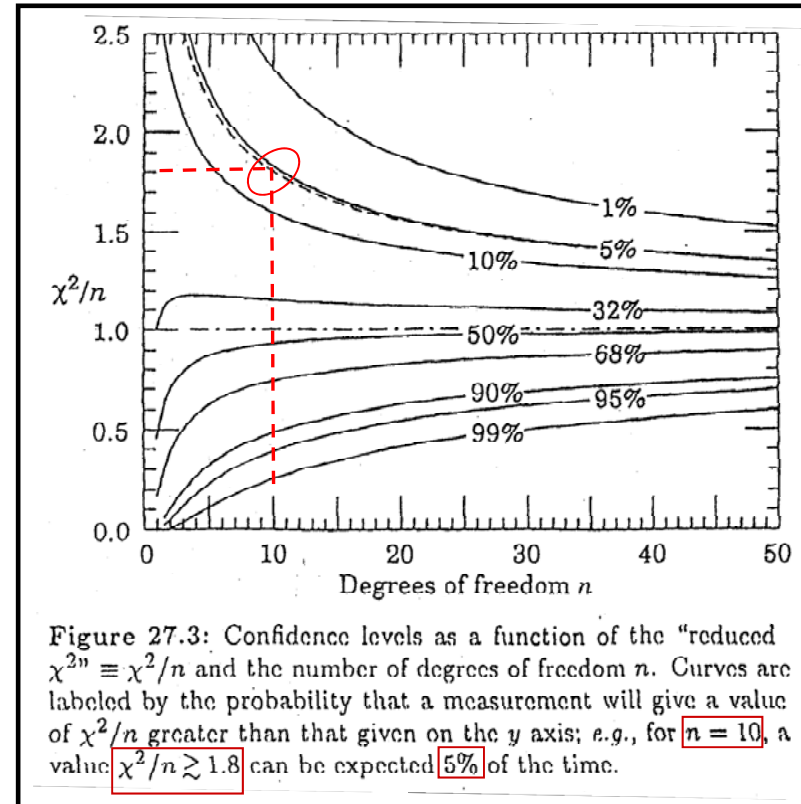
• Método General:

- Realizar una serie de medidas.
- Calcular el valor de χ_o^2
- Calcular el valor de χ_o^2 reducido: $\bar{\chi}_o^2 = \chi_o^2 / \nu$
- Calcular la probabilidad de obtener un valor de $\bar{\chi}^2$ igual o mayor: $P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2)$
 - Si el **valor obtenido es alto** no hay razón para rechazar la hipótesis.
 - Si el **valor obtenido es muy bajo** hay que rechazar la hipótesis.

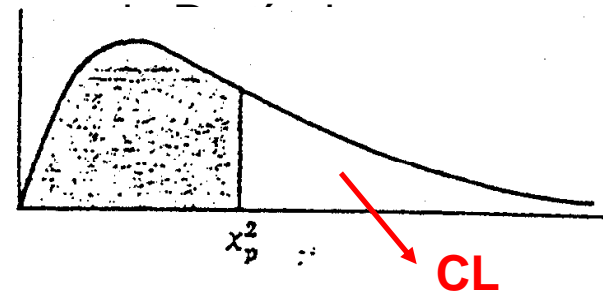
En general:

$P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2) < 5\% \rightarrow$ El desacuerdo es significativo

$P(\bar{\chi}^2 \geq \bar{\chi}_o^2) < 1\% \rightarrow$ El desacuerdo es muy significativo



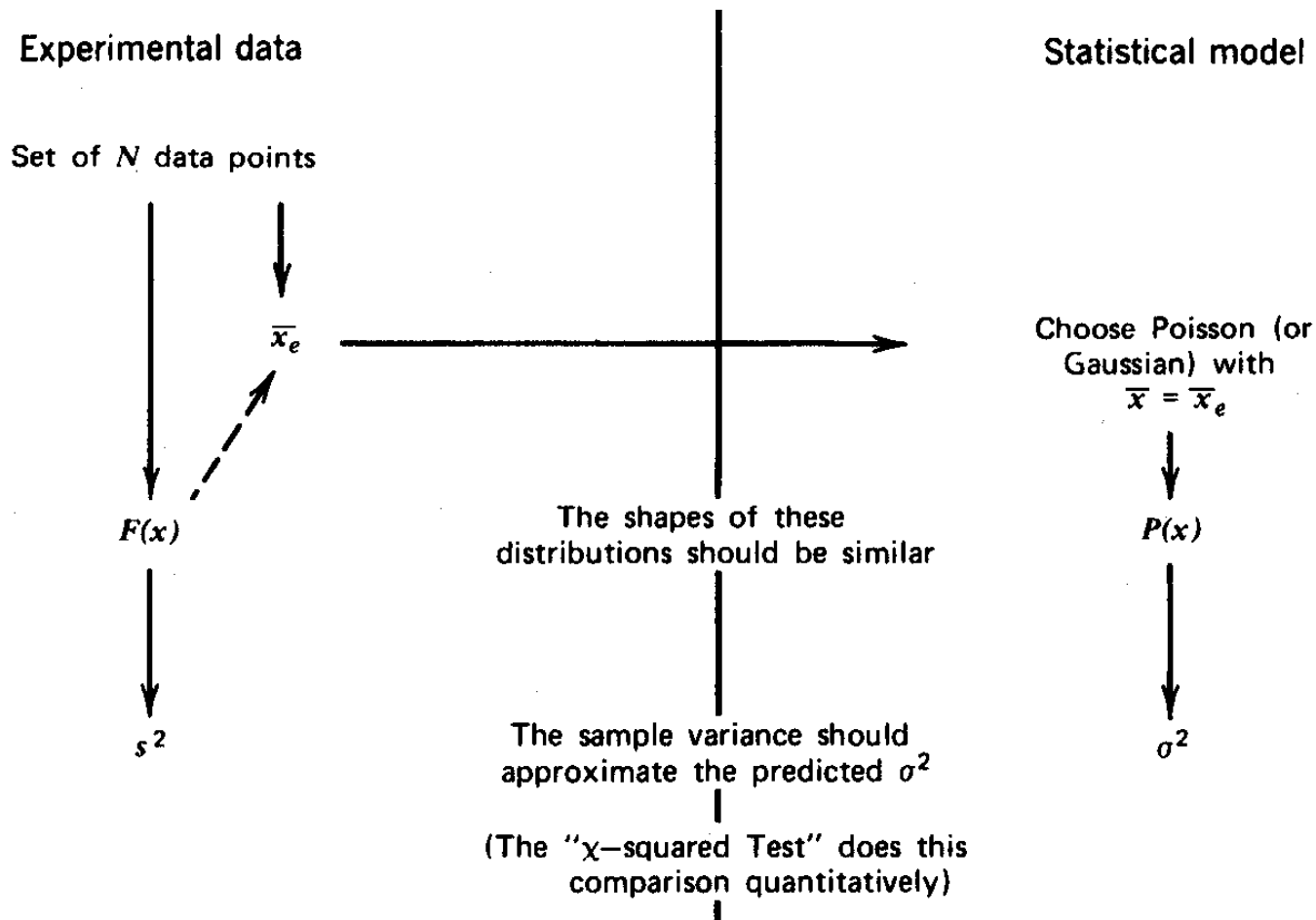
**PERCENTILES (χ_p^2)
DE LA
DISTRIBUCION CHI-CUADRADO
CON ν GRADOS DE LIBERTAD
(AREA SOMBREADA = p)**



ν	$\chi_{0.995}^2$	$\chi_{0.99}^2$	$\chi_{0.975}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.90}^2$	$\chi_{0.75}^2$	$\chi_{0.50}^2$	$\chi_{0.25}^2$	$\chi_{0.10}^2$	$\chi_{0.05}^2$	$\chi_{0.025}^2$	$\chi_{0.01}^2$	$\chi_{0.005}^2$
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,0010	0,0002	0,0000
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,0100
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84

Aplicaciones

Comprobación de un sistema de contaje verificando que las fluctuaciones son consistentes con la fluctuación estadística esperada



Aplicaciones (ejemplo)

Comprobación de un sistema de contaje verificando que la fluctuaciones son consistente con la fluctuación estadística esperada

Realizamos 6 medidas de 1 minuto cada una, del número de rayos cósmicos que llegan a un contador Geiger.

Medida	Cuentas x en 1 min	
1	242	$\bar{x}_e = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1464}{6} = 244$ $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}_e)^2 = 28$
2	241	
3	249	
4	246	
5	236	
6	250	
Total	1464	

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(x_i - \bar{x}_e)^2}{\bar{x}_e} = (N-1) \frac{s^2}{\bar{x}_e} = 5 \frac{28.09}{244} = 0.58$$

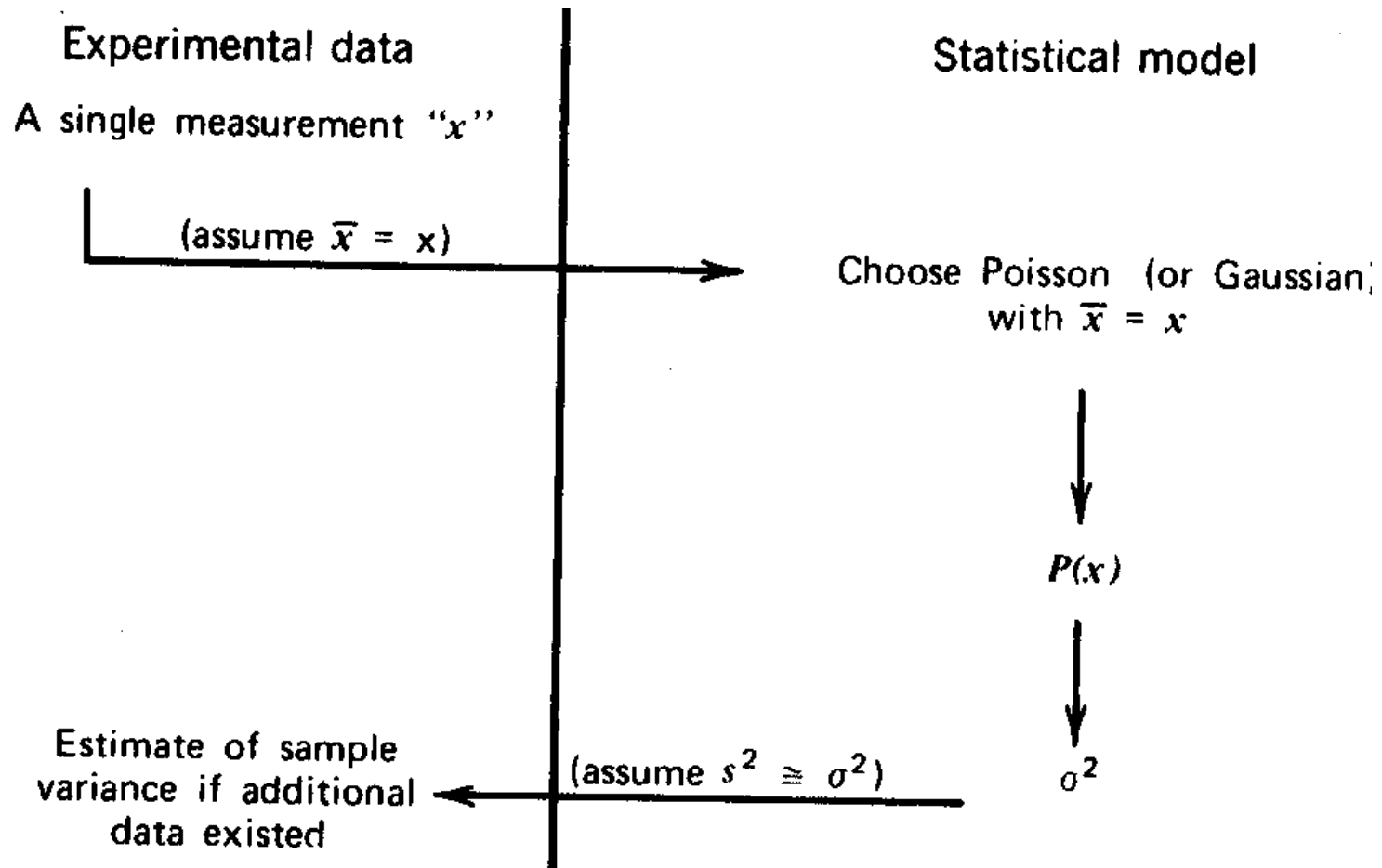
$$\left. \begin{array}{l} \chi^2 = 0.58 \\ \nu = n - l = 6 - 2 = 4 \end{array} \right\} \text{Prob}(\chi^2 \geq 0.58) \approx 99\%$$

No es compatible con una distribución de Poisson.

La varianza esperada es 244
y la observada es 28

Aplicaciones

Estimación de la precisión de una sola medida



Aplicaciones

Optimización de experimentos de recuento: Medida de las cuentas de un radionucleido de vida larga con la presencia de un fondo constante.

- S Tasa de cuentas netas de la fuente sin fondo
- B Tasa de cuentas del fondo

$$T = T_{S+B} + T_B \rightarrow S = \frac{N_1}{T_{S+B}} - \frac{N_2}{T_B} \rightarrow \sigma_S = \sqrt{\frac{S+B}{T_{S+B}} + \frac{B}{T_B}}$$

¿Cuál es la distribución óptima de tiempo entre la medida de la muestra y el fondo para el error de S sea mínimo?

$$\rightarrow \left. \frac{T_{S+B}}{T_B} \right|_{opt} = \sqrt{\frac{S+B}{B}}$$

¿Durante cuanto tiempo he de medir para que el error relativo de S tenga un determinado valor?

$$\rightarrow \frac{1}{T} = \varepsilon^2 \frac{S^2}{(\sqrt{S+B} + \sqrt{B})^2} \begin{cases} S \gg B \rightarrow \frac{1}{T} = \varepsilon^2 S \\ S \ll B \rightarrow \frac{1}{T} = \varepsilon^2 \frac{S^2}{4B} \end{cases}$$