

## PRÁCTICA 9

# FLUJO DE CALOR EN BARRAS METÁLICAS

### OBJETIVO

Estudio de la transmisión de calor en una barra metálica que se calienta por un extremo. Determinación del coeficiente de enfriamiento de Newton y de la conductividad térmica de un metal por comparación de la distribución de temperaturas en dos barras de metales distintos.

### MATERIAL NECESARIO

- Dos barras metálicas (una de cobre y otra de aluminio)
- Termómetro digital de termopar
- Calentador eléctrico (fuente de calor) conectado a 125V
- Soporte de las barras metálicas

### INTRODUCCIÓN TEÓRICA

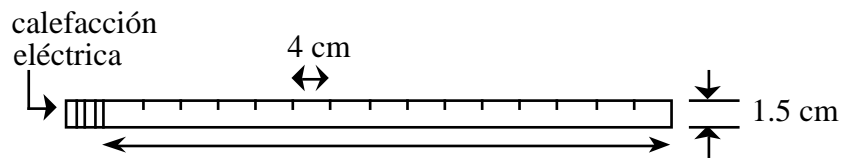


Figura 1. Barra metálica calentada por un extremo.

La figura 1 muestra la barra metálica que aquí emplearemos. Se trata de una barra de cobre o de aluminio con forma cilíndrica, de  $L = 50$  cm de longitud y  $R = 0.75$  cm de radio que tiene incorporada una calefacción eléctrica en uno de sus extremos. La energía aportada por esta calefacción se propaga por *conducción* en el interior de la barra con un flujo  $J_{\text{cond}}$  que viene dado por la ley de Fourier

$$J_{\text{cond}} = -k \frac{dt}{dx} \quad (1)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica y  $t$  la temperatura. Este flujo es función de la posición dentro de la barra y tiene, por lo general, una dirección no coincidente con el eje de la barra (Figura 2). Resulta, pues, interesante comentar lo que ocurre con sus componentes.

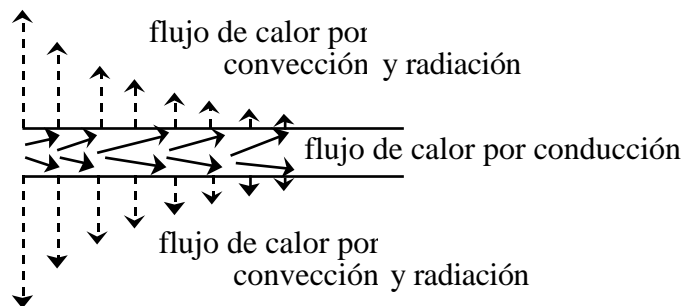


Figura 2. Flujos de calor.

Aprovechando la geometría del problema, emplearemos coordenadas cilíndricas en esta descripción. En dirección axial, el flujo se dirige del extremo caliente hacia el extremo frío;

llamémosles  $x = 0$  y  $x = L$ , respectivamente. La existencia de una componente radial (desde el eje hacia la superficie lateral de la barra) del flujo de calor por conducción depende de las condiciones de contorno en la superficie de la barra. Si esta superficie está aislada térmicamente, no hay propagación de calor en dirección radial. Sin embargo, si la superficie de la barra no está aislada térmicamente y su temperatura es superior a la del medio que la rodea (como sucede en nuestro caso), la barra pierde calor por *convección y radiación*. Esto conlleva generalmente la existencia de un flujo de calor por conducción en dirección radial que tiende a compensar las pérdidas. Cuando la temperatura superficial de la barra  $t_s$  difiere poco de la del ambiente  $t_a$ , el flujo de calor superficial puede suponerse proporcional a dicha diferencia de temperatura y viene dado por la ley de enfriamiento de Newton

$$J_{\text{superf}} = N [t_s - t_a] n \quad (2)$$

donde  $N$  es el denominado coeficiente de enfriamiento de Newton y  $\hat{n}$  denota un vector normal a la superficie y dirigido hacia fuera de la barra.

Si la calefacción y la temperatura ambiente se suponen independientes del tiempo, puede alcanzarse un estado estacionario en el que la temperatura de cualquier punto de la barra,  $t(x, r)$ , no varía con el tiempo y la divergencia de flujo de calor por conducción es nula

$$\nabla \cdot J_{\text{cond}} = - \frac{dt}{dt} = 0. \quad (3)$$

En esta situación, la distribución de temperaturas en la barra se obtiene resolviendo la ecuación de Laplace  $\nabla^2 t = 0$ , que en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Además, para que la superficie también mantenga su temperatura estacionaria se ha de cumplir que el flujo de calor que llega a ella por conducción iguale exactamente al flujo de calor que se pierde allí por convección y radiación

$$J_{r,\text{cond}} = J_{r,\text{superf}} \quad \text{en } r=R \quad \Rightarrow \quad - \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = N [t_s(x) - t_a]. \quad (5)$$

donde  $t_s(x) = t_s(x, R)$ .

Con objeto de evitar la resolución de la ecuación diferencial en derivadas parciales (ec. 4), introduciremos una temperatura media sobre una sección de la barra situada a una distancia  $x$  de la calefacción

$$\bar{t}(x) = \frac{1}{R^2} \int_0^R t(x, r) 2r dr \quad (6)$$

e integraremos la ec. (4) sobre la sección de la barra. Queda entonces la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} = - \frac{2}{R} \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{2N}{R} [t_s(x) - t_a] \quad (7)$$

donde se ha hecho uso de la ec. (5). Si introducimos  $\bar{t}(x) - t_a$  como la temperatura media medida respecto a la ambiente, es decir,  $\bar{t}(x) - t_a$  y  $t_s(x) - t_a$ , nos queda

$$\frac{d^2 \bar{t}}{dx^2} = \frac{2N}{R} \bar{t}_s(x) - \frac{2N}{R} \bar{t}(x) = p^2 \bar{t}(x) \quad (8)$$

donde  $p = \sqrt{2N/R}$  y hemos aproximado  $\bar{t}_s(x)$  por  $\bar{t}(x)$  dado que la resistencia al flujo de calor en la barra es mucho menor que en el aire y, por tanto, la diferencia de temperatura entre el eje y la superficie de la barra ha de ser mucho menor que entre la superficie y el aire. La solución de la ec. (9) expresada en función de los valores extremos de  $\bar{t}$  toma la forma

$$\bar{t}(x) = \bar{t}(0) \frac{\sinh[p(L-x)]}{\sinh(pL)} + \bar{t}(L) \frac{\sinh(px)}{\sinh(pL)} \quad (9)$$

En barras de gran longitud (es decir, mayor que los 50 cm de nuestras barras),  $pL \gg 1$  y la ec. (9) se reduce a una simple distribución exponencial

$$\bar{t}(x) = \bar{t}(0) \exp(-px) \quad , \quad pL \gg 1 \quad (10)$$

Aunque esta aproximación no es válida en nuestro caso, la distribución de temperaturas a lo largo de la barra es tal que no difiere mucho de una exponencial,

$$\bar{t}(x) \approx \bar{t}(0) \exp(-p'x) \quad (11)$$

si bien el valor de  $p'$  es menor que el de  $p$ ; por ejemplo, puede demostrarse que  $p'$  es aproximadamente la mitad de  $p$  cuando  $pL$  es del orden de la unidad. Dado que nuestro análisis es comparativo y con barras de  $p$  similar, podemos utilizar la ec. (11) en lugar de la (9), si bien las medidas han de restringirse a la zona central de la barra (es decir, sin considerar los primeros orificios, porque la calefacción es no puntual, ni los últimos, por la diferencia entre la distribución real de temperatura y la ec. 11.)

## PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se debería conectar la calefacción de las barras y esperar a que se alcance el estado estacionario (como deben de transcurrir al menos dos horas, la conexión se realizará automáticamente antes de la sesión de laboratorio). Mídase la temperatura  $\bar{t}(x)$  a lo largo de cada barra metálica en cada uno de los orificios situados cada 4.0 cm, así como la temperatura del aire, con un termómetro digital de termopar. Repítase el proceso de medida en todos los orificios varias veces para comprobar que se encuentra en estado estacionario y considérese un valor medio.

## PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

- Representando  $\ln \bar{t}(x) = \ln (\bar{t}(x) - t_a)$  frente a  $x$  (sin considerar los orificios de los extremos) y haciendo uso de la ec. (11), calcúlese  $p'$  para las dos barras.
- Sabiendo que  $h = 385 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  para el cobre, determínese el coeficiente  $N$  de la ley del enfriamiento de Newton  $N = R p'^2/2$ .
- Calcúlese el coeficiente de conductividad térmica del aluminio, suponiendo que el coeficiente  $N$  es el mismo para ambos materiales, a partir de la relación  $(p')_{\text{Cu}}^2 = (p')_{\text{Al}}^2$

*Alternativamente al apartado a) se puede realizar la representación de  $\bar{t}(x) - t_a$  frente a  $x$  y ajustar directamente a funciones exponenciales con ayuda del ordenador.*

# FLUJO DE CALOR EN BARRAS METÁLICAS

## OBJETIVOS

Estudio de la transmisión del calor, en una barra metálica que se calienta por un extremo.

Determinación del coeficiente de enfriamiento de Newton y de la conductividad térmica de un metal por comparación de la distribución de temperaturas en dos barras de metales distintos.

## PROCEDIMIENTO

En esta práctica analizaremos la temperatura de diversos puntos de dos barras de metales diferentes las barras están conectadas a la calefacción eléctrica por un lado.

Tomaremos la temperatura de los diversos puntos de la barra a intervalos espaciales de 4 cm con un termómetro digital de termopar. Asimismo, cada una de estas medidas se han de repetir y esperar hasta el punto en que se produzca un equilibrio considerando finalmente la temperatura media.

# RESULTADOS

Tabla 1. Medidas de  $\epsilon T$  de cada uno de los barras en función de la distancia al foco:

|    | Barra 1 (marrón)                                  |           | Barra 2 (Plateada)            |                               |
|----|---|-----------|-------------------------------|-------------------------------|
|    | $T_1$ (a) ( $\pm 0.1^\circ$ ) ( $\pm 0.1^\circ$ ) | $T_2$ (b) | ( $\pm 0.1^\circ$ ) $T_1$ (a) | ( $\pm 0.1^\circ$ ) $T_2$ (b) |
| 1  | 29.2  | 29.4      | 26.9                          | 27.2                          |
| 2  | 29.3  | 29.5      | 27.0                          | 27.2                          |
| 3  | 29.5  | 29.8      | 27.3                          | 27.5                          |
| 4  | 29.8  | 30.3      | 27.9                          | 28.1                          |
| 5  | 30.1  | 30.5      | 28.9                          | 28.9                          |
| 6  | 30.6  | 31.1      | 29.8                          | 29.8                          |
| 7  | 34.7  | 31.8      | 30.7                          | 30.7                          |
| 8  | 32.1  | 32.7      | 32.6                          | 32.6                          |
| 9  | 32.9  | 33.3      | 34.1                          | 34.0                          |
| 10 | 33.9  | 34.4      | 35.1                          | 36.3                          |
| 11 | 35.1  | 35.6      | 38.8                          | 39.3                          |
| 12 | 36.5  | 36.7 -    | 41.6                          | 42.1                          |

Tambiente(a) =  $24.5 \pm 0.2^\circ\text{C}$

Tambiente(b) =  $22.0 \pm 0.2^\circ\text{C}$

↓ valores comparativamente mayores en la tauda (b)

A simple vista se aprecia como la temperatura de la barra disminuye conforme nos alejamos del foco de calor, tal y como esperábamos inicialmente. (en la tabla el punto 1 es el más alejado y el 12 el más cercano).

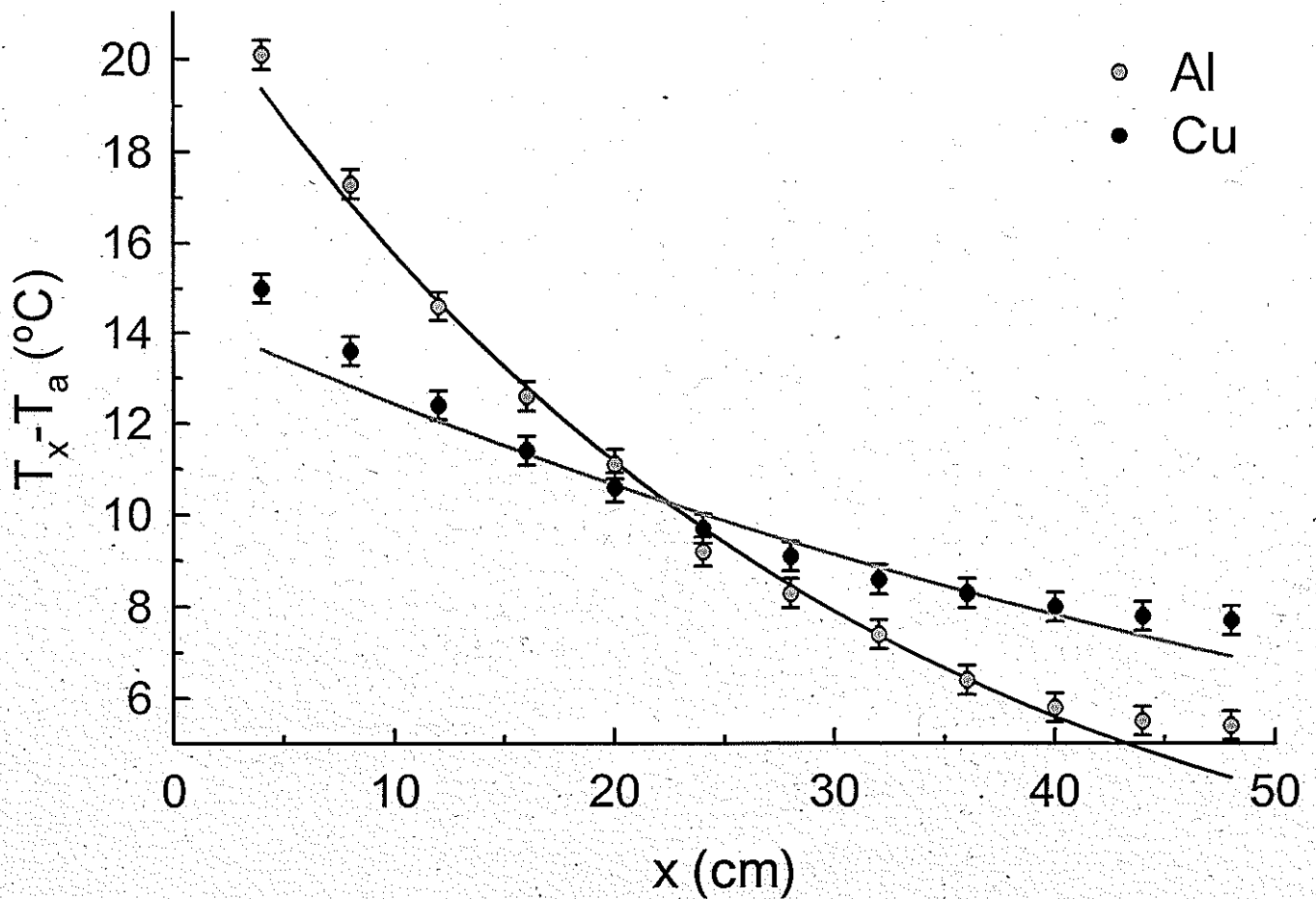
Estos datos se pueden ajustar a la siguiente ecuación:

$$T - T_a = (T(0) - T_a) e^{-px} \quad [1]$$

$T_a \equiv$  temperatura ambiente

$T(0) \equiv$  temperatura en el punto 0

$p \equiv$



- Gráfico 1 - Disminución exponencial de la temperatura en el aluminio y el cobre conforme nos alejamos del foco térmico

### Tanda 2

- Ecuación aluminio  $T_x = (22.2 \pm 0.5) \exp[-(0.0345 \pm 0.0011)x] \text{ } ^\circ\text{C}$

- Ecuación del cobre  $T_x = (14.5 \pm 0.4) \exp[-(0.0154 \pm 0.0010)x] \text{ } ^\circ\text{C}$

$$r_1 = 0.9997$$

$$r_2 = 0.9985$$

Para el ajuste hemos prescindido de los 2 primeros y el último punto de cada una de las curvas por tratarse de valores extremos donde nuestra aproximación no funciona.

## Tanda b

Ecuación aluminio  $T = (22.4 \pm 0.7) \exp[-(0.0367 \pm 0.0015)x]^\circ\text{C}$   
 $r = 0.994$

Ecuación del cobre  $T = (14.8 \pm 0.3) \exp[-(0.0165 \pm 0.0008)x]^\circ\text{C}$   
 $r = 0.993$

A partir de las dos tandas, que podemos considerar compatibles porque ambos valores caen entre sí, calculamos la media aritmética de  $\bar{p}$  (~~pendiente~~ coeficiente al que está elevado la exponencial)

$$\bar{p}(\text{Cu}) = 1.60 \pm 0.09 \text{ m}^{-1}$$

$$\bar{p}(\text{Al}) = 3.67 \pm 0.43 \text{ m}^{-1}$$

Como  $K = 385 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$  para el cobre, se puede determinar el coeficiente  $N$  de la ley de enfriamiento de Newton:

$$N = 4100 \pm 500 \frac{\text{kg}^2 \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{K}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$$

El coeficiente de conductividad térmica del aluminio, suponiendo  $N$  igual en ambos materiales  $\Rightarrow (Kp^2)_{\text{Cu}} = (Kp^2)_{\text{Al}}$ :

$$K(\text{Al}) = 73 \pm 10 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

ANÁLISIS DE ERRORES:

$$\delta_r(N) = \left( \left( \frac{\delta(K)}{K} \right)^2 + \left( \frac{\delta(R)}{R} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta(p)}{p} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Consideramos  $K$  y  $R$  con error despreciable.

$$\delta_r(K) = \left( \left( \frac{\delta(N)}{N} \right)^2 + \left( 2 \frac{\delta(p)}{p} \right)^2 \right)^{1/2}$$



El objetivo principal de la práctica consistía en estudiar el flujo de calor en barras metálicas calentadas por un extremo.

Para llevar a cabo este objetivo hemos calentado una barra metálica por un extremo y tomado la temperatura de un conjunto discreto de puntos pertenecientes a la barra. La barra era cilíndrica y de aleación de una aleación del aluminio.

La temperatura obtenida en cada punto de la barra se muestra en la tabla 1. Hay que decir que tanto para el cobre como el aluminio, hemos repetido las medidas para intentar minimizar errores.

Los datos pertenecientes a la tabla 1 (tanda a) los hemos ajustado a la ecuación [1] para obtener la gráfica 1. En un primer lugar podemos decir que los ajustes están bien realizados ya que los valores de  $r$  son muy próximos a la unidad.

A partir de estos datos hemos conseguido lograr el segundo objetivo de la práctica: determinar el coeficiente de enfriamiento de Newton y de la conductividad térmica del aluminio. Comparando las distribuciones de las temperaturas del Cu y el Al hemos obtenido el siguiente dato:

$$k(\text{al}) = 33 \pm 10 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Que es el coeficiente de conductividad térmica del aluminio.

Este dato lo podemos comparar con el del Handbook:

$$k(\text{al}) = 120 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \text{ valor que corresponde a aluminio}$$

de baja pureza. Se observa que los valores no son compatibles entre sí (está a más de dos órdenes de error). Esto se debe a los errores sistemáticos del método experimental y a los modelos teóricos aproximados empleados.

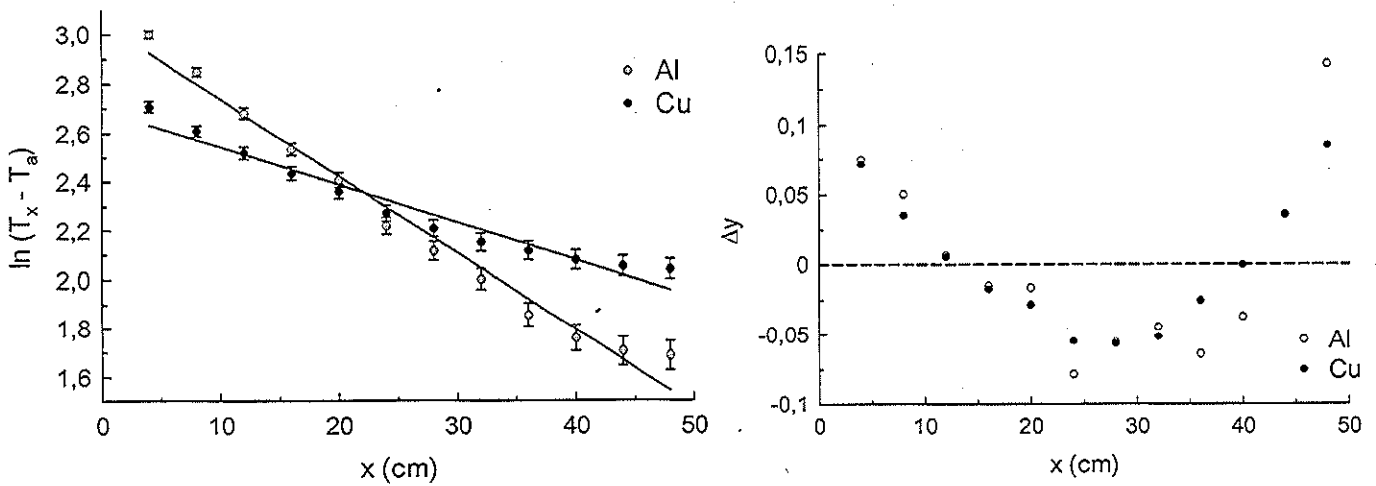
En cuanto a las limitaciones experimental, podemos comentar que la medida en los extremos de las barras no han sido válidas, pues no se cumplían las condiciones para realizar las aproximaciones a la ley exponencial. Aparte, el termómetro tardaba bastante en estabilizarse y al ser un termopar digital podría no estar bien calibrado.

Otros valores a los que podría haber un error siste-



nático con la temperatura ambiente, que fue medida en un termómetro algo alejado de nuestra barra metálica y la  $K_{en}$ , que asumimos como válida y sin error, pese a que no hemos comprobado que dicha barra sea de cobre y con la pureza correspondiente.

Sin embargo, estos errores son pequeños en comparación con las aproximaciones de las fórmulas teóricas como se muestra en la representación lineal de la fórmula [1] y la representación de sus residuos.



Si quisiéramos mejorar estos resultados podríamos utilizar una barra más larga o no realizar estas aproximaciones.

B