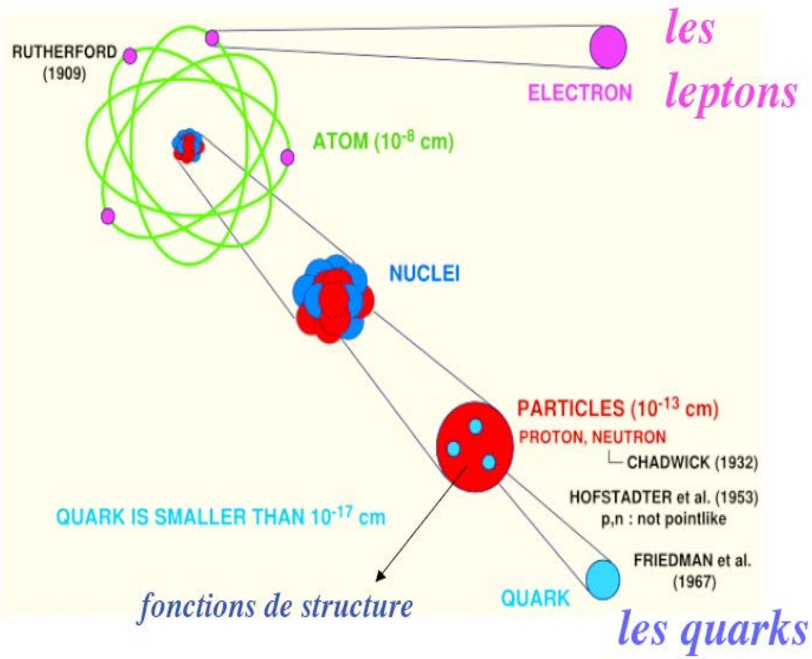
Tema 1:
Introducció a la Física Nuclear i de Partícules

1. Objectius, limitacions i mètodes:
   - 1.1 Mètodes en física nuclear
   - 1.2 Terminologia en F. N.
   - 1.3 Física de partícules
   - 1.4 Ordre de distàncies
   - 1.5 Les fronteres de la física
   - 1.6 Constituents i interaccions de la matèria.
   - 1.7 Història de l'Univers
   - 1.8 Mètodes i experiments en F. de partícules
2. Secció eficaç de dispersió: estudi d'estructures i interaccions
   - 2.1 Secció eficaç total i secció eficaç diferencial
   - 2.2 Exemples: esfera rígida, dispersió de Rutherford
   - 2.3 Concepte de secció eficaç diferencial en Mec. Q.
   - 2.4 Relació amplitud de dispersió i secció eficaç
   - 2.5 Determinació de l'amplitud de dispersió
   - 2.6 Secció eficaç per a potencials amb simetria esfèrica: esfera rígida i dispersió de Rutherford.
   - 2.7 Nuclis no puntuals: concepte de factor de forma.
3. Unitats, dimensions i constants

Apèndix A. Repàs de cinemàtica relativista

Apèndix B. Repàs del moment angular. Coeficients de Clebsch-Gordan



1. Objectius, limitacions i mètodes

Física Nuclear

- Estudia els nuclis atòmics, les seues propietats i les forces que actuen entre els seus constituents, denominats genèricament nucleons (protons i neutrons).
- Estretament relacionada amb l'origen i desenrotllament de la Mecànica Quàntica, hui un dels fonaments bàsics de la ciència (no sols la Física).
- Hui es té un bon coneixement de les propietats dels nuclis i de la seua estructura.
- Però falta una formulació teòrica coherent que permeta explicar i interpretar tots els fenòmens d'una forma fonamental (a partir de primers principis: degut al tractament matemàtic del problema de molts cossos i a la complexitat de la força forta nuclear).
- A causa d'això s'ha d'abordar l'estudi de la Física Nuclear d'una forma fenomenològica, utilitzant diferents formulacions (mecano-quàntiques, semi-clàssiques, empíriques, etc.) i models (que a primera vista poden resultar incompatibles) per a cada tipus de fenòmens: desintegració alfa, desintegració beta, reaccions directes, fissió, etc.
- Multitud implicacions en altres disciplines científiques (Astrofísica Nuclear, Astro-partícules, Física de l'Estat Sòlid, Nano-tecnologia, Computació Quàntica, etc.) així com aplicacions tècniques (diagnòstic en medicina i tractament de malalties, producció d'energia, etc.)
- A més, ha contribuït a nombrosos avanços tecnològics atés que és una de les disciplines científiques que més recursos tècnics ha precisat per al seu avanç

Mètodes en Física Nuclear

- Els procediments experimentals utilitzats per a l'estudi de la gravitació i l'electromagnetisme clàssics no són vàlids.
  - Els sistemes nuclears (sistemes constituïts per nucleons) no són objectes macroscòpics
- La informació experimental procedeix de tres fonts o tipus d'experiments:
  - Difusió (o col·lisió) , en els que un objecte subatòmic es fa col·lidir amb un altre:
    - Estats finals, seccions eficaces, angles de difusió, etc.
  - Desintegració, en els que una partícula subatòmica es desintegra.
    - Desintegració espontànies o induïda.
    - Productes de la desintegració, probabilitats de desintegració (vides mitges) , etc.
  - Estats lligats, en els que dos o mes partícules subatòmiques formen un sistema compost.
- La finalitat d'estos estudis és determinar **la dinàmica (llei d'interacció)** a partir d'eixa informació, tasca que no és trivial. Així:
  - Hem de suposar la forma de la interacció i comparar les prediccions teòriques amb les observacions experimentals.
  - Problema de molts cossos (és una dificultat afegida).
    - Mecànica Quàntica, generalment no relativista, però de vegades relativista.
    - Molt complex, irresoluble per a sistemes amb molts nucleons.

→ La descripció requereix models fenomenològics d'estructura nuclear.

→Naturalesa exacta de les forces nuclears desconeguda, encara que qualitativament hui sabem que es tracta de forces gluòniques residuals "(tipus Van der Waals)".

Terminologia en Física Nuclear

Defineix l'ordre en la taula periòdica: número atòmic

- **El nucli ve caracteritzat per::**

$$ {}^{56}_{26}\mathrm{Fe}_{30} \qquad {}^{A}_{Z}X_{N} \begin{cases} Z: \textit{Número de protons} \\ N: \textit{Número de neutrons} \\ A: \textit{Número de nucleons} \end{cases} $$

$A=Z+N$

- **Isòtops**: Nuclis amb el mateix valor de Z

$$ {}^{235}_{92}\mathrm{U}_{143}(0.720\%, 7.0 \times 10^{8}\,\text{años}) $$

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U}_{146}(99.275\%, 4.5 \times 10^{9}\,\text{años}) $$

- **Isòtons**: Nuclis amb el mateix valor de N

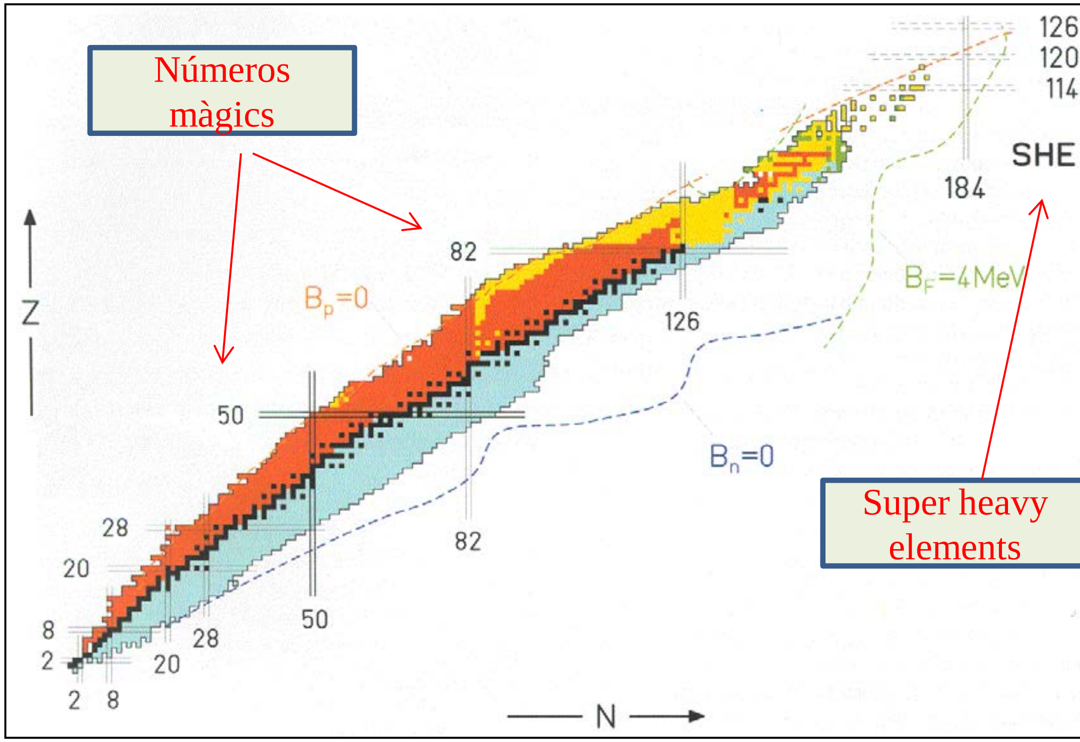
$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H}_{1} \text{ y } {}^{3}_{2}\mathrm{He}_{1} $$

- **Isòbars**: Nuclis amb el mateix valor de A

$$ {}^{3}_{1}\mathrm{H}_{2} \text{ y } {}^{3}_{2}\mathrm{He}_{1} $$

- **Estats isòmers o meta-estables**: Estats excitats d'un nucli amb vida mitja llarga (τ>1 s)

$$ {}^{99m}_{43}Tc_{56}(6.02 \ \ hores) $$



Conceptes:

Nuclis estables.

Nuclis radioactius.

Números màgics.

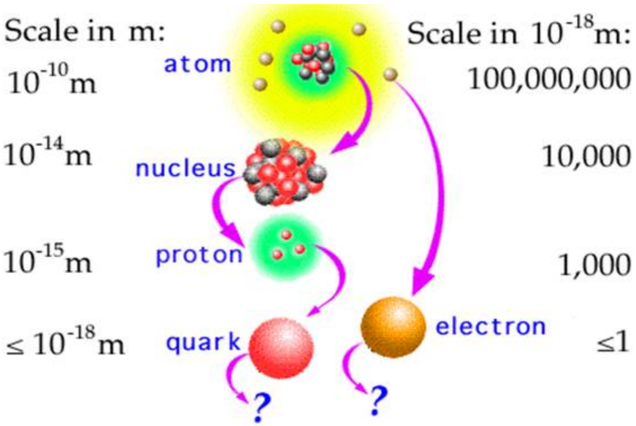
Illa de l'estabilitat.

Elements super pesats.:

Física de Partícules: objectius

- Estudia els constituents bàsics de la matèria i les propietats i naturalesa de les forces fonamentals que intervenen en les seues interaccions: quantes forces hi ha, com es comporten i quants paràmetres són necessaris per a la seua descripció.
  - Descripció en termes del menor número possible de partícules i forces fonamentals.
  - A una certa escala de longituds (o energies) podem descriure la matèria en termes de constituents que poden ser considerats com fonamentals, ara bé ...

  ...a distàncies més curtes estos constituents poden deixar de ser fonamentals i passar a tindre estructura interna.



- **Evolució del concepte de "fonamental"**:
  - Segle XIX: àtoms
  - 1930s: electrons, protons, neutrons
  - 1970s: quarks i leptons
  - 2012- Higgs…

- També **denominada Física d'Altes Energies**, per dos raons:
  - Hi ha partícules fonamentals, com el bosó Z^0 , la massa del qual és quasi 100 vegades la massa del protó. Per tant, per a produir estes partícules es requereixen altes energies ($E = mc^2$), en centre de masses! (El bossó de Higgs detectat en 2012 té125 GeV).
  - Per a explorar el 'infinitament' xicotet, és necessari disposar de projectils d'alta energia (dualitat ona-corpuscle λ= h/p, h = $6{,}626076x10^{-34}$ J.s. La λ ha de ser de l'ordre o menor que el que es vol observar

Nota: $\hbar c = 197{,}3 \begin{cases} MeV\ fm \\ eV\ nm \end{cases} \quad \lambda = \frac{h}{p} = 2\pi \frac{\hbar c}{pc} \cong 1{,}24 \frac{GeV\ fm}{pc}\ ; \quad pc \to E; \quad para\ E \uparrow. \quad E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

Ordre de distàncies en Física Nuclear i de Partícules

- Per a veure un objecte xicotet necessitem longituds d'ona de l'ordre de la seua grandària:

→ Relació de De Broglie $\lambda = h/p$

h = constant de Planck = 6.63×10^{-34} J s= 4.14×10^{-24} GeV s

p = moment de l'objecte.

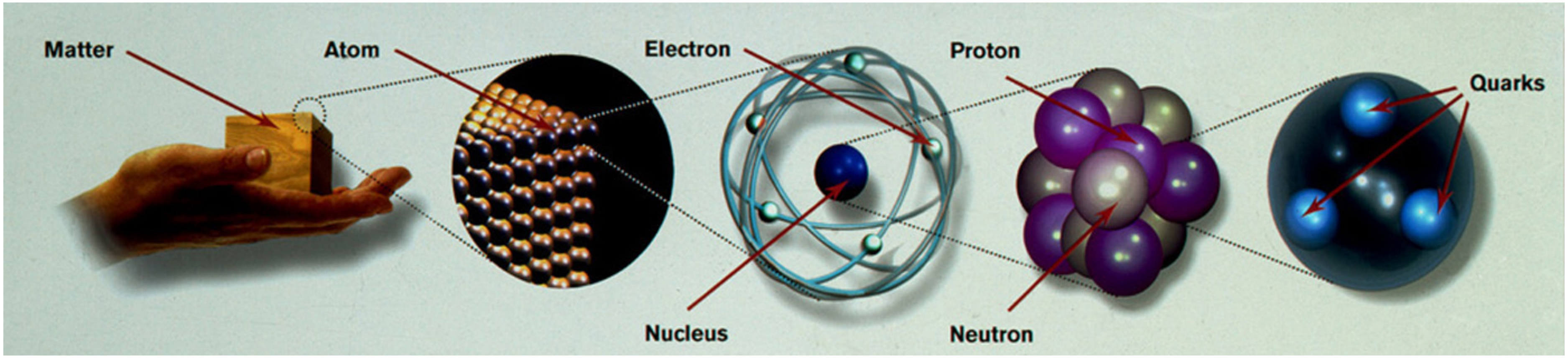
Quin és el moment '**necessari**' per a 'veure' un nucli?

Considerem un nucli de grandària 10 fm = 10^{-14} m →

$p = h/\lambda = (4.14x10^{-24}$ GeV s) / (10^{-14} m) = 4.14×10^{-10} GeV s/m → **p ≥0.12 GeV/c**

Velocitat de la llum
$c = 3{,}0 \times 10^{8}$ m/s

Matèria ~ 10^{-9} Àtom ~ 10^{-10} m Nucli~ 10^{-14} m Nucleó < 10^{-15}m



$p = h/\lambda$ ➡

$\sim KeV/c$	$\sim 10 KeV/c$	$\sim 100 MeV/c$	$> 1\ GeV/c$
FÍSICA MATERIALS	FÍSICA ATÒMICA	FÍSICA NUCLEAR	FÍSICA PARTÍCULES

Energies de lligadura dels electrons en l'àtom: 10 eV - 100 Kev

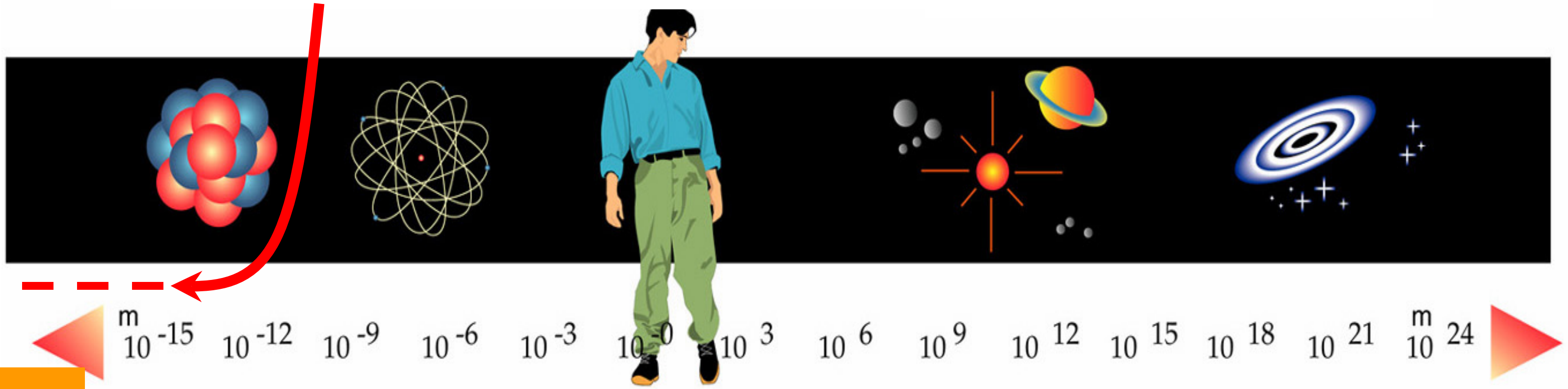
Energies de lligadura dels nucleons en el nucli: 1 MeV – 10 MeV

$$pc = \frac{2\pi\ \hbar c}{\lambda} = 2\pi \frac{197{,}3 MeV \cdot fm}{\lambda} = \frac{1{,}24}{\lambda}\ GeV \cdot fm$$

L’Univers que es coneix:

La Física Nuclear i la Física de Partícules estudien la matèria a distàncies molt curtes

L’Astrofísica estudia la matèria a grans distàncies



Camps de visió

Microscopis

Binoculars

Telescopis òptics, radiotelescopis

Acceleradors i detectors de partícules

L’ull

$$\boxed{p = h/\lambda}$$

LES DOS FRONTERES DE LA FÍSICA: El més gran i el més menut

Per a estudiar la Naturalesa a petites distàncies hem de utilitzar molta energia: “Física de Partícules” ≡ “Física d’Altes Energies”

Esquema general dels constituents i interaccions de la matèria:

		Constituents	Quantum del camp	Interacció
Física Atòmica	Àtom	e^-, *nucli*	γ	Electromagnètica (QED)
Física Nuclear	Nucli	*p, n*	π *(OPEP: one pion exchange potential)*	Nuclear (Yukawa: Intercanvi de mesons "virtuals")
Física de Partícules	Quarks Leptons	Barions (qqq) Mesons ($q\bar{q}$) $(l,\ \nu)$	Gluons $\gamma, Z, W^{\pm}$ Higgs	Forta (QCD) + totes Electro-dèbil

L'Aventura de les Partícules: http://particleadventure.org/particleadventure/spanish/

Esquema general dels constituents i interaccions de la matèria (cont):

Constituents: paral·lelisme de tres famílies de fermions

Quatre interaccions bàsiques amb els bosons d'intercanvi

FERMIONS matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c^2	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c^2	Electric charge
ν_e electron neutrino	$<1\times10^{-8}$	0	u up	0.003	2/3
e electron	0.000511	−1	d down	0.006	−1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	−1	s strange	0.1	−1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	−1	b bottom	4.3	−1/3

BOSONS force carriers spin = 0, 1, 2, ...

Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c^2	Electric charge	Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W^-	80.4	−1			
W^+	80.4	+1			
Z^0	91.187	0			

El gravitó, intermediari de la gravitatòria

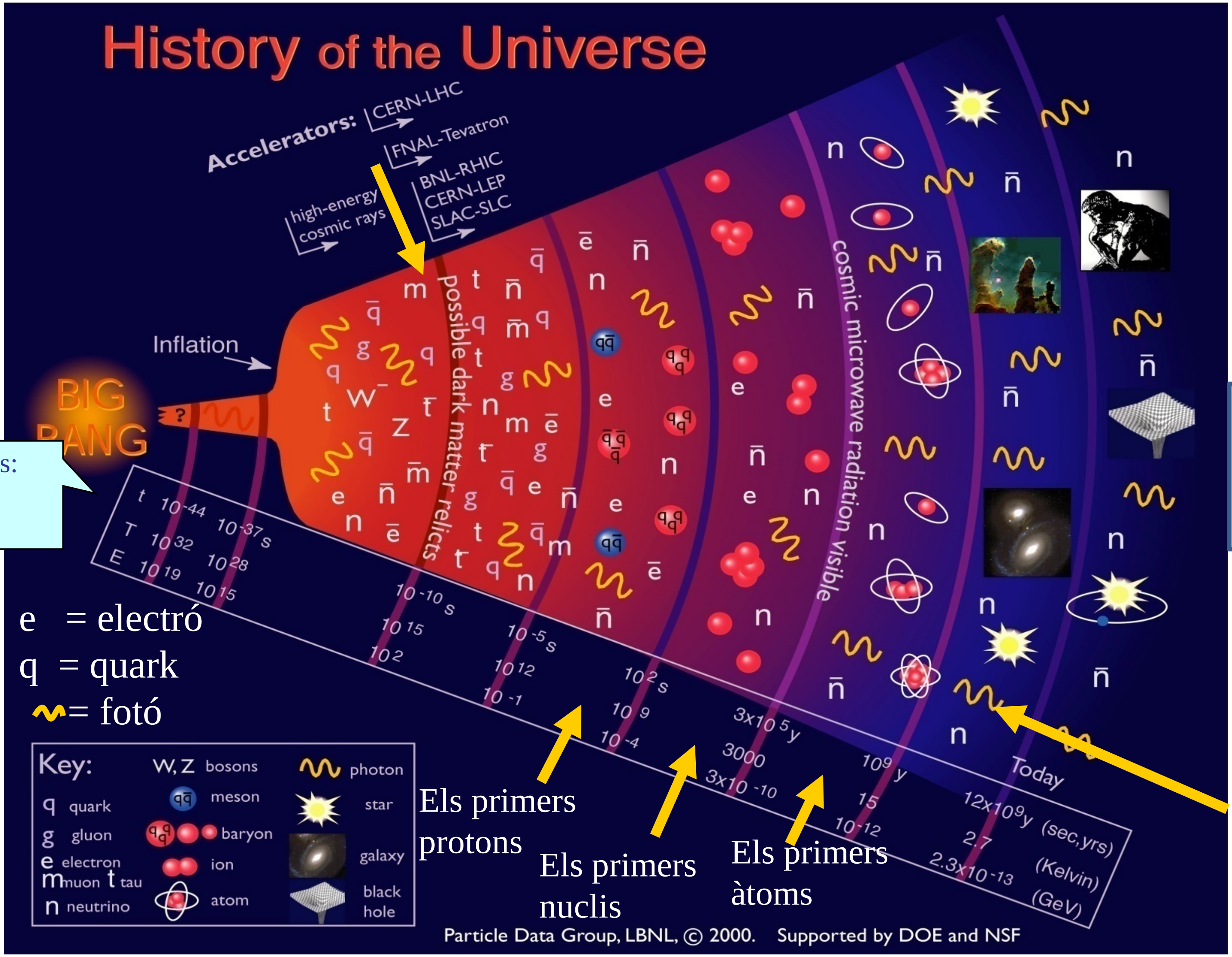
+ antipartícules

+ Higgs

PROPERTIES OF THE INTERACTIONS

Property \ Interaction	Gravitational	Weak (Electroweak)	Electromagnetic (Electroweak)	Strong: Fundamental	Strong: Residual
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically charged	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25	Not applicable to quarks
Strength relative to electromag for two u quarks at: 3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60	
for two protons in nucleus	10^{-36}	10^{-7}	1	Not applicable to hadrons	20

La Física Nuclear i de Partícules està estretament relacionada amb els processos que van ocórrer en l'evolució de l'Univers des del Big-Bang inicial, fa $13{,}7 \times 10^9$ anys:



Les tres variables: t, T i E estan relacionades

El sistema solar va nàixer fa 5×10^9 anys

Conceptes: Desacoblament de la radiació amb els quarks:→formació de protons i neutrons.
Desacoblament de la radiació γ amb els electrons → Univers visible i radiació romanent.

Unsolved Mysteries

Driven by new puzzles in our understanding of the physical world, particle physicists are following paths to new wonders and startling discoveries. Experiments may even find extra dimensions of space, mini-black holes, and/or evidence of string theory.

Universe Accelerating?

The expansion of the universe appears to be accelerating. Is this due to Einstein's Cosmological Constant? If not, will experiments reveal a new force of nature or even extra (hidden) dimensions of space?

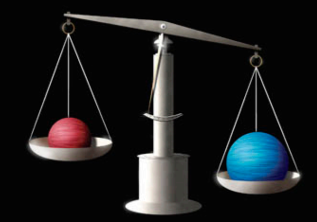
Why No Antimatter?

Matter and antimatter were created in the Big Bang. Why do we now see only matter except for the tiny amounts of antimatter that we make in the lab and observe in cosmic rays?

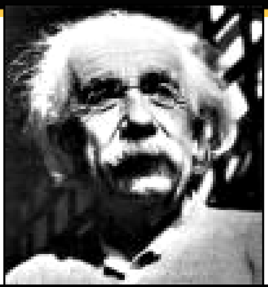
Dark Matter?

Invisible forms of matter make up much of the mass observed in galaxies and clusters of galaxies. Does this dark matter consist of new types of particles that interact very weakly with ordinary matter?

Origin of Mass?



In the Standard Model, for fundamental particles to have masses, there must exist a particle called the Higgs boson. Will it be discovered soon? Is supersymmetry theory correct in predicting more than one type of Higgs?

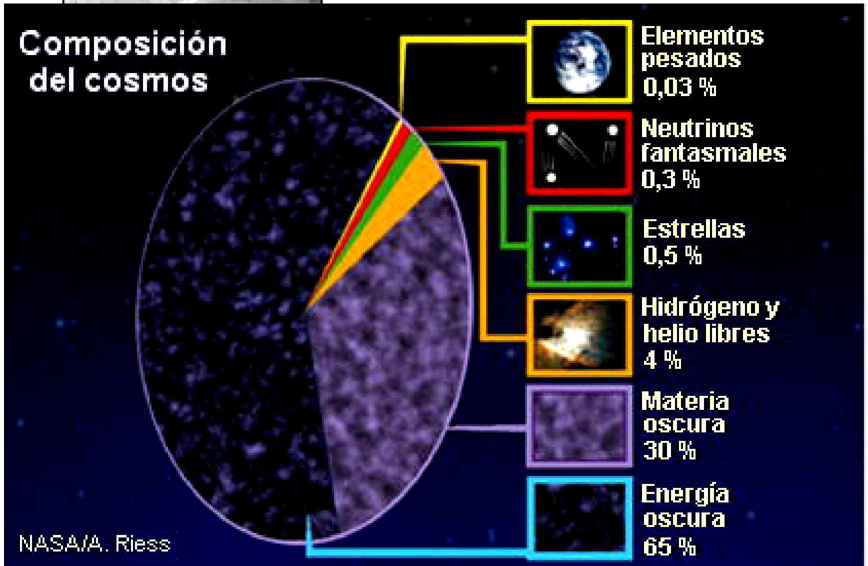


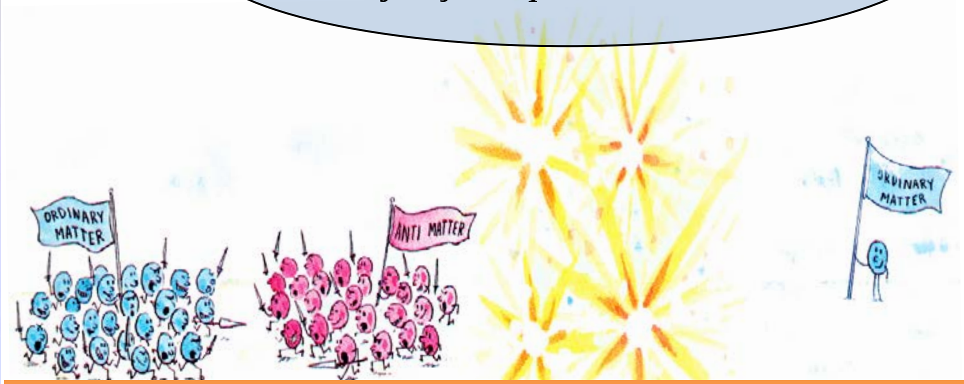
Hi ha quelcom que accelera l'expansió de l'Univers: l'***energia fosca***

La constant cosmològica?

Higgs descobert en 2012 al LHC del CERN

Big-Bang ⇒ Matèria >> Antimatèria? Mitjançant què mecanismes?





Per cada 10^9 partícules de matèria ordinària que es varen aniquilar amb les de antimatèria en l'Univers primigeni, una partícula de matèria va quedar

Mètodes en Física de Partícules:

- Sotmetre la matèria a temperatures i densitats extremes. El límit actual:
  - $E \sim 10$ TeV(10^{13} eV)
  - $T \sim 12\times10^{16}$ K ($E = kT$) →
  - Densitat ~ 1000×densitat nuclear

Paràmetres relacionats

Són experiments que es relacionen amb l'evolució de l'Univers fent col·lidir nuclis pesats mitjançant ions, p+p etc

- Accelerar partícules subatòmiques a altes velocitats i fer-les col·lidir frontalment.
- Estudiar els productes que emergeixen de la col·lisió:
  - Producció de noves partícules: (L'energia en centre de masses és l'energia "útil").
  - Estudiar la seua estructura interna i les seues interaccions fonamentals a través d'observacions 'indirectes' que significa mesurar:
    - Angles de difusió, seccions eficaces, etc.
    - Desintegracions i els seus paràmetres
    - Estats lligats i les seues propietats
- Conjecturar la forma de la interacció i comparar les prediccions teòriques amb les observacions ⇒ mètodes i tècniques tots semblants als de la Física Nuclear.
- Dos estratègies (estratègia de descobriments):
  - Més i més energia (experiments a la frontera d'energia)

  →Produir objectes de major massa: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$

  Col·lisionadors de descobriment (p+p) i col·lisionadors de precisió (e+e)

  Resoldre l'estructura a distàncies més xicotetes: $\lambda = h/p$
  - Mirar amb detall (estratègia en la frontera de precisió: experiments amb partícules fonamentals, com els electrons)

  → Producció **neta** (lliure de fons) i en abundància (a menor energia de la frontera).

- La formulació de les 'conjectures' (mitjançant models) està basada en primers principis:
  - **Mecànica Quàntica**
  - **Relativitat Especial**
  - **Principis de simetria**

Ràpid

Mecànica Clàssica	Mecànica Quàntica
Relativitat	Teoria Quàntica de Camps

Menut

- ⇒ MODEL ESTÀNDAR (ME):
  - Descriu com les excitacions de baixa energia, açò és, les partícules, interaccionen entre elles a través de les tres forces (electromagnètica, dèbil i forta).
  - Basada en la simetria 'gauge' o 'local' de tipus $[SU(2)\times U(1)]_{Electrodebil}\times SU(3)_{Color}$
  - Interpretació extremadament precisa de totes les observacions experimentals.
  - La descripció no és encara completa, però qualsevol nova teoria ha d'incloure al ME.
  - Situació molt millor que en la Física Nuclear (la seua construcció és formalment coherent).
  - Però sabem que la descripció no és encara completa: queden moltes preguntes sense resposta:
    - Per què hi ha 3 famílies de quarks i leptons? Hi ha algun patró per a les seues masses? Què passa amb la massa dels neutrinos? Són els quarks realment fonamentals o també tenen estructura? Què determina els valors dels 19 paràmetres lliures del ME? ...
- Com en el cas de la Física Nuclear, el seu desenrotllament ha necessitat i ha contribuït a molts avanços tecnològics (frontera tecnològica), en particular, els acceleradors i detectors de partícules, inicialment concebuts per a l'estudi de les propietats nuclears.
- El seu desenrotllament ha estat sembrat de grans descobriments (experimentals i teòrics) , i representa sens dubte un dels majors èxits intel·lectuals i tecnològics del segle XX.

Com realitzar un experiment d'Altes Energies?

- Cal obtindre les partícules subatòmiques inicials (protons, antiprotons, electrons,...)
- Accelerar-les en un buit
- Fer-les col·lidir →Blanc fixe i col·lisionadors

En els col·lisionadors hi ha un guany d'energia en C.M. comparat amb els experiments de blanc fix.

$$E_{cm} = 2E \sim 200 \text{ GeV para } E \sim 100 \text{ GeV}$$

$$E_{cm} = 2\sqrt{Emc^2} \sim 20 \text{ GeV para } E \sim 100 \text{ GeV}$$

$$m = 1 \text{ GeV/c}^2$$

- Observar i registrar el que ocorre després de la col·lisió:
- Analitzar i interpretar les dades:
- Per a això es necessita:
  - Font de partícules i sistema accelerador
  - Sistemes de detecció
  - 'Trigger' (per a decidir què és el que es va a registrar) i sistema d'emmagatzemament
  - Molt treball, paciència i mà d'obra especialitzada (físics, enginyers, etc.) per a:
    - Dissenyar, construir, testejar i operar el sistema accelerador.
    - Dissenyar, construir, testejar, calibrar, operar i comprendre el detector.
    - Prendre i analitzar les dades.
  - I diners...

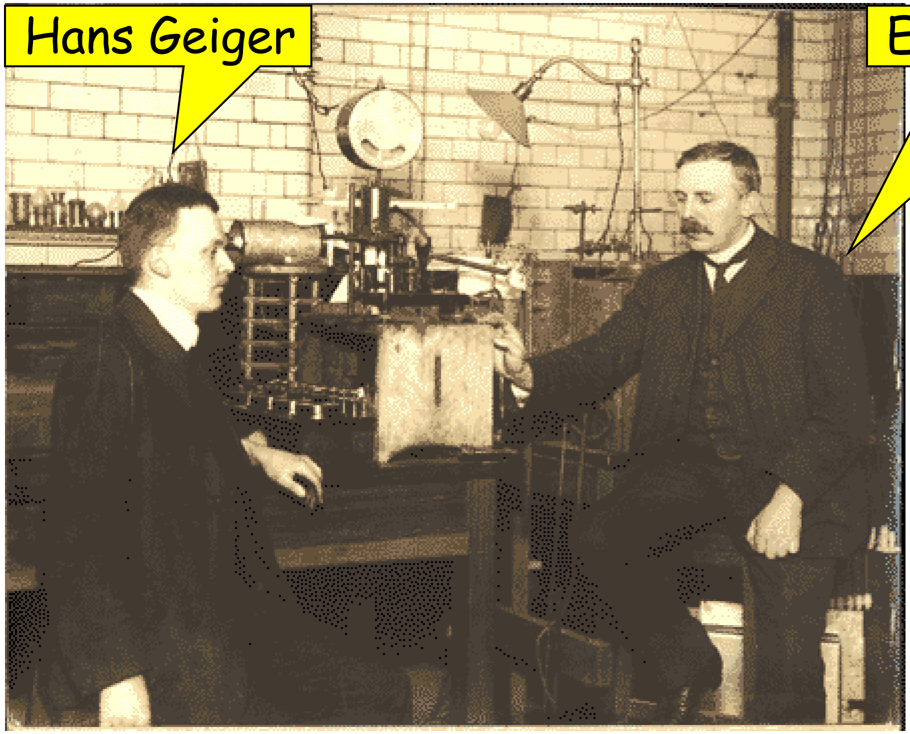
Grans col·laboracions internacionals, en molts casos a escala mundial

Algunes pàgines Web d'interés en Física Nuclear i de Partícules

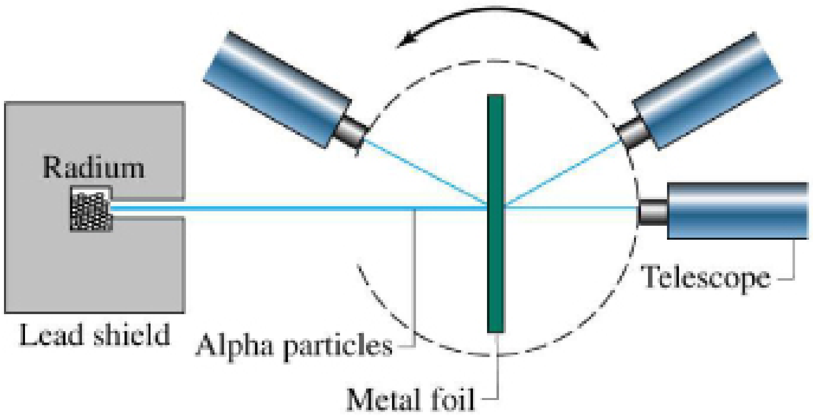
- http://www.cern.ch/ (CERN, European Laboratory for Particle Physics)
- http://www.d0.fnal.gov/ (Fermilab)
- http://www.slac.stanford.edu/ (SLAC, Stanford Linear Accelerator Center)
- http://ParticleAdventure.org/ (LBNL particle adventure)
- http://sg1.hep.fsu.edu/~wahl/Quarknet/index.htm (has links to many particle physics sites)
- http://www.fnal.gov/pub/tour.html (Fermilab particle physics tour)
- http://www.nndc.bnl.gov/ (Brookhaven Nuclear Data Base)
- http://isotopes.lbl.gov/toi.html (LBNL Nuclear Data Dissemination)
- http://pdg.lbl.gov/ (LBNL Particle Data Group)
- http://www.laradioactivite.com/ (Divulgació sobre conceptes i aplicacions de la Física Nuclear)

2. Secció eficaç de dispersió: estudi d'estructures i interaccions

Exemple: la dispersió de Rutherford



E_α=5MeV→ v_α=15 km/s

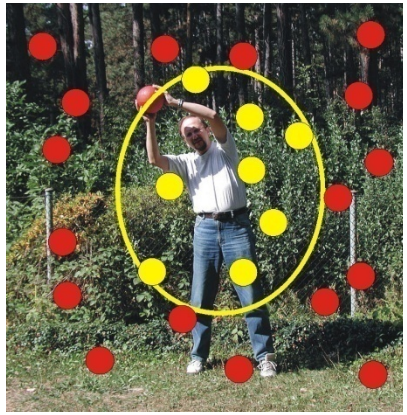


- El model de Thompson previ al de Rutherford.

Amb un flux constant de partícules alfa, observant $d^2N(\theta)/dtd\theta$ (el número de partícules dispersades en $d\theta$ per unitat de temps) Rutherford va concloure l'existència del nucli on es concentrava tota la càrrega positiva i pràcticament tota la massa de l'àtom.
La grandària del nucli és molt més petita (10^{-14}m) que la grandària de l'àtom (10^{-10}m).

Secció eficaç TOTAL "s": àrea efectiva

Símil del concepte de secció eficaç: Si em llencen pilotes distribuïdes uniformement a l'espai, i amb la mateixa velocitat, quina és la meva "habilitat" de aturar-les/desviar-les?



La meva "habilitat" es caracteritza per una **àrea efectiva** que anomenarem **secció eficaç total**

$$\sigma \approx 2m^2$$

El número de pilotes que NO seguiran rectes (aturaré o desviaré) per unitat de temps serà on ϕ és el flux de pilotes (número de pilotes que em tiren per unitat d'àrea i temps).

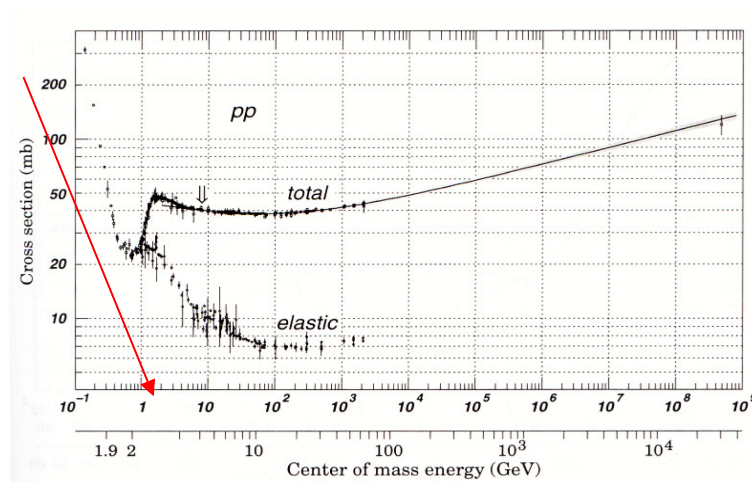
$$\boxed{N = \sigma\phi}$$

Però σ depèn del tipus i de la velocitat de les pilotes, per exemple:

Seccions eficaces pp

En este punt energètic els protons tenen suficient energia per **crear una nova partícula**: el pió. És este un exemple de procés que contribueix a la secció **inelàstica:**

$\sigma_{inelas} = \sigma_{total} - \sigma_{elastic}$

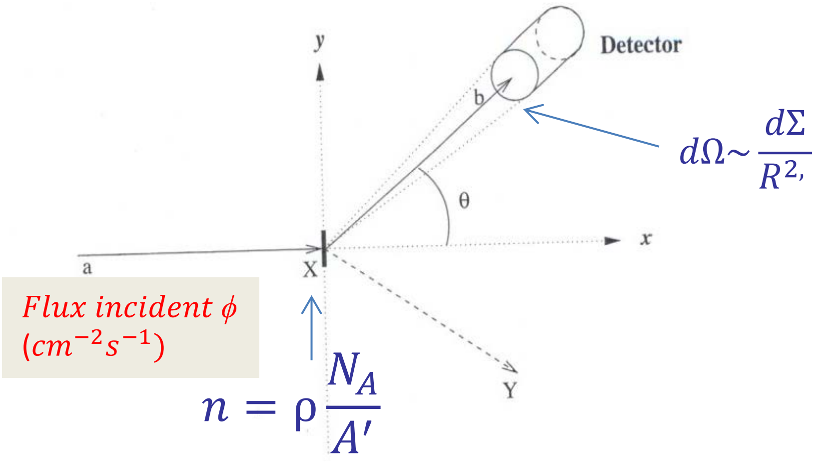


E_{cin}

E_{tot}

Estudiant la dependència de **σ** en funció de l'**energia** podrem inferir propietats del blanc i de la interacció.

Concepte de secció eficaç:



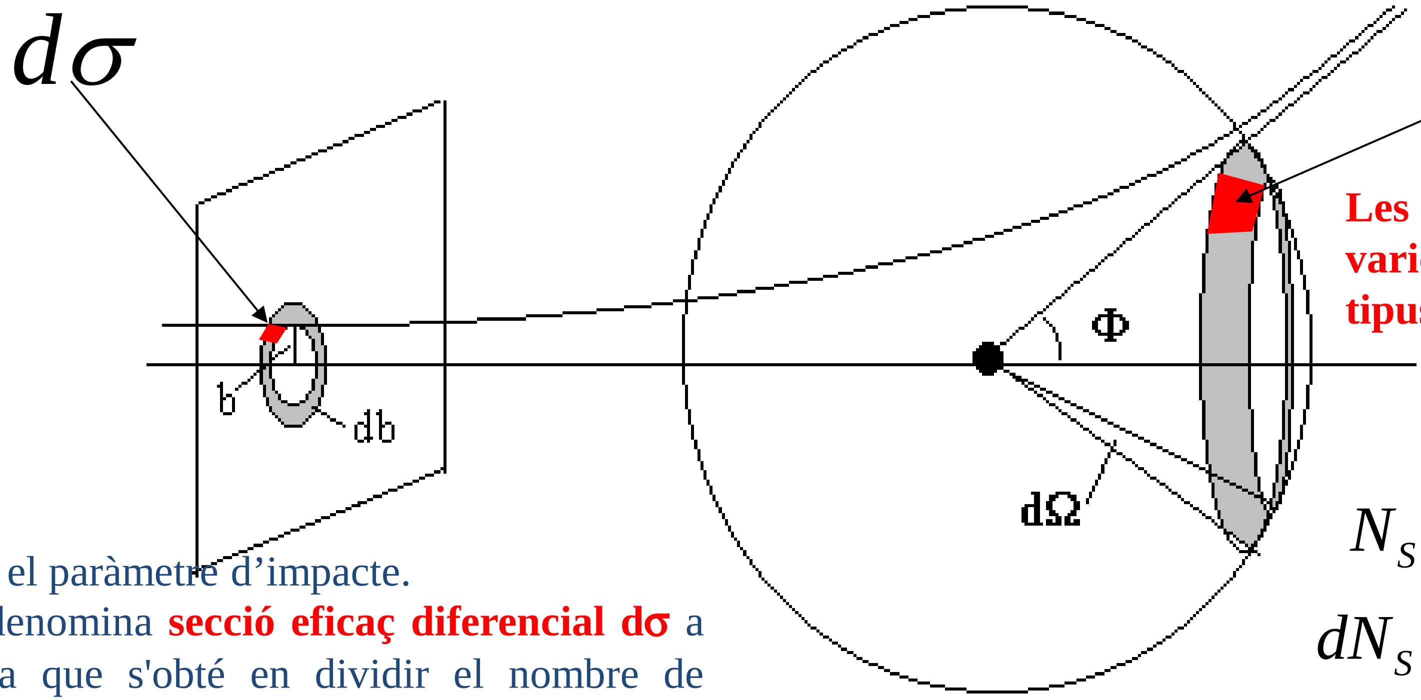
- La secció eficaç es relaciona amb la probabilitat d'interacció d'una partícula amb un blanc.
  Una situació habitual es la que es presenta en la figura:
- Incideix sobre el blanc un flux de partícules ϕ donat en (partícules per $cm^{-2}s^{-1}$)
- La densitat del número de blancs per unitat de volum serà n $(blancs\ cm^{-3})$ que podrem calcular com:

$$n = \rho \frac{N_A}{A}$$

on N_A es el número d'Avogadro i A es el pes atòmic del blanc.

- L'angle sòlid que subtendeix el detector (allunyat del blanc) és: $d\Omega \sim \frac{d\Sigma}{R^{2,}}$, on $d\Sigma$ representa l'àrea subtendida pel detector.
- El concepte de secció eficaç pot ser quantificat mitjançant una àrea característica del procés, on una àrea gran significa gran probabilitat d'interacció i el contrari per a àrees menudes.
- Donat que el radi nuclear es de l'ordre de 10^{-12} cm la seua **"àrea geomètrica"** d'interacció ($A = \pi r^2$) valdria $\sim 10^{-24} cm^2$ i és esta la unitat que es pren: **1 barn= $10^{-24} cm^2 = 10^{-28}$ m^2**.
- Quan s'envia un feix de partícules sobre un blanc podem mesurar la probabilitat total d'interacció de tots els processos possibles → secció eficaç total, o podem fixar-nos solament en les partícules que han estat difoses elàsticament → secció eficaç elàstica. També es poden calcular les seccions eficaces en funció de l'element diferencial d'angle sòlid → secció eficaç diferencial $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ i la de producció d'un canal o partícula.
- En general, per a cada procés individual d'interacció es pot definir la seua secció eficaç.

Secció eficaç diferencial i secció eficaç total:



Les seccions eficaces varien molt segons el tipus d'interacció!

$$N_S / \phi = \sigma$$

$$dN_S / \phi = d\sigma$$

b és el paràmetre d'impacte.
Es denomina **secció eficaç diferencial dσ** a l'àrea que s'obté en dividir el nombre de partícules dispersades per unitat de temps N_S en l'angle sòlid dΩ entre el flux (ϕ)

Definició: $$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\phi}\frac{dN_S}{d\Omega}}$$

- En general $d\sigma$ varia amb l'energia del feix i amb l'angle de difusió
- La **secció eficaç total** a energia E és: $\sigma(E) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$

$\frac{dN_S}{d\Omega}$: número de partícules difoses en l'angle sòlid $d\Omega$ por unitat de temps.

ϕ : flux: número de partícules incidents per unitat d´àrea i unitat de temps.

$d\sigma$ té dimensions d´àrea ⇒ secció geomètrica del blanc "interceptada" pel feix

Unitats

$1\,\text{barn} = 10^{-28}\,\text{m}^2$

$= 10^{-24}\,\text{cm}^2$

El mètode experimental implica que el detector està molt lluny del centre difusor

- En la situació real el blanc és un material extens amb múltiples centres de dispersió. Si
  - n_{blanc} : densitat **volúmica** de centres dispersors del blanc.

$$n_{blanc} = \rho \frac{N_A}{A}$$

ρ : densitat del blanc (g/cm^3)
A : pes atòmic o molecular del blanc (en grams)
N_A : número d'Avogadro

  - δx : espessor del material en la direcció del feix (habitualment s'escull no massa gros per a que no hi hagen difusions múltiples).
  - $n_{\text{blanc}}\delta x$: densitat **superficial** de centres dispersors perpendiculars al feix
  - S: àrea total del blanc il·luminada pel feix, a les hores:

Concepte relatiu de blanc prim

el número de partícules difoses en mitjana per unitat de temps (I, intensitat de difusió) és:

$$I_S(\Omega) \rightarrow \qquad \frac{dI_S}{d\Omega} = \emptyset \, S \, n_{blanc} \, \delta x \, \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

- El número total de partícules difoses en tots els angles per unitat de temps és:

$$I_S = \emptyset S n_{blanc} \sigma \delta x$$

- En el cas de blancs grossos, en travessar un espessor δx a la profunditat x, el feix incident s´atenuarà:

$$-d\emptyset\,(x) = \emptyset(x) n_{blanc} \sigma \delta x \;\; \rightarrow$$

$$\emptyset(x) = \emptyset_0 e^{-n_{blanc}\sigma x} \rightarrow I(x) = I_0 e^{-n_{blanc}\sigma x} \rightarrow \frac{I(x)}{I_0} = P(x) = e^{-n_{blanc}\sigma x} \rightarrow N = N_0 e^{-n_{blanc}\sigma x}$$

Equacions que representen la **llei d'atenuació del feix de partícules** sobre un blanc per al flux incident ($cm^{-2}s^{-1}$), per a la intensitat incident *I(x)* (partícules per unitat de temps, s^{-1}) **i la probabilitat de supervivència** *P(x) i N* de les partícules en funció de la profunditat abastada *x*.

- Es pot calcular també la probabilitat *F(x)* de que una partícula haja sobreviscut una distància x sense interaccionar i que interaccione immediatament a continuació en l'interval definit entre x i x+dx:

$$F(x) = P(x) n_{blanc} \sigma \, dx$$

Recorregut lliure mitjà λ: és el valor mitjà dels recorreguts de les partícules en el medi material**.** És un concepte semblant al de la vida mitja de les partícules, però en funció de la distancia que recorren en el medi.

$$\lambda = \frac{\int_{x=0}^{x=\infty} x \, P(x) \, dx}{\int_{x=0}^{x=\infty} P(x) \, dx} = \frac{1}{n_{blanc}\sigma} \Rightarrow \frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = \frac{I(x)}{I_0} = e^{-x/\lambda} = e^{-\mu x}$$

P(x)=$e^{-x/\lambda}$ és la probabilitat de supervivència, no normalitzada.
La funció normalitzada és:
P(x)=$\lambda \, e^{-x/\lambda}$
$\lambda = \int_0^\infty dx \;\; x \, e^{-x/\lambda}$

on μ rep el nom de **coeficient d'absorció lineal** (a veure en el tema 2): $\mu = 1/\lambda$.

Nota: el concepte de recorregut lliure mitjà és semblant al de la vida mitja dels estats, aquell en funció de la variable x, i este en funció del temps t.

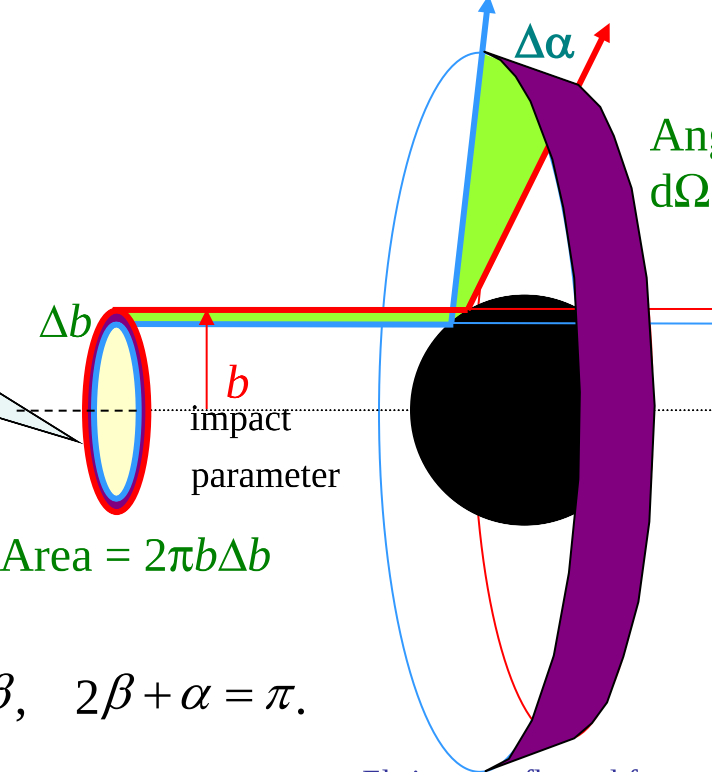
- **Càlcul de seccions eficaces teòriques**: Per al càlcul de les seccions eficaces teòriques s'utilitza la regla dorada de Fermi que ens dóna la probabilitat d'interacció, com la probabilitat $\lambda_{i\rightarrow f}$ de passar de l'estat inicial *i* a l'estat final *f*:

$$\lambda_{i\rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H | i \rangle \right|^2 \rho(E_f)$$

on *H* representa el hamiltonià de la interacció i $\rho(E_f)$és la densitat d'estats finals. Este càlcul o predicció teòrica és el que cal comparar amb la determinació experimental que hem establert.

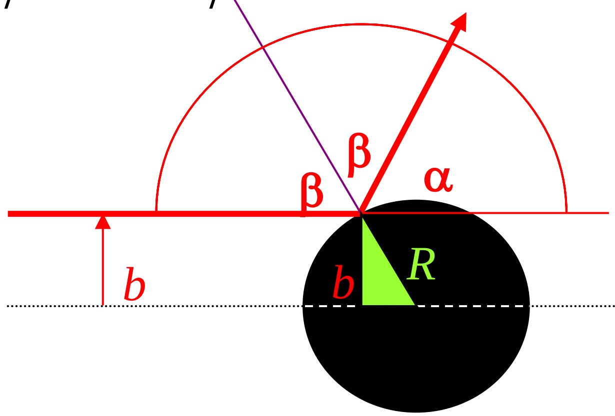
Exemple: esfera rígida (Mec. Clàssica)

Totes les boles que passen per aquest anell d'àrea $\Delta S=2\pi b\Delta b$ seran dispersades en el interval angular $\Delta\alpha$, és a dir, a l'angle solid $\Delta\Omega=2\pi\sin\alpha\,\Delta\alpha$



Angle sòlid:
$d\Omega=2\pi\sin\alpha\,d\alpha$

$$\frac{1}{\phi}\frac{dN_S}{d\Omega}=\frac{1}{\phi}\frac{\phi(2\pi b\,\mathrm{d}b)}{2\pi\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$$



$$\frac{b}{R}=\sin\beta,\quad 2\beta+\alpha=\pi.$$

$$b=R\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=R\cos\frac{\alpha}{2}.$$

El signe – reflexa el fet que l'angle α decreix amb b creixents. Només ens interessa els valors absoluts

dσ/dΩ no depèn de α. Això indica que qualsevol direcció és equiprobable (com un focus de llum)

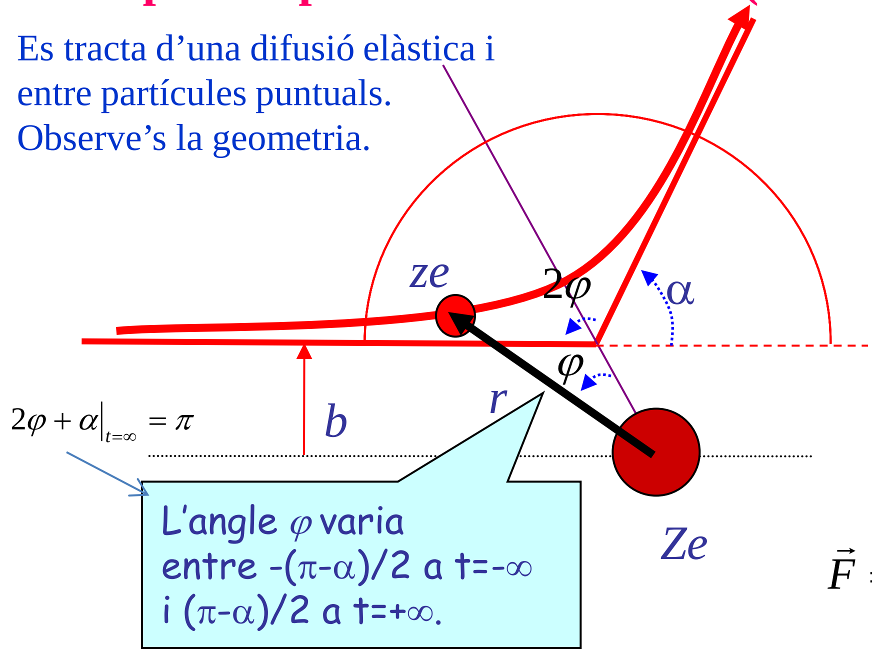
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{2\pi b\,\mathrm{d}b}{2\pi\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha}=\frac{b}{\sin\alpha}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{R\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}R\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4\sin\alpha}R^2=-\frac{R^2}{4}.$$

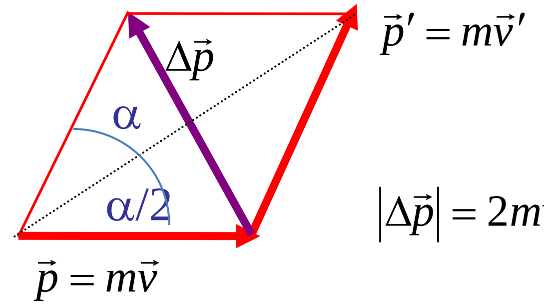
$$\sigma=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}2\pi\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\int_0^\pi\frac{\pi R^2}{2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{\pi R^2}{2}\left[-\cos\alpha\right]_0^\pi=\pi R^2$$

És l'àrea efectiva d'una esfera!!!

Exemple: Dispersió de Rutherford (Mec. Clàssica)

Es tracta d'una difusió elàstica i entre partícules puntuals. Observe's la geometria.





$$|\Delta\vec{p}| = 2mv\sin\frac{\alpha}{2}$$

El canvi de moment es degut a la força de Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \quad \Delta\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r)\,dt. \qquad |\Delta\vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r)\cos\varphi\,dt.$$

El moment angular $L=mr^2w$ es conserva per a una partícula en un camp central. Condició inicial $L=mvb$

$$[L = |\vec{r}\times\vec{p}| = mvb = m\omega r^2 = cte]$$

$$|\Delta\vec{p}| = 2mv\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$|\Delta\vec{p}| = \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} F(r)\cos\varphi \frac{d\varphi}{\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|}$$

$$F(r) = \frac{Zze^2}{r^2}$$

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| = \omega = \frac{vb}{r^2}$$

$$2mv\sin\frac{\alpha}{2} = Zze^2 \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{1}{r^2}\cos\varphi \frac{d\varphi}{\frac{vb}{r^2}}$$

$$b\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Zze^2}{2mv^2}\int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = \frac{Zze^2}{mv^2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$b=\frac{Zze^2}{mv^2}\operatorname{cotan}\frac{\alpha}{2}. \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{b}{\sin\alpha}\left|\frac{db}{d\alpha}\right|=\left(\frac{Zze^2}{mv^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sin\alpha}\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\left(\frac{Zze^2}{mv^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}. \rightarrow$$

Fórmula de dispersió culombiana de Rutherford per a partícules puntuals

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{Zze^2}{4(mv^2/2)}\right)^2\frac{1}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}}$$

E_c de la partícula incident

Quina és la probabilitat de que la partícula α siga desviada més de 1 grau?
(considerem com energia cinètica típica de les partícules α → 1 MeV = 1,60×10^{-13} J)

$$\sigma^{\alpha\geq 1^\circ}=(\ldots)^2\int_{1^\circ}^{180^\circ}\frac{2\pi\sin\alpha\, d\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}=2\pi(\ldots)^2\int_{1^\circ}^{180^\circ}\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}=8\pi(\ldots)^2\int_{1^\circ}^{180^\circ}\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\, d\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}=$$

Substituint $\sin\frac{\alpha}{2}=x$

$$=8\pi(\ldots)^2\int_{\sin 0.5^\circ}^{\sin 90^\circ}\frac{dx}{x^3}=8\pi(\ldots)^2\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_{\sin 0.5^\circ}^{\sin 90^\circ}=5.33\times10^{-22}\,\mathrm{m}^2=5.33\times10^{6}\,\mathrm{barns}$$

$$(1\ \mathrm{barn}=1\ \mathrm{b}=10^{-28}\,m^2)$$

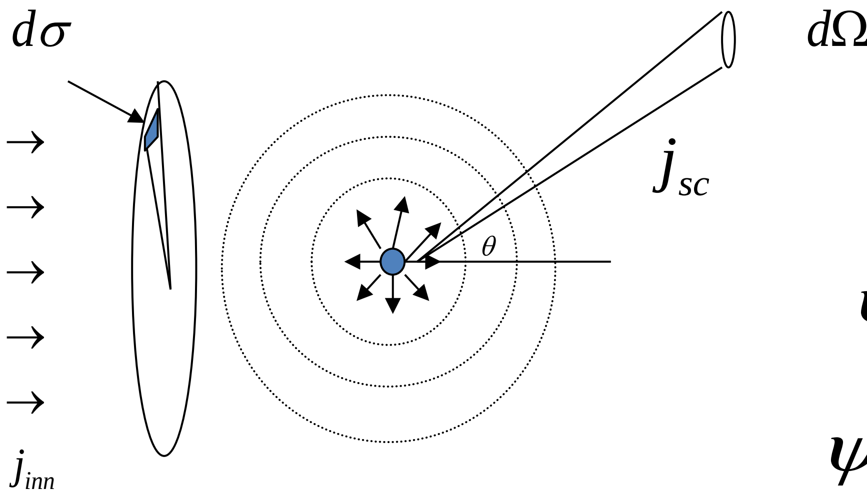
Quin és el paràmetre d'impacte que correspon a un angle de 1°?

$$b=\frac{Zze^2}{mv^2}\operatorname{cotan}\frac{\alpha}{2}=1.14\times10^{-13}\times\operatorname{cotan}0.5^\circ\mathrm{m}=1.30\times10^{-11}\ \mathrm{m}$$

- Observe's que la secció eficaç és divergent corresponent a una interacció d'abast infinit.
- La distància d'aproximació de la partícula α queda molt lluny del nucli per a sentir la interacció forta.

Secció eficaç diferencial en MQ   (H no funció de t)

Una ona plana es dispersada per l'objecte i emergeix una ona esfèrica



$$\psi = \psi_{inn} + \psi_{scattered}$$

$$\psi_{inn} = Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$ Ona plana incident

$$\psi_{scattered} = C\ f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

Lluny del centre difusor tindrem una ona esfèrica (amb el factor d'atenuació 1/r) amb una amplitud $f(\theta,\varphi)$

Procediment:

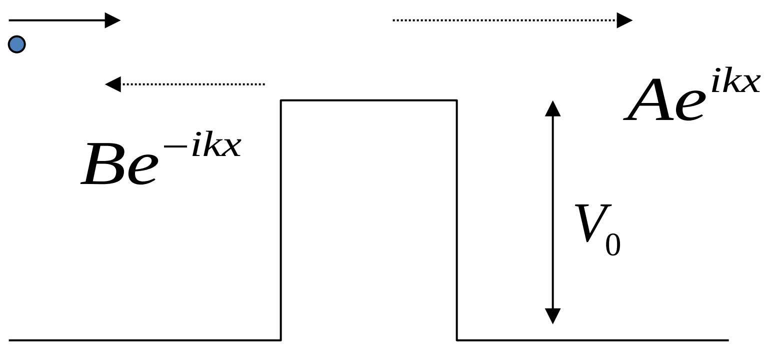
- Solucionar l'equació de Schrödinger independent del temps.
- Aproximar la solució per una vàlida molt lluny del centre de dispersió.
- Escriure aquesta solució com suma d'una ona plana entrant inicial i d'una ona esfèrica sortint.

$$\psi \cong\ C[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}]$$

Determinem primer la relació entre la funció "*f*" i la secció eficaç diferencial

Abans però un exemple en 1D: penetració a través d'un escaló de potencial.

$$\psi_{inn} = Ce^{ikx} \qquad k = p/\hbar$$



$$\psi = \psi_{inn} + \psi_{scattered}$$

$$\psi_{scattered} = C\left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right)$$

$$f(\theta,\phi) = \begin{cases} A & \textbf{Forward scattering} \\ B & \textbf{Reflection} \end{cases}$$

En aquest cas podem trobar exactament "*f*" fent el procediment habitual de continuïtat de

$$\psi \quad i \quad d\psi/dx$$

Relació entre la funció "f(θ,φ)" i la secció eficaç diferencial:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r}) \quad \text{amb} \quad E=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \quad \text{i} \quad U(\vec{r})=\frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r}) \quad \text{obtenim:}$$

$$\boxed{\left(\nabla^2+k^2\right)\psi(\vec{r})=U(\vec{r})\psi(\vec{r})}$$

Equació de Schrödinger independent del temps

Densitat de corrent: $\vec{j}=-\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*)=\mathrm{Re}\left(\psi^*\frac{\hbar}{im}\vec{\nabla}\psi\right)$

Densitat de corrent entrant:

$$\psi_{in}=Ce^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=Ce^{ikz}$$

$$\boxed{\vec{j}_{in}=\frac{\hbar k}{m}|C|^2\hat{k}}$$

Densitat de corrent sortint:

$$\psi_{sc}=Cf(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}Cf(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}=ikCf(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}+O\left(r^{-2}\right)$$

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$
$$=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r+\ldots\vec{e}_\theta+\ldots.\vec{e}_\phi$$

$$\boxed{\vec{j}_{sc}=|C|^2|f(\theta,\phi)|^2\frac{\hbar k}{mr^2}\vec{e}_r}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\overbrace{j_{sc}r^2d\Omega}^{dN}}{d\Omega\ j_{in}}=\frac{|C|^2\frac{\hbar k}{mr^2}|f(\theta,\phi)|^2r^2d\Omega}{d\Omega|C|^2\frac{\hbar k}{m}}=|f(\theta,\phi)|^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta,\phi)|^2}$$

Amplitud de difusió $f(\vartheta,\phi)$

Determinació de la funció "$f(\theta,\phi)$" amplitud de difusió:

Utilitzarem el mètode de les funcions de Green ***G(r)*** per a obtenir una **solució "formal"** de l'equació de Schrödinger, que podem escriure com:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi(\vec{r}) = U(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

La seua solució formal és:

és :

$$\boxed{\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r'}$$

$\Psi_0(\vec{r})$ és la funció d'ona entrant

Si ho apliquem al cas d'una partícula lliure:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi_0(\vec{r}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \psi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Equació de Laplace

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Equació de Green

efectivament ....

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = \underline{(\nabla^2 + k^2)\psi_0(\vec{r})} + \int \underline{(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}-\vec{r}\,')}U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

Aquest terme és 0

això és igual a $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

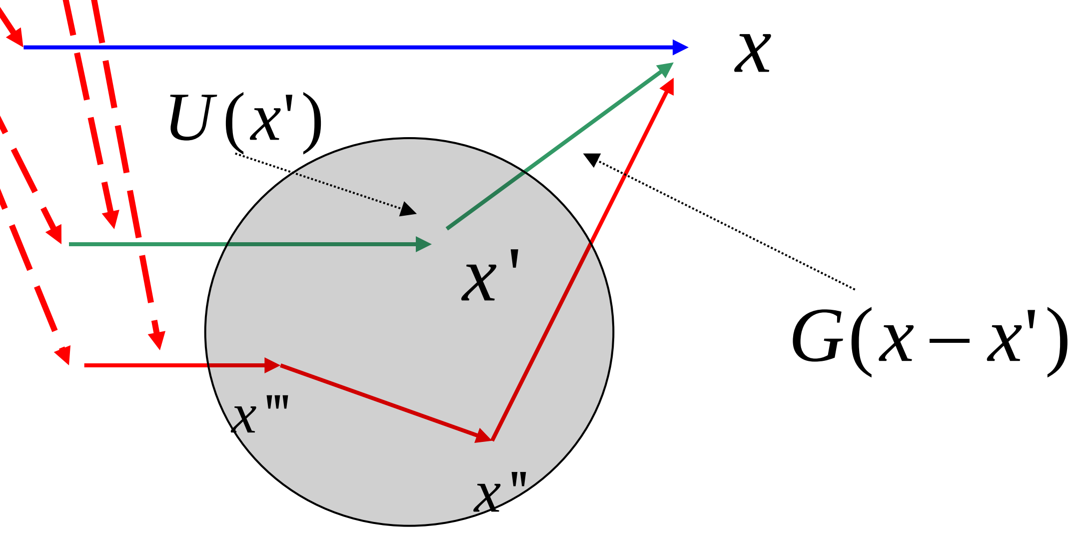
La sèrie de BORN: Diagrames de Feynman

$$\boxed{\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r'}$$

Com U és petit la podem obtenir iterant:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int d^3r' G(\vec{r}-\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\psi_0(\vec{r}\,') + \\ + \int d^3r'' \int d^3r''' \, G(\vec{r}-\vec{r}\,'')U(\vec{r}\,'')G(\vec{r}\,''-\vec{r}\,''')U(\vec{r}\,''')\psi_0(\vec{r}\,''') + \cdots$$

La interpretació simplista de la qual és: (diag. de Feynman: Vértex i propagador de la interacció. Mètode perturbatiu)



Quina és la funció de Green associada a l'equació de Schrödinger?

$$\left(\nabla^2 + k^2\right) G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Noteu: $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3s$, i: $\nabla^2 e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} = -s^2 e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}}$

Com $\int (\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3s = \int (-s^2 + k^2) e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3s \Rightarrow$

$$\int (\nabla^2 + k^2) \frac{e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}}}{-s^2 + k^2} d^3s = \int e^{i\vec{s}\cdot\vec{r}} d^3s = (2\pi)^3 \delta(\vec{r})$$

la funció buscada serà: $G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\vec{s}\cdot r}}{-s^2 + k^2} d^3s$ $\xrightarrow{\text{Integrant}}$ $\boxed{G(\vec{r}) = -\frac{e^{i\vec{k}\,\vec{r}}}{4\pi r}}$

Aproximacions per *r* molt gran .....

Si el potencial és de curt abast, i.e. actiu només per *r'* petits:

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} = r\left(1 - 2\frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^2} + \underbrace{\frac{r'^2}{r^2}}_{0}\right)^{1/2} \approx r\left(1 - \frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{r}}{r^2}\right)$$

Doncs (xoc elàstic) $k\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{p}_f}{\hbar} \equiv \vec{k}_f$

1) $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx e^{ikr} e^{-ik\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'} = e^{ikr} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'}$

2) $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx \frac{1}{r}$

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{e^{i\vec{k}\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \approx -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'}$$

Per tant la solució formal per a r molt grans (on posem els detectors), i que ens permet obtenir la funció ***f(θ,φ)***:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}\,')U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d^3r' = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}\,'}U(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')d^3r'}_{f(\theta,\phi)}$$

$$= \;\rightarrow x' \rightarrow x \quad + \quad \rightarrow x''' \rightarrow x'' \rightarrow x \quad + \quad \ldots.$$

$$\psi_0(x)\,U(x')\,G(x-x')$$

Ho podem obtenir iterant. Aquestes iteracions (series de BORN) ja hem vist que es podem expressar de forma diagramàtica: DIAGRAMES DE FEYNMAN

Secció eficaç diferencial en MQ. Aproximació de BORN

Si ens quedem a la primera iteració (primer terme): $\psi_0(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ i $U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})$

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}_f)\cdot\vec{r}\,'}V(\vec{r}\,')d^3r'$$

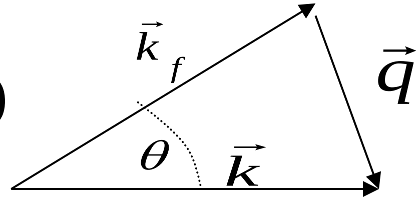
i per tant *f(θ,φ)* serà (aproximació de BORN):

$$\boxed{f^B(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k}_f)\cdot\vec{r}}V(\vec{r})d^3r} \qquad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left|f^B(\theta,\phi)\right|^2}$$

L'amplitud de dispersió és la transformada de Fourier del potencial !!!

Secció eficaç diferencial elàstica per potencials amb simetria esfèrica:

$$V(\vec{r}) = V(r)$$



$$q^2 = k_f^2 + k^2 - 2k_f k \cos\theta = 2k^2(1-\cos\theta)$$

$$q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad k_f = k$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$f^B(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\overbrace{(\vec{k}-\vec{k}_f)}^{\vec{q}}\cdot\vec{r}}V(r)d^3r$$

$$= -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\, r^2\, dr \int_0^\pi e^{iqr\cos\theta}\,\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= -\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty rV(r)\sin(qr)\,dr$$

La secció eficaç TOTAL: $\sigma = \int_\Omega \left|f^B(\theta,\phi)\right|^2 d\Omega = \int_\Omega \left|f^B(\theta,\phi)\right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$

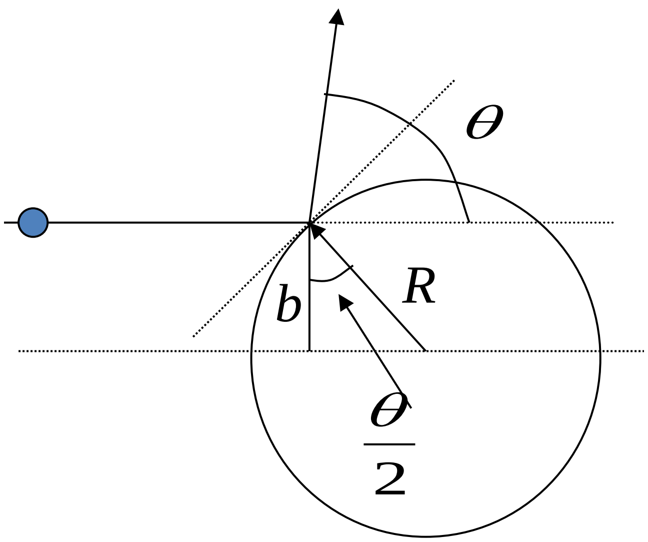
$$\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad dq = k\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$\sigma = 2\pi\int_0^\pi \left|f^B(\theta)\right|^2 \sin\theta d\theta \quad = \quad \frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k}\left|f^B(q)\right|^2 q dq$$

En funció de l'angle de difusió

En funció del momentum transferit

Exemple 1: esfera rígida (MQ)



Recordem que en mecànica clàssica hem obtingut:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=\frac{R^2}{4}$$

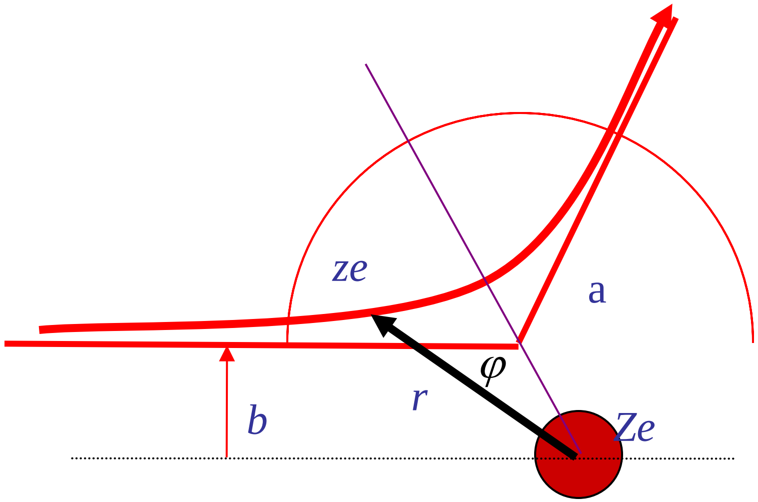
Potencial quàntic esfera rígida: $V(r)\approx\delta(r-R)$

$$f^B(\theta)=-\frac{2m}{q\hbar^2}\int_0^\infty\delta(r-R)\sin(qr)\,r\,dr=-\frac{2m}{q\hbar^2}R\sin(qR)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)=\left(\frac{2m}{q\hbar^2}\right)^2R^2\sin^2(qR)$$

Depend dels angles – però quasi independent si $qR << 1$ $\quad \sin^2(qR)\approx(qR)^2 \;,\; qR\to 0$

Exemple 2: Dispersió de Rutherford (MQ)



$$V(\vec{r}) = \frac{zZe^2}{|\vec{r}|}$$

$$q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad k = p/\hbar$$

$$f^B(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}V(\vec{r})d^3r = -\frac{zZe^2m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}|}$$

Aquesta integral divergeix. Es pot trobar aplicant un factor de convergència

$$\lim_{\mu\to 0}\int d^3x\frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}}{x}e^{-\mu x} = \lim_{\mu\to 0}\frac{4\pi}{q^2+\mu^2} = \frac{4\pi}{q^2}$$

$$(T = mv^2/2)$$

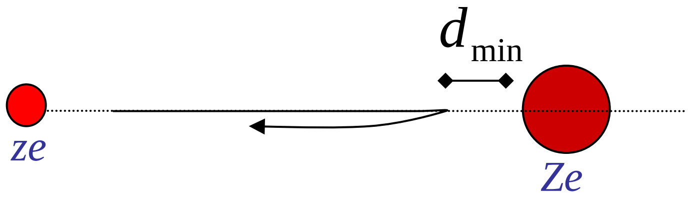
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f(\theta,\phi)\right|^2 = \frac{(zZe^2)^2m^2}{(2\pi)^2\hbar^4}\frac{(4\pi)^2}{q^4} = \frac{(zZe^2)^2m^2}{4p^4\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{zZe^2}{4T}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

(coincideix amb el que s'obté clàssicament!)

Dispersió Rutherford: resultats experimentals:

Utilitzant partícules alfa amb energia cinètica d'aproximadament 7.6 MeV sobre Au, no es van apreciar diferències amb la fórmula de càrregues puntuals de Rutherford.

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{4T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}}$$

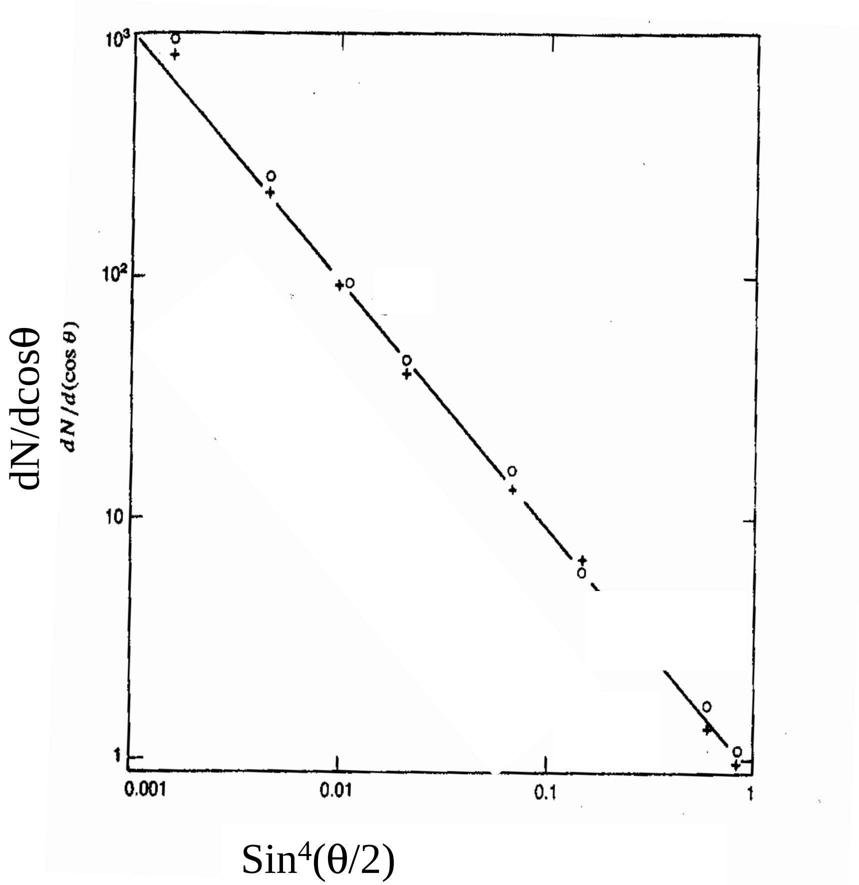


$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{zZe^2}{d_{min}} \quad \Rightarrow \quad d_{min} = \frac{zZe^2}{T}$$

Per Au (A=197, Z=79) i alfas de 7.6 MeV

$$d_{min} \approx 30\ fm$$

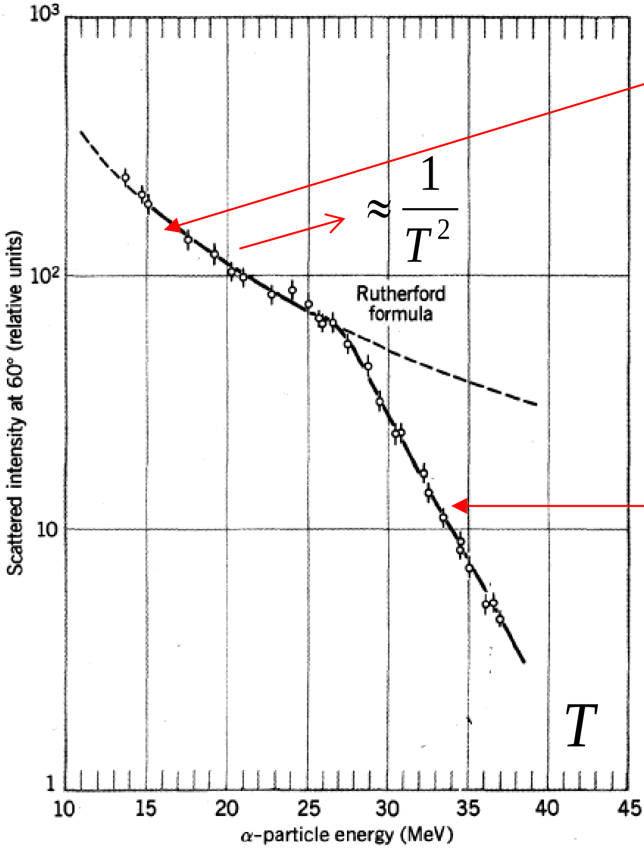
No "penetrem" en el nucli (10 fm)



Desviació de la dispersió Rutherford a alta energia
⇒ determina la distribució de càrrega del nucli

Per nuclis més lleugers (o amb alfes més energètiques) si que es podem apreciar diferències corresponents a distàncies màximes d'aproximació de 10 fm (es comencen a veure efectes d'una distribució de càrrega finita i efectes de la interacció forta):

$\alpha + Pb$

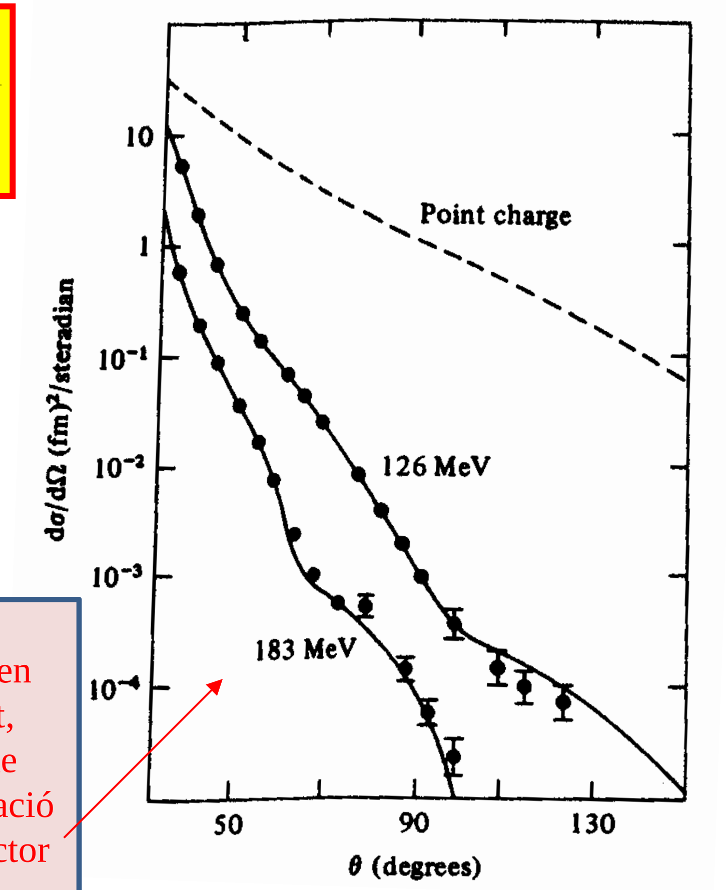


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Zze^2}{4T}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

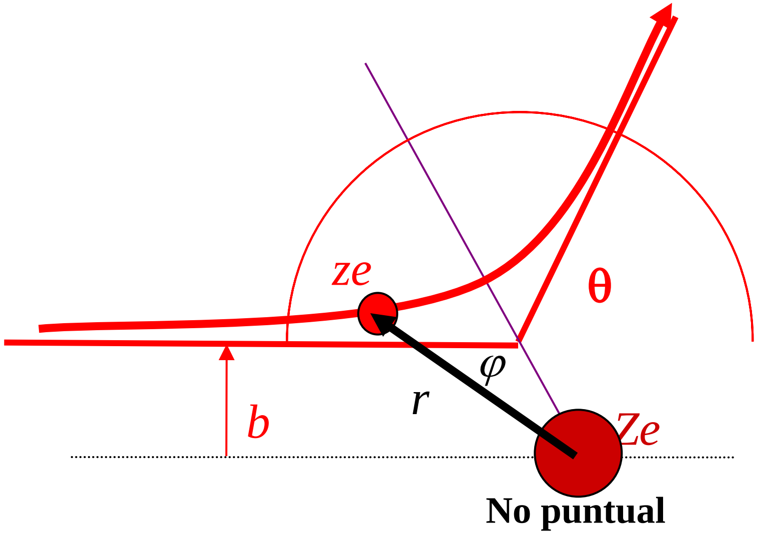
Decreix!!!! La força nuclear és atractiva

A estes energies, els electrons que interactuen electromagnèticament, senten la distribució de càrrega nuclear, informació que es transmet en el factor de forma

Electron - Gold



Dispersió Rutherford per nucli NO puntual



$$V_{\text{point}}(\vec{r}) = \frac{zZe^2}{|\vec{r}\,|} = zZe^2 \int dR^3 \frac{\delta(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}\,|}$$

Passant a una distribució finita de càrrega

$$V(\vec{r}) = zZe^2 \int d^3\vec{R}\, \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}\,|} \qquad \text{amb} \quad \int d^3\vec{R}\,\rho(\vec{R}) = 1$$

$$[V = ek\int \frac{dq}{r}] \qquad q = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$f^{B}_{\text{point}}(\theta,\phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}V(\vec{r})d^3r = -\frac{zZe^2m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}\,|}$$

$$f^{B}(\theta,\phi) = -\frac{zZe^2m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\int d^3R\,\frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}\,|} \qquad \{\vec{r},\vec{R}\} \to \{\vec{x}=\vec{r}-\vec{R},\vec{R}\}$$

$$f^{B}(\theta,\phi) = -\frac{zZe^2m}{2\pi\hbar^2}\int d^3R\rho(\vec{R})e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}\int d^3x e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}\,|} = \boxed{\int d^3R\rho(\vec{R})e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}}\, f^{B}_{\text{point}}(q)$$

$$\equiv F(q)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f_B(q)\right|^2 \qquad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{point}} |F(q)|^2}$$

Factor de forma del nucli
(transformada de Fourier de la distribució de càrrega)
← Concepte important.

Veiem doncs que utilitzant col·lisions de mes alta energia podrem tenir més informació sobre l'estructura (i també modes d'interacció) del blanc.

Per aquest motiu després de l'experiment de Rutherford s'han anat construint **acceleradors de partícules** cada vegada amb mes energia en el centre de masses de la col·lisió, per estudiar no només el nucli, però també el protó i altres partícules, i esbrinar quin son els elements fonamentals de la matèria i la forma en que interactuen.

Aquest acceleradors i detectors de partícules han permès estudiar les seccions eficaces diferencials fent col·lisions

$$e^- e^+$$

$$pp$$

$$p\bar{p}$$

$$e^- p$$

$$pN$$

$$NN$$

Veurem en el tema següent quines son les tècniques que utilitzen els acceleradors de partícules i com es detecten aquestes en els experiments anomenats "d'Alta Energia"

3. Unitats, dimensions i constants:

- **Longituds**:
  - Grandàries nuclears des de 1 fm fins a 7 fm
  - Grandàries en Física de Partícules: fins a ~10^{-5} fm

$$1 \text{ fermi (fm)} = 10^{-15} \text{ m}$$

- **Temps**: L'interval de variació és molt ampli, des de ~10^{-23} s dels processos forts fins a desintegracions (α, β, per exemple) amb vides mitjanes de fins a 10^9 anys.

Procés	**Duració**
Fragmentacióndels nuclis ^{5}He ó ^{8}Be	10^{-20} *s*
Reaccions nuclears (temps de trànsit nuclear)	
Desintegracions electromagnètiques (γ)	ps (10^{-12} s) - ns (10^{-9} s)
Desintegracions α, β	Fins a 10^9 anys
Desintegracions fortes (Física de Partícules)	10^{-23} s

- **Energies**:

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{eV} = 1.602 \times 10^{-13} \text{J}$$

[~ energía d'enllaç d´un nucleó]

Procés	**Valors**
Desintegracions α , β ,γ	~ MeV
Reaccions nuclears de baixa energía	1–100 MeV
Reaccions nuclears d'alta energía (Física de Partícules)	> 1GeV fins als 14 TeV (10^7 MeV), LHC

- **Masses**: Es mesuren en unitats de massa atòmica (u.m.a, ó u) ó MeV/c^2

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} M(^{12}C) = 931.494043 \text{ MeV}/c^2$$

Inclou els electrons atòmics !!!

$$m_e = 9{,}11 * 10^{-31} \ kg = 0.511 \ MeV / c^2$$

$$m_p = 1{,}67 * 10^{-27} \ kg = 938 \ MeV / c^2$$

Unitats Naturals (UN) o unitats de Planck:

- A més d'usar l'eV (i els seus múltiples) com a unitat d'energia, el sistema més convenient és el de les Unitats Naturals (UN):
- Constant de Plank reduïda → $\hbar = h/2\pi = 1$ adimensional.
- Velocitat de la llum → $c = 1$ adimensional.
- Facilitat per a escriure equacions
  - Relació entre energia, momentum i massa: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \Rightarrow E^2 = p^2 + m^2$
- Conversió entre el Sistema Internacional (MKS) y UN: $MKS: \quad M^p L^q T^r \qquad UN: \quad E^n$

$$[c] = M^0 L^1 T^{-1} \qquad [E] = M^1 L^2 T^{-2} \qquad [\hbar] = [E \cdot T] = M^1 L^2 T^{-1}$$

$$c = 1, \hbar = 1 \Rightarrow \begin{cases} L = T, M = L^{-1} = T^{-1} \\ [E] = [p] = M = L^{-1} = T^{-1} \end{cases}$$

  - Exemple: la secció eficaç té unitats de L^2.
    En UN té unitats de GeV^{-2}

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2}$$

	p	q	r	n
Acció	1	2	-1	0
Velocitat	0	1	-1	0
Massa	1	0	0	1
Longitud	0	1	0	-1
Temps	0	0	1	-1
Momentum	1	1	-1	1
Energía	1	2	-2	1

Constants físiques i factors de conversió

A recordar $\hbar c$

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	c	$299\,792\,458$ m s^{-1}	exact*
Planck constant	h	$6.626\,0693(11)\times10^{-34}$ J s	170
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	$1.054\,571\,68(18)\times10^{-34}$ J s	170
		$= 6.582\,119\,15(56)\times10^{-22}$ MeV s	85
electron charge magnitude	e	$1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}$ C $= 4.803\,204\,41(41)\times10^{-10}$ esu	85, 85
conversion constant	$\hbar c$	$197.326\,968(17)$ MeV fm	85
conversion constant	$(\hbar c)^2$	$0.389\,379\,323(67)$ GeV^2 mbarn	170
electron mass	m_e	$0.510\,998\,918(44)$ MeV$/c^2 = 9.109\,3826(16)\times10^{-31}$ kg	86, 170
proton mass	m_p	$938.272\,029(80)$ MeV$/c^2 = 1.672\,621\,71(29)\times10^{-27}$ kg	86, 170
		$= 1.007\,276\,466\,88(13)$ u $= 1836.152\,672\,61(85)\,m_e$	0.13, 0.46
deuteron mass	m_d	$1875.612\,82(16)$ MeV$/c^2$	86
unified atomic mass unit (u)	(mass ^{12}C atom)/12 $= (1\text{ g})/(N_A\text{ mol})$	$931.494\,043(80)$ MeV$/c^2 = 1.660\,538\,86(28)\times10^{-27}$ kg	86, 170
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\,187\,817\ldots\times10^{-12}$ F m^{-1}	exact
permeability of free space	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$ N A$^{-2} = 12.566\,370\,614\ldots\times10^{-7}$ N A^{-2}	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	$7.297\,352\,568(24)\times10^{-3} = 1/137.035\,999\,11(46)^\dagger$	3.3, 3.3
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	$2.817\,940\,325(28)\times10^{-15}$ m	10
(e^- Compton wavelength)$/2\pi$	$\lambda\!\!\!^{-}_e = \hbar/m_e c = r_e\alpha^{-1}$	$3.861\,592\,678(26)\times10^{-13}$ m	6.7
Bohr radius ($m_{\text{nucleus}} = \infty$)	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2 = r_e\alpha^{-2}$	$0.529\,177\,2108(18)\times10^{-10}$ m	3.3
wavelength of 1 eV$/c$ particle	$hc/(1\text{ eV})$	$1.239\,841\,91(11)\times10^{-6}$ m	85
Rydberg energy	$hcR_\infty = m_e e^4/2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 = m_e c^2\alpha^2/2$	$13.605\,6923(12)$ eV	85
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2/3$	$0.665\,245\,873(13)$ barn	20
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$5.788\,381\,804(39)\times10^{-11}$ MeV T^{-1}	6.7
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	$3.152\,451\,259(21)\times10^{-14}$ MeV T^{-1}	6.7
electron cyclotron freq./field	$\omega^e_{\text{cycl}}/B = e/m_e$	$1.758\,820\,12(15)\times10^{11}$ rad s^{-1} T^{-1}	86
proton cyclotron freq./field	$\omega^p_{\text{cycl}}/B = e/m_p$	$9.578\,833\,76(82)\times10^{7}$ rad s^{-1} T^{-1}	86
gravitational constant‡	G_N	$6.6742(10)\times10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}	1.5×10^5
		$= 6.7087(10)\times10^{-39}\,\hbar c\,(\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^5
standard gravitational accel.	g_n	$9.806\,65$ m s^{-2}	exact
Avogadro constant	N_A	$6.022\,1415(10)\times10^{23}$ mol^{-1}	170
Boltzmann constant	k	$1.380\,6505(24)\times10^{-23}$ J K^{-1}	1800
		$= 8.617\,343(15)\times10^{-5}$ eV K^{-1}	1800
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k(273.15\text{ K})/(101\,325\text{ Pa})$	$22.413\,996(39)\times10^{-3}$ m^3 mol^{-1}	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\max}T$	$2.897\,7685(51)\times10^{-3}$ m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4/60\hbar^3 c^2$	$5.670\,400(40)\times10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	7000
Fermi coupling constant**	$G_F/(\hbar c)^3$	$1.166\,37(1)\times10^{-5}$ GeV^{-2}	9000
weak-mixing angle	$\sin^2\hat\theta(M_Z)$ ($\overline{\text{MS}}$)	$0.23122(15)^{\dagger\dagger}$	6.5×10^5
$W^\pm$ boson mass	m_W	$80.403(29)$ GeV$/c^2$	3.6×10^5
Z^0 boson mass	m_Z	$91.1876(21)$ GeV$/c^2$	2.3×10^4
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	$0.1176(20)$	1.7×10^7

$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238$ $\quad$ $e = 2.718\,281\,828\,459\,045\,235$ $\quad$ $\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,861$

1 in $\equiv 0.0254$ m	1 G $\equiv 10^{-4}$ T	1 eV $= 1.602\,176\,53(14)\times10^{-19}$ J	kT at 300 K $= [38.681\,684(68)]^{-1}$ eV
1 Å $\equiv 0.1$ nm	1 dyne $\equiv 10^{-5}$ N	1 eV$/c^2 = 1.782\,661\,81(15)\times10^{-36}$ kg	0 °C $\equiv 273.15$ K
1 barn $\equiv 10^{-28}$ m^2	1 erg $\equiv 10^{-7}$ J	$2.997\,924\,58\times10^9$ esu $= 1$ C	1 atmosphere $\equiv 760$ Torr $\equiv 101\,325$ Pa

Sistema Internacional (SI)

SI prefixes		
10^{24}	yotta	(Y)
10^{21}	zetta	(Z)
10^{18}	exa	(E)
10^{15}	peta	(P)
10^{12}	tera	(T)
10^{9}	giga	(G)
10^{6}	mega	(M)
10^{3}	kilo	(k)
10^{2}	hecto	(h)
10	deca	(da)
10^{-1}	deci	(d)
10^{-2}	centi	(c)
10^{-3}	milli	(m)
10^{-6}	micro	(μ)
10^{-9}	nano	(n)
10^{-12}	pico	(p)
10^{-15}	femto	(f)
10^{-18}	atto	(a)
10^{-21}	zepto	(z)
10^{-24}	yocto	(y)

Physical quantity	Name of unit	Symbol
Base units		
length	meter	m
mass	kilogram	kg
time	second	s
electric current	ampere	A
thermodynamic temperature	kelvin	K
amount of substance	mole	mol
luminous intensity	candela	cd
Derived units with special names		
plane angle	radian	rad
solid angle	steradian	sr
frequency	hertz	Hz
energy	joule	J
force	newton	N
pressure	pascal	Pa
power	watt	W
electric charge	coulomb	C
electric potential	volt	V
electric resistance	ohm	Ω
electric conductance	siemens	S
electric capacitance	farad	F
magnetic flux	weber	Wb
inductance	henry	H
magnetic flux density	tesla	T
luminous flux	lumen	lm
illuminance	lux	lx
celsius temperature	degree celsius	°C
activity (of a radioactive source)*	becquerel	Bq
absorbed dose (of ionizing radiation)*	gray	Gy
dose equivalent*	sievert	Sv

Taula periòdica dels elements químics

PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS

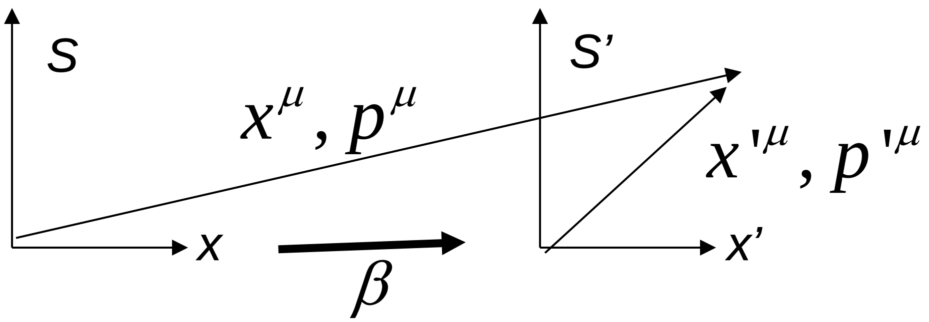
1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIII	10	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1 H Hydrogen 1.00794																	2 He Helium 4.002602
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182											5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.0067	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	10 Ne Neon 20.1797
11 Na Sodium 22.989770	12 Mg Magnesium 24.3050											13 Al Aluminum 26.981538	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973761	16 S Sulfur 32.065	17 Cl Chlorine 35.453	18 Ar Argon 39.948
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955910	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938049	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933200	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.39	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.64	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.80
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.94	43 Tc Technet. (97.907216)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.293
55 Cs Cesium 132.90545	56 Ba Barium 137.327	57–71 Lantha-nides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.9479	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.078	79 Au Gold 196.96655	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98038	84 Po Polonium (208.982430)	85 At Astatine (209.987148)	86 Rn Radon (222.017578)
87 Fr Francium (223.019736)	88 Ra Radium (226.025410)	89–103 Actinides	104 Rf Rutherford. (261.10877)	105 Db Dubnium (262.1141)	106 Sg Seaborg. (263.1221)	107 Bh Bohrium (262.1246)	108 Hs Hassium (277.1498)	109 Mt Meitner. (268.1387)	110 Ds Darmstadt. (271.1461)	111 Rg Roentgen. (272.1536)	112 (277.1639)						

Lanthanide series														
57 La Lanthan. 138.9055	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.24	61 Pm Prometh. (144.912749)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92534	66 Dy Dyspros. 162.50	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.259	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.04	71 Lu Lutetium 174.967

Actinide series														
89 Ac Actinium (227.027752)	90 Th Thorium 232.038055	91 Pa Protactin. 231.035884	92 U Uranium 238.02891	93 Np Neptunium (237.048173)	94 Pu Plutonium (244.064204)	95 Am Americ. (243.061381)	96 Cm Curium (247.070354)	97 Bk Berkelium (247.070307)	98 Cf Californ. (251.079587)	99 Es Einstein. (252.08298)	100 Fm Fermium (257.095105)	101 Md Mendelev. (258.098431)	102 No Nobelium (259.1010)	103 Lr Lawrenc. (262.1096)

Cinemàtica relativista: Boost de Lorentz. Quadrivectors.

Siguen dos sistemes de referència inercials S i S’ tal que el segon es mou a velocitat β=v/c (anomenat “*boost*”) sobre l’eix X respecte del primer i tal que en t=0 ambdós orígens coincideixen (figura): els quadri-vectors tenen expressions diferents en els dos sistemes inercials.



$$x^\mu \to x'^\mu$$

$$p^\mu \to p'^\mu$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\upsilon}}{c} = \frac{\vec{p}}{E}$$

Un punt espai-temporal tindrà en estos dos sistemes les coordenades $x^\mu \to x'^\mu$ que vindran relacionades per les transformacions de Lorentz:

$$\boxed{\begin{aligned} t &\to t' = \gamma(t - \beta x / c) \\ x &\to x' = \gamma(x - \beta tc) \\ y &\to y' = y \\ z &\to z' = z \end{aligned}} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

β→[0,1]
γ→[0, ∞]

En general una magnitud $A^\mu = (a_o, a_x, a_y, a_z) = (a_0, \vec{a})$ és un quadrivector si baix una transformació d’un “*boost*” (amb ***v* || *x***) es transforma com:

$$a'_0 = \gamma(a_0 - \beta a_x), \quad a'_x = \gamma(a_x - \beta a_0), \quad a'_y = a_y, \quad a'_z = a_z$$

Les components espacials perpendiculars al “*boost*” romanen inalterades.

Com per exemple el quadrivector momentum-energia $p^{\mu} \to p'^{\mu}$ les components del qual i la seua transformació és:

$$\boxed{\begin{aligned} E &\to E' = \gamma\left(E - \beta p_x / c\right) \\ p_x &\to p'_x = \gamma\left(p_x - \beta E c\right) \\ p_y &\to p'_y = p_y \\ p_z &\to p'_z = p_z \end{aligned}}$$

$$p^{\mu} \to p'^{\mu}$$

Exemples de quadrivectors i les seues components:

$$x^{\mu} = (ct, \vec{x}), \quad v^{\mu} = \gamma(c, \vec{v}), \quad p^{\mu} = (E / c, \vec{p})$$

Observe's que quan la velocitat v →0, les transformacions de Lorenz es redueixen a les de Galileo clàssiques. Les transformacions de Lorentz tenen estructura de grup i el producte de transformacions es així mateix una altra transformació de Lorentz.

Producte escalar. Invariants relativistes Lorentz.

El tensor mètric $g = g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ és diagonal i és:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Que ens permet definir productes escalars entre els qaudri-vectors :

$$A^{\mu} = (a_{o,} a_x, a_y, a_z) = (a_{0,} \vec{a}) \quad \text{i} \quad B^{\mu} = (b^0, \vec{b})$$

$$\boxed{A \cdot B = a^{\mu} b^{\nu} g_{\mu\nu} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}}$$

On la part espacial del producte escalar és $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos\theta$

Tots els productes escalars de quadrivectors $A^2 = A \cdot A$ són un invariant sota les transformacions relativistes de Lorentz: tenen el mateix valor en **TOTS** els sistemes de referència inercials(LAB,CM,...). Exemples molt útils:

Massa en repòs $p^2 = p^{\mu} p_{\mu} = E^2 / c^2 - \vec{p}^{\,2} \equiv m_0^2 c^2$

Temps propi $x^2 = x^{\mu} x_{\mu} = c^2 t^2 - \vec{x}^{\,2} \equiv c^2 \tau^2$ $\longrightarrow$ Si la partícula està en repòs en un punt espacial, per exemple en $\vec{x} = 0$, el seu temps de vida rep el nom de **temps propi τ** que és un **invariant.**

Un 4-vector amb norma L^2 es classifica com:

Time-like si $L^2 > 0$

Space-like si $L^2 < 0$

Light-like si $L^2 = 0$

Exemples

Considerem un protó amb un momentum de 10 GeV/c en el sistema del LAB

1) Quina és la seua energia en el sistema LAB? Prenem per senzillesa $\boxed{c = 1}$

$$m_o^{\,2} = E^2 - \vec{p}^{\,2} \qquad\qquad m_o = 938\ \mathrm{MeV/c^2}$$

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_o^{\,2}} = \sqrt{10^2 + 0.938^2} = 10.044\,\mathrm{GeV}$$

Veiem que quan es treballa a altes energies ($E \gg m_o c^2$) $E \approx |\boldsymbol{p}|$ el momentum i l'energia coincideixen, cosa que no ocorre a baixes energies.

2) Quina és la seua velocitat en el sistema LAB?

$$E_{lab} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma m_0 c^2 \qquad p_{lab} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma\beta m_0 c \qquad \beta = v/c,\ \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$p_{lab} / E_{lab} = \gamma\beta m_0 c \ / \gamma m_0 c^2 = \beta = 10/10.044 = 0.996$$

$v = 0.996c$ (a prop de la velocitat de la llum!)
El protó de 10 GeV disposa d'una energia 10 vegades la seua massa i per tant és relativista.

Per a un electró de 2 MeV en el LAB, v=0.969c, mentre que v=0.0021c per al protó, és a dir, els electrons són relativistes a baixes energies mentre que els protons necessiten altes energies, donat que la massa de l'electró és ~2000 vegades menor que la del protó.

Invariants Lorentz i magnituds conservades:

Magnituds invariants Lorentz.

Les magnituds que són invariants de Lorentz tenen exactament el mateix valor en dos sistemes de referència inercials diferents (el que ocorre per a tots els productes escalars):

- Siga E_{LAB} i $\boldsymbol{p}_{LAB}$ l'energia i el momentum d'una partícula determinades en el sistema LAB.
- Siga E_{CM} i $\boldsymbol{p}_{CM}$ l'energía i el momentum de la dita partícula, ara però determinats en el sistema CM.
- Aleshores $p^2_{CM} = E^2_{CM} - \boldsymbol{p}^2_{CM} = E^2_{LAB} - \boldsymbol{p}^2_{LAB} = p^2_{LAB}$, doncs$(E, \boldsymbol{p})^2$ és un invariant de Lorentz:

De fet: $$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$ on m és la massa en repòs de la partícula.

Magnituds conservades.

Es diu que una **magnitud és conservada** si sempre té el mateix valor en el mateix sistema de referència però **en temps diferents:** Siga un sistema de dos partícules que interaccionen:

- Siga $p_{i,LAB}$ el quadri-momentum total inicial en el LAB (abans de la col·lisió)
- Siga $p_{f,LAB}$ el quadri-momentum total final en el LAB (després de la col·lisió)
- Siga $p_{i,CM}$ el quadri-momentum total inicial en el CM: $p_{i,CM} = (E_{1,CM}+E_{2,CM},\vec{0})$ (abans de la col·lisió)
- Siga $p_{f,CM}$ el quadri-momentum total final del CM (després de la col·lisió): $p_{f,CM} = (E_{1,CM}+E_{2,CM}+\ldots,\vec{0})$ (després).
- La conservació del quadri-momentum ens diu que:

$\boldsymbol{p}_{i,LAB} = \boldsymbol{p}_{f,LAB}$ i $\boldsymbol{p}_{i,CM} = \boldsymbol{p}_{f,CM}$ PERÒ NO $\boldsymbol{p}_{i,LAB} = \boldsymbol{p}_{f,CM}$, doncs els quadri-moments es transformen mitjançant les transformacions de Lorentz.

Col·lisió de feixos front a col·lisions amb un blanc fix

$c = 1$

•La producció de noves partícules en una col·lisió depén de l'energia disponible en el CM, doncs en el sistema LAB, per exemple, l'energia s'usa en part per a crear partícules i en l'energia cinètica del centre de masses.

•Quina és l'energia disponible en el CM per a una col·lisió d'un anti-protó de 10 GeV/c amb un protó en repòs? Calculem la variable s (de Mandelstam) que dona el quadrat de l'energia en CM:

$$(p_{1,CM} + p_{2,CM})^2 = (E_{1,CM} + E_{2,CM}, \vec{0})^2 = E_{CM}^2 \equiv s$$

• Com s=(p_1+p_2)^2 és un **invariant Lorentz** el podem calcular en qualsevol sistema de referència. El calcularem ara en el sistema LAB:

$$s = (p_{1,LAB} + p_{2,LAB})^2 = (E_{1,LAB} + m_p)^2 - \vec{p}_{1,LAB}^{\,2} = 2m_p^2 + 2m_p E_{1,LAB} = 20.6\ \mathrm{GeV}^2$$

•Per ser s invariant i representar l'energia en CM → l'energia total en el CM és 4.54 GeV

• Podríem obtindre la mateixa energia fent col·lidir un feix d'antiprotons de 2.27 GeV amb un feix de protons també de la mateixa energia (2,27 GeV).

$$s = (p_{1,LAB} + p_{2,LAB})^2 = (E_{LAB} + E_{LAB}, \vec{p}_{LAB} - \vec{p}_{LAB})^2 = (2E_{LAB})^2 \ = 20{,}6\ \mathrm{GeV}^2$$

• Així doncs, l'energia "útil", disponible per a la producció de noves partícules s'incrementa com:

$(2m_{\mathrm{target}}E_{\mathrm{beam}})^{1/2}$ per a experiments amb el blanc fixe.

$2E_{\mathrm{beam}}$ per a experiments de col·lisió de feixos (amb $\vec{p}_{tot} = 0$, és a dir, en CM).

La col·lisió de feixos en CM és molt més eficient per a la producció de noves partícules pesades.

Cinemàtica relativista en les col·lisions entre partícules.

• **Consideracions principals:** Per a resoldre problemes en que hem d'usar cinemàtica relativista s'han de fer les consideracions prèvies que puguen simplificar els càlculs, com ara:

- La conservació energia-momentum → sol ser un ingredient bàsic en els càlculs.
- Els invariants Lorentz → solen simplificar el plantejament matemàtic.

  Energia al CMS, momentum transferit,....

  Cal escollir el sistema de referència que simplifique els càlculs.

• Siga ara el cas general d'una col·lisió de partícules a+b→c+d+e+f... En el cas en que no hi ha forces exteriors al sistema s'ha de conservar l'energia global i el momentum. Estes **magnituds conservades** venen definides pel quadri-momentum energia –momentum p:

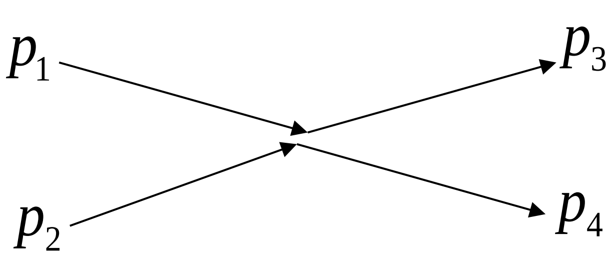
$$p_{tot} = p_a + p_b = p_c + p_d + p_e + p_f + \dots$$

•Magnituds **que es conserven** sempre abans i després de la interacció, però valors que no són iguals en diferents sistemes inercials, com ara el sistema CM i el LAB.

•Podem utilitzar també **magnituds invariants**, és a dir, aquelles que tenen el mateix valor en sistemes inercials distints. En general ho són tots els productes escalars. Així:

$$s = E_{CM}^2 = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d + p_e + p_f + \dots)^2$$

• Considerem el cas més senzill en que en l'estat final hi ha tan sols dos partícules 2→2 (veure figura):



$$p_{tot} = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

Conservació Energia – momentum en tot sistema

$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

Magnituds invariants *en sistemes* distints

•Altres magnituds invariants d'us habitual són les variables de Mandelstam, *s*, *t* i *u* que es defineixen:

$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

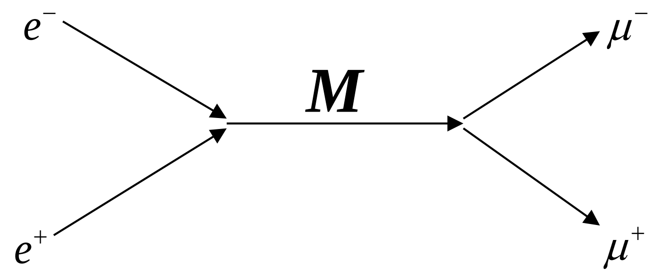
Es pot demostrar que en este cas 2→2:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

que són utilitzades per exemple en els càlculs dels diagrames de Feynman (diagrames d'encreuament).

• **Exemple**: Considerem per exemple l'aniquilació partícula-antipartícula com es veu al diagrama.

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = (E/c, \vec{p})_{tot} \quad en\ el\ LAB$$



Magnituds conservades en cada sistema (no iguals en sistemes diferents) i que en sistema de CM es podran escriure com:

$$p_{tot} = p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{0}) = (M, \vec{0}) \Rightarrow$$
$$s = E_{CM}^2 = (p_1 + p_2)^2 = M^2 \quad > 0 \ Time-like\,vector$$

On hem aplicat la invariància dels productes escalars. Considerant ara la conservació en el sistema de referència de CM:

$$p_{tot} = (M, \vec{0}) = p_3 + p_4 \Rightarrow \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \quad Per\ conservació\ del\ momentum$$

I si les dos partícules finals tenen la mateixa massa: ***E*$_3$ *=E*$_4$ *=M/2***

Exemple: descobriment de l'antiprotó

- A principis dels 1950´s molts laboratoris intentaven trobar evidència de l'existència de l'antiprotó.

•Si assumim col·lisions d'un feix de protons amb un blanc fix de protons, quina hauria de ser l'energia mínima del feix per a poder crear antiprotons?

• La reacció més senzilla que conserva totes les quantitats necessàries (energia, moment, càrrega elèctrica, número bariònic) és:

$$pp \rightarrow p\bar{p}pp$$

• Com s es un invariant Lorentz i a més P_{total} es conserva en cada sistema, podem escriure

$$s = E_{CM}^2 = \left(p_{feix} + p_{blanc}\right)^2 = \left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right)^2$$

• El primer terme pot ser calculat al sistema laboratori i el segon en el CM per ser invariants:

$$s = E_{CM}^2 = \left(p_{feix} + p_{blanc}\right)^2 = (E_p + m_p, \vec{p}_{p,inc})^2 = (E_p + m_p)^2 - \vec{p}_{p,inc}^{\,2} =$$

$$E_p^2 + m_p^2 + 2m_pE_p - \vec{p}_{p,inc}^{\,2} = 2m_p^2 + 2m_pE_p$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)^2 = (E_1 + E_2 + E_3 + E_4)^2 \geq (4m_p)^2$$

• La mínima energia necessària del feix serà aquella per a la qual les 4 partícules finals en el sistema CM estiguen totes en repòs i per tant:

$$2m_p^2 + 2E_pm_p = (4m_p)^2 \quad \Rightarrow \quad E_p = 7m_p = 6.6 \text{ GeV}$$

• L'anti-protó va ser descobert en Berkeley en 1955 (Nobel Prize 1959)

Exercici: La reacció que va permetre descobrir l'antiprotó a l'històric experiment de Segrè va ser:

$$p + p \rightarrow \bar{p} + p + p + p$$

a. Calcular l'energia **cinètica T_p mínima** del protó incident en el sistema laboratori.

b. Quin és el valor d'esta **energia cinètica** en el centre de masses, T_p(cm), de cada protó?

c. En què s'inverteix l'excés d'**energia cinètica** en el sistema del laboratori? Demostre la seua afirmació.

$$E = \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4} = T_c + mc^2$$

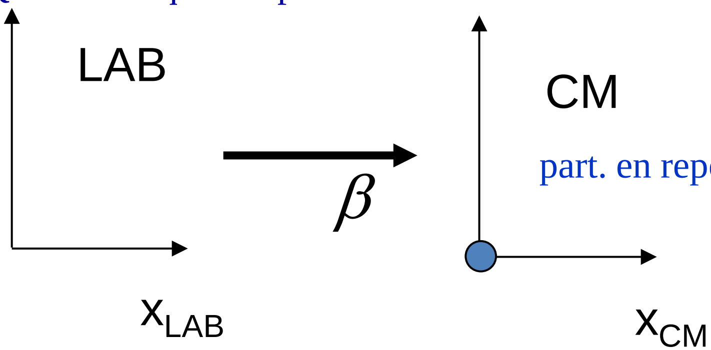
Dilatació del temps

- La major part de les partícules no són estables. Per exemple en els leptons:

Leptó	**t : Vida Mitjana (s)**
electró	estable
muó (μ)	$\approx 2\mathrm{x}10^{-6}$
taó (τ)	$\approx 3\mathrm{x}10^{-13}$

On la vida mitjana dada és la que correspon al sistema de referència en repòs de la partícula (temps propi).

- Què ocorre quan la partícula està en moviment respecte del nostre sistema de referència?



$$t_{LAB} = \gamma(t_{CM} + \beta x_{CM} / c)$$
$$x_{LAB} = \gamma(x_{CM} + \beta c t_{CM})$$

Suposem que el μ apareix i es desintegra a l'origen de coordenades del sistema CM: $x_{2,CM}=x_{1,CM}=0$

En el sistema LAB el temps fins a la desintegració de la partícula seria:

$$\tau_{LAB} = t_{2,LAB} - t_{1,LAB} = \gamma(t_{2,CM} + \beta x_{2,CM} / c) - \gamma(t_{1,CM} + \beta x_{1,CM} / c) = \gamma(t_{2,CM} - t_{1,CM}) = \gamma\tau$$

Per tant, $\tau_{lab} > \tau$ ⇨ Dilatació del temps partícules en moviment

- **Exemple**: Considerem un muó (m_o=0.106 GeV/c^2) amb energia 1 GeV en el LAB. Quina serà la seua vida mitjana observada en el LAB, i quin serà l'espai recorregut en promedi?

$\gamma = E/(m_o c^2) = 1/0.106 \approx 10, \quad \gamma\beta = p/(m_0 c) \approx 1/0.106 \approx 10$

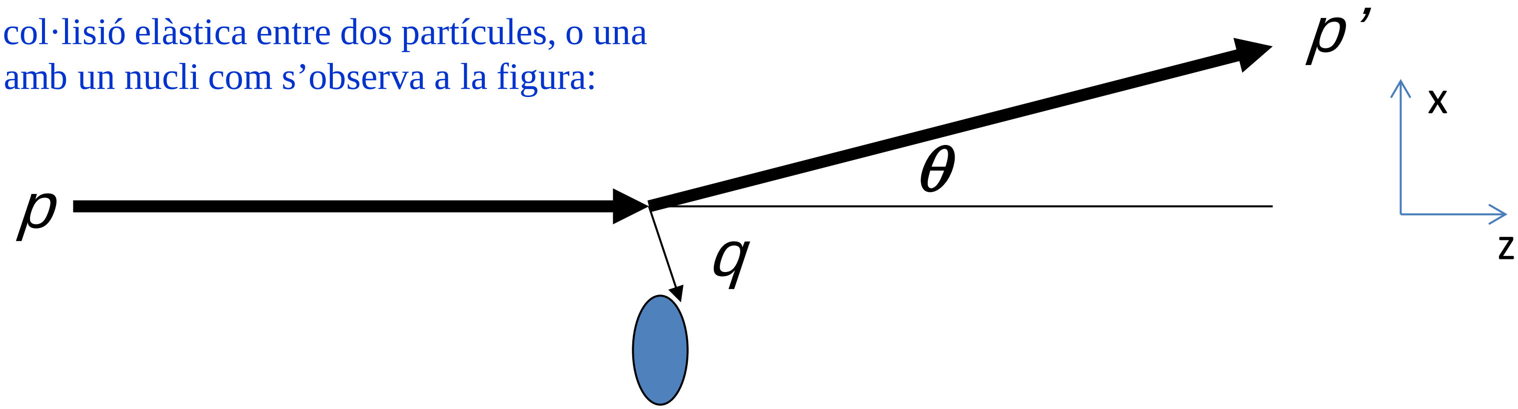
$\boldsymbol{\tau_{lab} = \gamma\tau = (10)(2\ \mu sec) = 20\ \mu sec}$

$\boldsymbol{\Delta x_{lab} = \gamma\beta c\tau = 10c\tau = (10)(3\mathrm{x}10^8\ m/s)(2\mathrm{x}10^{-6}\ s) = 6\mathrm{x}10^3\ m}$

Calculeu la contracció espacial en el sistema en que el μ es troba en repòs i es l'atmosfera la que està en moviment.

Transferència de momentum en la dispersió elàstica:

Siga una col·lisió elàstica entre dos partícules, o una partícula amb un nucli com s'observa a la figura:



Representem per q el quadri-momentum transferit al nucli i per p' el quadri-momentum de la partícula difosa elàsticament. Usant les variables de Mandelstam: $t = q = (p' - p)$ on a més:

$$p = (E, 0, 0, \vec{p}) = (\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_0^2}, 0, 0, \vec{p}) \quad i \quad p' = (\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m_0^2}, |\vec{p}|\sin\theta, 0, |\vec{p}|\cos\theta)$$

$$q = p' - p = (0, |\vec{p}|\sin\theta, 0, |\vec{p}|(\cos\theta - 1)) \rightarrow$$

$$q^2 = -|\vec{p}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta + 1 - 2\cos\theta) = 2|\vec{p}|^2(\cos\theta - 1)$$

$$= -4|\vec{p}|^2 \sin^2(\theta/2)$$

< 0 → Space-like!

El quadri-momentum transferit és un vector del tipus espacial.

Apèndix B. Repàs de moment angular. Coeficients de Clebsch-Gordan

Operadors de moment angular

Un operador de moment angular j es definix com un conjunt de tres operadors (j_x, j_y, j_z), , que satisfà les relacions cícliques de commutació

$$[j_x, j_y] = ij_z, \quad [j_y, j_z] = ij_x, \quad [j_z, j_x] = ij_y$$

A partir d'estes relacions es verifica que $[\mathbf{j}^2, j_z] = 0 \qquad \mathbf{j}^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$

pel que és possible trobar un conjunt complet de funcions pròpies de de $\mathbf{j}$ y j_z . Estes auto-funcions depenen de l'espai en què els operadors de moment angular actuen, i normalment són auto-funcions linealment independents amb el mateix autovalor. La degeneració es trenca introduint observables addicionals, $\mathbf{\Gamma}$, de manera que les auto-funcions de $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{j}$, y j_z estan completament determinades pels corresponents números quàntics.

Utilitzant les relacions de commutació

$$\mathbf{j}^2 \left| \gamma jm \right\rangle = j(j+1) \left| \gamma jm \right\rangle, \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, 2, \ldots$$

$$j_z \left| \gamma jm \right\rangle = m \left| \gamma jm \right\rangle, \qquad m = -j, -j+1, \ldots, j$$

$$(j_x \pm ij_y) \left| \gamma jm \right\rangle = e^{i\delta} [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} \left| \gamma jm \pm 1 \right\rangle$$

$e^{i\delta}$ és una fase arbitrària que normalment es pren 1 (convenció de Condon i Shortley)

Moment angular orbital

El moment angular orbital es descriu mitjançant l'operador:

$$\mathbf{l} = -i\mathbf{r} \times \nabla$$

Les auto-funcions simultànies de $\mathbf{l}^2$ y l_z són els harmònics esfèrics $Y_{lm_l}(\theta,\phi)$

$$Y_{lm_l}(\theta,\phi) = (-1)^{m_l}\left[\frac{(2l+1)(l-m_l)}{4\pi(l+m_l)}\right]^{1/2} P_l^{m_l}(\cos\theta)e^{im_l\phi}$$

$$Y_{l-m_l}(\theta,\phi) = (-1)^{m_l} Y_{lm_l}(\theta,\phi)$$

$P_l^{m_l}(\cos\theta)$ Polinomis associats de Legendre

Per a que els harmònics esfèrics siguen únics, m_l i per tant l
Han de ser enters, de manera que

$$\mathbf{l}^2 Y_{lm_l}(\theta,\phi) = l(l+1)Y_{lm_l}(\theta,\phi)$$

$$l_z Y_{lm_l}(\theta,\phi) = m_l Y_{lm_l}(\theta,\phi)$$

$$l = 0,1,2,\ldots \qquad m_l = -l,-l+1,\ldots,l$$

Table: Spherical harmonics

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{2\pm2}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm i2\varphi}$$

$$Y_{2\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_{20}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

NOTA: El moment angular orbital s'origina sempre que tenim un sistema de dos o més partícules (elementals, nucleons, nuclis, etc.) independentment del moment angular d'espín que elles exhibeixen.

Moment angular d'espín

A més del moment angular orbital, les partícules tenen moment angular d'espín. L'espín és un moment angular intrínsec (introduït empíricament en 1925 per Uhlenbeck i Goudsmit i posteriorment demostrat per Dirac com una conseqüència de les propietats relativistes de l'electró) que implica que la partícula no està només caracteritzada per les seues coordenades espacials sinó que té un grau de llibertat més.

Les auto-funcions simultànies de $\mathbf{s}^2$ y s_z es denoten $\chi_{m_s}(\sigma)$

σ: coordenada d'espín

$$\mathbf{s}^2\chi_{m_s}(\sigma) = s(s+s)\chi_{m_s}(\sigma) \qquad s_z\chi_{m_s}(\sigma) = m_s\chi_{m_s}(\sigma) \qquad \chi_{m_s}(\sigma)=\delta_{m_s\sigma}$$

Per a espín ½ (com l'electró), σ=±1/2, la funció d'ones total serà:

$$\phi(\mathbf{r},\sigma) = \phi_1(\mathbf{r})\chi_{1/2}(\sigma) + \phi_2(\mathbf{r})\chi_{-1/2}(\sigma) \qquad \sum_{\sigma=\pm 1/2} |\phi(\mathbf{r},\sigma)|^2\, dr = 1$$

$$|\phi(\mathbf{r},1/2)|^2\, dr = |\phi_1(\mathbf{r})|^2\, dr$$

$$|\phi(\mathbf{r},-1/2)|^2\, dr = |\phi_2(\mathbf{r})|^2\, dr$$

Probabilitat de trobar la partícula en l'element de volum dr centrat en r amb espín up i espín down.

Acoblament de dos moments angulars

Dos moments angulars $\mathbf{j}_1$ y $\mathbf{j}_2$ actuant sobre diferents parts d'un sistema, per exemple dos electrons, o la part espacial i d'espí de l'electró, s'acoblen per a formar un:

operador de moment angular total: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$

Els operadors $\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{j}_1^2, \mathbf{j}_2^2, \mathbf{j}^2, j_z$ defineixen un conjunt complet d'observables que commuten. Les autofuncions simultànies $\left|\gamma_1\gamma_2 j_1 j_2 JM\right\rangle$ corresponents a este conjunt s'obtenen a partir de la combinació lineal

$$\left|\gamma_1\gamma_2 j_1 j_2 JM\right\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1+m_2=M}} \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle \left|\gamma_1 j_1 m_1\right\rangle \left|\gamma_2 j_2 m_2\right\rangle$$

$\left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle$ són els coeficients de Clebsch-Gordan, i són tremendament importants ja que ens donen la intensitat de l'acoblament de les diferents components de moment angular.

Amb les convencions de fase habituals, els coeficients de CG són reals i defineixen una matriu unitària. Per tant, es verifiquen les següents relacions d'ortonormalitat:

$$\sum_{m_1, m_2} \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 J'M'\right\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}$$

$$\sum_{J, M} \left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle \left\langle j_1 j_2 m'_1 m'_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle = \delta_{m_1 m'_1}\delta_{m_2 m'_2}$$

A més, els coeficients de CG tenen la següent important propietat de simetria:

$$\left\langle j_1 j_2 m_1 m_2 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle = (-1)^{j_1+j_2-j_3} \left\langle j_2 j_1 m_2 m_1 \middle| j_1 j_2 JM\right\rangle$$

Coeficients de Clebsch-Gordan

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	...
		M	M	...
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
.	.			
.	.			
.	.			

$1/2 \times 1/2$

m_1	m_2	$J=1$, $M=+1$
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	1

$1 \times 1/2$

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+3/2$
+1	+1/2	1

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+1	+1	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	1

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$2 \times 1/2$

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−2	−1/2	1

$3/2 \times 1/2$

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−3/2	−1/2	1

$3/2 \times 1$

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+3/2	+1	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−3/2	−1	1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{j}_{m,m'} = d^{j}_{-m,-m'}$$

$$d^{1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

3/2×3/2

		3
		+3
+3/2	+3/2	1

		3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

		3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

		3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

		7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

		7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

		7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

		7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

		7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

		7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

		7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

2×2

		4
		+4
+2	+2	1

		4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

		4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

		4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

		4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

		4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

		4
		−4
−2	−2	1

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{2}_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{2}_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\,\cos\theta$$

$$d^{2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{2}_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Operadors tensorials esfèrics

Els operadors de moment angular no sols s'usen per a classificar funcions d'ona (auto-funcions) , sinó també són operadors que actuen sobre estes funcions.

Si T denota un operador genèric actuant sobre l'espai de les auto-funcions de l'operador de moment angular **j**, definim un operador tensorial esfèric de rang k, $\mathbf{T}^{(k)}$, com el conjunt de 2k+1 operadors $\left\{T_q^{(k)}; q=-k,-k+1,\ldots,k\right\}$ que satisfan les següents relacions de commutació:

$$[j_z, T_q^{(k)}] = qT_q^{(k)}$$

$$[j_\pm, T_q^{(k)}] = [k(k+1)-q(q\pm 1)]^{1/2} T_{q\pm 1}^{(k)}$$

$$j_\pm = j_x \pm i j_y$$

Els harmònics esfèrics renormalitzats $C_q^{(k)}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_{kq}(\theta,\phi)$ verifiquen estes regles de commutació, pel què són operadors tensorials esfèrics.

Un altre exemple important és l'operador vectorial **V**. Per definició, les components Cartesianes d'un operador vectorial es transformen com les coordenades espacials x,y,z baix rotacions. A partir d'estes propietats de transformació, s'observa que:

$$V_1^{(1)} = -(V_x + iV_y)/\sqrt{2}$$

$$V_0^{(1)} = V_z$$

$$V_{-1}^{(1)} = -(V_x - iV_y)/\sqrt{2}$$

defineix un operador tensorial esfèric de rang 1. Per tant, els operadors de moment angular poden escriure's com a operadors tensorials esfèrics de rang 1.

Operadors escalars

Un operador T que commuta amb totes les components de l'operador de moment angular és un operador escalar, o bé, un operador de rang 0.

Es fàcil provar que els elements de matriu de T són diagonals en j i m,

$$\langle \gamma\, jm | T | \gamma'\, j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \langle \gamma\, jm | T | \gamma'\, jm \rangle$$

A més, els elements de matriu són independents de m.