Notas de Métodos Matemáticos II

(primera parte)

María A. Lledó y César Miquel

Índice

Capítulo 1

Sucesiones y series

1.1. El número real

1.1.1. Algunas nociones intuitivas

Tenemos experiencia directa con varias clases de números. A grandes rasgos, sabemos que los números se pueden sumar y multiplicar y que hay una relación de orden entre ellos.

Conocemos bien los *números naturales* ($\mathbb{N}$). Consideremos la siguiente ecuación para un número x:

$$a \cdot x = b, \qquad a, b \in \mathbb{N}$$

donde a y b son números naturales arbitrarios. Nótese que si b no es un múltiplo de a, entonces x no puede ser un número natural. Decimos que x es un *número racional positivo* ($\mathbb{Q}^+$) y lo representamos como

$$x = \frac{b}{a}.$$

Los números racionales también se pueden sumar y multiplicar; en breve veremos cuáles son sus propiedades.

Conocemos también los números negativos. Consideremos la siguiente ecuación para z

$$x + z = y, \qquad x, y \in \mathbb{Q}^+. \tag{1.1}$$

Si $x > y$ esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{Q}^+$. Decimos entonces que las soluciones son números racionales negativos. Los números racionales, positivos y negativos, junto con el cero, se denotan por $\mathbb{Q}$.

Si x e y son naturales y genéricos, entonces las soluciones a la ecuación (1.1) constitutuyen los *números enteros*, denotados por $\mathbb{Z}$.

Pero ésta no es toda la historia. Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$x^2 = 2. \tag{1.2}$$

¿Tiene esta ecuación una solución para $x \in \mathbb{Q}$? Veamos una demostración de que esto no es posible.

Proposición 1.1.1 $\sqrt{2}$ *no es racional*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que x es racional, esto es,

$$x = \frac{a}{b}, \qquad a, b \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Podemos suponer que uno de los dos números, a o b es impar, ya que si ambos fueran pares podríamos simplificar la fracción. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.2) y (1.3) tenemos que

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 2b^2,$$

que implica que a^2 es par. Ahora, esto implica a su vez que a es par ya que, si a fuese impar

$$a = 2n + 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4n^2 + 4n + 1,$$

y claramente a^2 tendría que ser también impar.

Por hipótesis, pues, b debe ser impar. Pero si $a = 2m$, entonces

$$a^2 = 4m^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow b^2 = 2m^2$$

b^2 es par y en consecuencia b es también par, en contra de la hipótesis. Concluimos que x no puede ser racional. ■

Vemos pues que hay números que no son racionales, y por tanto los llamamos *números irracionales.* Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de números reales ($\mathbb{R}$) que definiremos rigurosamente en la próxima subsección.

Geométricamente, los números reales pueden representarse como puntos de una recta, donde se ha elegido un punto que representa el 0 y otro, a su derecha, que representa el uno. Entonces hay una relación biunívoca entre los números reales y los puntos de al recta.

Nota 1.1.2

Una ecuación del tipo

$$x^2 = a, \qquad a < 0,$$

no tiene solución entre los reales. Sus soluciones forman el conjunto de los *números imaginarios*. Números reales y números imaginarios son subconjuntos de los *números complejos* ($\mathbb{C}$), donde cada ecuación algebraica tiene el máximo número de soluciones (igual al grado de la ecuación, contando las multiplicidades). Se dice que el conjunto de los números complejos es *algebraicamente cerrado*, a diferencia de $\mathbb{R}$, que claramente no lo es.

En este curso nos limitaremos a estudiar los números reales. ∎

1.1.2. Axiomas de definición de los números reales

Definición 1.1.3 *Un cuerpo es un conjunto $\mathcal{F}$ con dos operaciones, la adición (o suma) y la multiplicación. La suma de dos elementos $x, y \in \mathcal{F}$ es otro elemento denotado por $x + y$, y la multiplicación es otro elemento denotado por $x \cdot y$. Estas operaciones tienen las siguientes propiedades: para todo $x, y, z \in \mathcal{F}$ tenemos*
a. Propiedad conmutativa,

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

b. Propiedad asociativa,

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

c. Propiedad distributiva,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

d. Existencia de elementos neutros:
Existe un elemento denotado por 0 tal que $x + 0 = x \quad \forall x \in \mathcal{F}$.
Existe un elemento denotado por 1 tal que $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathcal{F}$.
e. Existencia de negativos (o inverso de la suma). Para cada $x \in \mathcal{F}$ existe $y \in \mathcal{F}$ tal que

$$x + y = y + x = 0.$$

Denotaremos $y = -x$

f. Existencia del recíproco (o inverso de la multiplicación). Para cada $x \in \mathcal{F}$*,* $x \neq 0$ *existe* $y \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Lo denotaremos como $y = 1/x$*.* ■

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo, pero $\mathbb{Z}$ no lo es, ya que la propiedad f. no se satisface.

Como axioma, asumimos que $\mathbb{R}$ es un cuerpo. Esto implica que podemos usar todas las reglas del álgebra a las que estamos acostumbrados. Veamos como se demuestra alguna de ellas (que nos parecerá natural) a partir de las propiedades a-f.

Proposición 1.1.4 *Ley de simplificación para la suma: Si* $a + b = a + c$ *entonces* $b = c$*.*

Demostración. La propiedad e. asegura que existe el negativo de a, denotado $-a$. Por las propiedades asociativa y conmutiva (a. y b.) tenemos que

$$a + b + (-a) = b = a + c + (-a) \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

■

Otras reglas que usamos habitualmente pueden ser demostradas a partir de las mismas propiedades. En la parte 3 de [1] podéis encontrar más ejemplos de este tipo de demostraciones.

Definición 1.1.5 *Axiomas de orden en* $\mathbb{R}$*. Asumimos que existe un cierto subconjunto* $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$*, que llamaremos el conjunto de los números reales positivos, que satisface las siguientes propiedades:*
a. Si $x, y \in \mathbb{R}^+$ *entonces* $x + y,\ x \cdot y \in \mathbb{R}^+$*.*
b. Para todo $x \in \mathbb{R}$*,* $x \neq 0$*, o bien* $x \in \mathbb{R}^+$ *o bien* $-x \in \mathbb{R}^+$*, pero no ambos.*
c. $0 \notin \mathbb{R}$*.* ■

Se llaman axiomas de orden porque nos permiten definir una ordenación en $\mathbb{R}$. Podemos decir que un número real x es mayor que otro número real y si $x - y \in \mathbb{R}^+$. También diremos, en este caso, que y es menor que x. Lo denotaremos como

$$x > y, \quad \text{o bien} \quad y < x.$$

En particular, $x \in \mathbb{R}^+ \;\Leftrightarrow\; x > 0 \;\Leftrightarrow\; -x < 0$ (nótese que si $-x = 0$ entonces $x = 0 \notin \mathbb{R}^+$, en contra de la hipótesis).

La relación de orden cumple la propiedad transitiva (ejercicio: demostrarlo!), pero no las propiedades simétrica o la reflexiva, y por tanto no es una relación de equivalencia.

Nótese que tanto $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$ son también conjuntos ordenados. Los axiomas de orden permiten representar a los números geométricamente sobre una recta.

Como antes, las reglas que usamos habitualmente para desigualdades pueden demostrarse a partir de estos axiomas. Tomamos un ejemplo:

Proposición 1.1.6 *Si $x < y$, $z < 0$, entonces $x \cdot z > y \cdot z$.*

Demostración Tenemos que $y - x \in \mathbb{R}^+$ y que $-z \in \mathbb{R}^+$ por la propiedad b. entonces, por la propiedad a., $-(y - x) \cdot z = -(y \cdot z - x \cdot z) > 0$ luego $x \cdot z - y \cdot z > 0$ que implica trivialmente $x \cdot z > y \cdot z$. ■

De nuevo podéis encontrar otras demostraciones parecidas en la parte 3 de [1].

Hasta ahora los axiomas que hemos asumido para $\mathbb{R}$ son satisfechos por otros conjuntos de números. Hay un último axioma que distingue a los números reales, ya que implica la existencia de los números irracionales. Es el axioma del extremo superior o axioma de completitud. Es importante entender este axioma ya que quizá no tenemos la misma experiencia cotidiana de él que de los otros. Será sin embargo fundamental en la definiciones y demostraciones que haremos a lo largo del curso y habremos de tenerlo bien presente.

Necesitamos primero algunas definiciones fáciles.

Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \varnothing$. Si existe un número y tal que

$$x \leq y \qquad \forall\, x \in S,$$

(el símbolo“$\leq$"significa menor o igual) decimos que y es una *cota superior de S* y que S está *acotado superiormente*.

Si y es una cota superior de S e $y \in S$, entonces decimos que y es el *elemento máximo* de S,

$$y = \max S.$$

Un elemento máximo de un conjunto es único, mientra que cotas superiores puede haber muchas (ejercicio: demostrarlo!). También como ejercicio, dar ejemplos de conjuntos acotados, no acotados, con o sin elementos máximos.

Definición 1.1.7 *Un número y es el extremo superior de un conjunto S no vacío si y es una cota superior y ningún número menor que y es una cota superior.* ■

Nótese que un extremo superior del conjunto acotado S puede, o no, pertenecer S. Si pertenece al conjunto, entonces coincide con el máximo.

El extremo superior o *supremo* es único (ejercicio: demostrarlo!) y lo denotaremos como

$$y = \sup S.$$

Ejemplo 1.1.8

Consideremos el conjunto de todos los números racionales $x \leq a$, $a \in \mathbb{Q}$. Entonces a es el máximo y el extremo superior. Si consideramos en vez el conjunto de todos los números racionales tales que $x < a$, entonces a sigue siendo el extremo superior. Esto es así porque, supongamos que $b \in Q$, $b < a$ es una cota superior. Entre dos números racionales siempre existe otro b', $b < b' < a$, pero b' pertenece al conjunto y por tanto b no puede ser un extremo superior. Concluimos que a es el extremo superior, aunque no el máximo, ya que a no pertenece al conjunto. ■

Definición 1.1.9 *Axioma del extremo superior (o de completitud) Todo conjunto no vacío del los números reales acotado superiormente, posee un extremo superior.* ■

Cuando estudiemos sucesiones veremos que hay sucesiones de números racionales (que son subconjuntos de $\mathbb{Q}$), acotadas superiormente pero que no tienen extremo superior dentro de los racionales. El axioma de completitud, por tanto, implica la existencia de los números irracionales que son definidos como los extremos superiores de estos conjuntos.

1.1.3. Tema avanzado: El principio de inducción

Al alumno que quiera saber un poco más se le aconseja estudiar un propiedad muy útil de los números naturales. Es lo que se llama el *principio de inducción matemática*. Quizá estéis ya familiarizados con él pero aquí tenéis la oportunidad de estudiarlo con mayor rigor. Podéis encontrarlo en cualquier libro de cálculo elemental, en particular en [1, 3].

1.1.4. Ejercicios a la sección 1.1

1. Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo arbitrario. Demostrar:
 a. Dados $x, y \in \mathcal{F}$ existe un único $z \in \mathcal{F}$ tal que $x + z = y$.
 b. Dados $x, y, z \in \mathcal{F}$, $z \neq 0$ tales que $x \cdot z = y \cdot z$, entonces $x = y$.

2. Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo arbitrario que además satisface los axiomas de orden de la definición 1.1.5. Demostrar:
 a. Dados $x, y \in \mathcal{F}$, se verifica una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$x < y, \qquad y < x, \qquad x = y.$$

 b. Dados $x, y, z \in \mathcal{F}$, si $x < y$ e $y < z$ entonces $x < z$.

3. Escribir todos los números reales x para los que:
 a. $4 - x < 3 - 2x$.
 b. $5 - x^2 < 8$.
 c. $(x - 1)(x - 3) > 0$.
 d. $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

4. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ son tales que $0 < a < b$, demostrar que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

(Sugerencia: elevar al cuadrado las desigualdades y luego usar el hecho de que $(a - b)^2 > 0$.)

5. El valor absoluto de un número real está definido como

$$|x| = \begin{cases} x \text{ if } x \geq 0 \\ -x \text{ if } x \leq 0 \end{cases}$$

Encontrar los números para los que se cumple
 a. $|x - 3| = 8$.
 b. $|x - 3| < 8$.
 c. $|x - 1| + |x - 2| > 1$.
 d. $|x - 1| \cdot |x - 2| = 3$.

6. Demostrar
 a. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular).
 b. $|x - y| \leq |x| + |y|$.
 c. $|x| - |y| \leq |x - y|$.

1.2. Topología de la recta real

Vamos a definir una *topología* sobre los números reales.

Definición 1.2.1 *Un intervalo abierto es cualquier subconjunto de* $\mathbb{R}$ *de la forma*

$$\mathcal{I} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\} \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b.$$

■

Lo representaremos como $]a, b[$ o bien (a, b).

Definición 1.2.2 *Un subconjunto* $U \subset \mathbb{R}$ *es un abierto si:*
a. $U = \varnothing$*, o bien*
b. todo punto $p \in U$ *está en un intervalo abierto,* $p \in \mathcal{I}_p$ *que a su vez está contenido en* U*, es decir,* $\mathcal{I}_p \subset U$*.* ■

Está claro que cualquier intervalo abierto es un conjunto abierto, y que la unión de intervalos abiertos es también un conjunto abierto.

Ejemplo 1.2.3

El conjunto

$$V = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 < x \leq 1\} =]0, 1]$$

no es un conjunto abierto, ya que no existe intervalo abierto contenido en V que contenga a 1. ■

Ejemplo 1.2.4

$\mathbb{R}$ es un conjunto abierto. $\varnothing$ es abierto por definición ■

No es difícil probar que dado un número finito de conjuntos abiertos, su intersección es también un conjunto abierto. La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, aún cuando el número de éstos sea infinito.

Se dice que el conjunto de intervalos abiertos forman una *base de la topología* de $\mathbb{R}$ porque cubren todo $\mathbb{R}$ y cualquier abierto se puede expresar como la unión de intervalos.

Sea $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se define el *conjunto complementario* o *complemento* de S como

$$\mathbb{R} - S = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \notin S\}.$$

Definición 1.2.5 *Un subconjunto $V \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto cerrado si es el complementario de un subconjunto abierto.* ■

Hay conjuntos que nos son ni abiertos ni cerrados. Véase el ejemplo 1.2.3. Por otra parte, algunos conjuntos son abiertos y cerrados al la vez. Esto ocurre con $\mathbb{R}$ y $\varnothing$, que son complementarios uno de otro.

La intersección de un número arbitrario de conjuntos cerrados es cerrada (aún cuando esta intersección sea infinita), mientras que sólo podemos asegurar la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada.

Ejemplo 1.2.6

Consideremos los intervalos cerrados

$$\mathcal{J}_n = [-a + \frac{1}{n}, a - \frac{1}{n}], \qquad n \in \mathbb{N}, quada > 1.$$

Tenemos un número infinito de ellos. La unión de todos estos intervalos es $]-a, a[$, que no es un conjunto cerrado. ■

Definición 1.2.7 *Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$. Decimos que p es un punto de acumulación de S si cualquier intervalo abierto que contiene a p, contiene también algún otro punto de S distinto de p.* ■

Ejemplo 1.2.8

a. Todos los puntos del conjunto $[0, 1]$ son puntos de acumulación.
b. Todos los puntos del conjunto $]0, 1[$ son puntos de acumulación. Es más, los puntos 1 y 0 son también puntos de acumulación del intervalo abierto, aunque no pertenezcan a dicho intervalo.
c. En el conjunto $[0, 1] \cup 3$, el punto 3 no es un punto de acumulación. ■

Está claro que un intervalo es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación. El conjunto de todos los puntos de acumulación de un intervalo (sea éste abierto o cerrado) es la *clausura* del intervalo, y es obviamente cerrado. La clausura de $\mathcal{I}$ se denota por $\overline{\mathcal{I}}$. En forma más general, la clausura de un conjunto S, denotada por $\overline{S}$ es la unión de S con todos sus puntos de acumulación.

Un punto puede pertenecer a la clausura de un intervalo y a la de su complementario. Dado el intervalo $\mathcal{I} =]0, 1[$, su clausura es $\overline{\mathcal{I}} = [0, 1]$, y los puntos 0 y 1 pertenecen tanto a $\overline{\mathcal{I}}$ como a la clausura del complementario $\overline{\mathbb{R} - \mathcal{I}} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Los puntos del intervalo $]0, 1[$ son *puntos interiores* de $\mathcal{I}$, mientras que los puntos 0 y 1 están en la *frontera* de $\mathcal{I}$

Nota 1.2.9

Notad que el conjunto $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ es cerrado. ■

1.2.1. Ejercicios a la sección 1.2

1. Decid si los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados en $\mathbb{R}$. Calculad su clausura.

a. $]0,2[-\{1\}$.
b. $]-\infty,+\infty[$.
c. $]0,2]$.
d. $\{1\}$.
e. $\mathbb{N}$.

2. Considérese la siguiente colección infinita de intervalos:

$$\mathcal{I}_n =]-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}[, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a. ¿Son los intervalos $\mathcal{I}_n$ abiertos o cerrados?
b. Calculad la unión $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_n$. ¿Es un conjunto abierto o cerrado?
c. Calculad la intersección $\cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{I}_n$. ¿Es un conjunto abierto o cerrado?

1.3. Sucesiones y límites

Definición 1.3.1 *Una sucesión de números reales es una función*

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

■

En otras palabras, una sucesión es una *secuencia ordenada* de números reales. Nosotros nos ocuparemos de sucesiones cuyo dominio es todo $\mathbb{N}$. Son sucesiones infinitas, y denotaremos el *término enésimo* como

$$s(n) \equiv s_n.$$

El conjunto de todos los términos se denota como $\{s_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, o abreviadamente, $\{s_n\}$.

Ejemplo 1.3.2 *Algunas sucesiones*

a. $s_n = 2n$ es la sucesión de todos los números pares.
b. $s_n = 1$ es la sucesión constante de valor 1.
c. $s_n = (-1)^n$, cuyos términos son

$$-1, +1, -1, +1, -1, +1, \ldots$$

d. $s_n = 1/n$ es una sucesión tal que $0 < s_n \leq 1$.

■

En el último ejemplo, el conjunto $\{s_n\}$ está acotado superior e inferiormente. 1 es su máximo y extremo superior, mientras que 0 es sólo su extremo inferior, ya que no existe nigún número natural para el cual $1/n = 0$, pero podemos acercarnos a 0 tanto como queramos: basta tomar un número n suficientemente grande. A continuación veremos cómo formalizar este concepto.

Definición 1.3.3 *Se dice que una sucesión s_n tiene límite L si para cada número real $\epsilon > 0$ existe un número natural N (que dependerá de ϵ) tal que*

$$|s_n - L| < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad n \geq N.$$

■

Se dice entonces que la sucesión es *convergente* y converge al límite L. Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

Ejemplo 1.3.4 *Algunos límites*

a. La sucesión $s_n = 2n$ no tiene límite. Por reducción al absurdo: supongamos que L fuese el límite. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existiría un N tal que

$$|2n - L| < \epsilon \qquad \text{para} \quad n \geq N.$$

En particular, esto significa que que

$$2n - L < \epsilon, \quad \text{y que} \quad 2N - L < \epsilon \quad \Rightarrow \quad N < \frac{\epsilon + L}{2}.$$

Dado que ϵ y L son fijos por hipótesis, basta tomar $n > N$ tal que

$$N < \frac{\epsilon + L}{2} < n$$

para llegar a una contradicción.
b. La sucesión constante $s_n = 1$ tiene como límite 1, ya que

$$|1 - 1| = 0 < \epsilon \quad \forall\epsilon > 0 \quad \text{independientemente de } n.$$

c. La sucesión $s_n = (-1)^n$ no tiene límite. Lo demostramos por reducción al absurdo. Si L fuese el límite, esto implicaría que para un ϵ arbitrario

$$\begin{aligned} |-1 - L| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad -\epsilon < -1 - L < \epsilon \\ |+1 - L| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad -\epsilon < +1 - L < \epsilon \Rightarrow \quad -\epsilon < -1 + L < \epsilon. \end{aligned}$$

(Nótese que las condiciones, en este caso, son independientes de N). Es fácil llegar a una contradicción a partir de estas ecuaciones. Por ejemplo, sumemos las dos ecuaciones en sus formas finales, dividamos por 2 y obtendremos

$$-\epsilon < -1 < \epsilon.$$

Basta tomar $\epsilon = 1/2$ para ver que esto no es posible. Recuérdese que en la definición de límite, la condición debe ser satisfecha para un $\epsilon > 0$ arbitrario.

d. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Queremos demostrarlo a partir de la definición 1.3.3. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario y consideremos $1/\epsilon$. Tomemos cualquier número natural

$$N > \frac{1}{\epsilon}.$$

Está claro que

$$\frac{1}{N} < \epsilon \quad \text{y que} \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \quad \text{para} \quad n > N.$$

■

Nota 1.3.5

Es importante entender que en la definición de límite 1.3.3 el número ϵ que aparece es **arbitrario**. No basta con que se satisfaga la condición para un ϵ particular, o para un cierto conjunto de ϵ's. Debe ser para **cualquier** ϵ.

■

Las sucesiones estudiadas en los casos **a** y **c** en el ejemplo 1.3.4 no tienen límite, pero hay una importante diferencia cualitativa entre ellas. Mientras en el caso **a** la sucesión crece cada vez más y el conjunto $\{s_n\}$ no está acotado, en el caso **c** la sucesión simplemente oscila entre dos valores, y $\{s_n\} = \{-1, +1\}$ sí es un conjunto acotado. Trataremos de formalizar este razonamiento intuitivo en la próxima definición.

Definición 1.3.6 *Decimos que la sucesión s_n diverge y lo denotamos como*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad (\textit{respectivamente } -\infty)$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$s_n > \epsilon \quad \forall n \geq N \qquad (\textit{respectivamente } s_n < -\epsilon).$$

■

Está claro que $s_n = 2n$ diverge a $+\infty$, mientras que $(-1)^n$ simplemente no tiene límite.

1.3.1. Algunos teoremas sobre límites

Lema 1.3.7 *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Sea s_n tal que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S.$$

Sea $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$|s_n - S| < \epsilon_0, \quad \forall\, n \geq N.$$

Entonces,

$$|s_n| - |S| \leq |s_n - S| < \epsilon_0, \quad \Rightarrow \quad |s_n| < \epsilon_0 + |S| \quad \forall\, n \geq N.$$

Sea $A = \max\left\{\{|s_n|\}_{n<N}, \epsilon_0 + |S|\right\}$ (un conjunto finito tiene siempre un máximo). Entonces

$$|s_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

■

Teorema 1.3.8 *Sean s_n y t_n dos sucesiones tales que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = T.$$

Entonces se cumple que:

a. $$\lim_{n\to\infty} (s_n + t_n) = S + T.$$

b. $$\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot t_n) = S \cdot T.$$

c. $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{S} \qquad \textit{si} \quad s_n \neq 0 \ \ \textit{y} \ \ S \neq 0.$$

Demostración
a. Tenemos que demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|(s_n + t_n) - (S + T)| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

Por hipótesis sabemos que existen N_1, N_2 tales que

$$|s_n - S| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq N_1, \qquad |t_n - T| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n \geq N_2.$$

Tomemos $N > \max\{N_1, N_2\}$, then

$$|(s_n + t_n) - (S + T)| < |s_n - S| + |t_n - T| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall\, n \geq N,$$

como queríamos demostrar.

b. Tenemos que demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|s_n t_n - ST| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N.$$

Escribamos

$$|s_n \cdot t_n - S.T| = |s_n(t_n - T) + T(s_n - S)| \leq |s_n||t_n - T| + |T||s_n - S|.$$

s_n es convergente, luego por el lema 1.3.7 $s_n \leq A$ para un cierto A. Tenemos que existen N_1, N_2 tales que

$$|t_n - T| < \frac{\epsilon}{2|A|} \quad \forall n \geq N_1, \qquad |s_n - S| < \frac{\epsilon}{2|T|} \quad \forall n \geq N_2.$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$; entonces

$$|s_n t_n - ST| < |A|\frac{\epsilon}{2|A|} + |T|\frac{\epsilon}{2|T|} = \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

c. Tenemos que demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{S}| < \epsilon \qquad \forall\, n \geq N,$$

pero

$$|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{S}| = \frac{|s_n - S|}{|s_n||S|}.$$

Consideremos un N_1 y N_2 tales que

$$\begin{aligned}
&|s_n - S| < \frac{\epsilon}{2}|S|^2 \quad \forall n \geq N_1,\\
&|s_n - S| < \frac{|S|}{2} \quad \forall n \geq N_2 \;\Rightarrow\\
&-|s_n| + |S| < \frac{|S|}{2} \;\Rightarrow\; |s_n| > \frac{|S|}{2} \quad \forall n \geq N_2.
\end{aligned}$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos

$$|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{S}| = \frac{|s_n - S|}{|s_n||S|} < \frac{\epsilon}{2}|S|^2 \frac{2}{|S|}\frac{1}{|S|} = \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

■

Teorema 1.3.9 *Sean r_n, s_n y t_n tres sucesiones tales que $r_n \leq s_n \leq t_n$. Supongamos que*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} t_n = L.$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = L$$

Demostración. Tenemos que

$$0 \leq s_n - r_n \leq t_n - r_n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}(t_n - r_n) = 0.$$

Esto significa que para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|t_n - r_n| < \epsilon, \quad \forall n > N \;\Rightarrow\; |s_n - r_n| < \epsilon, \quad \forall n > N$$

y

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - r_n) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} r_n = L.$$

■

Decimos que una sucesión s_n es *creciente* si

$$s_n \leq s_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Asímismo, decimos que es *decreciente* si

$$s_n \geq s_{n+1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En general, una sucesión se dice *monótona* si es creciente o decreciente.

Teorema 1.3.10 *Una sucesión monótona converge si y solo si es acotada.*

Demostración
($\rightarrow$) Ya hemos visto en el lema 1.3.7 que una sucesión convergente es acotada, independientemente de si es monótona o no. Luego en este sentido el teorema está probado.

($\leftarrow$) Asumamos que la sucesión monótona es acotada. Supongamos que la sucesión es creciente (la prueba para la sucesión decreciente es idéntica). Sea L el extremo superior del conjunto $\{s_n\}$ (recordemos la el axioma del extremo superior en la definición de los números reales, 1.1.9). Tenemos que $s_n \leq L$

y queremos probar que s_n converge hacia L. Dado un $\epsilon > 0$ consideremos $L - \epsilon$. Necesariamente existe un N tal que

$$L - \epsilon < s_N < s_n \qquad \forall n \geq N$$

pues si no, $L - \epsilon$ sería una cota superior menor que el extremo superior, lo cual es imposible. Tenemos entonces que

$$0 < L - s_n < \epsilon \qquad \forall n \geq N.$$

■

1.3.2. Ejercicios a la sección 1.3

1. Demostraciones de algunos límites:
a. Con un argumento similar al utilizado en el ejemplo 1.3.4 **d** demostrad que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \quad \text{si} \quad \alpha > 0.$$

b. Lo mismo para

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \text{si} \quad \alpha > 0.$$

c. Demostrad que si $|x| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

(Ayuda: Podéis usar por ejemplo que si $|x| < 1$, entonces $|x|^{n+1} < |x|^n < \cdots < |x| < 1$).
d. Demostrad que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$$

(Ayuda: Transformad la expresión $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ multiplicando y dividiendo por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.)

2. Usando el teorema 1.3.8, demostrad que si

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = T$$

entonces
a. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} (as_n + bt_n) = aS + bT.$$

b. Cuando $T \neq 0$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{S}{T}.$$

3. Calculad el límite cuando $n \to \infty$ de la sucesión

$$\frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2}.$$

(Ayuda: dividid numerador y denominador por n^2 y luego usad la parte **b** del ejercicio **2**).

4. Demostrad que si s_n es una sucesión acotada, $|s_n| < A$ para algún $A \in \mathbb{R}$ y si $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} s_n t_n = 0.$$

¿Cuál es el límite de la sucesión

$$\frac{(-1)^n}{n}?$$

5. Demostrad que

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \quad \text{si} \quad a > 0.$$

(Ayuda: recordad que el logaritmo es una función creciente y que el logaritmo de un número mayor que 1 es positivo).

6. Decid si las siguientes sucesiones convergen, divergen, o simplemente no tienen límite. Calculad el límite, cuando exista, basándoos en las propiedades y teoremas estudiados para los límites.

a. $$s_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$$

b. $$s_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

c. $$s_n = \frac{2^n}{n!}$$

d. $$s_n = \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

e. $$s_n = \frac{n^{4/3}+1}{n}$$

(Ayuda: Para el apartado **c**, podéis tratar de “emparedar"la sucesión entre dos sucesiones que tienden a 0, a partir de $n = 3$. Para el apartado **d** podéis usar un argumento como en el ejemplo 1.3.4 **c**).

1.4. Series numéricas

Dada una sucesión cualquiera a_k, podemos considerar una nueva sucesión, la *sucesión de sus sumas parciales*:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ \cdots \ , s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \ \cdots$$

El término enésimo es la suma de los n primeros términos de la sucesión a_k. La sucesión de las sumas parciales se llama *serie infinita*.

Una serie infinita, por ser una sucesión, puede ser convergente, divergente o no tener límite. El límite de una serie se denota usualmente como

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

1.4.1. Algunas propiedades de las series

Consideremos una sucesión b_k; tomemos las sumas finitas

$$\sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} b_{k+1}$$

y su diferencia

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Está claro que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

(para el límite, podemos sustituir b_{n+1} por b_n). Por tanto, si la sucesión b_n es convergente, también lo es la serie de las sumas parciales de

$$a_k = b_k - b_{k+1}. \tag{1.4}$$

En términos prácticos esto implica que, dada una sucesión a_k, si la podemos poner en la forma (1.4), entonces podemos calcular el límite de sus sumas parciales en términos del límite de una sucesión ordinaria.

Ejemplo 1.4.1 *La serie geométrica* $s_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$

Si $x = 1$ está claro que $s_n = n$, y por tanto divergente. Así que asumimos que $x \neq 1$. Hagamos el siguiente "truco":

$$(1-x)s_n = \sum_{k=1}^{n}(x^k - x^{k+1}) = x - x^{n+1},$$

ya que es de la forma (1.4). Se deduce que

$$s_n = x\frac{1-x^n}{1-x} = x\big(\frac{x}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}\big).$$

Sólo el último término depende de n. s_n converge si y sólo si $|x| < 1$, ya que entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, mientras que si $|x| > 1$, x^n diverge. La suma de la serie geométrica es por tanto, en el caso $|x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}. \tag{1.5}$$

■

Ejemplo 1.4.2 *La serie armónica,* $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

No es difícil ver que la serie $\sum_{k=1}^{n} 1/k$ es divergente. Nosotros vamos a usar un pequeño truco. Está claro que s_n es creciente, luego si consiguiéramos demostrar que no es acotada, significaría que es divergente.

Consideremos la siguiente *subsucesión* de s_n (subconjunto infinito de $\{s_n\}$): tomemos los términos con $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Se trata de tomar los términos donde n es un múltiplo de 2. Bastará demostrar que esta subsucesión no está acotada. Veamos cómo se comportan los primeros términos:

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\
s_4 &= s_2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>s_2+2(\frac{1}{4})=2\\
s_8 &= s_4+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>s_4+4(\frac{1}{8})>\frac{5}{2}\\
s_{16} &= s_8+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>s_8+8(\frac{1}{6})>3\\
&\vdots\\
s_{2^m} &\geq 1+\frac{m}{2}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Pero $1+m/2$ no es acotada, con lo cual queda demostrado que s_m tampoco es acotada y por tanto, diverge. ■

Nota 1.4.3

El alumno que conozca las integrales puede, si quiere, consultar una prueba distinta de la divergencia de la serie armónica, usando la integral de la función $\ln x$ en [1] ó [4]. ■

Es importante mantener en mente la propiedad de divergencia de esta serie, que nos servirá para determinar la divergencia de otras series.

Nótese que la sucesión $1/n$ es convergente; en realidad su límite es cero. Esto no garantiza que la serie de sus sumas parciales sea convergente. Como veremos más adelante, es una condición *necesaria* pero no *suficiente* que la sucesión tienda a cero para que la serie de sus sumas parciales sea convergente. ■

1.4.2. Ejercicios al la sección 1.4

1. Encontrar las siguientes sumas de series:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad |x|<1$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2)^n x^n, \qquad |x|<\frac{1}{2}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(Ayuda: Para **a**, **b** y **e** podéis usar la serie geométrica (1.5) con un adecuado cambio de variables. Para **c**, **d**, **f**, **h** podéis tratar de ponerlas en la forma (1.4). **i** puede calcularse usando **h** y sumando un término que también resulta ser de la forma (1.4))

1.5. Citerios de convergencia

Teorema 1.5.1 *Si la serie* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *converge, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Demostración. Siempre se puede escribir $a_n = s_n - s_{n-1}$. Si s_n converge, entonces s_n y s_{n-1} tienden al mismo límite. Tomando límites en ambos lados de la ecuación tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

■

En lo que queda de esta sección vamos a considerar sucesiones en que $a_k \geq 0$ para todo $k \geq 1$, es decir, *no negativas*. En la sección 1.6 volveremos a considerar sucesiones con términos positivos y negativos.

El primer criterio de convergencia para series no negativas es obvio:

Teorema 1.5.2 *Si* a_k *es una sucesión no negativa, la serie de las sumas parciales* $s_n = \sum_{n=1}^{n} a_k$ *converge si y sólo si está acotada superiormente.*

Demostración. s_n es una sucesión monótona creciente, por tanto basta aplicar el teorema 1.3.10. ■

Teorema 1.5.3 Criterio de comparación 1. *Si* a_k *y* b_k *son sucesiones no negativas, y existe una constante* $c > 0$ *tal que*

$$a_k \leq cb_k \qquad \forall k \geq 1,$$

entonces $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *converge si* $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ *converge.*

Alternativamente, si s_n *diverge entonces* r_n *también diverge.*

Demostración. $r_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ es acotada, puesto que converge. Entonces $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es también acotada, creciente y por tanto converge. ■

Ejemplo 1.5.4

Considérese la serie
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2+(-1)^k}{4^k+k^2}.$$
Tenemos que
$$0 \leq \frac{2+(-1)^k}{4^k+k^2} \leq \frac{3}{4^k+k^2} < \frac{3}{4^k}.$$
pero el último término de la desigualdad es proporcional a una serie geométrica, y por tanto converge. Tenemos pués que s_n también converge. ■

Nota 1.5.5

Notemos que el criterio de convergencia no nos da directamente la suma de la serie. ■

Ejemplo 1.5.6

Consideremos la serie
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k^2+2}.$$
Sospechamos que la serie puede ser divergente ya que la sucesión se comporta, a valores grandes de k como $1/k$, cuya suma es divergente. En primer lugar nos damos cuenta que
$$\frac{k}{k^2+2} < \frac{k+1}{k^2+2}.$$
Queremos ahora comprobar que
$$\frac{1}{k} < c\,\frac{k}{k^2+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k^2+2}{k^2} \leq c$$
para alguna constante positiva c. Pero
$$\frac{k^2+2}{k^2} = 1 + \frac{2}{k^2} \leq 3,$$
luego podemos tomar $c=3$ y la serie s_n es por tanto divergente. ■

Teorema 1.5.7 Criterio de comparación 2. *Sean a_k y b_k dos sucesiones no negativas. Supongamos que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1.$$

Entonces, $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge si y sólo si $s_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ converge.

Demostración. Por hipótesis, para cada $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|\frac{a_k}{b_k} - 1| < \epsilon, \qquad \text{si} \quad k \geq N.$$

Es conveniente tomar $\epsilon = 1/2$, entonces, existe N_0 tal que

$$\frac{1}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad b_k < 2a_k \quad \text{y} \quad a_k < \frac{3}{2} b_k, \quad \forall n \geq N_0.$$

Aplicando el criterio de comparación 1 (teorema 1.5.3) a las dos desigualdades obtenemos la prueba en ambas direcciones. ■

Ejemplo 1.5.8

En el ejercicio **1c** de la sección 1.4.2, vimos que la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

converge. Usando el teorema 1.5.7, podemos deducir que la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

también converge. ■

Teorema 1.5.9 Criterio del cociente. *Sea a_k una sucesión no negativa. Supongamos que*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L.$$

Se tiene entonces que:

(a) Si $L < 1$ la serie converge.
(b) Si $L > 1$ la serie diverge.
(c) Si $L = 1$ el criterio no decide.

Demostración.
(a) Tomemos $L < 1$. Consideremos un ϵ tal que $0 < x = \epsilon + L < 1$. Entonces, existe N tal que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - L < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} < x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{x} < a_k \quad \forall n \geq N.$$

Dividiendo la última desigualdad por x^k obtenemos

$$\frac{a_{k+1}}{x^{n+1}} < \frac{a_k}{x^k} \quad \forall n \geq N.$$

Esto significa que la sucesión a_k/x^k es decreciente, y que para $k \geq N$ tendremos

$$\frac{a_k}{x^k} \leq \frac{a_N}{x^N} = c \quad \Leftrightarrow \quad a_k \leq c\, x^n.$$

Usando el criterio de comparación 1 (teorema 1.5.3), y sabiendo que la serie geométrica $\sum_{k=1}^n x^k$ converge concluímos que $\sum_{k=1}^n a_k$ también converge.

(b) Tomemos $L > 1$. Existirá un N tal que para todo $n \geq N$

$$-\frac{a_{k+1}}{a_k} + L < |\frac{a_{k+1}}{a_k} - L| < L - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_{k+1} > a_k,$$

y por tanto

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0,$$

luego la serie no puede converger. ∎

Ejemplo 1.5.10

Consideremos la serie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}.$$

Usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0 < 1, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

luego la serie converge. ∎

Ejemplo 1.5.11

Es fácil probar con este criterio que las series

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r^k}{k!}, \quad r > 0 \qquad \text{y}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k r^k, \quad 0 \leq r < 1$$

convergen. (Hacedlos como ejercicio. Si no os salen, podéis consultar en [4], pero probad a hacerlos vosotros primero). ■

Teorema 1.5.12 Criterio de la raíz. *Sea a_k una sucesión no negativa tal que*

$$\lim_{k\to\infty} a_k^{1/k} = R.$$

Se tiene entonces que:

(a) Si $R < 1$, la serie converge.
(b) Si $R > 1$, la serie diverge.
(c) Si $R = 1$, el criterio no decide.

Demostración.
(a) Sea $R < 1$, y sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_k^{1/k} - R \leq |a_k^{1/k} - R| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad a_k^{1/k} < R + \epsilon, \qquad \forall k \geq N.$$

En particular, podemos tomar ϵ tal que $0 < x = R + \epsilon < 1$, con lo que tendremos

$$a_k^{1/k} < x, \quad \Leftrightarrow \quad a_k < x^k,$$

y por el criterio de comparación 1 (teorema 1.5.3) la serie $\sum_{n=1}^{n} a_k$ es convergente.

(b) Sea $R > 1$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$-a_k^{1/k} + R \leq |a_k^{1/k} - R| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad -a_k^{1/k} < -R + \epsilon.$$

Tomemos $1 < x = R - \epsilon$, así

$$a_k > x^k, \qquad \forall k \geq N,$$

y como antes, por el criterio de comparación 1, la serie diverge. ■

Nota 1.5.13

Hablaremos del criterio de la integral para determinar la convergencia de series no negativas cuando hayamos definido las integrales. El alumno que lo desee puede estudiarlo en [1] o [4]. ■

1.5.1. Ejercicios a la sección 1.5

1. Sabiendo que el límite de la sucesión

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e,$$

determinar la convergencia de las siguientes series:

$$\textbf{a}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad \textbf{b}.\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{n!}{n^n} \qquad \textbf{c}.\sum_{n=1}^{\infty}3^n\frac{n!}{n^n}$$

2. Sabiendo que

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1, \qquad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0, \quad a,b>0,$$

determinar la convergencia de las siguientes series:

$$\textbf{a}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \textbf{b}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n} \qquad \textbf{c}.\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$$

$$\textbf{d}.\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2} \qquad \textbf{e}.\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-e^{-n^2}) \qquad \textbf{f}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

$$\textbf{g}.\sum_{n=1}^{\infty}nr^n \qquad \textbf{h}.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} \qquad \textbf{i}.\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$$

1.6. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional

1.6.1. Series alternadas

Una *serie alternada* es una serie en la que sus términos tienen alternadamente signo positivo o negativo. Una serie alternada se puede escribir de la forma

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,$$

donde $a_k \geq 0$.

Teorema 1.6.1 Criterio de Leibnitz *Si a_k es una sucesión monótona decreciente con límite 0, entonces la serie alternada $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ converge.*

Demostración. Consideremos la subsucesión de las sumas parciales pares, esto es s_{2n}. Probemos con los primeros términos

$$\begin{aligned} s_2 &= a_1 - a_2 \\ s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ s_6 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dado que la sucesión es monótona decreciente, tenemos que $a_3 - a_4 \geq 0$, $a_5 - a_6 \geq 0$, ... y por tanto s_{2n} es una sucesión creciente. Es fácil ver que la subsucesión de las sumas parciales impares s_{2n-1} es una sucesión decreciente. Por otra parte, está claro que s_{2n}, s_{2n+1} y s_n son sucesiones acotadas, ya que

$$s_2 \leq s_n \leq s_1,$$

y esto implica que s_{2n}, s_{2n-1} tienen límite[1]. Sean

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = S, \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = S'.$$

Pero

$$S - S' = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} -a_{2n} = 0$$

por hipótesis. Ambas subsucesiones convergen a un límite común, que es también el límite de s_n. ■

[1]Notad que este argumento no se puede aplicar directamente a s_n, ya que no es una sucesión monótona, pero sí a las subsucesiones pares e impares.

Ejemplo 1.6.2 *La serie armónica alternada.*

Sea la serie
$$s_n = \sum_{n=k}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$
Dado que $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$, s_n converge por el criterio de Leibnitz. ■

1.6.2. Convergencia absoluta y condicional

Una serie $\sum_{k=1}^{n} a_k$ es *absolutamente convergente* si $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ es convergente. Notemos que $|a_k| \geq 0$, luego es una sucesión no negativa. Para determinar la convergencia absoluta de una serie podemos usar los criterios de la sección 1.5.

Si la serie $\sum_{k=1}^{n} |a_k|$ no es convergente pero $\sum_{k=1}^{n} a_k$ lo es, decimos que la serie es *condicionalmente convergente*. Por ejemplo, la serie armónica alternada es condicionalmente convergente.

Teorema 1.6.3 *Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente. Además*
$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Demostración. Consideremos la sucesión $b_n = a_n + |a_n|$. Vamos a demostrar primero que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Está claro que
$$0 \leq b_n \leq 2|a_n|.$$
Pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, así que usando el criterio de comparación 1 (teorema 1.5.3), deducimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Pero
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$
y por tanto converge.

Para demostrar la desigualdad, observamos que se satisface para las sumas parciales, y por tanto se satisface para los límites. ■

Los criterios para demostrar la convergencia de de series arbitrarias están basados en el siguiente

Lema 1.6.4 Fórmula de sumación parcial de Abel. *Sean a_k y b_k dos sucesiones. Denotamos las sumas parciales*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1.6}$$

Entonces tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Demostración. Trivial. Definamos $A_0 = 0$, entonces, $a_k = A_k - A_{k-1}$ y sustituyendo,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \\ = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1}.\end{aligned}$$

■

Teorema 1.6.5 Criterio de Dirichlet. *Sea a_k una sucesión cuya serie de sumas parciales*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

es una sucesión acotada. Sea b_k una sucesión decreciente que converge a 0. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ converge.

Demostración. Usamos la fórmula de Abel (1.6). El primer término $A_n b_{n+1}$ es el producto de una sucesión acotada por una que tiende a cero, por tanto tiende a cero cuando $n \to \infty$. Tenemos que demostrar que $\sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$ es convergente. Dado que $b_k > b_{k+1}$ tenemos la desigualdad

$$|A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M (b_k - b_{k+1}).$$

Pero

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \to b_1 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Usando el criterio de comparación 1 (teorema 1.5.3), tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$$

converge absolutamente, y por tanto converge. ■

Ejemplo 1.6.6

Consideremos la serie

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^s}, \qquad s > 0.$$

Tomemos $a_k = (-1)^k$. Es fácil ver que

$$|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k| \leq 1,$$

y por otra parte, $b_k = 1/k^s$ es decreciente y

$$\lim_{k\to\infty} 1/k^s = 0.$$

Aplicando el criterio de Dirichlet, tenemos que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^s}$ converge. ■

Teorema 1.6.7 Criterio de Abel. *Sea a_k una sucesión cuya serie de sumas parciales*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

es convergente. Sea b_k una sucesión monótona convergente. Entonces la serie $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ converge.

Demostración. Usando la fórmula de Abel (1.6), tenemos que el primer término $A_n b_{n+1}$ es convergente. Además, puesto que A_n converge, es acotada . Supongamos primero que b_k es decreciente, entonces tenemos para el segundo término en (1.6)

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(b_k - b_{k+1}),$$

y la prueba sigue como para el criterio de Dirichlet. Si b_k es creciente, entonces $-b_k$ es decreciente y tenemos

$$|A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M(-b_k - (-b_{k+1})).$$

La prueba sigue como antes. ■

1.6.3. Ejercicios a la sección 1.6

1. Determinar si las siguientes series convergen y si lo hacen en modo absoluto o condicional.

$$\textbf{a.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^2} \qquad \textbf{b.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \textbf{c.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

$$\textbf{d.} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \qquad \textbf{e.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(1+1/n)} \qquad \textbf{f.} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^s}$$

(Tomad $s > 0$ en **c** y **f**).

2. Sabiendo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$$

son series acotadas, demostrad que la siguientes series convergen

$$\textbf{a.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n^s}, \quad s > 0 \qquad \textbf{b.} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\ln n} \qquad \textbf{c.} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \frac{n!}{n^n} \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

3. Probad que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y sólo si la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambas convergentes.

(Ayuda: Podéis escribir las series de términos positivos y negativos como

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\Big).$$

4. Probad que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también converge. Dad un contraejemplo en el que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge y sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Capítulo 2

Funciones de una variable

2.1. Definiciones y ejemplos

Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una *función real de variable real* es una asignación de un número $y \in \mathbb{R}$ a cada número $x \in X$. Denotaremos a la función por una letra, por ejemplo f, y escribiremos

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = y. \end{aligned}$$

y es la *imagen* de x por f. El conjunto X es el *dominio* de la función f, $\mathrm{dom} f = X$ y el conjunto

$$Y = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists x \in X \ \text{ con } \ f(x) = y\}$$

es el *rango* de f, $\mathrm{rang} f = Y$. También se suele escribir $Y = f(X)$.

En este curso, y salvo mención expresa una función será siempre una función real de variable real.

Ejemplo 2.1.1 *Algunos ejemplos de funciones, sus dominios y rangos.*

a. *Funciones polinómicas.* Son de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$, y $n \in \mathbb{N}$ es el grado del polinomio. Su dominio es siempre $X = \mathbb{R}$. El rango depende de la función particular. Por ejemplo, para

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{el rango es} \quad Y = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y > 1\}.$$

Si tomamos la función constante

$$f(x) = a_0 \quad \text{el rango es} \quad Y = \{a_0\}.$$

Y si tomamos la función identidad

$$\mathrm{id}(x) = x \quad \text{el rango es} \quad Y = \mathbb{R}.$$

b. *Funciones definidas a trozos.* Son funciones definidas con expresiones diversas en distintos intervalos de la recta real. Un ejemplo es la función valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ \text{ si } \ x \in [0, +\infty[\\ \\ -x \ \text{ si } \ x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyo rango es $[0, +\infty[$.

Otro ejemplo es la función parte entera

$$f(x) = [x] = n \quad \text{si} \quad x \in [n, n+1[\qquad \forall\, n \in \mathbb{Z},$$

cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y cuyo rango es el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$.

c. *Funciones racionales.* Son cocientes de funciones polinómicas, esto es,

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y su dominio es} \quad X = \{x \in \mathbb{R} \ / \ q(x) \neq 0\}.$$

El rango depende de las funciones p y q. Un ejemplo particular sería

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \text{definida para} \quad X = \mathbb{R} - \{1\}.$$

El rango de esta función es

$$]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[\qquad \text{(Ejercicio: ¡demostradlo!)}.$$

d. *Funciones analíticas.* Son funciones que se pueden expresar como una serie infinita

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}.$$

El dominio de estas funciones viene dado por los valores de x para los que la serie es convergente. En el caso de las funciones polinómicas, $a_k = 0$ para $k > n$, de modo que la serie infinita se trunca a una suma finita, que es siempre convergente.

Tomemos por ejemplo la serie con $a_k = 1$ para todo k. Tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \text{que converge para } |x| < 1,$$

como vimos en el ejemplo 1.4.1. Es más, la suma de esta serie, cuando converge, es

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Es decir, esta función analítica es igual a una función racional para $|x| < 1$. Para $|x| > 1$, la función racional está bien definida (aunque no la serie de potencias), y su dominio es $X = \mathbb{R} - \{1\}$. El rango se puede calcular fácilmente, $Y = \mathbb{R} - \{-1\}$. ■

Sean f y g dos funciones tales que $\text{rang} f \subset \text{dom}\, g$. Se define la *composición* de f con g y se denota $g \circ f$, como la función

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \qquad \forall\, x \in \text{dom} f.$$

El dominio de $g \circ f$ es $\text{dom}\, g \circ f = \text{dom} f$, y el rango es $\text{rang}\, g \circ f = g(\text{rang} f)$.

Demostrad como ejercicio que la composición de funciones cumple la propiedad asociativa.

Ejemplo 2.1.2

Consideremos la función $\sqrt{1-x^2}$. Esta función se puede escribir como la composición de dos funciones, $f = 1 - x^2$ y $g = \sqrt{x}$. Nótese que el dominio de f, en principio todo $\mathbb{R}$, debe ser restringido al intervalo $[-1, 1]$ para que la expresión $g \circ f = \sqrt{1-x^2}$ tenga sentido. Así pues tenemos

$$\text{dom}\, g \circ f = [-1, 1], \qquad \text{rang}\, g \circ f = [0, 1].$$

■

Una función g es la *inversa* de f si la composición de f con g es la identidad en el dominio de f, esto es,

$$g \circ f = \mathrm{id}, \quad \mathrm{id}(x) = x \qquad \forall x \in \mathrm{dom} f.$$

Nótese que hemos asumido que $\mathrm{rang} f \subset \mathrm{dom}\, g$.

Si llamamos $y = f(x)$, es fácil deducir (usando la propiedad asociativa de la composición)

$$f \circ (g \circ f)(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g(y) = y,$$

es decir, f es la inversa de g. Aquí también hemos asumido que $\mathrm{rang}\, g \subset \mathrm{dom} f$.

Ejemplo 2.1.3

Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$, con $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ y $\mathrm{rang}\, f = [1, +\infty[$. Para hallar la inversa, despejamos la ecuación

$$x^2 + 1 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y-1}.$$

Tenemos dos funciones,

$$\begin{aligned} g_+(y) &= +\sqrt{y-1}, \quad \mathrm{dom}\, g_+ = [1, +\infty[, \quad \mathrm{rang}\, g_+ = [0, +\infty[\\ g_-(y) &= -\sqrt{y-1}, \quad \mathrm{dom}\, g_- = [1, +\infty[, \quad \mathrm{rang}\, g_- = [-\infty, 0[\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g_+ \circ f = \mathrm{id} \quad \text{en} \quad [0, +\infty[, &\qquad f \circ g_+ = \mathrm{id} \quad \text{en} \quad [1, +\infty[\\ g_- \circ f = \mathrm{id} \quad \text{en} \quad]-\infty, 0], &\qquad f \circ g_- = \mathrm{id} \quad \text{en} \quad [1, +\infty[\end{aligned}$$

Luego la función f con dominio restringido a $[0, +\infty[$ tiene inversa g_+ y con dominio restringido a $]-\infty, 0]$ tiene inversa g_-.

Nótese que el hecho de que haya dos funciones inversas en dos dominios diversos se debe a que la función f no es *inyectiva* o *uno a uno*, ya que $f(x) = f(-x)$. Dos números distintos tienen la misma imagen y para definir la función inversa tenemos que escoger uno de estos números. ■

2.1.1. Ejercicios a la sección 2.1

1. Encontrad el dominio, el rango y la inversa de las siguientes funciones:

$$\textbf{a}.f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \qquad \textbf{b}.f(x) = x \qquad \textbf{c}.f(x) = e^x$$
$$\textbf{d}.f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} \qquad \textbf{e}.f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad \textbf{f}.f(x) = sinx$$

2. Sean x_1, x_2, x_3 tres números reales distintos.

a. Encontrad una función polinómica de grado 3 tal que tome el valor 0 en los tres puntos x_1, x_2 y x_3.
b. Encontrad una función polinómica de grado 2 que tome el valor 0 en x_1 y x_2 y que tome el valor 1 en el punto x_3.
c. Sean a_1, a_2, a_3 tres números reales. Encontrad una función polinómica de grado 2 que tome los valores $f(x_i) = a_i$ para $i = 1, 2, 3$.

3. Una función es *par* si $f(x) = f(-x)$ e *impar* si $f(x) = -f(-x)$.

a. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o no tienen paridad definida:

$$|x|, \qquad \sin x, \quad \cos x, \qquad x, \qquad x^2, \qquad x+1, \qquad x^2+1, \qquad e^x.$$

b. Determinar si $f+g$, $f \cdot g$ y $f \circ g$ son pares impares, o no tienen paridad definida en los cuatro casos obtenidos al tomar f par o impar y g par o impar.
c. Si f es una función arbitraria con dominio $\mathbb{R}$, determinar si la siguientes funciones son pares, impares o no tienen paridad definida.

$$f(x) + f(-x), \qquad f(x) - f(-x), \qquad f(|x|), \qquad f(x^2), \qquad f(x^3).$$

d. Demostrad que cualquier función con dominio $\mathbb{R}$ puede ser escrita en forma única como la suma de una función par y una impar.

4. Demostrad o dad un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

$$\textbf{a}.f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h, \qquad \textbf{b}.(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$
$$\textbf{c}.\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g \qquad \textbf{d}.\frac{1}{f \circ g} = f \circ \frac{1}{g}$$

2.2. Límites y continuidad

Definición 2.2.1 Límite de una función. *Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Sea $a \in \mathbb{R}$ (a no necesariamente en X). Decimos que el límite de f cuando x tiende a a es A, y lo denotamos como*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{si} \quad |x - a| < \delta.$$

■

Ejemplo 2.2.2

Consideremos la función $\mathrm{id}(x) = x$. Queremos demostrar que $\lim_{x \to a} \mathrm{id}(x) = a$. Para ello, consideremos $\epsilon > 0$ y supongamos que $|x - a| < \delta$. Está claro que basta escoger $\delta = \epsilon$ y tendremos $|\mathrm{id}(x) - a| < \epsilon$. ■

Ejemplo 2.2.3

Consideremos la función $f(x) = x^2$. Queremos demostrar que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $\delta = \sqrt{\epsilon + a^2} - |a| > 0$. Supongamos que

$$|x - a| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |x| - |a| \leq |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x| < \delta + |a|.$$

Tenemos que

$$|x^2 - a^2| = |x(x - a) + a(x - a)| \leq |x||x - a| + |a||x - a| < (\delta + |a|)\delta + |a|\delta = (\delta + 2|a|)\delta = (\sqrt{\epsilon + a^2} + |a|)(\sqrt{\epsilon + a^2} - |a|) = \epsilon.$$

■

Hay un modo de relajar las condiciones en la definición 2.2.1 de modo que se obtiene la definición de *límites laterales*. Decimos que $f(x)$ tiende a A cuando x tiende a a por la derecha y lo denotamos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{si} \quad 0 < x - a < \delta.$$

Del mismo modo, el límite decimos que $f(x)$ tiende a A cuando x tiende a a por la izquierda y lo denotamos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un δ tal que

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \text{si} \quad -\delta < x - a < 0.$$

Es muy fácil ver que si el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces los límites

$$\lim_{x \to a^\pm} f(x)$$

existen y coinciden con el límite. Viceversa, si ambos límites laterales existen y coinciden, entonces el límite existe.

No obstante, hay ejemplos en que los límites laterales existen y no coinciden, y en ese caso le límite no existe. Consideremos la función del ejemplo 2.1,

$$f(x) = [x] = n \qquad \text{si} \quad x \in [n, n+1[, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Es fácil ver que

$$\lim_{x \to n^+} = n, \qquad \lim_{x \to n^-} = n - 1.$$

Teorema 2.2.4 *Sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = F, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = G.$$

Entonces se cumple que:

a. $\displaystyle \lim_{x \to a}(f + g)(x) = F + G.$

b. $\displaystyle \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = F \cdot G.$

c. $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{F} \qquad$ *si* $\quad f(x) \neq 0$ *y* $F \neq 0.$

La demostración de este teorema es muy similar a la del teorema análogo para sucesiones, teorema 1.3.8, y no la vamos a hacer aquí. ■

Teorema 2.2.5 *Sean f, g y h tres funciones tales que en un cierto intervalo X,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in X.$$

Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Entonces se cumple que:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

La demostración es análoga a la del teorema 1.3.9 para sucesiones. ■

Definición 2.2.6 Función continua. *Una función f es continua en un punto a si el punto a pertenece al dominio de f y si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

■

Ejemplo 2.2.7 *Funciones polinómicas y racionales.*

Es muy fácil (hacedlo como ejercicio) demostrar, usando el ejercicio 2.2.2 y el teorema 2.2.4 que cualquier función polinómica es continua en todo $\mathbb{R}$, y que toda función racional es continua en su dominio de definición. ■

Teorema 2.2.8 *Sea g una función continua en el punto p, f una función continua en el punto q y $f(q) = p$. Entonces, la composición $g \circ f$ es continua en el punto q.*

Demostración. f es continua en el punto q, lo cual significa que para cada ϵ_1 existe δ_1 tal que

$$|f(x) - f(q)| < \epsilon_1 \qquad \text{si} \quad |x - q| < \delta_1.$$

g es continua en el punto p, luego para cada ϵ_2 existe δ_2 tal que

$$|g(y) - g(p)| < \epsilon_2 \qquad \text{si} \quad |y - p| < \delta_2.$$

Tomemos $y = f(x)$ y $\epsilon_1 = \delta_2$ (ϵ_1 es arbitrario). Tenemos que para cada ϵ_2 (que sigue siendo arbitrario), existe δ_1 tal que si $|x - q| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(q)| < \delta_2$ y por tanto $|g(f(x)) - g(f(q))| < \epsilon_2$. ■

Lema 2.2.9 *Sea f una función continua en el punto p. Supongamos que $f(p) > 0$, entonces existe un intervalo abierto $]p-\delta, p+\delta[$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in]p-\delta, p+\delta[$.*

Demostración Puesto que f es continua, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\begin{array}{rcl} -\epsilon < f(x) - f(p) < \epsilon & \Leftrightarrow & f(p) - \epsilon < f(x) < \epsilon + f(p) \quad \text{si} \\ -\delta < x - p < \delta & \Leftrightarrow & p - \delta < x < \delta + p. \end{array}$$

Tomemos $\epsilon = f(p)/2$, y el δ correspondiente a esta elección de ϵ. Tenemos que

$$\frac{1}{2}f(p) < f(x) < \frac{3}{2}f(p) \qquad \text{si} \quad p - \delta < x < p + \delta,$$

y por tanto f es positiva en dicho intervalo. ■

Es obvio que lo mismo se puede demostrar para $f(p) < 0$.

Teorema 2.2.10 Teorema de Bolzano. *Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos. Entonces, existe al menos un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c)$=0.*

Demostración Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ (la demostración es idéntica para el caso $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$). Sea S el conjunto de todos los puntos $x \in [a, b]$ tales que $f(x) \leq 0$. Este conjunto es no vacío, ya que $a \in S$. Por otra parte, S es un conjunto acotado ya que el intervalo $[a, b]$ lo es. Un conjunto de números reales acotado superiormente tiene un extremo superior. Sea c tal extremo superior. Queremos demostrar que $f(c) = 0$.

Por reducción al absurdo. Supongamos que $f(c) > 0$. Entonces, por el lema 2.2.9 hay un intervalo $]c-\delta, c+\delta[$ en que la función es positiva. (Si $c = b$, uno de los extremos, entonces el intervalo es $]c-\delta, c]$). Esto significa que x tal que $c - \delta < x < c$ es una cota superior de S menor que el extremo superior, lo cual es imposible.

Supongamos ahora que $f(c) < 0$. Por el mismo lema, hay un intervalo $]c-\delta, c+\delta[$ en que la función es negativa. (Si $c = a$, el otro de los extremos, entonces el intervalo es $[c, c+\delta[$). En x tal que $c + \delta > x > c$ la función es negativa, y por tanto c no puede ser una cota superior de S. Luego $f(c) = 0$, y $c \neq a$, $c \neq b$.

■

Teorema 2.2.11 Teorema del valor intermedio. *Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a) \neq f(b)$. Entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ por lo menos un vez en el intervalo $[a,b]$.*

Demostración. Como ejercicio, aplicando el teorema de Bolzano. ■

2.2.1. Ejercicios a la sección 2.2

1. Calculad los siguientes límites del tipo $\lim_{x\to a} f(x)$:

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sin\left(\frac{\ln\left[\left(e^{2\pi x}+\sqrt{x-x\cos^2(x^2-1)}\right)^x\right]}{int\left(x^3-2x^2+3x+\frac{5}{2}\right)}\right)$ donde *int(g)* es la parte entera de g

b. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^6-1}{x^3-1}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \pi^2$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|}$

e. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \cos(\ln x)$

2. Calculad los siguientes límites del tipo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$:

a. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2x^2-2x^3+2$ **b**. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x}$ **c**. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+5x^2}{-x^4+10x+5}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+x}{6x^3-x^2}$ **e**. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+x+3}}{6x}$

3. Indicad si son continuas las siguientes funciones. En el caso de no ser indicad en qué punto o puntos no lo son:

a. $f(x)=|x|$ **b**. $f(x)=\begin{cases} |x^3|-1 & \text{si } x\le -1 \\ \sin(2\pi x) & \text{si } -1<x<1 \\ 2x^2-2x+1 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

c. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ **d**. $f(x)=\begin{cases} e^{x^2-1} & \text{si } x\le 1 \\ \sqrt{-2x^2+10x-8} & \text{si } x>1 \end{cases}$

e. $f(x)=\ln(\sin x)$

4. Dada una función real de variable real f continua en el intervalo $[0,1]$. Asumid que $0\le f(x)\le 1$ para cada $x\in[0,1]$. Probad que existe al menos un punto $c\in[0,1]$ para el cual $f(c)=c$. Este tipo de punto se llama *punto fijo*. El resultado de este ejercicio es un caso especial del teorema de punto fijo de Brouwer. *Ayuda: Aplicad el teorema de Bolzano a* $g(x)=f(x)-x$.

5. Si f es una función continua en $[0,1]$, sea $\| f \|$ el valor máximo de $|f|$ en $[0,1]$.

a. Demostrad que se cumpl $\| cf \| = |c| \cdot \| f \|$.
b. Demostrad que $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$. Dad un ejemplo en el cual $\| f + g \| \neq \| f \| + \| g \|$.
c. Demostrad que $\| h - f \| \leq \| h - g \| + \| g - f \|$.

2.3. Noción de derivada y propiedades

2.3.1. Definición de derivada

Definición 2.3.1 *Sea $D \subset \mathbb{R}$ y consideremos la función $f : D \to \mathbb{R}$. Sea $x \in D$ y h un número real tal que $]x-h, x+h[\subset D$. La derivada de la función f en el punto x se denota por $f'(x)$ y se define como*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.1}$$

■

Nótese que para calcular el límite estamos considerando la expresión

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

como una *función de h*, es decir, *x es un punto fijo*. La derivada de una función en un punto es por tanto un número real.

Cuando el límite (2.1) existe, diremos que la función f es *derivable* o *diferenciable* en el punto x.

Ejemplo 2.3.2 *Algunos ejemplos de derivadas*

1. Sea $c \in \mathbb{R}$ y f la función constante $f(x) = c$. Entonces f es derivable en todo x y su derivada es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

2. Sea $f(x) = x$. Entonces, para todo x

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

3. Las funciones trigonométricas. Las funciones $\sin x$ y $\cos x$ son continuas y derivables en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$. Las derivadas son

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x.$$

Por el momento tomamos estas propiedades sin demostración. Haremos las demostraciones cuando hayamos introducido el concepto de *integral*.

4. Sea $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Usando la fórmula del binomio

$$(x+h)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m h^{n-m} = x^n + n x^{n-1} h + \mathcal{O}(h^2),$$

donde por $\mathcal{O}(h^2)$ entendemos términos con potencias de h de orden mayor o igual a dos. Está claro que estos términos no contribuirán al límite que queremos calcular, luego

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + n x^{n-1} h + \mathcal{O}(h^2) - x^n}{h} = n x^{n-1}.$$

■

Si la función f tiene derivada en todo punto $x \in S \subset D$, entonces podemos definir la función derivada

$$\begin{array}{rcl} f' : S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f'(x). \end{array}$$

El dominio de definición de f', $S \subset D$, es el conjunto de los puntos donde f es derivable o diferenciable.

La función f' puede seguir siendo derivable, y podemos construir las derivadas segunda f'', tercera f''' y, en general la derivada enésima que denotaremos como $f^{(n)}$. Por ejemplo, es fácil ver que la función $f(x) = x^n$ tiene derivadas de cualquier orden en todos los puntos de la recta real.

2.3.2. Propiedades de las derivadas

A continuación estudiamos la relación entre la continuidad de una función y su diferenciabilidad.

Proposición 2.3.3 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x \in D$. Entonces, f es continua en x.*

Demostración. Tenemos que

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tomando el límite $h \to 0$ de esta expresión, y usando que $f'(x)$ está bien definida, obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

■

La proposición inversa no es cierta. Hay funciones que son continuas en un punto pero no son diferenciables. Un ejemplo es la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$. La función es continua ya que los límites laterales existen y coinciden:

$$\lim_{h\to 0^+} |x+h| = \lim_{h\to 0^-} |x+h| = 0.$$

Sin embargo, lo límites laterales en la expresión de la derivada son:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1, \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1,$$

que no coinciden y, por tanto la derivada no existe.

Teorema 2.3.4 *Sean f y g dos funciones derivables en el punto $x \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple que:*

a. $\quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$

b. $\quad (f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$

c. $\quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad$ *si* $\; g(x) \neq 0.$

Demostración.
a. Tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

de modo que el límite existe y tiene el valor deseado.

b.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x),$$

c. Recordemos que por el lema 2.2.9, si una función continua es diferente de cero en un punto, existe un intervalo abierto en el que la función es diferente de cero. Esto nos permite suponer que $x+h$ está en ese intervalo. Así pues, tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

■

Como aplicación inmediata podemos deducir la fórmula para la derivada del cociente de dos funciones. Combinando **a** y **b**, tenemos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ejemplo 2.3.5

Con el teorema 2.3.4 es fácil calcular las derivadas de polinomios y funciones racionales. En particular, tomemos la función $f(x)=1/x^n=x^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$. En todo punto $x\neq 0$ tenemos, aplicando **c.**

$$f'(x)=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

■

A continuación queremos dar una regla para calcular la derivada de la composición de dos funciones.

Teorema 2.3.6 Regla de la cadena. *Sea g una función derivable en el punto $y \in \mathbb{R}$ y f una función derivable en $x \in \mathbb{R}$ con $y = f(x)$. Entonces la función $g \circ f$ es derivable en el punto x y su derivada es*

$$(g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Demostración Para demostrar este teorema usamos un pequeño "truco". Dado que x es fijo, definimos una función del parámetro h en el modo siguiente:

$$\phi(h) = \begin{cases} \big(g(f(x+h)) - g(f(x))\big)/(f(x+h) - f(x)) & \text{si} \quad f(x+h) - f(x) \neq 0 \\ g'(f(x))) & \text{si} \quad f(x+h) - f(x) = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\phi(h)$ es continua en $h = 0$. En el primero de los casos, basta escribir $f(x+h) = f(x) + k(h)$, con $\text{lím}_{h \to 0} k(h) = 0$, ya que f es continua en x. Observamos entonces que

$$\phi(0) = g'(f(x)).$$

En el segundo de los casos, el valor de ϕ es independiente de h e igual a $g'(f(x))$.

Para $h \neq 0$ tenemos que

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \phi(h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

en los dos supuestos. Por tanto,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) = \quad & \underset{h \to 0}{\text{lím}} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \underset{h \to 0}{\text{lím}}\, \phi(h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \\ & = g'(f(x))f'(x). \end{aligned}$$

■

Con estas propiedades para derivar funciones podremos calcular muchas derivadas.

Nota 2.3.7 *Derivada de la función inversa.*

Consideremos una función inyectiva f y su función inversa,

$$g \circ f(x) = x, \qquad f \circ g(y) = y.$$

Supongamos que estas identidades son válidas para x e y en ciertos intervalos en torno a x_0 y a $y_0 = f(x_0)$ respectivamente, donde las funciones son continuas y derivables. Quisiéramos obtener una expresión para la derivada de g en $y_0 = f(x_0)$ conociendo la derivada $f'(x_0)$.

Aplicando la regla de la cadena a $g \circ f$, tenemos

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = 1, \qquad \Rightarrow \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Esto puede hacerse siempre y cuando $f'(x_0) \neq 0$. En realidad, veremos más adelante que ésta es una condición necesaria para la existencia de una inversa en un intervalo abierto en torno a x. ■

2.3.3. Exercicis a la secció 2.3

Tabla de derivadas

En la siguiente tabla usamos la notación:
$a, n \in \mathbb{R}$
$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x)$

Derivada		**Resultado**
$\dfrac{d}{dx}a$	$=$	0
$\dfrac{d}{dx}\left[f(x)\right]^n$	$=$	$n\left[f(x)\right]^{n-1} f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\ln\lvert f(x)\rvert$	$=$	$\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\sin(f(x))$	$=$	$\cos(f(x))f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\cos(f(x))$	$=$	$-\sin(f(x))f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\tan(f(x))$	$=$	$\sec(f(x))^2 f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}e^{f(x)}$	$=$	$e^{f(x)}f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}a^{f(x)}$	$=$	$\ln(a)a^{f(x)}f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\arcsin(f(x))$	$=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\arccos(f(x))$	$=$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}f'(x)$
$\dfrac{d}{dx}\arctan(f(x))$	$=$	$\dfrac{1}{1+(f(x))^2}f'(x)$

1. Calculeu les derivades ($\frac{d}{dx}$) de les següents funcions *(podeu emprar la taula de derivades)*

a. $4x^6 + 8x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \\ + \pi x^2 - ex + b$

b. $(3x-4)(4x^2 - x + 2)$

c. $\dfrac{x^2-1}{x^2+x}$

d. $\dfrac{(2x+1)^{10}}{(2x-2)^5}$

e. $\ln \dfrac{x+1}{x-1}$

f. $\sin(3x^2 - 2x + 1)$

g. $\cos\left(\ln \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

h. $\tan(2\sec x)$

i. $\sin(3x^2)e^{\cos x}$

j. $7^{\ln 10^x}$

k. $\arcsin(\cos x)$

l. $\ln\left(\arctan\left(7\sin\left(e^x\right)\right)\right)$

2. Calculeu les derivades de les següents funcions sense emprar la taula de derivades

a. $\dfrac{x+1}{x-1}$ **b.** $\ln x$ **c.** e^x

d. $\sin x$ **e.** $\cos x$ **f.** $\arcsin x$

g. $\arccos x$ **h.** $\arctan x$

Ajuda: $\text{lím}_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$, $\text{lím}_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2.4. Máximos y mínimos

Un *máximo relativo* de una función $f : D \to \mathbb{R}$ es un punto p tal que existe un intervalo abierto I, con $p \in I$ tal que

$$f(x) \leq f(p) \quad \forall p \in I \cap D.$$

Nótese que haber puntos $x \in D$ tales que $f(x) > f(p)$, pero éstos no estarán contenidos en el intervalo I. Por eso decimos que es un máximo relativo, ya que está subordinado a la existencia de un intervalo I con dicha propiedad.

Un *mínimo relativo* tiene una definición análoga, con $f(x) \geq f(p)$. En general, diremos que un extremo de f es un punto que es o bien un máximo relativo o bien un mínimo relativo.

Teorema 2.4.1 *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y supongamos que tiene un extremo en un punto p. Si $f'(p)$ existe, entonces $f'(p) = 0$.*

Demostración. Haremos la demostración considerando que p es un máximo relativo. Para un mínimo relativo la demostración es idéntica.

Consideremos la función auxiliar

$$Q(x) = \begin{cases} (f(x) - f(p))/(x - p) & \text{si} \quad x \neq p \\ \\ f'(p) & \text{si} \quad x = p. \end{cases}$$

$Q(x)$ es continua en $x = p$, y queremos demostrar que $Q(p) = 0$.

Por reducción al absurdo. Supongamos que $Q(p) > 0$. Entonces, por el lema 2.2.9 sabemos que existe un intervalo abierto conteniendo a p donde $Q(x) > 0$. En ese intervalo $f(x) > f(p)$, si $x > p$ y $f(x) < f(p)$ si $x < p$, en modo que $Q(x)$ sea siempre positiva. Pero entonces, p no es un máximo relativo.

Igualmente podemos llegar a una contradicción si asumimos que $Q(p) < 0$. Por tanto, $Q(p) = f'(p) = 0$ ∎

Puede haber puntos donde $f'(p) = 0$, pero que no son extremos. Por ejemplo, basta tomar la función creciente (sin máximos o mínimos relativos) $f(x) = x^3$, con $f'(0) = 0$.

Igualmente, puede haber extremos donde la derivada no existe, y por tanto, no están contemplados en el teorema. Un ejemplo es $f(x) = |x| \geq 0$, con un mínimo relativo (también *absoluto* porque lo es en todo el dominio de definición) en $x = 0$.

A continuación damos el teorema del máximo de funciones continuas (sin demostración) como lema para demostrar el teorema de Rolle. Una exposición detallada de este teorema y de su demostración (fácil pero algo larga) la podéis encontrar en cualquiera de las referencias [1, 3].

Lema 2.4.2 Teorema del máximo para funciones continuas. *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en $[a, b]$ tal que*

$$f(c) = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

■

Está claro que el mismo teorema se puede formular para el mínimo.

Teorema 2.4.3 Teorema de Rolle. *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en todos los puntos del intervalo abierto $]a, b[$. Supongamos que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe por lo menos un punto $c \in]a, b[$ donde la derivada $f'(c) = 0$.*

Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$. La función f debe alcanzar un valor máximo M y un valor mínimo m en el intervalo cerrado $[a, b]$. Éstos no pueden alcanzarse en un punto interior del intervalo (donde la función es diferenciable) ya que la derivada sería 0 en ese punto. El máximo y el mínimo deben pues alcanzarse en los puntos extremos del intervalo. Pero $f(a) = f(b) = M = m$, lo que implica que la función es constante en el intervalo cerrado y su derivada en todo punto interior es 0.

Así pués, debe existir al menos un punto c donde $f'(c) = 0$, $a < c < b$. ■

Teorema 2.4.4 Teorema del valor medio. *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, y derivable en todos los puntos del intervalo abierto $]a, b[$. Entonces, existe por lo menos un punto $c \in]a, b[$ donde*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Demostración. Construimos la siguiente función auxiliar:

$$h(x) = f(x)(b-a) - x\big(f(b) - f(a)\big).$$

Observamos que $h(a) = h(b) = f(a)b - af(b)$. Además, h es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ con

$$h'(x) = f'(x)(b-a) - \big(f(b) - f(a)\big).$$

Aplicando el teorema de Rolle a $h(x)$, existe un c tal que $h'(c) = 0$, luego

$$h'(c) = f'(c)(b-a)$$

■

A continuación presentamos una generalización del teorema del valor medio.

Teorema 2.4.5 Teorema del valor medio de Cauchy. *Sean f y g dos funciones continuas en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$, y derivables en todos los puntos del intervalo abierto $]a,b[$. Entonces, existe por lo menos un punto $c \in]a,b[$ donde*

$$f'(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g'(c)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Demostración. Construimos la siguiente función auxiliar:

$$h(x) = f(x)\big(g(b) - g(a)\big) - g(x)\big(f(b) - f(a)\big).$$

Aplicando el teorema de Rolle a esta función obtenemos el resultado deseado. (Hacedlo como ejercicio). ■

A continuación tenemos una serie de teoremas que relacionan el signo de la derivada con el comportamiento de la función. En todos ellos se usa como herramienta el teorema del valor medio.

Teorema 2.4.6 *Sea f una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$, y derivable en todos los puntos del intervalo abierto $]a,b[$. Tenemos que:*

a. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a,b[$, entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$ (esto es, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).*

b. *Si* $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in]a, b[$, *entonces* f *es estrictamente decreciente en* $[a, b]$.

c. *Si* $f'(x) = 0$ *para todo* $x \in]a, b[$, *entonces* f *es constante en* $[a, b]$.

Demostración. Comenzamos por probar **a**. Tenemos que probar que $f(x) < f(y)$ si $a \leq x < y \leq b$. Aplicando el teorema del valor medio al intervalo $[x, y]$ tenemos que existe un c tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Dado que $f'(c) > 0$ y también $y - x > 0$ obtenemos que $f(y) > f(x)$.

La parte **b** se demuestra en el mismo modo. Para la parte **c**, sustituyendo $f'(c) = 0$ tenemos $f(x) = f(y)$, y, por ejemplo tomando $y = b$, $f(x) = f(b)$ para todo $x \in [a, b]$. ■

Teorema 2.4.7 *Sea* f *una función continua en todos los puntos de un intervalo cerrado* $[a, b]$, *y derivable en todos los puntos del intervalo abierto* $]a, b[$, *excepto quizá en un punto* c. *Entonces tenemos:*

a. *Si* $f'(x) > 0$ *para* $x < c$ *y* $f'(x) < 0$ *para* $x > c$, *entonces existe un máximo relativo en* c.

b. *Si* $f'(x) < 0$ *para* $x < c$ *y* $f'(x) > 0$ *para* $x > c$, *entonces existe un máximo relativo en* c.

Demostración. Demostramos el caso **a**, el otro es idéntico. Aplicando el teorema 2.4.6 al intervalo $[a, c]$ tenemos que la función es creciente, luego $f(x) < f(c)$ para todo $x < c$, y aplicándolo al intervalo $[c, b]$, tenemos que la función es decreciente, luego también en este caso $f(x) < f(c)$. Por tanto, f tiene un máximo relativo en c. ■

Teorema 2.4.8 Criterio de la derivada segunda para los extremos. *Sea* c *un punto crítico* ($f'(c) = 0$) *de* f, *con* $c \in]a, b[$. *Supongamos que la derivada segunda existe en* $]a, b[$. *Entonces,*

a. *Si* f'' *es negativa en* $]a, b[$, *entonces* f *tiene un máximo relativo en* c.

b.*Si* f'' *es positiva en* $]a, b[$, *entonces* f *tiene un mínimo relativo en* c.

Demostración. Demostramos el caso **a**, el otro es idéntico. Aplicamos el teorema 2.4.6 a la función f'. Si $f''(x) < 0$, la función f' es estrictamente decreciente. Dado que $f'(c) = 0$, la función f' cambia su signo de positivo a negativo, y aplicando el teorema 2.4.7 tenemos que en el punto c hay un máximo relativo. ■

Nota 2.4.9

Notemos que si $f''(c) \neq 0$, siempre existirá un intervalo en que f'' tendrá el mismo signo que en c, y por tanto bastará comprobar el signo de la segunda derivada en el punto c para decidir si el punto es un máximo o un mínimo.■

Nota 2.4.10

Si $f''(c) = 0$, el criterio de la derivada segunda no decide. Podemos tomar como ejemplos las funciones

$$f(x) = x^4, \qquad g(x) = -x^4, \qquad h(x) = x^3.$$

En todas ellas, la derivada segunda en $x = 0$ es 0. f tiene un mínimo en $x = 0$, g tiene un máximo y para h el punto $x = 0$ no es ni máximo ni mínimo. ■

2.5. Regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital es un teorema sobre límites de cocientes f/g, que asumen la forma indeterminada $0/0$. En la expresión de la regla de L'Hôpital aparecen las derivadas de las funciones f y g, por tanto éstas deben ser diferenciables en un cierto intervalo.

Formularemos el teorema para límites por la derecha ($\lim_{x\to a^+}$). El mismo resultado se obtiene para límites por la izquierda ($\lim_{x\to a^-}$)y, combinando ambos, para límites propiamente dichos ($\lim_{x\to a}$).

Teorema 2.5.1 *Sean f y g dos funciones diferenciables en el intervalo abierto $]a, b[$. Supongamos que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a^+} g(x) = 0.$$

Supongamos tambiés que $g'(x) \neq 0$ para $x \in]a,b[$. Si el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe y tiene valor L, entonces el límite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

también existe y tiene valor L.

Demostración. Usaremos el teorema del valor medio de Cauchy (teorema 2.4.5). Las funciones f y g pueden no estar definidas en los extrmos del intervalo. El extremo superior no es importante y podemos siempre tomar un x tal que $a < x < b$. Entonces f y g están definidas y son continuas en $]a,x]$. Para extenderlas a a en forma continua, basta tomar $f(a) = g(a) = 0$, de modo que su valor coincide con el límite por la derecha. Tenemos pues dos funciones f y g continuas en $[a,x]$ y derivables en $]a,x[$. Según el teorema del valor medio de Cauchy, existe un punto C, $a < c < x$ tal que

$$\big(f(x) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(c) \quad \Rightarrow \quad f(x)g'(c) = g(x)f'(c).$$

g' no se anula en ningún punto del intervalo abierto, y por tanto $g'(c) \neq 0$. Por otra parte, $g(x) \neq 0$, ya que si $g(x)$ fuese igual a 0, por el teorema de Rolle (teorema 2.4.3) aplicado a la función g en el intervalo $[a,x]$, existiría un punto y, $a < y < x$ donde $g'(y) = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que la derivada g' no se anula en todo el intervalo $]a,b[$. Por tanto, podemos escribir sin ambigüedad

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ya que $c \to a$ cuando $x \to a$. ∎

Teorema 2.5.2 Regla de L'Hôpital. *Sea f y g dos funciones continuas y diferenciables en la unión de intervalos intervalos $\tilde{I} =]a-\delta, a[\cup]a, a+\delta[$. Supongamos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

con $g'(x) \neq 0$ *en* $\tilde{I}$ *y que el límite*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe y tiene un valor L*. Entonces el límite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

también existe y tiene el mismo valor L.
Demostración. Es inmediata combinando el resultado del teorema 2.5.1 y su equivalente para límites por la izquierda. El límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe si y sólo si los límites laterales existen y coinciden. Por tanto, basta asegurarse que las hipótesis de los dos teoremas para límites laterales se satisfagan. Nótese que no es necesario asumir que las $f'(a)$ y $g'(a)$ existan, y tampoco que, si existe, $g'(a) \neq 0$ ■

Ejemplo 2.5.3

Consideremos el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Es de la forma 0/0, pero aplicando la regla de l'Hôpital tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

■

2.5.1. Límites infinitos y la regla de L'Hôpital

Diremos que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si para cada número $M > 0$ existe un número $\delta > 0$ (que depende de M) tal que

$$f(x) > M \quad \text{siempre que} \quad |x - a| < \delta.$$

Sea la función $f(x) = 1/x^2$, y $a = 0$. Sea $M > 0$, y tomemos $\delta = 1/\sqrt{M}$. Entonces, si $|x| < \delta$,tenemos que $1/x^2 > M$, así que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

La expresión $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ significa lo mismo de antes con la desigualdad $f(x) < -M$. Los límites laterales infinitos tienen definiciones obvias.

Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ tiene límites (probadlo a partir de la definición como ejercicio)

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty.$$

Diremos que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ (que depende de ϵ) tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad x > N.$$

La definición del límite $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ es la misma pero cambiando la última desigualdad por $x < -N$.

Volviendo a la función $f(x) = 1/x$, tenemos que

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

La regla de L'Hôpital puede también usarse para indeterminaciones del tipo ∞/∞. Supongamos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)}.$$

Ahora tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0, \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

con lo que hemos convertido una indeterminación del tipo ∞/∞ en una indeterminación del tipo $0/0$. Aplicando ahora la regla de L'H'ôpital, tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-g'(x)/g^2(x)}{-f'(x)/f^2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \big(\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \big)^2,$$

asumiendo que todos estos límites existen. Despejando, obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2.5.2. Exercicis a la secció 2.4 y 2.5

1. Trobeu tots els extrems relatius de les següents funcions. Indiqueu si són màxims o mínims.

a.	$8x^5 - 15x^4 - 80x^3 + 70x^2 + 120x - 40$	**b**.	$\sin(x)$
c.	$\cos(x)$	**d**.	$\ln(x)$
e.	$-\frac{1}{2}(x+1)\cos^2(x) + \frac{1}{4}\sin(x)\cos(x) + \frac{x}{4}$	**f**.	$\frac{x+1}{x^2+1}$

2. Calculeu els següents límits:

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

b. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\sin^3 x}$

d. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{\ln x}$

e. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{e^{2x}-1}$

f. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

g. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

h. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

i. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{3}{\ln x}}$

j. $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^{\tan(2x)}$

k. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2^x}{3^x}$

l. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x + x}{3^x}$

m. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$

n. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$

o. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

p. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{\sin x}$

q. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{4+\sin x}$

r. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3+8}{x^2+5}$

s. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$

t. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+2}}{x}$

u. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$

v. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{e^x}$

w. $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

x. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{e^x - \frac{1}{x}}{e^x + \frac{1}{x}}$

y. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(3x)}{\ln(1+x)}$

z. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)}{2\sin x}$

2.6. Serie de Taylor

Definición 2.6.1 *Sea f una función continua y tal que sus derivadas de orden n $f^{(n)}$ existen para todo $n \in N$ en un intervalo abierto del punto a. El polinomio de Taylor de orden n se define como*

$$P_f^n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

■

Notemos que el polinomio de Taylor de orden n para f' es simplemente

$$P_{f'}^{n-1}(x) = \big(P_f^n\big)'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

$P_f^n(x)$ es una serie numérica para cada x. Podemos preguntarnos si el límite de la serie

$$\lim_{n\to\infty} P_f^n(x)$$

existe, y qué relación tiene con la función $f(x)$.

Para ello, **asumamos** que la función $f(x)$ puede ser representada como una *serie de potencias en torno al punto a* (ver el ejemplo 2.1.1 **d**), es decir por una serie del tipo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k,$$

en un cierto intervalo $]a-\delta, a+\delta[$, con $\delta > 0$. Supongamos también que la derivada "atraviesa" el símbolo de la suma infinita. Entonces

$$f^{(k)}(a) = k! f_k,$$

y podemos concluir que la la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.2}$$

es sumable y su suma es igual a $f(x)$. Decimos que (2.2) es el *desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ en torno al punto a.*

En realidad, se puede probar que si una función es representable por una serie de potencias (esto es, es una función *analítica*), entonces esa serie de potencias es su desarrollo en serie de Taylor.

No es suficiente que una función sea C^∞ (es decir, que sus derivadas de orden n existan para todo $n \in N$) para asegurar que es una función analítica. Por otra parte, a veces una función infinitamente derivable puede ser analítica en un intervalo y no analítica en otro.

Ejemplo 2.6.2

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{x^2-1} & |x| < 1 \\ \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Esta función es C^∞. Los únicos puntos problemáticos pueden ser ± 1. Examinemos el punto $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} \exp \frac{1}{x^2 - 1} = 0,$$

y por tanto la función es continua en $x = 1$. Sabiendo que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\exp \frac{1}{x^2-1}}{(x^2 - 1)^m} = 0,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, podemos ver que la función es C^∞ en el punto $x = 1$. Lo mismo se puede probar para $x = -1$. Sin embargo, todas las derivadas son 0 en esos puntos, así que si la función fuera analítica en un entorno de 1 ó -1, sería idénticamente 0. ∎

Ejemplo 2.6.3

Volviendo al ejemplo 2.1.1 **d**, habíamos obtenido una representación en serie de potencias de la función

$$\frac{x}{x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \qquad x \in]-1, +1[.$$

La serie no converge fuera de este intervalo, y decimos que su *radio de convergencia* en torno al punto 0 es $r = 1$.

Ahora bien, esta función es C^∞ excepto para $x = 1$. Calculemos su derivada enésima en el punto $x = 2$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x-1)^n}, \qquad f^{(n)}(2) = (-1)^n n!,$$

con lo que tenemos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n (x-2)^n, \qquad x \in]1,3[.$$

Comprobad como ejercicio que la serie es convergente en el intervalo indicado. Luego la serie tiene radio de convergencia 1 en torno al punto $x = 2$.

¿Cuál es el radio de convergencia para $x = 3$?

■

Capítulo 3

Integración de funciones de una variable

3.1. La integral como definición del área

3.1.1. Concepto de integrabilidad

Consideremos un intervalo $[a, b]$. Una *partición* del intervalo es una colección finita de puntos de $[a, b]$, tal que uno de ellos es a y otro es b. Los puntos de una partición se pueden ordenar

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

En lo que sigue, y salvo indicación contraria, las particiones se referirán al intervalo $[a, b]$ y se denotarán como $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$.

Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$. Sea

$$\begin{aligned} m_i &= \text{ínf}\{f(x) \ / \ t_{i-1} \le x \le t_i\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) \ / \ t_{i-1} \le x \le t_i\}. \end{aligned}$$

La *suma inferior* de f para la partición P se define como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La *suma superior* de f para la partición P se define como

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Notemos que la función f debe ser acotada en todo el intervalo para que m_i y M_i estén bien definidos. Por otra parte, no exigimos que f sea continua (una función continua es siempre acotada en un intervalo cerrado).

Es inmediato demostrar que, para una partición dada $L(f,P) \leq U(f,P)$. Igualmente intuitivo pero no tan inmediato es demostrar que dadas dos particiones cualesquiera, P y Q

$$L(f,P) \leq U(f,Q).$$

Para demostrar esto, consideremos primero dos particiones P y Q tales que Q tiene sólo un punto más que P (Q contiene a P).

$$\begin{aligned} P &= \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \\ Q &= \{t_0, t_1, \ldots, t_{k-1}, u, t_k, \ldots, t_n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(f,P) - L(f,Q) &= m_k(t_k - t_{k-1}) - m'(u - t_{k-1}) - m''(t_k - u) = \\ & m_k(u - t_{k-1}) + m_k(t_k - u) - m'(u - t_{k-1}) - m''(t_k - u), \end{aligned}$$

donde

$$m' = \text{ínf}\{f(x) \ / \ t_{k-1} \leq x \leq u\}, \qquad m'' = \text{ínf}\{f(x) \ / \ u \leq x \leq t_k\}.$$

Pero

$$m_k \leq m', \qquad m_k \leq m'',$$

de donde

$$L(f,P) - L(f,Q) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad L(f,P) \leq L(f,Q).$$

Igualmente podemos demostrar que $U(f,Q) \leq U(f,P)$ y por tanto

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Lema 3.1.1 *Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$. Si la partición Q contiene a la partición P, entonces*

$$L(f,P) \leq L(f,Q) \quad y \quad U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Demostración. Existe una secuencia de particiones

$$P = P_1 \subset P_2, \cdots \subset P_l = Q$$

tales que P_i tiene sólo un punto más que P_{i-1}. Basta aplicar el argumento anterior repetidamente para obtener el resultado. ■

Teorema 3.1.2 *Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y sean P_1 y P_2 dos particiones arbitrarias de $[a, b]$. Entonces*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2).$$

Demostración. Consideremos la partición $P = P_1 \cup P_2$. P contiene a P_1 y a P_2. Usando el lema 3.1.1 tenemos que

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

■

Tenemos por tanto que $U(f, P)$, para cualquier P, es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores, en particular, $U(f, P)$ es mayor o igual que la cota superior mínima de las sumas inferiores. Es decir,

$$\sup\{L(f, P')\} \leq U(f, P) \qquad \text{para todo } P.$$

Igualmente, $L(f, P)$, para cualquier P, es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores, en particular, $L(f, P)$ es menor o igual que la cota inferior máxima de las sumas superiores. Es decir,

$$L(f, P) \leq \text{ínf}\{U(f, P')\} \qquad \text{para todo } P.$$

Así pues,

$$\sup\{L(f, P')\} \leq \text{ínf}\{U(f, P')\}.$$

Definición 3.1.3 *Decimos que una función f acotada en el intervalo $[a, b]$ es integrable en dicho intervalo si*

$$\sup\{L(f, P)\} = \text{ínf}\{U(f, P)\}.$$

Este número es la integral de f sobre $[a, b]$ y se denota como

$$\int_a^b f \qquad \textit{o bien} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

■

Ejemplo 3.1.4

Sea $f(x) = c$ la función constante en $[a, b]$. Para cualquier partición se cumple que $m_i = M_i = c$ y por tanto

$$L(f, P) = U(f, P) = c(b - a).$$

Esto implica que f es integrable y que

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

$\blacksquare$

Ejemplo 3.1.5

Sea f la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

Consideremos una partición P cualquiera del intervalo $[a, b]$. En cualquier subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ existe siempre un número irracional, y por tanto $m_i = 1$. Por otra parte, en cualquier subintervalo existe también un número racional, y por tanto $M_i = 1$. Tenemos que

$$L(f, P) = 0, \qquad U(f, P) = b - a \qquad \text{para cualquier partición } P.$$

Esta función, por tanto, no es integrable. $\blacksquare$

Teorema 3.1.6 *Sea f una función acotada en $[a, b]$. Entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a, b]$ tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Demostración
$(\longleftarrow)$ Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Tenemos que

$$\inf\{U(f, P')\} - \sup\{L(f, P')\} < U(f, P) - L(f, P) < \epsilon,$$

de lo que se sigue que $\text{ínf}\{U(f, P')\} = \sup\{L(f, P')\}$ y por tanto la función es integrable.

$(\rightarrow)$Si f es integrable $\text{ínf}\{U(f, P')\} = \sup\{L(f, P')\}$, luego, para cada $\epsilon > 0$ siempre podemos encontrar particiones P' y P'' tales que

$$U(f, P'') - L(f, P') < \epsilon.$$

Tomemos una partición P que contenga a P' y a P''. Usando el lema 3.1.1 obtenemos

$$U(f, P) - L(f, P) < U(f, P'') - L(f, P') < \epsilon.$$

■

3.1.2. Propiedades de la integral

Teorema 3.1.7 *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$. Entonces, f es integrable en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ y*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Si f es integrable en $[a, b]$, aplicando el teorema 3.1.6 sabemos que para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

Añadimos el punto c a la partición P (si no lo contiene). La nueva partición también satisfará la desigualdad anterior. La denotamos por P'. Consideremos a hora las particiones

$$\begin{aligned} P_1 &= \{t_0 = a, \dots t_j = c\} \quad \text{de } [a, c] \\ P_2 &= \{t_j = c, \dots t_n = b\} \quad \text{de } [c, b] \end{aligned}$$

con $P' = P_1 \cup P_2$. Se cumple que

$$\begin{aligned} L(f, P') &= L(f, P_1) + L(f, P_2) \\ U(f, P') &= U(f, P_1) + U(f, P_2), \end{aligned}$$

luego

$$(U(f, P_1) - L(f, P_1)) + (U(f, P_2) - L(f, P_2)) = U(f, P') - L(f, P') < \epsilon.$$

Los términos entre paréntesis son no negativos, luego

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \epsilon, \qquad U(f,P_2) - L(f,P_2) < \epsilon$$

y la función f es integrable sobre los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. Obsérvese que

$$L(f,P_1) \leq \int_a^c f \leq U(f,P_1) \qquad L(f,P_2) \leq \int_c^b f \leq U(f,P_2),$$

y sumando ambas desigualdades

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq U(f,P') \leq U(f,P)$$

para todo P. De este modo

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

■

Nota 3.1.8

Podéis probar como ejercicio que si f es integrable en los intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$, entonces es integrable en $[a,b]$ (ver [3]). ■

Teorema 3.1.9 *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces $f+g$ y cf son integrables sobre $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b cf = c\int_a^b f$$

Demostración. La demostración no es difícil y la podéis mirar en cualquier libro de texto (por ejemplo [3]). Se usa, como en la demostración precedente, el teorema 3.1.6. ■

Teorema 3.1.10 *Sea f es integrable en $[a,b]$. La función*

$$F(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Demostración. Sea $c \in [a, b]$. Sea M una cota superior para f

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Para $\epsilon > 0$ tenemos

$$F(c+\epsilon) - F(c) = \int_a^{c+\epsilon} f - \int_a^c f = \int_c^{c+\epsilon} f.$$

Tenemos que

$$-M\epsilon \leq \int_c^{c+\epsilon} f \leq M\epsilon \quad \Rightarrow \quad -M\epsilon \leq F(c+\epsilon) - F(c) \leq M\epsilon$$
$$\Rightarrow \quad |F(c+\epsilon) - F(c)| \leq M\epsilon.$$

Basta tomar $\delta = \epsilon/M$ y tenemos que

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} F(c+\epsilon) = F(c).$$

Para el límite izquierdo se puede usar un argumento similar, y tener en cuenta que, por definición, si $a < b$

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

■

3.2. Teorema fundamental del cálculo

Teorema 3.2.1 Primer teorema fundamental del cálculo. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Sea*

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b].$$

Si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $]a, b[$ y

$$F'(c) = f(c).$$

Demostración. Tenemos que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}.$$

Supongamos que $h > 0$.

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

Sean m_h y M_h el ínfimo y el supremo respectivamente de $f(x)$ con $x \in [c, c+h]$. Sabemos que

$$m_h \cdot h \leq \int_c^{c+h} f \leq M_h \cdot h \quad \Rightarrow \quad m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h.$$

Dado que f es continua, tenemos que

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f(c),$$

lo cual implica que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Para el límite izquierdo podemos usar un argumento similar, y por tanto tenemos que

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

■

Corolario 3.2.2 *Si f es continua en $[a, b]$ y g es tal que $f = g'$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f$. Entonces $F' = f$, luego $F = g + k$ para $k \in \mathbb{R}$. Basta considera la condición de contorno $F(a) = 0$, y por tanto $k = -g(a)$, luego

$$F(x) = g(x) - g(a).$$

Basta tomar $x = b$ y tenemos el resultado. ■

Teorema 3.2.3 Segundo teorema fundamental del cálculo. *Si f es integrable en $[a, b]$ y g es tal que $f = g'$, entonces*

$$\int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Consideremos el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ y apliquemos el teorema del valor medio a la función g en ese intervalo,

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1})$$

para algún $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Claramente tenemos que

$$\begin{aligned} &m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \Rightarrow \\ &m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

y sumando para todos los subintervalos

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f, P).$$

Esto es cierto para toda partición P. Pero ésta es la definición de la integral de una función integrable, luego

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f.$$

■

Teorema 3.2.4 *Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Consideremos el intervalo $[x, y]$, $a \leq x < y \leq b$ y las funciones

$$L(x, y) = \sup\{L(f, P)\}, \qquad U(x, y) = \text{ínf}\{U(f, P)\},$$

donde P denota una partición del intervalo $[x, y]$ y el supremo y el ínfimo están calculados sobre todas las particiones posibles de este intervalo. Si la función es integrable en el intervalo $[x, y]$, entonces $L(x, y) = U(x, y)$, pero en general $L(x, y) \leq U(x, y)$. Aunque la función no sea integrable, el supremo y el ínfimo (a veces llamados integral inferior e integral superior) satisfacen las propiedades

$$L(x,c)+L(c,y)=L(x,y), \qquad U(x,c)+U(c,y)=U(x,y), \quad x<c<y.$$

(Probadlo, como ejercicio).

Nosotros queremos demostrar que $L(a,b)=U(a,b)$.

Sea ahora $h>0$ y sean

$$\begin{aligned} m_h &= \text{ínf}\{f(t),\ t\in[x,x+h]\} \\ M_h &= \sup\{f(t),\ t\in[x,x+h]\} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$m_h\cdot h \le L(x,x+h) \le U(x,x+h) \le M_h\cdot h.$$

Esto es equivalente a escribir

$$m_h\cdot h \le L(a,x+h)-L(a,x) \le U(a,x+h)-U(a,x) \le M_h\cdot h.$$

Dividiendo por $h>0$,

$$m_h \le \frac{L(a,x+h)-L(a,x)}{h} \le \frac{U(a,x+h)-U(a,x)}{h} \le M_h.$$

Pero f es continua en x, luego

$$\lim_{h\to 0^+} m_h = \lim_{h\to 0^+} M_h = f(x),$$

y esto implica

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{L(a,x+h)-L(a,x)}{h} = \frac{U(a,x+h)-U(a,x)}{h} = f(x).$$

El mismo tipo de argumento se puede usar para $h<0$, y por tanto hemos demostrado que

$$L'(a,x)=U'(a,x)=f(x) \quad\Rightarrow\quad U(a,x)=L(a,x)+k.$$

(La derivada está calculada con respecto a la variable x). La condición de borde nos dice que

$$L(a,a)=U(a,a)=0 \quad\Rightarrow\quad k=0 \quad\Rightarrow\quad U(a,x)=L(a,x).$$

En particular

$$U(a,b)=L(a,b) \quad\Rightarrow\quad \text{la función } f \text{ es integrable.}$$

■

3.3. Las funciones trigonométricas

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2$ con coordenadas cartesianas (x, y) y en él el círculo unidad definido por la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Consideremos sólo los puntos del semiplano superior, $y \geq 0$. El semicírculo dentro del semiplano superior es la gráfica de la función

$$y = f_+(x) = +\sqrt{1 - x^2}, \qquad y \in [-1, +1].$$

El semicírculo en el semiplano inferior corresponde al otro signo de la raíz

$$y = f_-(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad y \in [-1, +1].$$

Las funciones $f_\pm$ son continuas, y por tanto integrables. Llamaremos π al área del círculo unidad, calculado como dos veces el área de la región comprendida entre el eje horizontal y la gráfica de f_+.

$$\pi = 2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Se puede demostrar que π es un número irracional, y hay muchas formas de calcular aproximaciones a este número.

Consideremos ahora un punto $x \in [-1, 1]$. El punto con coordenadas cartesianas $P = (x, +\sqrt{1 - x^2})$ es un punto sobre la circunferencia. La recta que va desde el origen O hasta P determina un *sector circular*, definido como la región interior al círculo unidad y limitada por el semieje horizontal positivo y la recta $\overline{OP}$. Sea $Q = (x, 0)$. Podemos calcular el área de este sector circular como el área del triángulo OPQ,

$$\frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2}$$

más el área del la región delimitada por el eje horizontal y la gráfica de f_+ en el intervalo $[x, 1]$, esto es,

$$\int_{x}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt.$$

Tenemos entonces que el área del sector circular determinado por x es

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt. \tag{3.1}$$

Es fácil comprobar que esta misma fórmula es válida para $x < 0$. Por ejemplo,

$$A(-1) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}, \qquad A(0) = 0.$$

De hecho, tenemos que $A(x)$ es una función continua, derivable y decreciente, y $0 \leq A(x) \leq \pi/2$.

Consideremos ahora $\theta \in [0, \pi]$. Definimos el coseno de θ como el punto $x \in [-1, 1]$ tal que el sector circular determinado por $(x, \sqrt{1-x^2})$ tiene área $\theta/2$, esto es

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{\theta}{2}.$$

El *ángulo* θ es por tanto proporcional al área del correspondiente sector circular. Denotaremos $x = \cos\theta$. El seno de θ se define simplemente como

$$\sin\theta = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\cos\theta)^2}.$$

Las definiciones del seno y el coseno cuando $\theta \in [\pi, 2\pi]$ pueden extenderse como

$$\sin\theta = -\sin(2\pi-\theta), \qquad \cos\theta = \cos(2\pi-\theta).$$

Estos ángulos representan sectores circulares determinados por puntos $(x, -\sqrt{1-x^2})$, y son así mismo proporcionales al área.

Queremos ahora calcular las derivadas de las funciones seno y coseno. Tenemos que

$$B(\cos\theta) = 2A(\cos\theta) = \theta,$$

luego la función $B = 2A$ es la inversa del coseno. Por la regla de la cadena tenemos que

$$B'(\cos\theta)\cdot\cos'\theta = 1 \quad\Rightarrow\quad \cos'\theta = \frac{1}{B'(\cos\theta)}.$$

Basta ahora calcular B', pero de la ecuación (3.1) se obtiene que

$$B'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad\Rightarrow\quad B'(\cos\theta) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sin\theta}.$$

Por tanto,

$$\cos' \theta = -\sin \theta.$$

Dado que $\sin \theta = \sqrt{1 - (\cos \theta)^2}$, es fácil deducir que

$$\sin' \theta = \cos \theta.$$

3.4. Las funciones logarítmica y exponencial

La función exponencial tiene una definición natural e intuitiva para números racionales. Pero esta definición no puede extenderse para todo número real. Para definir correctamente las funciones exponencial y logarítmica, el concepto de integral viene en nuestra ayuda.

Definición 3.4.1 *Definimos la función logaritmo,* ln *para* $x > 0$ *como*

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$

■

Veremos que las propiedades usuales del logaritmo pueden deducirse con esta definición. En primer lugar, es fácil ver que

$$\ln x > 0 \ \text{ si } x > 1, \quad \text{y que} \quad \ln x < 0 \ \text{ si } x < 1.$$

Esto es así porque $1/t > 0$ si $t > 0$, y la integral se puede interpretar como el área comprendida entre la curva de la función y el eje horizontal. Además,

$$\int_a^b f = -\int_b^a f,$$

con lo que se obtiene el signo negativo para valores $x < 1$.

El teorema fundamental del cálculo nos asegura que la función ln es derivable y su derivada es

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Consideremos ahora $y > 0$ y definamos la función auxiliar

$$f(x) = \ln(xy).$$

Derivando (siempre con respecto a x) y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{1}{x} = \ln'(x).$$

Esto quiere decir que

$$f(x) = \ln x + c,$$

para alguna constante c. Sustituyendo $x = 1$ podemos calcular el valor de esta constante:

$$f(1) = \ln y = \ln 1 + c = c.$$

Luego

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

que es otra de las propiedades del logaritmo.

Es fácil deducir que

$$\ln x^n = n \ln x, \qquad \text{para } n \text{ un número natural,}$$

y que

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

(Demostradlo como ejercicio.)

El dominio de definición de la función ln es el conjunto de los reales positivos, $\mathbb{R}^+$ (excluído el 0). Nos interesa conocer el rango de esta función. ln es una función creciente. Consideremos, para un número natural n

$$\ln 2^n = n \ln 2 > 0.$$

Esta sucesión tiende a ∞ cuando n tiende a ∞, y por tanto podemos deducir que la función ln no está acotada superiormente. Igualmente,

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n = n \ln \frac{1}{2} < 0.$$

Esta sucesión tiende a $-\infty$ cuando n tiende a ∞, y por tanto podemos deducir que la función ln no está acotada inferiormente. Dado que la función ln es continua, podemos concluir que el rango es todo $\mathbb{R}$.

Definición 3.4.2 *La función exponencial se define como la inversa del logaritmo*

$$\exp y = \ln^{-1} y.$$

■

El dominio de exp es todo $\mathbb{R}$ mientras que el rango es $\mathbb{R}^+$. Podemos deducir ahora otras propiedades de la función exponencial. Por ejemplo, su derivada es

$$\exp' y = (\ln^{-1})'(y) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1} y}} = \exp y.$$

Si x e y son dos números reales, entonces

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y.$$

Para demostrar esta propiedad basta aplicar ln a ambos lados de la igualdad.

El número e se puede definir como

$$e = \exp 1, \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\, dt.$$

Se puede demostrar que e es un número irracional.

Finalmente, podemos cambiar la *base* del logaritmo y de la exponencial. Hasta ahora habíamos trabajado en base e.

Definición 3.4.3 *Sea $a > 0$, definimos*

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

■

Ésta es la exponencial en base a. Nótese que para $a = e$ la definición es consistente, es decir

$$\exp x = e^x$$

en la nueva notación.

El logaritmo en base a es la inversa de la función exponencial en base a. El resto de propiedades de las funciones logarítmica y exponencial se siguen fácilmente de estas definiciones. Por ejemplo, es inmediato ver que

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Luego sólo en base e es la función exponencial igual a su derivada.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Calculus* Vol. 1. Editorial Reverté, Barcelona (1991).

[2] T. M. Apostol, *Calculus* Vol. 2. Editorial Reverté, Barcelona (1991).

[3] M. Spivak, *Calculus* Vol. 1. Editorial Reverté, Barcelona (1970).

[4] M. Spivak, *Calculus* Vol. 2. Editorial Reverté, Barcelona (1970).