



VNIVERSITATIS VALÈNCIA

Ruptura de la simetría $SU(3)$ de
sabor en desintegración
semileptónica de hiperones:
Determinación de V_{us}

Vicent Mateu Barreda

IFIC, Departament de Física Teòrica

Trabajo de Investigación de 3r Ciclo

Mayo 2005

A mon père

Índice

Introducción	III
1. Expansión de QCD en $1/N_C$	1
1.1. Introducción	1
1.2. Reglas de conteo de N_C para QCD	2
1.3. Reglas de conteo de N_C para funciones de correlación	7
1.4. Fenomenología y éxitos de la expansión	8
2. Estructura de espín–sabor de los bariones en la expansión $1/N_C$	11
2.1. Introducción	11
2.2. Reglas de conteo de N_C para bariones	11
2.3. Condiciones de consistencia	14
2.4. Representaciones irreducibles de los bariones	18
2.5. Expansión en $1/N_C$ para bariones	19
2.6. Identidades de operadores	22
2.6.1. Operadores de cero cuerpos	24
2.6.2. Operadores de un cuerpo	24
2.6.3. Operadores de dos cuerpos	25
2.6.4. Operadores de más de dos cuerpos	27
2.7. Identidades de operadores para el caso de dos y tres sabores	28
2.8. Reglas de reducción de operadores para dos y tres sabores	28
2.9. Ruptura de la simetría de sabor	29
2.10. Éxitos fenomenológicos de la expansión	30
3. Desintegración semileptónica de hiperones y parametrización teórica de los factores de forma	33
3.1. Desintegración semileptónica de hiperones	33
3.1.1. Introducción	33
3.1.2. Definición de los factores de forma	33
3.1.3. Trabajo previo	35
3.2. Parametrización teórica de los factores de forma	36
3.2.1. Introducción	36
3.2.2. Límite de simetría SU(3) exacta	37
3.2.3. El teorema de Ademollo–Gatto	39

3.2.4.	Estudio de la ruptura de la simetría en el factor de forma f_1	43
3.2.5.	Estudio de la ruptura de simetría en el factor de forma g_1	48
3.2.6.	Resto de factores de forma	51
3.2.7.	Comparativa de los casos de ruptura de simetría y simetría exacta	53
4.	Observables en la desintegración semileptónica de hiperones	55
4.1.	Introducción	55
4.2.	Dependencia en q^2 de los factores de forma	56
4.3.	Correcciones radiativas	57
4.4.	Cálculos analíticos	60
4.4.1.	Vida media	61
4.4.2.	Correlación electrón–neutrino	62
4.4.3.	Desintegración de un barión polarizado	62
4.4.4.	Medidas de polarización sobre el barión final	63
5.	Análisis numérico y resultados	67
5.1.	Introducción	67
5.2.	Diferentes opciones de valores experimentales para realizar el ajuste	67
5.3.	Ajuste suponiendo simetría exacta	68
5.4.	Ruptura de simetría en g_1	70
5.5.	Ruptura de simetría en f_1 y g_1	70
5.6.	Estudio de los errores sistemáticos	74
5.7.	Valores finales	75
5.8.	Consistencia de la ruptura de la simetría SU(3) en los observables	77
5.9.	Impacto numérico de f_2	78
5.10.	Estimaciones de la ruptura de simetría SU(3) en f_1	79
5.11.	Estimación del error inducido en $ V_{us} $ por la ruptura de simetría	80
5.12.	Comparativa del resultado obtenido en este trabajo con resultados obtenidos en otros estudios.	81
5.13.	Análisis de los resultados	82
	Conclusiones	85
	Apéndice A: Notas sobre el grupo SU(3)	87
	Apéndice B: Funciones de onda de los bariones	91
	Apéndice C: Comentarios sobre el espacio fásico	101
	Apéndice D: Integración de estructuras de Lorentz	105
	Apéndice E: Fórmulas útiles para trabajar con espinores	111
	Bibliografía	115

Introducción

El objetivo de este trabajo de investigación es estudiar la ruptura de la simetría $SU(3)$ de sabor en desintegraciones semileptónicas de hiperones de espín $\frac{1}{2}$, y ver de qué modo afecta esto a la extracción del parámetro de la matriz CKM V_{us} . Estos procesos bariónicos están muy afectados por las interacciones fuertes. La cromodinámica cuántica (QCD), en este régimen de energías, es una teoría no perturbativa, de modo que el tratamiento de nuestro problema requerirá métodos no perturbativos. Los métodos no perturbativos son más complicados cuando se quiere tener en cuenta la ruptura de la simetría $SU(3)$ de sabor.

El valor actual de $|V_{us}|$ es [1]

$$V_{us} = 0.2217 \pm 0.0025, \quad (1)$$

y tiene en cuenta las determinaciones recientes obtenidas a partir de la desintegración semileptónica de hiperones [2], K_{e3} [3, 4, 5], desintegraciones hadrónicas del leptón τ [6] o cálculos usando técnicas de Lattice QCD [7].

La determinación de V_{us} y V_{ud} proporciona, hoy por hoy, el mejor test de la unitariedad de la matriz CKM. El valor de V_{ud} se extrae de las transiciones nucleares β superpermitidas de tipo Fermi, $0^+ \rightarrow 0^+$, mediante un promedio de las nueve mejores medidas de estas transiciones. El valor de V_{us} se puede extraer de una manera muy limpia de los procesos con kaones del tipo K_{e3} , aunque también se pueden extraer de desintegraciones semileptónicas de hiperones.

Comparemos ambas posibilidades. La parte leptónica del proceso factoriza y consecuentemente no presenta ninguna complicación. En el caso de los kaones, solamente aparece la contribución correspondiente a la corriente vectorial, ya que la corriente vector-axial no puede conectar el estado inicial con el estado final. Consecuentemente solamente aparecen dos factores de forma. Como los efectos de ruptura de simetría $SU(3)$ en las corrientes vectoriales están protegidos a primer orden por el teorema de Ademollo-Gatto [8], se espera que estas correcciones sean pequeñas. En el caso de la desintegración de hiperones, contribuyen tanto las corrientes vector-axiales como las vectoriales, de modo que tenemos más factores de forma. Además de esto, la corriente vector-axial no está protegida por el teorema de Ademollo-Gatto.

Las correcciones radiativas están mucho mejor entendidas en el caso de los mesones que en el de los bariones. En el caso de los mesones se pueden hacer cálculos independientes de modelo, mientras que para los bariones siempre hay una contribución que depende de modelo.

Por último hay que discutir el tratamiento teórico de la ruptura de la simetría $SU(3)$ en QCD a bajas energías. En el caso de los mesones, este tratamiento es abordable usando técnicas de teorías efectivas, como Teoría Quiral de Perturbaciones o Teoría Quiral de Resonancias. Para bariones existen teorías efectivas, pero no son demasiado útiles a la hora de realizar un estudio de la ruptura de la simetría.

¿Cuál es entonces el marco adecuado en el que estudiar estos efectos de ruptura de simetría? Pensando en términos de la expansión en $1/N_C$ de QCD, nos damos cuenta de que las correcciones en $1/N_C$ que aparecen en los observables calculados usando estas técnicas son del mismo orden que las esperadas en la ruptura de simetría en bariones, proporcionales a $\epsilon \sim \frac{m_s}{\Lambda_{QCD}} \sim 0.3$. Entonces parece que se puede hacer una expansión conjunta en $1/N_C$ y ϵ para estudiar la ruptura de la simetría en bariones. Este será el procedimiento que se seguirá en este trabajo.

Capítulo 1

Expansión de QCD en $1/N_C$

1.1. Introducción

Pese a que se sabe que QCD es la teoría que rige las interacciones fuertes, no se sabe cómo tratar con ella para describir la fenomenología hadrónica de bajas energías ($E \lesssim 2$ GeV). Esto quiere decir que aunque conozcamos el lagrangiano de QCD, éste está escrito en términos de campos de quarks y gluones, mientras que los grados de libertad a bajas energías son los hadrones. Esto ocurre porque, según se cree, QCD es una teoría confinante, y su constante de acoplo crece a bajas energías, lo que hace inviable un tratamiento perturbativo.

Fue sugerido por primera vez por 't Hooft [9, 10] que muchas de las características de QCD a bajas energías podrían ser entendidas al considerar una teoría gauge $SU(N_C)$ de quarks y gluones en la que se considera el límite $N_C \rightarrow \infty$. Aunque esto pueda parecer que no tiene mucho que ver con la realidad, siempre podemos pensar que estamos haciendo una expansión perturbativa de $SU(N_C)$, con parámetro de expansión $1/N_C$, centrada en $1/N_C = 0$, y que el primer término de esta expansión es el límite $N_C \rightarrow \infty$. De hecho, como veremos más adelante, esta expansión es equivalente a una expansión semiclásica para una teoría efectiva en la que los grados de libertad son los singletes de color hadrónicos.

También se podría pensar que el análisis para un gran número de colores, o peor aún, dejando libre el número de colores, puede complicar las cosas, ya que hacemos más grande el grupo gauge y aumentamos el número de grados de libertad. Veremos que tal cosa no sucede. Por último cabe preguntarse si el parámetro de expansión es suficientemente pequeño para asegurarnos una buena convergencia de la serie perturbativa. En QED el parámetro de expansión no es e , sino $\alpha/4\pi \sim 10^{-3}$,¹ con lo que $e \simeq 1/3$, de modo que no es muy diferente de $1/N_C$, pero en el caso de QCD, el parámetro de expansión es $1/N_C$, y no $1/N_C^2$. Sin embargo, aun así $1/N_C$ es un parámetro de expansión útil para QCD. Por otro lado, las correcciones en $1/N_C$ son comparables a las de la ruptura de simetría $SU(3)$ (debidas éstas a la masa del quark extraño, mayor que las del u y d), y una expansión de QCD en la ruptura

¹Esto es así porque a nivel de amplitudes los vértices siempre aparecen por pares. El factor $1/4\pi$ aparece debido a los loops.

de simetría funciona perfectamente. Como comentario final, en ciertos observables las correcciones a primer orden son nulas, por lo que las correcciones son de orden $1/N_C^2 \sim 10\%$.

Para muchas de las características básicas de la fenomenología hadrónica de bajas energías, la única explicación satisfactoria que tenemos desde un punto de vista fundamental (usando QCD), es el límite $N_C \rightarrow \infty$ de QCD lo cual, en sí mismo, es un motivo para tomarnos en serio esta teoría. Además, para el rango de energías de muchos de los procesos, éste es el único parámetro de expansión conocido que tiene QCD, ya que la masa de los quarks ligeros se considera prácticamente nula, la constante de acoplo es muy grande y la masa de los quarks pesados no entra en la dinámica a bajas energías. El único modo en el que somos capaces de calcular, después de todo, es haciendo expansiones perturbativas.

1.2. Reglas de conteo de N_C para QCD

El lagrangiano de QCD es [11]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \bar{q}(i\not{D} - \mathcal{M})q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G_A^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FP}, \\ D_\mu &= \partial_\mu - ig G_\mu^A T^A, \\ G_{\mu\nu}^A &= \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + gf^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C,\end{aligned}\tag{1.1}$$

en donde $A = 1, \dots, N_C^2 - 1$ etiqueta a los gluones y g es la constante de acoplo. Para QCD $N_C = 3$. En (1.1) q representa un vector columna con n_f componentes, correspondientes a los n_f sabores y además cada componente tiene N_C colores. La única parte del lagrangiano que depende del sabor es \mathcal{M} , la matriz de masas, que por otra parte es diagonal en color. Definimos:

$$G_\mu = G_\mu^A T^A,\tag{1.2}$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^A T^A,\tag{1.3}$$

de modo que

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu]\tag{1.4}$$

$$\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G_A^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\text{Tr} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\tag{1.5}$$

Las matrices T^A y los símbolos f^{ABC} están definidos en el Apéndice A, y solamente actúan en el espacio de color. Reservaremos las letras minúsculas para la representación fundamental y su complejo conjugada ($a = 1, \dots, N_C$) y las mayúsculas para la representación adjunta. Antes de seguir echemos un vistazo a la ecuación del grupo de renormalización:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -b_0 \frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5), \quad b_0 = \frac{11}{3}N_C - \frac{2}{3}N_F,\tag{1.6}$$

en donde N_F es el número de sabores. A primera vista, parece que no tiene un buen comportamiento para N_C grande, o para N_C arbitrario. Sin embargo, si redefinimos $g \rightarrow \frac{\tilde{g}}{\sqrt{N_C}}$ obtenemos:

$$\mu \frac{d\tilde{g}}{d\mu} = - \left(\frac{11}{3} - \frac{2 N_F}{3 N_C} \right) \frac{\tilde{g}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\tilde{g}^5).$$

que tiene un buen comportamiento. Así pues, a partir de ahora consideraremos la constante de acoplo reescalada. De esta manera nos aseguramos que la escala Λ_{QCD} no dependa de N_C cuando N_C es suficientemente grande.

Las reglas de conteaje de QCD en N_C se pueden obtener con la ayuda de una idea debida a 't Hooft. Los propagadores de un quark y un gluón son:

$$\langle q^a(x) \bar{q}^b(y) \rangle = \delta^{ab} S(x-y), \quad (1.7)$$

$$\langle G_\mu^A(x) G_\nu^B(y) \rangle = \delta^{AB} D_{\mu\nu}(x-y), \quad (1.8)$$

y se representan como en las Fig. 1.1(a) y Fig. 1.1(b). En lugar de tratar los gluones usando índices en la representación adjunta, es preferible usar (1.2) y tratarlos con índices en la fundamental:

$$\langle (G_\mu)_b^a(x) (G_\nu)_d^c(y) \rangle = D_{\mu\nu}(x-y) \left(\frac{1}{2} \delta_d^a \delta_b^c - \frac{1}{2N_C} \delta_b^a \delta_d^c \right), \quad (1.9)$$

que en el límite $N_C \rightarrow \infty$ se reduce a

$$\langle (G_\mu)_b^a(x) (G_\nu)_d^c(y) \rangle = \frac{1}{2} D_{\mu\nu}(x-y) \delta_d^a \delta_b^c, \quad (1.10)$$

de modo que admite la representación gráfica de la Fig. 1.1(b).

Cualquier diagrama de Feynman puede ser reescrito usando la notación de doble línea, como en la Fig. 1.2.

Uno puede pensar en los diagramas dibujados en la notación de doble línea como una superficie obtenida pegando polígonos en las dobles líneas (en principio, superficies planas). Solamente podemos construir polígonos orientables, ya que cada línea tiene una flecha.

Para llevar el conteaje en N_C de cada diagrama, solamente tenemos que tener en cuenta que cada loop es un factor N_C y cada acoplo una supresión $1/\sqrt{N_C}$. Aun así es conveniente usar un lagrangiano en el que se han redefinido los campos fermiónicos y gluónicos:

$$\hat{G} = \frac{g}{\sqrt{N_C}} G, \quad (1.11)$$

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{N_C}} q, \quad (1.12)$$

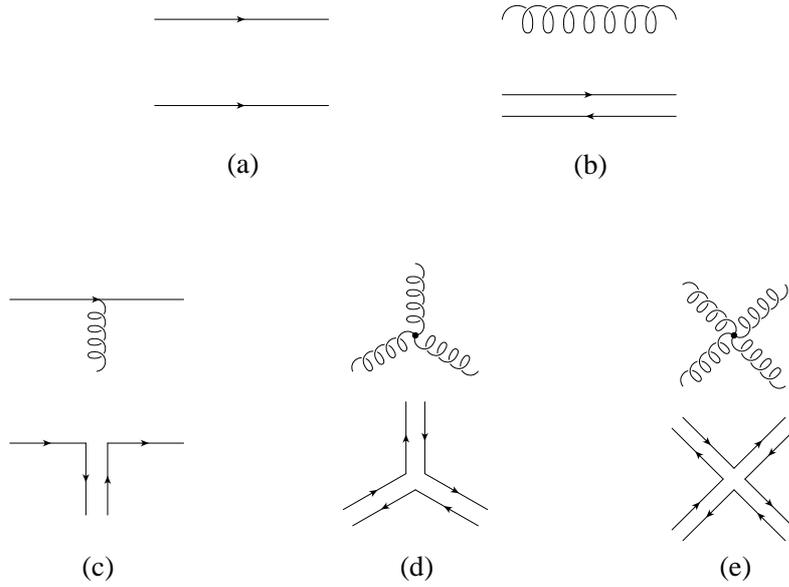


Figura 1.1: Notación de doble línea de 't Hooft [9].

con lo que obtenemos:

$$\mathcal{L}_{QCD} = N_C \left[\bar{\hat{q}} \left(i\hat{D} - \mathcal{M} \right) \hat{q} - \frac{1}{4\tilde{g}^2} \hat{G}_{\mu\nu}^A \hat{G}_{\mu\nu}^A \right], \quad (1.13)$$

Aunque el lagrangiano tenga un factor N_C global, esto no quiere decir que la teoría se reduzca a una teoría semiclásica de quarks y gluones en el límite $N_C \rightarrow \infty$, ya que el número de quarks y gluones crece con N_C .

Podemos ahora leer fácilmente de (1.13) las reglas de conteo de potencias de N_C : cada vértice tiene un factor N_C , y cada propagador $1/N_C$; además, cada loop de color tiene un factor de N_C . En la notación de doble línea, y considerando los diagramas como superficies formadas por polígonos pegados, cada loop de color se corresponde con una cara, y cada propagador (ya sea de quark o de gluón), se corresponde con una arista de los polígonos (cuando dos aristas están pegadas, se cuentan como una sola). Con esto, el orden de un diagrama de vacío conexo es [12]:

$$N_C^{V-E+F} = N_C^\chi, \quad (1.14)$$

con V =vértices (vertex), E =aristas (edge) y F =caras (face); y $\chi = V - E + F$ es un invariante topológico conocido como la característica de Euler. Para una superficie conexa orientable tiene el valor:

$$\chi = 2 - 2h - b, \quad (1.15)$$

con h =asas (handles) y b =bordes (boundary).

Un loop de un quark representa un agujero, luego cada loop de quark lleva consigo una supresión de $1/N_C$. La mayor potencia de N_C que podemos conseguir

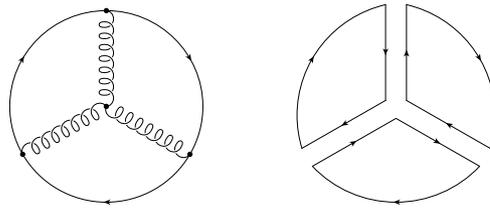


Figura 1.2: Diagrama de Feynman y su correspondiente representación en notación de doble línea. Además éste es un diagrama plano.

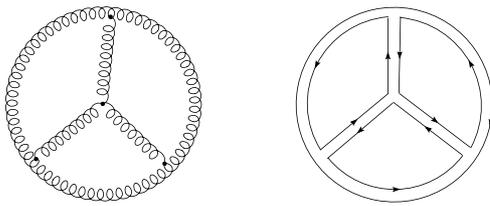


Figura 1.3: Diagrama de Feynman y su correspondiente representación en notación de doble línea, con la topología correspondiente a una esfera.

es dos, cuando $h=b=0$. Corresponden a diagramas de vacío conexos sin loops de quarks, con la topología de una esfera. Para entender esto un poco mejor, fijémonos en la Fig. (1.3). Aparentemente, esta no tiene la topología de una esfera, y esto es así porque no podemos dibujar una esfera en dos dimensiones. Partamos de una esfera (hueca), y ahora la dividimos en dos partes, una de ellas la aplastamos contra el plano, obteniendo la Fig. 1.2. Para pegar la otra mitad, y recuperar nuestra esfera “plana”, identificaremos el punto central de la esta nueva mitad con el infinito, de modo que obtenemos un plano infinito con un agujero central. Pegamos la Fig. 1.2 a este agujero, para obtener la Fig. 1.3, con lo que vemos que finalmente sí tiene la topología de una esfera. Así pues, los diagramas de orden N_C^2 son diagramas planos, solamante con gluones, esto es, que se pueden dibujar en una hoja de papel sin que un gluón salte por encima de otro.

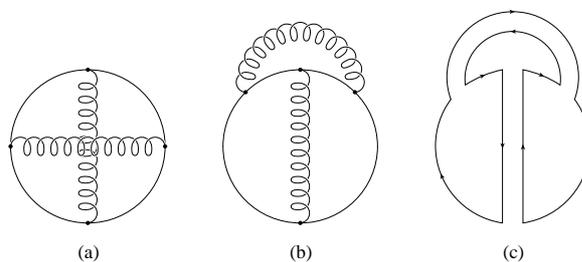


Figura 1.4: Diagrama de Feynman y su correspondiente representación en notación de doble línea. Este diagrama no es dominante.

Si estamos interesados en funciones de correlación que dependen de propiedades de quarks, como las masas, nuestro diagrama debe tener al menos un loop de quarks. Los diagramas con un loop de quarks que dominan la expansión son de orden N_C , con $h=0$, $b=1$; y tienen la topología de una esfera hueca con un agujero en su superficie (o que hemos partido por la mitad). Una vez hemos aplastado la esfera en un plano bidimensional, se corresponde, por ejemplo, con la Fig. 1.2. Entonces, los diagramas dominantes, que tienen un loop de quarks y son de orden N_C , se corresponden con diagramas planos con un loop de quarks formando el borde más exterior del diagrama. En la Fig. 1.4 se muestra un diagrama con un loop de quarks que es subdominante en la expansión. Si se pone el loop de quarks en el borde más exterior, no es plano, y si se dibuja como plano, entonces el loop no puede estar en el borde.

Es muy importante el hecho de que hayamos podido expresar el orden de un diagrama en términos de un invariante topológico, ya que esto hace que nuestros resultados tengan un carácter general, independientemente del número de gluones intercambiados.

Para finalizar vamos a explicar con palabras lo que significa la expansión en $1/N_C$. La expansión en la constante de acoplo g da lugar a los diagramas de Feynman. Para obtener un diagrama de la expansión en $1/N_C$ necesitamos un número infinito de diagramas de Feynman. Por ejemplo, para obtener el primer término en la expansión en un diagrama de vacío con un loop de quarks necesitamos los infinitos diagramas de Feynman que son planares y tienen el loop de quarks en el borde más exterior. Esto se puede entender mirando la Fig 1.5, en donde la suma de infinitos diagramas como el de la izquierda dan el diagrama de la expansión en $1/N_C$ de la derecha. La suma analítica de estos diagramas de Feynman es una tarea formidable, y hasta ahora no se ha conseguido hacer. Aun así se pueden extraer conclusiones fenomenológicas a partir de las reglas que se han derivado.

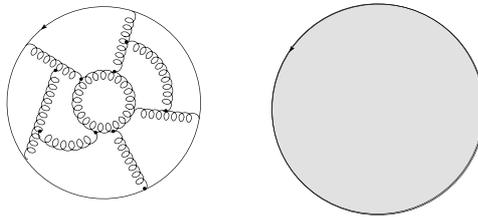


Figura 1.5: Contribuciones de los diagramas de Feynman a los diagramas en la expansión $1/N_C$.

1.3. Reglas de conteaje de N_C para funciones de correlación

Usando las reglas de conteaje de potencias en N_C que hemos derivado para los diagramas de vacío, podemos obtener las reglas de conteaje para funciones de correlación de quarks y gluones. Estudiaremos el valor de expectación en el vacío de productos de operadores de quarks y gluones que sean invariantes gauge, y que no se puedan separar en el producto de varias piezas que sean por sí solas singletes de color. Los operadores que contengan quarks deben ser bilineales en los quarks.

La forma más cómoda de derivar estas reglas de conteaje es usar el formalismo de integrales de camino. Cuando en una teoría no confinante queremos calcular la función de correlación de los campos bosónicos $\phi(x)$ que aparecen en el lagrangiano, construimos un funcional generatriz añadiendo al lagrangiano unos términos con fuentes de la forma $J(x)\phi(x)$, y luego calculamos la derivada funcional del funcional generatriz respecto a la fuente. En una teoría confinante, tenemos que añadir al lagrangiano términos con fuentes que multipliquen a nuestros operadores singletes de color. Sea \hat{O}_i un operador invariante gauge escrito en términos de los campos reescalados, y añadamos el término con fuente $N_C J_i \hat{O}_i$ al lagrangiano reescalado. De este modo, el lagrangiano con términos de fuentes sigue teniendo un factor global N_C , y las reglas anteriores siguen siendo válidas. Las funciones de correlación se obtienen derivando funcionalmente el funcional generatriz $W(J)$ respecto a las fuentes:

$$\left\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \dots \hat{O}_r \right\rangle_C = \frac{1}{iN_C} \frac{\partial}{\partial J_1} \dots \frac{1}{iN_C} \frac{\partial}{\partial J_r} W(J) \Big|_{J=0}, \quad (1.16)$$

de donde se ve claramente que cada derivación funcional va acompañada de un supresión en N_C . Las contribuciones de orden N_C^2 a $W(J)$ provienen de diagramas de vacío planos y sólo con líneas gluónicas. Contribuyen solamente a funciones de correlación de operadores puramente gluónicos. Así pues, las funciones de correlación de r puntos de operadores puramente gluónicos son de orden N_C^{2-r} . Si queremos calcular funciones de correlación de operadores que son bilineales en los quarks, necesitaremos contribuciones a $W(J)$ que son de orden N_C , diagramas planos con un solo loop de quarks en el borde más externo. Así pues, las funciones de correlación de r puntos de operadores que son bilineales en quarks son de orden N_C^{1-r} . En la Fig. 1.6 podemos ver un ejemplo. Las reglas de conteaje que hemos derivado pueden usarse para derivar reglas de conteaje para amplitudes de dispersión de mesones y glueballs. Lo único que tenemos que tener en cuenta es que los mesones y las glueballs se creen con amplitud independiente de N_C . En adelante, \hat{H}_i denotará un operador bilineal en los quarks y \hat{G}_i un operador puramente gluónico, ambos invariantes gauge. \hat{G}_i puede crear glueballs y \hat{H}_i puede crear mesones. Podemos escribir en general, que un mesón es un singlete de color de quarks y antiquarks:

$$M = \frac{1}{\sqrt{N_C}} \sum_{i=1}^{N_C} \bar{q}_i q^i, \quad (1.17)$$

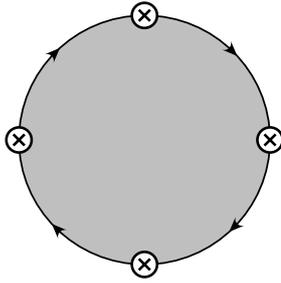


Figura 1.6: Contribución dominante a una función de correlación de bilineales en quarks. Las \otimes simbolizan inserciones del bilineal en quarks.

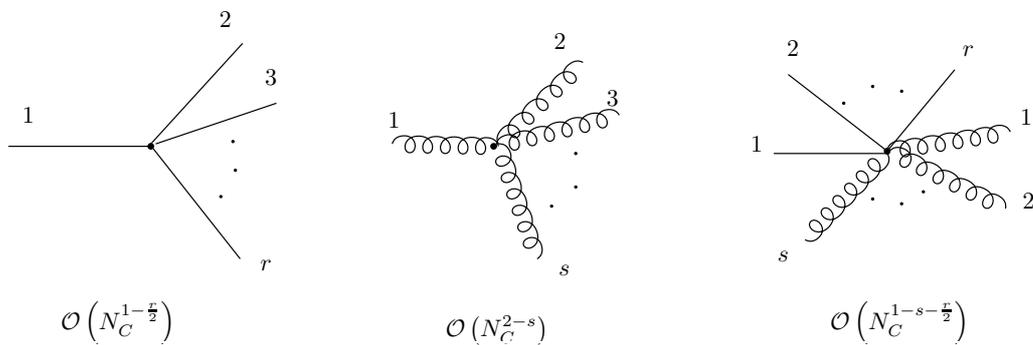


Figura 1.7: Orden en la expansión $1/N_C$ para colisión de mesones (línea continua), glueballs (línea ondulada) y colisiones mixtas.

en donde el factor $1/\sqrt{N_C}$ se incluye para que la probabilidad de crear un mesón sea de orden unidad. Así pues, $\langle \hat{G}_1 \hat{G}_2 \rangle$ es de orden uno, y \hat{G}_i crea glueballs con amplitud unidad. $\langle \hat{G}_1 \dots \hat{G}_r \rangle$ es de orden N_C^{2-r} con lo que el vértice de interacción de r glueballs es de orden N_C^{2-r} y cada glueball adicional supone un factor de supresión $1/N_C$. En el caso de los mesones, $\langle \hat{H}_1 \hat{H}_2 \rangle$ es de orden $1/N_C$ de modo que $\sqrt{N_C} \hat{H}_i$ crea un mesón con amplitud unidad. La función de correlación $\langle \sqrt{N_C} \hat{H}_1 \dots \sqrt{N_C} \hat{H}_r \rangle$ es de orden $N_C^{1-r/2}$, así como el vértice de interacción de r mesones, y cada mesón adicional supone un factor de supresión $1/\sqrt{N_C}$. Los vértices mixtos con r glueballs y s mesones son de orden $N_C^{1-r-s/2}$. Esto se puede resumir en la Fig. 1.7.

1.4. Fenomenología y éxitos de la expansión

Las reglas de conteo de potencias de N_C implican que tenemos una teoría débilmente acoplada de mesones y glueballs, con una constante de acoplo $1/\sqrt{N_C}$. Como en cualquier teoría perturbativa se puede expandir en la constante de acoplo. QCD, una teoría fuertemente acoplada de quarks y gluones, se puede escribir como una teoría débilmente acoplada de hadrones. Las interacciones dominantes en N_C ligan los

quarks y gluones en hadrones que son singletes de color. Las interacciones residuales de estos hadrones están suprimidas por $1/N_C$. La expansión en $1/N_C$ es equivalente a una expansión semiclásica para la teoría con hadrones.

La expansión contiene un número infinito de resonancias y glueballs, que además son muy estrechas. Son estrechas porque su anchura es proporcional a $1/N_C$ (el vértice con tres mesones es de orden $1/\sqrt{N_C}$), y debe haber infinitas para reproducir el comportamiento logarítmico de QCD a altas energías:

$$\int d^4x e^{iq \cdot x} \langle Q(x)Q(0) \rangle_C = \sum_i^{\infty} \frac{Z_i}{q^2 - m_i^2}. \quad (1.18)$$

Otros éxitos fenomenológicos de la expansión son [13, 14]:

1. La supresión del mar de quarks $q\bar{q}$, el hecho de que los mesones son aproximadamente estados $q\bar{q}$ puros; la supresión de los estados exóticos $qq\bar{q}\bar{q}$.
2. La regla de Zweig; clasificación de los mesones en nonetes de sabor U(3); desacoplamiento de los estados gluónicos.
3. La desintegración de los mesones inestables es mayoritariamente a dos cuerpos.
4. El éxito de las teorías efectivas, en las que las contribuciones dominantes corresponden a diagramas a nivel árbol y las correcciones a la expansión en $1/N_C$ corresponden a diagramas con loops de hadrones.

Capítulo 2

Estructura de espín–sabor de los bariones en la expansión $1/N_C$

2.1. Introducción

Un barión es un singlete de color hecho de quarks (sin antiquarks). Como en el grupo $SU(N_C)$ el símbolo ϵ de Levi–Civita tiene N_C índices, un barión es un estado de N_C quarks,

$$B = \frac{1}{\sqrt{N_C!}} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{N_C}} q^{i_1} q^{i_2} \dots q^{i_{N_C}} . \quad (2.1)$$

Los quarks que forman el barión son cada uno de un color, ya que los índices del símbolo ϵ deben ser todos diferentes para que éste no sea cero. Como los quarks son fermiones obedecen la estadística de Fermi, y como el símbolo ϵ es completamente antisimétrico en color, el barión debe ser completamente simétrico en el resto de los números cuánticos, los de espín–sabor.

La masa de los bariones crece con N_C ,

$$M_{\text{barión}} \sim \mathcal{O}(N_C) , \quad (2.2)$$

y los bariones se hacen infinitamente pesados cuando N_C tiende a infinito. Para quarks sin masa, el único parámetro con dimensiones de masa de QCD es Λ_{QCD} , de modo que $M_{\text{barión}} \sim N_C \Lambda_{QCD}$. El número de quarks en un barión crece con N_C , pero su tamaño viene gobernado por Λ_{QCD} y se mantiene fijo ($\mathcal{O}(1)$). Así pues, a medida que aumentamos N_C los bariones se hacen más y más densos. La expansión en $1/N_C$ para bariones nos da una conexión entre QCD y dos modelos muy populares, el modelo quark no relativista y el modelo de Skyrme.

2.2. Reglas de conteo de N_C para bariones

Representaremos un barión como N_C líneas de quarks con los colores ordenados, $1 \dots N_C$ y hay que tener en mente que los colores de los quarks salientes son una permutación de $1 \dots N_C$. Es conveniente derivar las reglas de conteo para diagramas

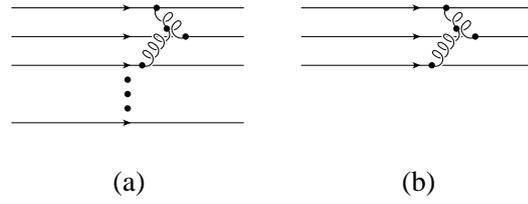


Figura 2.1: Interacción de un barión y su correspondiente componente conexas.

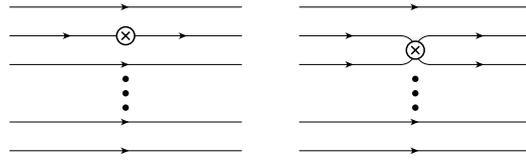


Figura 2.2: Elementos de matriz barónicos de un operador de un cuerpo, y de un operador de dos cuerpos.

conexos. Así pues, la parte conexas de la Fig. 2.1(a) es Fig. 2.1(b). Nos referiremos a una pieza conexas que contenga n líneas de quark como una interacción de n cuerpos. Ahora podemos relacionar las reglas de contaje para las piezas conexas con los diagramas planos con un solo loop de quarks en el borde más externo. Los términos dominantes para una interacción de n cuerpos se obtienen cortando estos diagramas en n puntos diferentes y poniendo el color de la línea de cada corte igual a la del quark correspondiente. Una curiosidad es que los diagramas dominantes, que podríamos llamar “planos”, no parecen planos cuando se dibujan en una hoja de papel. Esto es así porque una vez hemos cortado el loop de quarks, tenemos que poner todas las líneas en la misma dirección, de modo que al hacer esto algunas líneas gluónicas se montan encima de otras.

Una interacción de n cuerpos es de orden N_C^{1-n} , ya que los diagramas planos con un solo loop de quarks en el borde más externo son de orden N_C y hemos eliminado n sumas sobre colores al cortar el diagrama en n sitios. Ahora tenemos que tener en cuenta de cuántas maneras podemos elegir n quarks de un barión que contiene N_C : $\binom{N_C}{n} \sim \mathcal{O}(N_C^n)$, de modo que el efecto neto de una interacción de n cuerpos es de orden N_C .

Estas reglas de contaje se pueden extender a elementos de matriz de un singlete de color entre bariones. Por ejemplo, en el caso de un operador de un cuerpo como $\bar{q}q$ tenemos que $\langle B | \bar{q}q | B \rangle$ es de orden N_C ya que el operador se puede insertar en cualquiera de las N_C líneas, como se puede ver en la Fig. 2.2(a). De modo similar para un operador de dos cuerpos tenemos $\binom{N_C}{2} \sim \mathcal{O}(N_C^2)$, como se puede ver en Fig. 2.2(b), luego es de orden N_C^2 . En general, para el caso general tenemos que los elementos de matriz son de orden N_C^n .

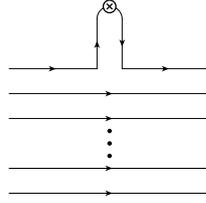


Figura 2.3: Diagrama para el acoplo mesón-barión.

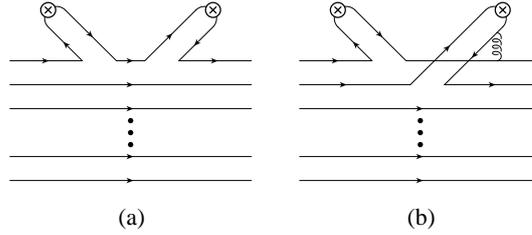


Figura 2.4: Diagramas para la dispersión mesón-barión.

En el caso de la constante de acoplo mesón-barión se obtiene que es de orden $\sqrt{N_C}$. Esto puede verse de la Fig. 2.3, teniendo en cuenta que la probabilidad del bilineal para crear un quark tiene que ser normalizada con un factor $1/\sqrt{N_C}$ (Eq. (1.17)), de modo que el resultado final es $\sqrt{N_C}$. Del mismo modo la amplitud de dispersión barión mesón es de orden unidad. Se puede ver de la Fig. 2.4, en la que se muestran dos contribuciones. En la Fig. 2.4(a), las dos inserciones se deben hacer en la misma línea de quark, para conservar la energía. Como tenemos N_C posibilidades y dos factores $1/\sqrt{N_C}$, uno de cada bilineal, el resultado final es $\mathcal{O}(1)$. En la Fig. 2.4(b), aunque insertemos los bilineales en diferentes líneas de quarks, es necesario que entre éstas se intercambie un gluón, para que haya una transferencia de energía. Así pues, tenemos $\mathcal{O}(N_C^2)$ posibles elecciones de las dos líneas, dos factores $1/\sqrt{N_C}$ de los dos vértices y otros dos factores $1/\sqrt{N_C}$ de los bilineales, con lo que el resultado global vuelve a ser $\mathcal{O}(1)$. En general la amplitud barión+mesón \rightarrow barión+n mesones es $\mathcal{O}\left(N_C^{\frac{1-n}{2}}\right)$, y cada inserción de un nuevo mesón viene acompañada por un factor de supresión $1/\sqrt{N_C}$, como en el caso de amplitudes puramente mesónicas.

Para terminar, discutamos las reglas de contaje para la dispersión barión-barión. Es importante estudiar la dispersión barión-barión a velocidad fija, ya que la masa de los bariones es de orden N_C , y de este modo evitamos que por motivos puramente cinemáticos se aumente la amplitud cerca del umbral. Como se puede observar en la Fig. 2.5 tenemos un factor combinatorio N_C^2 por la elección de las dos líneas de quark y dos factores $1/\sqrt{N_C}$ por los dos acoplos, de modo que el resultado final es $\mathcal{O}(N_C)$. En el caso de haber considerado el mismo diagrama sin el gluón intercambiado, los dos quarks intercambiados deberían tener el mismo color, de modo que el factor

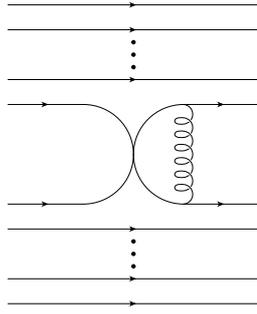


Figura 2.5: Diagrama para la dispersi6n bari6n–bari6n.

combinatorio es N_C .

Una observaci6n debida a Witten es que las reglas de conteje que hemos derivado son las mismas que las que habr6a en una teor6a con constante de acoplo $1/\sqrt{N_C}$, donde los mesones son los campos fundamentales y los bariones son solitones.

2.3. Condiciones de consistencia

El modo m6s directo de obtener las condiciones de consistencia es considerar la dispersi6n bari6n–pion a bajas energ6as, que es $\mathcal{O}(1)$. La masa del bari6n es $\mathcal{O}(N_C)$, as6 que el bari6n act6a como una fuente est6tica para la dispersi6n de mesones a bajas energ6as. El argumento es m6s simple en el l6mite quiral, considerando las masas de los piones nulas. Antes de comenzar, definamos la constante de acoplo vector–axial del prot6n g_A . Restringi6ndonos al caso de dos sabores tenemos:

$$g_A = \left\langle p \left| (\bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 t^3 q)_{\text{QCD}} \right| p \right\rangle, \quad (2.3)$$

en donde t^3 es la correspondiente matriz de Pauli. Las 6nicas hip6tesis necesarias son que tanto g_A como la masa del bari6n son $\mathcal{O}(N_C)$.

El v6rtice pion–nucle6n es:

$$\frac{\partial_\mu \pi^a}{f} \left\langle B \left| (\bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 t^a q)_{\text{QCD}} \right| B \right\rangle, \quad (2.4)$$

y es de orden $\sqrt{N_C}$, ya que $g_A \sim N_C$ y $f \sim \sqrt{N_C}$. El 6ndice a indica el isosp6n, f es la constante de desintegraci6n del pion y T^a son las matrices de Pauli.

La absorci6n del mes6n incidente por el bari6n da lugar a un bari6n intermedio que est6 fuera de la capa m6sica por un tetra–momento de orden unidad, como se puede ver en la Fig. 2.6. El momento de este bari6n se puede escribir:

$$P = Mv + k = Mv', \quad (2.5)$$

en donde v es la velocidad del bari6n incidente y k el momento del pion incidente. La pieza Mv es $\mathcal{O}(N_C)$ mientras que la pieza k es $\mathcal{O}(1)$, de modo que tenemos:

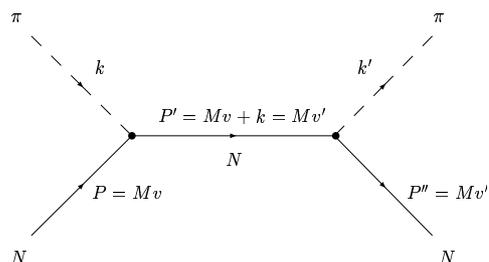


Figura 2.6: Esquema de los momentos involucrados en la dispersión pion–nucleón.

$$v' = v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_C}\right), \quad (2.6)$$

con lo que en el límite de N_C muy grande, no hay retroceso para el barión. En este límite, la energía de los bariones inicial y final no cambia, pero sí lo hace el tri–momento del mesón. Usando las técnicas de física de quarks pesados, podemos escribir el propagador del barión pesado del siguiente modo:

$$\frac{\not{P} + M}{P^2 - M^2} \rightarrow \frac{i}{k \cdot v} \left(\frac{1 + \not{v}}{2} \right), \quad (2.7)$$

que es manifiestamente $\mathcal{O}(1)$. En el sistema de referencia del barión en reposo, el propagador proyecta sobre las componentes grandes del espinor de Dirac del barión, y el propagador se reduce al propagador no relativista i/E . Con esto podemos hacer la reducción no relativista para la expresión (2.4). De las cuatro componentes del tetra–vector, la componente temporal se anula en el límite no relativista, de modo que para la parte espacial obtenemos:

$$\langle B | (\bar{q} \gamma^i \gamma_5 t^a q)_{\text{QCD}} | B \rangle = g N_C \langle B | X^{ia} | B \rangle, \quad (2.8)$$

en donde tanto g como $\langle B | X^{ia} | B \rangle$ son $\mathcal{O}(1)$. X^{ia} es una matriz cuatro por cuatro definida sobre los estados $p^\uparrow, p^\downarrow, n^\uparrow, n^\downarrow$ y tiene un límite finito para $N_C \rightarrow \infty$.

La contribución dominante para la dispersión nucleón–pion es la de los dos primeros diagramas de la Fig. 2.7, ya que el vértice de dos nucleones y dos piones es $\mathcal{O}(1)$ y el de dos nucleones y un pion es $\mathcal{O}(\sqrt{N_C})$. La amplitud de dispersión para el proceso $\pi^a(q) + B \rightarrow \pi^b(q') + B$ es:

$$i q^i q'^j \frac{N_C^2 g^2}{q^0 f^2} [X^{ia}, X^{jb}]. \quad (2.9)$$

Como $f \sim \mathcal{O}(\sqrt{N_C})$, la amplitud es $\mathcal{O}(N_C)$, de modo que viola tanto unitariedad como las reglas de conteo de $1/N_C$ para bariones. Por lo tanto QCD en el límite de gran N_C con un multiplete de nucleones con $I = J = \frac{1}{2}$ interaccionando con los piones es una teoría inconsistente. Tiene que haber otros estados intermedios que

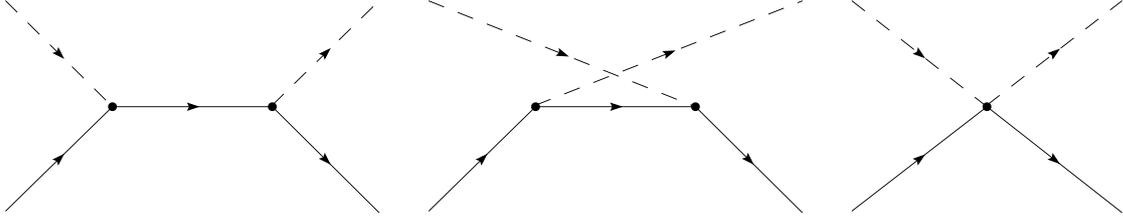


Figura 2.7: Diagramas de dispersión nucleón-pion. El tercer diagrama está suprimido en la expansión $1/N_C$.

cancelen el orden N_C para que la amplitud sea $\mathcal{O}(1)$ y así no se viole unitariedad. De esto obtenemos la condición de consistencia [15, 16]:

$$N_C [X^{ia}, X^{ib}] \leq \mathcal{O}(1). \quad (2.10)$$

La expansión del operador X^{ia} en $1/N_C$ es:

$$X^{ia} = X_0^{ia} + \frac{X_1^{ia}}{N_C} + \frac{X_2^{ia}}{N_C^2} + \dots, \quad (2.11)$$

de modo que la condición de consistencia de N_C grande es

$$[X_0^{ia}, X_0^{ib}] = 0, \quad (2.12)$$

Tenemos relaciones de conmutación adicionales:

$$\begin{aligned} [J^i, X_0^{jb}] &= i\epsilon_{ijk} X_0^{kb}, \\ [T^a, X_0^{ib}] &= if_{abc} X_0^{ic}, \\ [T^a, T^b] &= if_{abc} T^c, \\ [J^i, J^j] &= i\epsilon_{ijk} J^k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

en donde f_{abc} está definido en el Apéndice A. Estas relaciones adicionales deben aparecer puesto que X^{ia} tiene espín e isospín uno. Las relaciones de conmutación (2.12) y (2.13) son un álgebra $SU(2N_F)$ contraída, en donde N_F es el número de sabores de los quarks. El modelo quark no relativista nos proporciona una realización explícita del álgebra de generadores del grupo $SU(2N_F)$:

$$\begin{aligned} J^i &= q^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes \mathbf{1} \right) q & (1, 0), \\ T^a &= q^\dagger \left(\mathbf{1} \otimes t^a \right) q & (0, adj), \\ G^{ia} &= q^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes t^a \right) q & (1, adj), \end{aligned} \quad (2.14)$$

en donde se han añadido las propiedades de transformación de los generadores bajo el grupo $SU(2) \otimes SU(N_F)$. En (2.14) q es un vector fila cuyas componentes son

operadores de destrucción de quarks con espín hacia arriba o hacia abajo. Estos operadores de quark no son los campos cuánticos fermiónicos de QCD. Así como los operadores de quark en QCD por ser campos fermiónicos anticonmutan, en nuestro caso conmutan ya que en los bariones, como ya se ha discutido, la anticonmutación se produce en el número cuántico de color, por lo que en el resto de números cuánticos se producen relaciones de conmutación. Escribiendo q en notación de doble índice tenemos:

$$[q^{\alpha i}, q^{\dagger j \beta}] = \delta_{\beta}^{\alpha} \delta^{ij}, \quad (2.15)$$

con $\alpha, \beta = 1, \dots, N_F$ es el sabor del quark y $i, j = 1, 2$ es la proyección de la tercera componente del momento angular. Usando esta notación de doble índice tenemos que:

$$q^{\dagger} (A \otimes B) q = q^{\dagger \alpha i} A^{ij} B_{\alpha}^{\beta j} q_{\beta}, \quad (2.16)$$

los operadores (2.14) cumplen las relaciones de conmutación:

$$[J^i, G_0^{jb}] = i \epsilon_{ijk} G_0^{kb}, \quad (2.17)$$

$$[T^a, G_0^{ib}] = i f_{abc} G_0^{ic},$$

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c,$$

$$[J^i, J^j] = i \epsilon_{ijk} J^k,$$

$$[G^{ia}, G^{jb}] = \frac{i}{2N_F} \epsilon_{ijk} \delta_{ab} J^k + \frac{i}{4} f_{abc} \delta_{ij} T^c + \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} d_{abc} G^{kc}. \quad (2.18)$$

El álgebra contraída para los bariones en QCD se obtiene tomando el límite:

$$X^{ia} \equiv \lim_{N_C \rightarrow \infty} \frac{G^{ia}}{N_C}. \quad (2.19)$$

El límite de la ecuación (2.19) se conoce como la contracción de un álgebra de Lie.

Hemos demostrado que QCD en el límite de $N_C \rightarrow \infty$ tiene una simetría contraída $SU(2N_F)$ en el sector bariónico. Es sencillo demostrar que las predicciones de QCD en el límite de N_C grande para el acoplo pion–nucleón son las mismas que las obtenidas en el modelo de Skyrme o en el modelo quark no relativista en el límite $N_C \rightarrow \infty$, porque estos dos modelos tienen la misma simetría $SU(2N_F)$ contraída en este límite. Aunque hayamos probado que $SU(2N_F)_c$ es una simetría de QCD en $N_C \rightarrow \infty$, no hemos probado que $SU(2N_F)$ sea una simetría para QCD con N_C finito, y no hay ninguna razón para creerlo. Las correcciones en $1/N_C$ nos permiten estudiar sistemáticamente la forma de la ruptura de la simetría $SU(2N_F)$ para N_C finito.

Es útil tener una representación explícita del álgebra contraída $SU(2N_F)_c$ en el límite $N_C \rightarrow \infty$ para poder calcular las propiedades de los bariones en la expansión $1/N_C$. Hay dos elecciones naturales: la del modelo quark y la del modelo de Skyrme. Ambas representaciones nos proporcionan idénticos resultados a un orden dado, para cantidades físicas. Un operador escrito en la representación quark tiene una

expansión en $1/N_C$ en términos de operadores en la representación de Skyrme:

$$O_{\text{quark}} = O_{\text{Skyrme}}^{(0)} + \frac{1}{N_C} O_{\text{Skyrme}}^{(1)} + \dots, \quad (2.20)$$

y la expresión de un operador de QCD en términos de operadores de la representación quark o de Skyrme tiene la forma:

$$\mathcal{O}_{\text{QCD}} = a_0 O_0 + \frac{a_1}{N_C} O_1 + \frac{a_2}{N_C^2} O_2, \quad (2.21)$$

de modo que a un orden dado, cualquier diferencia entre las dos representaciones es de orden superior en $1/N_C$.

2.4. Representaciones irreducibles de los bariones

A la hora de estudiar las representaciones irreducibles de los bariones, también tenemos que elegir una representación para el álgebra contraída $SU(2N_F)_c$. Durante este trabajo se usará la representación del modelo quark, de modo que discutiremos brevemente las representaciones irreducibles en el caso de la representación del modelo de Skyrme, y más extensamente el caso de la representación del modelo quark.

1. Representación del modelo de Skyrme. Las representaciones irreducibles unitarias se obtienen usando la teoría de representaciones inducidas, y se puede demostrar que son de dimensión infinita. En el caso de dos sabores, obtenemos una torre infinita de estados con $I = J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$. Para el caso de tres sabores, las representaciones son más complicadas y aparecen torres infinitas de estados (J,I) [17]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \dots, \\ & \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right), \dots, \\ & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \dots, \\ & \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 3\right), \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

Los estados de espín más bajos de las diferentes torres tienen el espín e isospín correctos para ser identificados con el octete de espín $\frac{1}{2}$ y el decuplete de espín $\frac{3}{2}$. El resto de estados existen en el límite $N_C \rightarrow \infty$, pero no para $N_C = 3$.

2. Representación del modelo quark. Consideraremos la estructura en espín-sabor de los bariones en el estado fundamental para N_C grande, impar y finito. La representación completamente simétrica de $SU(2N_F)$, Fig. 2.8 contiene

bariones con espín $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{N_C}{2}$, que se transforman como las representaciones de sabor mostradas en la Tabla 2.1. Para el caso de dos sabores los estados se pueden etiquetar por su espín e isospín $(J, I) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \dots, (\frac{N_C}{2}, \frac{N_C}{2})$.

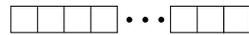


Figura 2.8: Representación de $SU(2N_F)$ para los bariones del estado fundamental. El tablero de Young tiene N_C cajas.

Para tres sabores los bariones de espín $\frac{1}{2}$ tienen el diagrama de pesos de la Fig. 2.9 y los bariones de espín $\frac{3}{2}$ tienen el diagrama de pesos de la Fig. 2.10.

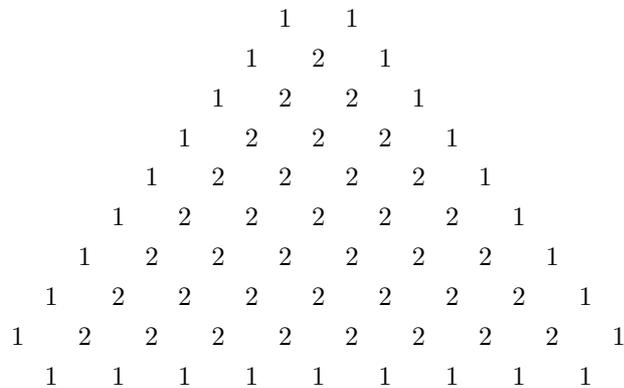


Figura 2.9: Diagrama de pesos para la representación de los bariones de espín $\frac{1}{2}$. En este caso $N_C = 17$. Los números denotan la multiplicidad de los estados.

Genéricamente, los diagramas de pesos para tres sabores, en el caso de espín J tienen un borde con $a = 2J + 1$ pesos y el otro con $b = (N_C + 2)/2 - J$ pesos. La dimensión de la representación es $ab(a+b)/2$. La multiplicidad de los estados empieza en uno en los bordes y aumenta en una unidad conforme nos movemos hacia dentro del diagrama, hasta el momento en el que alcanzamos la forma de un triángulo equilátero; a partir de este momento la multiplicidad permanece constante.

2.5. Expansión en $1/N_C$ para bariones

La solución general a las condiciones de consistencia para N_C grande es la clave para entender la estructura de los bariones, y se puede dar de una manera muy simple. Para ello escribiremos los generadores (2.14) del grupo $SU(2N_F)$ de un

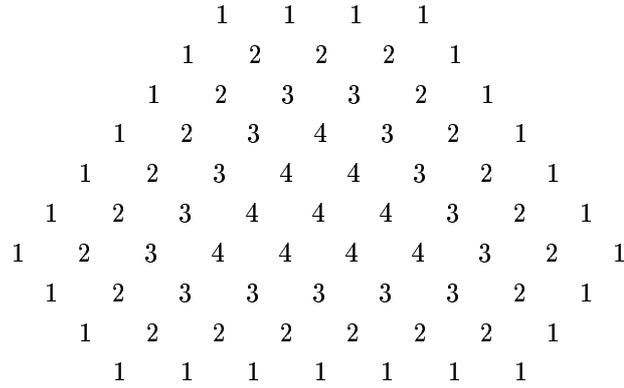


Figura 2.10: Diagrama de pesos para la representación de los bariones de espín $\frac{3}{2}$. En este caso $N_C = 15$. Los números denotan la multiplicidad de los estados.

Tabla 2.1: Descomposición de la representación $\square\square\square\square \cdots \cdots \square\square\square$ bajo el grupo $SU(2) \otimes SU(2N_F)$. Todos los tableros de Young tienen N_C cajas.

$SU(2)$	$SU(N_F)$
$\frac{1}{2}$	
$\frac{3}{2}$	
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
$\frac{N_C-2}{2}$	
$\frac{N_C}{2}$	

modo ligeramente diferente:

$$\begin{aligned}
 J^i &= \sum_{l=1}^{N_C} q_l^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes 1 \right) q_l & (1, 0), \\
 T^a &= \sum_{l=1}^{N_C} q_l^\dagger (1 \otimes t^a) q_l & (0, adj), \\
 G^{ia} &= \sum_{l=1}^{N_C} q_l^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes t^a \right) q_l & (1, adj),
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

en donde la etiqueta l denota la línea del quark sobre la que actúa el operador. Los operadores de quark de diferentes líneas conmutan entre sí, de modo que tenemos

que extender (2.15):

$$\left[q_l^{\alpha i}, q_{m\beta}^{\dagger j} \right] = \delta_\beta^\alpha \delta^{ij} \delta_{lm}, \quad (2.24)$$

en este punto podemos discutir las diferencias entre los operadores de uno y varios cuerpos. Aparentemente los operadores G^{ia} y $J^i T^a$ son similares, pero si escribimos su definición:

$$G^{ia} = \sum_{l=1}^{N_C} q_l^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \otimes t^a \right) q_l, \quad (2.25)$$

$$J^i T^a = \sum_{l,m}^{N_C} \left(q_l^\dagger \frac{\sigma^i}{2} q_l \right) (q_m^\dagger t^a q_m), \quad (2.26)$$

de modo que en $J^i T^a$ σ^i y t^a están insertados en líneas de quark independientes (y hay el doble de operadores de quark) y en G^{ia} siempre están insertados en la misma línea.

Un operador de QCD \mathcal{O}_{QCD}^m que es de orden N_C^m se puede expandir en términos de la base de operadores de la representación quark como [12, 17, 18, 19]:

$$\mathcal{O}_{QCD}^m = N_C^m \sum_{n,l,k} c_n \frac{1}{N_C^n} (J^i)^l (T^a)^k (G^{ia})^{n-l-k}. \quad (2.27)$$

El factor N_C^m aparece debido a que un operador de QCD de m cuerpos es a lo sumo $\mathcal{O}(N_C^m)$ y los factores $1/N_C^n$ aparecen para que el contaje en potencias de N_C sea el mismo tanto en el operador de QCD como en la expansión. La expansión incluye todos los operadores independientes que se transforman bajo $SU(2) \otimes SU(2N_F)$ del mismo modo que \mathcal{O}_{QCD}^m . Cada operador de la suma está multiplicado por un coeficiente c_n desconocido (su valor no queda fijado por la simetría) que es un elemento de matriz reducido de la expansión $1/N_C$. Los coeficientes son $\mathcal{O}(1)$ al orden dominante en la expansión. Las correcciones en $1/N_C$ de los coeficientes son contribuciones de diagramas no planos y loops de quarks. Supongamos que queremos calcular la expansión de un operador de QCD de orden N_C , como por ejemplo la masa. El operador de cero cuerpos que aparecería en la expansión se interpretaría como la contribución a la masa de Λ_{QCD} , y los operadores de un cuerpo, como la inserción de un operador de un cuerpo en cada una de las líneas de quark del barión. Los operadores de dos cuerpos se interpretan como la inserción del operador de un cuerpo más el intercambio de un gluón, y los de tres cuerpos como la inserción de un operador de un cuerpo más dos intercambios de gluones y así sucesivamente, como se puede observar en la Fig. 2.11. Cada intercambio de gluones implica un factor de supresión $1/N_C$ por los dos acoplos. La suma sobre operadores se acaba en los operadores de orden N_C , ya que operadores con $n > N_C$ serían redundantes actuando sobre bariones compuestos de N_C quarks de valencia. Genéricamente, los elementos de matriz del operador J^i son de orden N_C , pero la expansión en $1/N_C$ solamente es válida para estados de espín $\mathcal{O}(1)$, así que supondremos que los bariones físicos de QCD para N_C grande son los de espín más bajo. Asimismo los elementos de

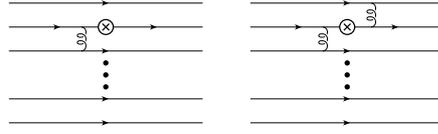


Figura 2.11: Contribuciones de operadores de dos y tres cuerpos a los elementos de matriz de un operador de QCD.

matriz de los operadores T^a y G^{ia} son de orden N_C , pero su orden en $1/N_C$ varía dentro de un diagrama de pesos para un espín dado, de modo que no podemos hacer una elección de bariones físicos como en el caso de J^i . En todo caso, lo más sensato es elegir como bariones físicos aquellos que tienen valores de extrañeza $\mathcal{O}(1)$. En el caso de considerar dos sabores, tenemos una simplificación adicional, ya que los elementos de matriz de los operadores de isospín I^a son $\mathcal{O}(1)$. A simple vista, todos los operadores de la expansión (2.27) son igualmente importantes, ya que un operador de r cuerpos tiene un coeficiente de orden $1/N_C^r$ pero los elementos de matriz de operadores de r cuerpos son de orden N_C^r . Según esto todos los términos de la expansión son igualmente importantes y no tenemos ningún poder predictivo. Afortunadamente existen identidades de operadores que nos permiten simplificar la expansión general (2.27) y despreciar ciertos términos subdominantes en $1/N_C$. Son estas identidades las que nos permiten hacer predicciones no triviales para bariones en QCD.

2.6. Identidades de operadores

Antes de discutir las identidades de los operadores es conveniente discutir la normalización de las matrices generadoras del álgebra¹. Tal como se explica en el Apéndice A la normalización se escoge del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{Tr } j^i j^j &= \frac{1}{2} \delta^{ij}, \\ \text{Tr } t^a t^b &= \frac{1}{2} \delta^{ab}, \\ \text{Tr } \Lambda^A \Lambda^B &= \frac{1}{2} \delta^{AB}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

¹Trataremos el caso general de n_F sabores.

en donde Λ^A son las matrices generadoras del grupo $SU(2N_F)$ convenientemente normalizadas, de modo que se corresponden con

$$\begin{aligned} & \frac{J^i \otimes \mathbb{1}}{\sqrt{F}}, \\ & \frac{\mathbb{1} \otimes T^a}{\sqrt{2}}, \\ & \sqrt{2} (J^i \otimes T^a), \end{aligned} \quad (2.29)$$

por consiguiente los generadores del grupo $SU(2N_F)$ convenientemente normalizados son:

$$\begin{aligned} & \frac{J^i}{\sqrt{F}}, \\ & \frac{T^a}{\sqrt{2}}, \\ & \sqrt{2} G^{ia}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$(2.31)$$

Los operadores de n cuerpos se pueden escribir de dos maneras: como el producto multilinear de varios operadores de un cuerpo (en la representación adjunta) o como el producto normal–ordenado de este multilinear. En el primer caso, un operador de n cuerpos tiene la forma

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{M}^n (J^i, T^a, G^{ia}), \quad (2.32)$$

con \mathcal{M}^n un monomio de grado n ; y en el caso de la forma normal–ordenada

$$\mathcal{O}^n = q_{j_1 \beta_1}^\dagger \cdots q_{j_n \beta_n}^\dagger \mathcal{T}_{(j_1 \beta_1) \dots (j_n \beta_n)}^{(i_1 \alpha_1) \dots (i_n \alpha_n)} q^{i_1 \alpha_1} \cdots q^{i_n \alpha_n}, \quad (2.33)$$

con i, j índices de espín y α, β índices de sabor. \mathcal{T} representa un tensor en espín y sabor. Se ha omitido la etiqueta que indica en qué línea actúan los operadores quark ya que es irrelevante. En forma normal–ordenada todos estos operadores actúan necesariamente sobre líneas diferentes (los n quarks se crean primero y luego se destruyen) y el orden no es importante, puesto que estos operadores son bosónicos. Los operadores “puramente” de n cuerpos son los escritos de esta última forma, ya que tienen elementos de matriz nulos entre estados de $m < n$ quarks. Los operadores de n cuerpos escritos de ambas maneras no coinciden, ya que por ejemplo:

$$q_{j_1 \alpha_1}^\dagger q_{i_2 \beta_2}^\dagger \left(\frac{\sigma^i}{2} \right)_{i_1}^{j_i} (t^a)_{\alpha_2}^{\beta_2} q^{i_1 \alpha_1} q^{i_2 \alpha_2} = \sum_{l \neq m} \left(q_l^\dagger \frac{\sigma^i}{2} q_l \right) (q_m^\dagger t^a q_m), \quad (2.34)$$

en el segundo miembro las líneas de quark son obligatoriamente diferentes, de manera que no coincide con $J^i T^a$. Cuando escribimos los operadores usando producto de operadores de un cuerpo, todas las combinaciones antisimétricas se pueden reducir usando los conmutadores del álgebra de Lie, de modo que solamente consideraremos productos totalmente simétricos.

Los operadores de n cuerpos independientes son todos los operadores de n cuerpos escritos de forma normal-ordenada con tensores \mathcal{T} que son completamente simétricos tanto en los índices superiores como en los inferiores y sin traza. El tensor \mathcal{T} debe ser completamente simétrico porque los quarks de un barión en el estado fundamental (con momento angular $l = 0$) están en una representación completamente simétrica de espín-sabor, de modo que operadores con simetría mixta se anulan idénticamente cuando actúan sobre estos bariones en el estado fundamental. El tensor \mathcal{T} no debe tener traza ya que todas las trazas no nulas de \mathcal{T} se reducen a operadores de menos cuerpos.

Es sencillo identificar los operadores independientes cuando están escritos de forma normal-ordenada, pero los operadores escritos de esta forma no tienen elementos de matriz bariónicos sencillos. Por contra, los elementos de matriz bariónicos de productos de operadores en la representación adjunta son sencillos de calcular, pero la clasificación de operadores independientes no es trivial. Cuando reescribimos los operadores en la forma normal-ordenada aparecen tensores \mathcal{T} que no son completamente simétricos o con traza no nula, de modo que ciertas combinaciones lineales de productos de operadores son equivalentes a operadores de un número inferior de cuerpos o dan un resultado nulo cuando actúan sobre los bariones.

La estructura general de las identidades de operadores es que ciertos operadores de n cuerpos se pueden reducir a combinaciones lineales de operadores de m cuerpos, en donde $m < n$. Como los operadores de n cuerpos actuando sobre bariones de N_C quarks tienen elementos de matriz de orden N_C^n , el coeficiente que multiplica al operador de m cuerpos es de orden N_C^{n-m} . Discutamos a continuación las diferentes identidades.

2.6.1. Operadores de cero cuerpos

Solamente hay un operador de cero cuerpos, y este es el operador identidad $\mathbb{1}$ que tiene elementos de matriz de $\mathcal{O}(1)$. El operador identidad se transforma bajo el grupo $SU(2) \otimes SU(N_F)$ como un singlete tanto de espín como de sabor. No hay más identidades a este nivel.

2.6.2. Operadores de un cuerpo

Los operadores de un cuerpo se transforman bajo $SU(2N_F)$ como el producto tensorial de un quark y un antiquark en la representación fundamental:

$$\text{un cuerpo : } \left(\overline{\square} \otimes \square \right) = 1 + adj = 1 + T_\beta^\alpha, \quad (2.35)$$

donde T_β^α es un tensor sin traza que se transforma como la representación adjunta de $SU(2N_F)$.

La única identidad que aparece a este nivel relaciona los singletes de cero y un

cuerpos de $SU(2N_F)$. Esta identidad es trivial:

$$q^\dagger q = \sum_{l=1}^{N_C} q_l^\dagger q_l = N_C \mathbf{1}. \quad (2.36)$$

2.6.3. Operadores de dos cuerpos

Las identidades no triviales aparecen entre operadores de dos cuerpos. Los operadores de dos cuerpos se transforman como el producto tensorial de un estado simétrico de dos quarks y un estado simétrico de dos antiquarks:

$$2 \text{ cuerpos : } \left(\overline{\square\square} \otimes \square\square \right) = 1 + adj + \bar{s}s = 1 + T_\beta^\alpha + T_{(\beta_1\beta_2)}^{(\alpha_1\alpha_2)}, \quad (2.37)$$

en donde $T_{(\beta_1\beta_2)}^{(\alpha_1\alpha_2)}$ es un vector sin traza completamente simétrico en sus índices superiores e inferiores. Llamaremos a esta representación tensorial de $SU(2N_F)$ la $\bar{s}s$.

Si ahora escribimos la descomposición del producto completamente simétrico de dos operadores de un cuerpo en la representación adjunta de $SU(2N_F)$ obtenemos:

$$(adj \otimes adj)_S = 1 + adj + \bar{a}a + \bar{s}s, \quad (2.38)$$

donde $\bar{a}a = T_{[\beta_1\beta_2]}^{[\alpha_1\alpha_2]}$ se transforma como un tensor sin traza antisimétrico en sus índices superiores e inferiores. Todas las representaciones irreducibles de $(adj \otimes adj)_S$ excepto la representación $\bar{a}a$ aparecen en (2.37). A partir de aquí se pueden obtener los tres grupos de identidades de dos cuerpos:

1. Hay una combinación lineal de operadores de dos cuerpos que es un singlete de $SU(2N_F)$. Esta combinación se puede escribir como un coeficiente de orden N_C^2 veces el operador de cero cuerpos $\mathbf{1}$. El singlete de $SU(2N_F)$ en $(adj \otimes adj)_S$ es el operador de Casimir:

$$\sum_A \{q^\dagger \Lambda^A q, q^\dagger \Lambda^A q\} = N_C(N_C + 2N_F) \left(1 - \frac{1}{2F}\right) \mathbf{1}, \quad (2.39)$$

en donde el coeficiente que acompaña a $\mathbf{1}$ es el doble del invariante de Casimir correspondiente a la representación irreducible de los bariones Fig. 2.8. En general este invariante para una representación irreducible arbitraria R del grupo $SU(Q)$ tiene el valor:

$$C_2(R) = \frac{1}{2} \left(NQ - \frac{N^2}{Q} + \sum_i r_i^2 - \sum_i c_i^2 \right), \quad (2.40)$$

con r_i el número de cajas en la fila i -ésima, c_i el número de cajas en la columna i -ésima del tablero de Young y $N = \sum_i r_i = \sum_i c_i$ es el número total de cajas. Usando los operadores conveniente normalizados de $SU(2N_F)$ obtenemos:

$$\Lambda^A \Lambda^A = \frac{\vec{J}^2}{F} + \frac{T^2}{2} + 2G^2, \quad (2.41)$$

y con esto obtenemos la primera identidad de la Tabla 2.2

2. Hay una combinación de operadores de dos cuerpos que se transforman como la representación adjunta de $SU(2N_F)$. Esta combinación lineal se puede escribir como un coeficiente de orden N_C veces el operador de un cuerpo en la representación adjunta. La representación adjunta de $SU(2N_F)$ en $(adj \otimes adj)_S$ se obtiene contrayendo con el símbolo d^{ABC} de $SU(2N_F)$:

$$\sum_{B,C} d^{ABC} \{q^\dagger \Lambda^B q, q^\dagger \Lambda^C q\} = 2(N_C + N_F) \left(1 - \frac{1}{F}\right) q^\dagger \Lambda^A q. \quad (2.42)$$

El coeficiente del segundo miembro de (2.42) es el cociente de los invariantes de Casimir cúbicos y cuárticos para la representación irreducible de los bariones Fig. 2.8.

La identidad (2.42) para la representación adjunta de operadores de dos cuerpos de $SU(2N_F)$ se puede descomponer bajo $SU(2) \otimes SU(N_F)$ en tres representaciones $(1,0)$, $(0,adj)$ y $(1,adj)$. Las identidades para estas tres representaciones de $SU(2) \otimes SU(N_F)$ se pueden obtener sustituyendo los generadores convenientemente normalizados de $SU(2N_F)$ en (2.42) y usando la descomposición del símbolo d^{ABC} de $SU(2N_F)$ bajo $SU(2) \otimes SU(N_F)$, dada en la ecuación (2.43). La ecuación (2.42) nos proporciona entonces las tres identidades del segundo bloque de la Tabla 2.2.

$$d^{ABC} = \begin{cases} 0, & \{A, B, C\} = \{i, j, k\} \\ 0, & \{A, B, C\} = \{i, j, a\} \\ 0, & \{A, B, C\} = \{i, a, b\} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} d^{abc}, & \{A, B, C\} = \{a, b, c\} \\ 0, & \{A, B, C\} = \{ia, j, k\} \\ \frac{1}{\sqrt{F}} \delta^{ij} \delta^{ab}, & \{A, B, C\} = \{ia, j, b\} \\ 0, & \{A, B, C\} = \{ia, b, c\} \\ 0, & \{A, B, C\} = \{ia, jb, k\} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \delta^{ij} d^{abc}, & \{A, B, C\} = \{ia, jb, c\} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{ijk} f^{abc}, & \{A, B, C\} = \{ia, jb, kc\} \end{cases}. \quad (2.43)$$

3. Comparando las ecuaciones (2.37) y (2.38) nos damos cuenta de que no hay representación $\bar{a}a$ en $(adj \otimes adj)_S$. Por consiguiente la combinación lineal de operadores de dos cuerpos que se transforman como la $\bar{a}a$ debe dar un resultado nulo cuando actúa sobre la representación completamente simétrica de los bariones. Esta serie de identidades elimina ciertos bilineales en $\{J^i, T^a, G^{ia}\}$ del conjunto de operadores de dos cuerpos independientes. La serie final de identidades se obtiene combinando los dos operadores de un cuerpo de la representación adjunta en la representación $\bar{a}a$ y poniéndola igual a cero. El modo más rápido de llegar al resultado correcto usa un truco y está explicado

con cierto detalle en [18]. Las identidades de $\bar{a}a$ las encontramos en el tercer bloque de la Tabla 2.2.

2.6.4. Operadores de más de dos cuerpos

Se puede demostrar [18] que no hay nuevas identidades del tipo de eliminación para operadores de n cuerpos con $n > 3$ que no sean producto de las identidades originales de dos cuerpos de $\bar{a}a$ y de un cuerpo, que ya han sido determinadas.

Con esto hemos clasificado todas las identidades no triviales. Para operadores de n cuerpos las únicas representaciones del grupo $SU(2N_F)$ permitidas son $1 + T_{\beta_1}^{\alpha_1} + T_{(\beta_1\beta_2)}^{(\alpha_1\alpha_2)} + \dots + T_{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)}$. El resto de representaciones pueden ser eliminadas usando las identidades de dos cuerpos de $\bar{a}a$. Más aún, la única representación “pura” de n cuerpos es $T_{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)}$. Las identidades del tipo de reducción se pueden usar para escribir operadores de n cuerpos que se transforman como $T_{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m)}^{(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m)}$ con $m < n$ como operadores de m cuerpos veces coeficientes de orden N_C^{n-m} .

Tabla 2.2: Identidades de $SU(2N_F)$: la segunda columna indica las propiedades de transformación de las identidades bajo $SU(2) \otimes SU(N_F)$.

$2 \{J^i, J^i\} + N_F \{T^a, T^a\} + 4N_F \{G^{ia}, G^{ia}\} = N_C(N_C + 2N_F)(2N_F - 1)$	(0, 0)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{2}{N_F} \{J^i, G^{ic}\} + \frac{1}{4} d^{abc} \{T^a, T^b\} = (N_C + N_F) \left(1 - \frac{1}{N_F}\right) T^c$	(0, adj)
$\{T^a, G^{ia}\} = (N_C + N_F) \left(1 - \frac{1}{N_F}\right) J^i$	(1, 0)
$\frac{1}{N_F} \{J^k, T^c\} + d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = 2(N_C + N_F) \left(1 - \frac{1}{N_F}\right) G^{kc}$	(1, adj)
$4N_F(2 - N_F) \{G^{ia}, G^{ia}\} + 3N_F^2 \{T^a, T^a\} + 4(1 - N_F^2) \{J^i, J^i\} = 0$	(0, 0)
$(4 - N_F) d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{3}{4} N_F d^{abc} \{T^a, T^b\} - 2 \left(N_F - \frac{4}{N_F}\right) \{J^i, G^{ia}\} = 0$	(0, adj)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = -3 \{T^a, T^b\} \quad (\bar{a}a)$	(0, $\bar{a}a$)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = \{T^a, T^b\} \quad (\bar{s}s)$	(0, $\bar{s}s$)
$\epsilon^{ijk} \{J^i, G^{jc}\} = f^{abc} \{T^a, G^{kb}\}$	(1, adj)
$d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_F}\right) (\{J^k, T^c\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\})$	(1, adj)
$\epsilon^{ijk} \{G^{ia}, G^{jb}\} = f^{acg} d^{bch} \{T^g, G^{kh}\} \quad (\bar{a}s + \bar{s}a)$	(1, $\bar{a}s + \bar{s}a$)
$\{T^a, G^{ib}\} = 0 \quad (\bar{a}a)$	(1, $\bar{a}a$)
$\{G^{ia}, G^{ja}\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N_F}\right) \{J^i, J^j\} \quad (J = 2)$	(2, 0)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_F}\right) \{J^i, G^{jc}\} \quad (J = 2)$	(2, adj)
$\{G^{ia}, G^{jb}\} = 0 \quad (J = 2, \bar{a}a)$	(2, $\bar{a}a$)

2.7. Identidades de operadores para el caso de dos y tres sabores

La particularización de los resultados anteriores para el caso de dos y tres sabores es útil para la aplicación de este formalismo a QCD. Las simplificaciones que ocurren para el caso de dos sabores son notables, ya que muchas de las representaciones de $SU(N_F)$ se anulan para $N_F = 2$. Los resultados se muestran en la Tabla 2.4 También aparecen algunas simplificaciones para el caso de tres sabores. Los resultados se muestran en la Tabla 2.3.

Tabla 2.3: Identidades de $SU(6)$. Algunas de las identidades necesitan ser proyectadas en el canal de espín o sabor determinado que se indica en paréntesis.

$2 \{J^i, J^i\} + 3 \{T^a, T^a\} + 12 \{G^{ia}, G^{ia}\} = 5N_C (N_C + 6)$	
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{2}{3} \{J^i, G^{ic}\} + \frac{1}{4} d^{abc} \{T^a, T^b\} = \frac{2}{3} (N_C + 3) T^c$ $\{T^a, G^{ia}\} = \frac{2}{3} (N_C + 3) J^i$	
$\frac{1}{3} \{J^k, T^c\} + d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = \frac{4}{3} (N_C + 3) G^{kc}$	
$-12 \{G^{ia}, G^{ia}\} + 27 \{T^a, T^a\} - 32 \{J^i, J^i\} = 0$ $d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{9}{4} d^{abc} \{T^a, T^b\} - \frac{10}{3} \{J^i, G^{ic}\} = 0$ $4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = \{T^a, T^b\}$ $\epsilon^{ijk} \{J^i, G^{jc}\} = f^{abc} \{T^a, G^{kb}\}$ $3 d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} = \{J^k, T^c\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\}$ $\epsilon^{ijk} \{G^{ia}, G^{jb}\} = f^{acg} d^{bch} \{T^g, G^{kh}\}$ $3 \{G^{ia}, G^{ja}\} = \{J^i, J^j\}$ $3 d^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = \{J^i, G^{jc}\}$	(27)
	($\bar{10} + 10$)
	($J = 2$)
	($J = 2$)

2.8. Reglas de reducción de operadores para dos y tres sabores

Podemos utilizar las identidades derivadas en las secciones anteriores para eliminar operadores redundantes. Se puede encontrar una base completa de operadores independientes aplicando recursivamente las identidades de operadores de dos cuerpos. Los resultados se presentan en la Tabla 2.5. El anticonmutador de dos operadores de un cuerpo ocurre en las representaciones irreducibles de la segunda columna de

Tabla 2.4: Identidades de $SU(4)$. Algunas de las identidades deben ser proyectadas sobre un canal de espín o sabor determinado indicado en la segunda columna. La última columna indica las propiedades de transformación de las identidades bajo $SU(2) \times SU(2)$.

$\{J^i, J^i\} + \{I^a, I^a\} + 4 \{G^{ia}, G^{ia}\} = \frac{3}{2}N_C(N_C + 4)$		(0, 0)
$2 \{J^i, G^{ia}\} = (N_C + 2) I^a$		(0, 1)
$2 \{I^a, G^{ia}\} = (N_C + 2) J^i$	(1, 0)	
$\frac{1}{2} \{J^k, I^c\} - \epsilon^{ijk} \epsilon^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = (N_C + 2) G^{kc}$		(1, 1)
$\{I^a, I^a\} - \{J^i, J^i\} = 0$	(0, 0)	
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = \{I^a, I^b\}$	(I = 2)	(0, 2)
$\epsilon^{ijk} \{J^i, G^{jc}\} = \epsilon^{abc} \{I^a, G^{kb}\}$		(1, 1)
$4 \{G^{ia}, G^{ja}\} = \{J^i, J^j\}$	(J = 2)	(2, 0)

la Tabla 2.5. Hay un total de quince identidades que pueden usarse para eliminar quince productos de operadores de la Tabla 2.5, dejando solamente las representaciones indicadas en la tercera columna de la tabla.

Los resultados de la Tabla 2.5 se pueden resumir en unas reglas de reducción. En el caso de tres sabores tenemos:

- *Todo producto de operadores en el que dos índices de sabor estén contraídos usando δ^{ab} , d^{abc} o f^{abc} o en el que dos índices de espín de operadores G^{ia} estén contraídos usando δ^{ij} o ϵ^{ijl} puede ser eliminado.*

Y en el caso de dos sabores tenemos:

- *Todo producto de operadores en el que dos índices de espín o isospín estén contraídos con un símbolo δ o ϵ puede ser eliminado salvo \vec{J}^2*

Nótese que en el caso de dos sabores tenemos que $\vec{J}^2 = \vec{I}^2$.

2.9. Ruptura de la simetría de sabor

Una complicación adicional para el caso de tres sabores es que los efectos de la ruptura de la simetría $SU(3)$ de sabor son comparables a las correcciones en $1/N_C$, de modo que no podemos despreciar los efectos de ruptura de simetría. Esta ruptura de simetría $SU(3)$ puede ser introducida perturbativamente en la expansión en $1/N_C$. La expansión combinada en $1/N_C$ y la ruptura de simetría produce un rico patrón de ruptura de espín-sabor que no está dominado ni por las correcciones en $1/N_C$ ni por la ruptura de simetría.

Tabla 2.5: Reducción de operadores para N_F sabores. La segunda columna indica las representaciones de $SU(2) \times SU(N_F)$ permitidas para los operadores de la primera columna. La tercera columna indica las combinaciones que quedan después de eliminar las combinaciones lineales redundantes usando las identidades de la Tabla 2.2.

$\{J^i, J^j\}$	$(0, 0) (2, 0)$	$(0, 0) (2, 0)$
$\{G^{ia}, G^{jb}\}$	$(0, 0) (0, adj) (0, \bar{a}a) (0, \bar{s}s) (1, adj)$ $(1, \bar{a}s + \bar{s}a) (2, 0) (2, adj) (2, \bar{a}a) (2, \bar{s}s)$	$(2, \bar{s}s)$
$\{T^a, T^b\}$	$(0, 0) (0, adj) (0, \bar{a}a) (0, \bar{s}s)$	$(0, \bar{a}a) (0, \bar{s}s)$
$\{J^i, T^a\}$	$(1, adj)$	$(1, adj)$
$\{J^i, G^{ja}\}$	$(0, adj) (1, adj) (2, adj)$	$(0, adj) (1, adj) (2, adj)$
$\{T^a, G^{ib}\}$	$(1, 0) (1, adj) (1, adj) (1, \bar{a}s + \bar{s}a)$ $(1, \bar{a}a) (1, \bar{s}s)$	$(1, \bar{a}s + \bar{s}a)$ $(1, \bar{s}s)$

La expansión en $1/N_C$ para N_C finito solamente se extiende a operadores de orden N_C . En general, la expansión en la ruptura de simetría llega hasta operadores de orden $(N_C - n)$ para un operador bariónico con una expansión en $1/N_C$ que empiece con un operador de n cuerpos.

2.10. Éxitos fenomenológicos de la expansión

Todo el formalismo que se ha desarrollado en este capítulo está preparado para tratar la ruptura de la simetría $SU(3)$ de sabor de manera perturbativa. Aunque no se va a discutir en este trabajo de investigación, se puede hacer un análisis similar para el caso en el que no se hace ninguna hipótesis sobre la ruptura de la simetría $SU(3)$. Esto se conoce como un análisis para la simetría completamente rota [18]. En este caso el análisis se hace en términos de operadores de isospín, número de quarks extraños, momento angular del quark extraño y similares.

También se ha trabajado en lagrangianos quirales, en donde se combina la expansión en $1/N_C$ con la expansión quiral [20].

Algunos de los cálculos más importantes que se han realizado usando esta expansión son:

1. Corrientes de tipo vector–axial y acoplos mesónicos. El cálculo se ha realizado tratando la ruptura de simetría de sabor tanto perturbativamente como con ruptura total [21, 22, 23].
2. Corrientes de tipo vectorial. El cálculo se ha realizado solamente tratando la ruptura de la simetría de sabor de modo perturbativo [22, 23].
3. Masas de los bariones. Al igual que con las corrientes vector–axiales, el cálculo

se ha realizado tratando la ruptura de simetría de sabor tanto perturbativamente como con ruptura total [24].

4. Desintegración no leptónica de hiperones. Solamente se ha tratado la ruptura de simetría de modo perturbativo [22].
5. Momentos magnéticos. El tratamiento de la ruptura de simetría se ha realizado también de las dos maneras posibles [21, 25].

En los casos en los que no se ha hecho un estudio no perturbativo de la ruptura de simetría, esto se debe a más a una carencia de información experimental más que a una dificultad teórica. Los datos experimentales no son lo suficientemente precisos y abundantes para hacer estudios tan finos.

Capítulo 3

Desintegración semileptónica de hiperones y parametrización teórica de los factores de forma

3.1. Desintegración semileptónica de hiperones

3.1.1. Introducción

En este apartado se van a describir las principales características de las desintegraciones semileptónicas de hiperones, como son el lagrangiano fundamental que hace posible la desintegración, el lagrangiano efectivo que media el proceso y los factores de forma que aparecen y que encierran la dinámica de las interacciones fuertes. También se comentará en este apartado el trabajo que se ha hecho con anterioridad en este campo y brevemente algunos modelos que se han utilizado para estudiar la ruptura de la simetría SU(3) de sabor.

3.1.2. Definición de los factores de forma

En general, nuestro proceso de desintegración será del tipo:

$$B \longrightarrow b + e + \bar{\nu}_e, \quad (3.1)$$

en donde B y b son los bariones inicial y final, respectivamente. El proceso viene gobernado por el Hamiltoniano efectivo de las interacciones débiles, esto es, producto de corrientes levóginas:

$$H_W = \frac{G}{\sqrt{2}} J_\mu L^\mu, \quad (3.2)$$

donde J_μ y L^μ denotan las corrientes hadrónica y leptónica respectivamente:

$$L^\mu = \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e, \quad (3.3)$$

$$J^\mu = V^\mu - A^\mu, \quad (3.4)$$

$$V^\mu = V_{ud} \bar{u} \gamma^\mu d + V_{us} \bar{u} \gamma^\mu s, \quad (3.5)$$

$$A^\mu = V_{ud} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 d + V_{us} \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 s, \quad (3.6)$$

G es la constante de acoplo débil efectiva, y V_{ud} y V_{us} son los elementos de la matriz CKM [26, 27, 28]. Este lagrangiano correspondería al diagrama de la Fig. 3.1 una vez integrada la partícula W .

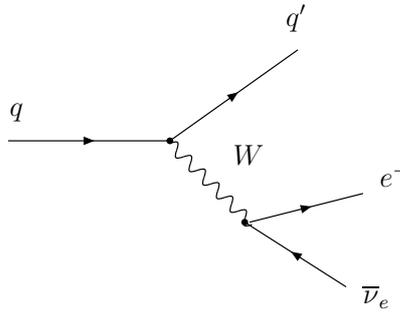


Figura 3.1: Diagrama que media la interacción de cortas distancias en la desintegración de un barión.

Mientras que el elemento de matriz de la corriente leptónica se puede calcular de manera trivial, no ocurre lo mismo con la hadrónica. Aunque el lagrangiano efectivo esté expresado en términos de quarks, los grados de libertad de nuestro problema son bariones, de modo que tenemos ante nosotros un cálculo no perturbativo. En general definimos H^μ del siguiente modo:

$$\langle b | J^\mu | B \rangle = \bar{u}_b(p_b) H^\mu u_B(p_B), \quad (3.7)$$

$$\langle b | V^\mu | B \rangle = V_{CKM} \bar{u}_b(p_b) \left[f_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i f_2(q^2) \sigma^{\mu\nu}}{2m_B} q_\nu + \frac{f_3(q^2)}{m_B} q^\mu \right] u_B(p_B), \quad (3.8)$$

$$\langle b | A^\mu | B \rangle = V_{CKM} \bar{u}_b(p_b) \left[g_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{i g_2(q^2) \sigma^{\mu\nu}}{2m_B} q_\nu + \frac{g_3(q^2)}{m_B} q^\mu \right] \gamma_5 u_B(p_B), \quad (3.9)$$

con $q = p_B - p_b$, $\bar{u}_b(p_b)$ y $u_B(p_B)$ son los espinores de Dirac de los bariones final e inicial, respectivamente, y V_{CKM} es V_{ud} o V_{us} según el tipo de desintegración. La interacción descrita en términos de estas nuevas corrientes corresponde al diagrama de la Fig. 3.2.

Los factores de forma son:

- $f_1(q^2)$ Factor de forma vectorial.
- $g_1(q^2)$ Factor de forma vector-axial.

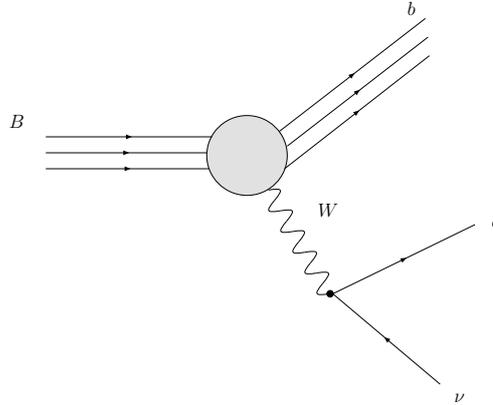


Figura 3.2: Diagrama que media la interacción de la desintegración de un barión en términos de grados de libertad hadrónicos.

- $f_2(q^2)$ Factor de forma de magnetismo débil.
- $g_2(q^2)$ Factor de forma de electricidad débil.
- $f_3(q^2)$ Factor de forma escalar inducido.
- $g_3(q^2)$ Factor de forma pseudoescalar inducido.

Los términos de las corrientes bariónicas que multiplican a los factores de forma f_3 y g_3 son irrelevantes en el caso de desintegraciones electrónicas, ya que cuando se contrae la corriente bariónica con la corriente leptónica, resultan ser proporcionales a la masa del electrón. En todas las transiciones que vamos a estudiar despreciaremos la masa del electrón. En el caso de desintegraciones muónicas, no podemos despreciar su contribución, ya que la masa del muón no es despreciable.

3.1.3. Trabajo previo

El estudio de la desintegración semileptónica de hiperones lleva más de cuarenta años en activo y, como es de suponer, ya se han realizado numerosos trabajos. El primero de ellos fue [29], y data de 1963. El artículo [2] constituye una actualización de éste, usando nuevos datos experimentales. En ambos trabajos se supone que la ruptura de la simetría $SU(3)$ es pequeña, y que la precisión de los datos experimentales no es suficiente para ser sensible a sus efectos. En cuanto a los observables involucrados en las transiciones, se pueden encontrar cálculos muy detallados en las referencias [30, 31]. En el artículo de revisión general [32] se incluyen los aspectos más importantes de estas transiciones y en [33] se encuentran todos los detalles necesarios para cualquier cálculo.

En cuanto al estudio de la ruptura de la simetría, hay trabajos previos en los que se han utilizado modelos quark, como en [34, 35], y otros artículos en los que se ha utilizado teoría quiral de perturbaciones [36, 37]. También existe un trabajo en

el que se ha hecho un tratamiento en el contexto de la expansión en gran número de colores [22], y una versión actualizada de éste en la que se utilizan los datos experimentales más recientes [23].

3.2. Parametrización teórica de los factores de forma

3.2.1. Introducción

En esta sección vamos a extraer la máxima información posible que nos da QCD sobre los factores de forma que intervienen en el cálculo. Obviamente no se puede calcular su valor directamente de QCD, por ser una teoría no perturbativa a las energías a las que ocurren los procesos a estudiar. Lo que podemos hacer es encontrar relaciones entre los factores de forma asociados a las distintas desintegraciones o, lo que es equivalente, parametrizar todos los factores de forma en términos de unos factores de forma reducidos (menores en número que los factores de forma de todas las desintegraciones). Para ello se usarán las técnicas discutidas en los capítulos anteriores.

Antes de empezar, vamos a ver por qué las corrientes vectorial y vector-axial son miembros de un octete, y qué otras corrientes forman parte de esos octetes. Por ejemplo la corriente que media una desintegración del tipo $\Delta S = 0$ (en este caso media la transición $d \rightarrow u$) se puede escribir:

$$\bar{u}\Gamma d = \bar{q} (t^1 + it^2) \Gamma q \equiv \bar{q} t^{1+i2} \Gamma q, \quad (3.10)$$

en donde Γ es cualquier matriz en espacio de Dirac, y

$$q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}), \quad (3.11)$$

y $t^a = \lambda^a/2$ con $\lambda^a/2$ las matrices de Gell-Mann en espacio de sabor, que solamente actúan sobre los índices de sabor de q y \bar{q} . Así pues, los índices de sabor y de Dirac no tienen ninguna relación entre ellos. Asimismo la corriente que media una desintegración con cambio de extrañeza (en este caso la transición $u \rightarrow s$) se puede escribir:

$$\bar{s}\Gamma u = \bar{q} (t^4 - it^5) \Gamma q \equiv \bar{q} t^{4-i5} \Gamma q, \quad (3.12)$$

Del resto de corrientes que pertenecen al octete, algunas se dan a nivel árbol y otras no. Por ejemplo las hermíticas de las anteriormente discutidas median las transiciones opuestas:

$$t^{1-i2} \quad u \rightarrow d, \quad (3.13)$$

$$t^{4+i5} \quad s \rightarrow u, \quad (3.14)$$

pero el caso de t^{6+i7} no media una transición a nivel árbol (en este caso media la transición $s \rightarrow d$), ya que es una FCNC, o corriente neutra con cambio de sabor (en contraposición con corrientes cargadas como en la desintegración del muón o la que media la desintegración de una partícula extraña), que no tienen cabida en el Modelo Estándar. Lo mismo se puede decir de su hermítica (media la transición $d \rightarrow s$). Solamente nos queda discutir los miembros del octete que median interacciones diagonales: estos son t^3 y t^8 . Haciendo una combinación lineal de ellos en el caso de una corriente puramente vectorial

$$\bar{q} \left(t^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} t^8 \right) \gamma^\mu q \equiv \bar{q} t^{3+\frac{8}{\sqrt{3}}} \gamma^\mu q \equiv \bar{q} t^Q \gamma^\mu q = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma^\mu s, \quad (3.15)$$

obtenemos la corriente electromagnética. Esta corriente tiene una interesante particularidad: es una corriente conservada (CVC). Esto tiene una implicación muy importante y es que la carga eléctrica es conservada, incluso a pesar de las interacciones fuertes. Como consecuencia, en el límite en que la simetría de sabor SU(3) es conservada, la corriente vectorial no se renormaliza a $q^2 = 0$.

En general escribiremos todos los miembros del octete de corrientes de la siguiente manera:

$$\mathcal{J}^a = \bar{q} t^a \Gamma q, \quad (3.16)$$

Como los estados hadrónicos también pertenecen a representaciones irreducibles del grupo de sabor SU(3) (en nuestro caso solamente nos interesa el octete, pero en principio la discusión se puede extender al decuplete de manera directa), escribiremos estos como:

$$\langle B^a | \mathcal{J}^b | B^c \rangle, \quad (3.17)$$

y esta estructura nos permitirá hacer predicciones no triviales sobre los correspondientes factores de forma.

Para el estudio de las desintegraciones semileptónicas de hiperones en particular estaremos interesados en dos multipletes de corrientes, la vectorial (3.18) y la vectorial axial (3.19):

$$V_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu t^a q, \quad (3.18)$$

$$A_\mu^a = \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 t^a q, \quad (3.19)$$

perteneciendo la corriente electromagnética (3.15) al multiplete de corrientes vectoriales (3.18).

3.2.2. Límite de simetría SU(3) exacta

Aunque en las secciones siguientes el cálculo en el que se supone simetría SU(3) exacta se puede realizar en el contexto de la expansión en $1/N_C$, es interesante tratarlo aparte, para apreciar las diferencias entre ambos métodos.

En el caso de simetría SU(3) exacta podemos utilizar el teorema de Wigner-Eckart para escribir todos los factores de forma de un mismo tipo en función de dos

elementos de matriz reducidos:

$$\langle B^a | \mathcal{J}^b | B^c \rangle = F_{\mathcal{J}} f_{abc} + D_{\mathcal{J}} d_{abc}, \quad (3.20)$$

en donde $F_{\mathcal{J}}$ y $D_{\mathcal{J}}$ dependen del tipo de operador (esto es, dependen del factor de forma), y las f_{abc} d_{abc} están definidas en el Apéndice A.

Como ya se ha comentado en la introducción del capítulo, la corriente vectorial es conservada, de manera que en $q^2 = 0$ podemos relacionar los factores de forma reducidos con propiedades electromagnéticas de los bariones: $f_1(q^2 = 0)$ está relacionada con la carga eléctrica y $f_2(q^2 = 0)$ está relacionada con el momento magnético. Desafortunadamente esto no ocurre así con la corriente vector-axial, de modo que los factores de forma reducidos tendrán que ser ajustados a los datos experimentales. Teniendo todo esto en cuenta obtenemos los resultados mostrados en la Tabla 3.1, donde se ha utilizado $\mu_p = 1.7928$ y $\mu_n = -1.9130$. La parametrización de $g_1(0)$ se consigue particularizando en (3.20) \mathcal{J}^a por el multiplete de corrientes vector-axiales A_μ^a , de modo que $F_A = F$ y $D_A = D$. La parametrización de $f_1(0)$ se consigue particularizando en (3.20) \mathcal{J}^a por el multiplete de corrientes vectoriales. En este caso, debido a la conservación de la corriente electromagnética, tenemos fijados los valores de $F_V = 1$ y $D_V = 0$ así como los de $F_\mu = -(2\mu_p + \mu_n)$ y $D_\mu = 3\mu_n$ para la parametrización de f_2 . Para este último factor de forma, tenemos la posibilidad de aplicar la fórmula (3.20) a $f_2(0)$ o a $\frac{f_2(0)}{2M_B}$. Usaremos esta ambigüedad para estimar el error sistemático introducido por el $f_2(0)$ en V_{us} .

Vamos a comparar la ecuación (3.8) con el caso de la corriente electromagnética:

$$\langle b | J_{\text{em}}^\mu | B \rangle = \bar{u}_b(p_b) \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{iF_2(q^2) \sigma^{\mu\nu}}{2m_B} q_\nu \right] u_B(p_B), \quad (3.21)$$

en donde se puede demostrar que $F_1(q^2 = 0) = Q_{\text{em}}$ es la carga eléctrica del barión y $F_2(q^2 = 0) = \frac{g_\mu - 2}{2}$ en donde g_μ es el momento magnético del barión.

La principal diferencia entre (3.21) y (3.8) es que en (3.21) no hay un término con f_3 (está prohibido por invariancia gauge). En el límite de simetría SU(3), la ecuación (3.8) incluye a la (3.21), de modo que podemos argumentar que en este caso, $f_3 = 0$ para todas las transiciones.

A continuación argumentaremos que g_2 también se anula en el caso de simetría SU(3) exacta en todas las transiciones. Consideremos las propiedades de la operación G-paridad, consistente en aplicar conjugación de carga (C) y una rotación de 180° respecto al segundo eje I_2 en el espacio de isospín. La interacción fuerte es invariante bajo esta transformación. Bajo G-paridad, las corrientes vectoriales y vector-axiales se transforman del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V_\mu &\longrightarrow V_\mu, \\ A_\mu &\longrightarrow -A_\mu. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Corrientes que se transforman como (3.22) se denominan corrientes de *primera clase*, y las que lo hacen con el signo contrario, de *segunda clase*. Los términos f_1 , f_2 , g_1

y g_3 corresponden a la primera clase mientras que g_2 y f_3 a la segunda clase. Si analizamos a nivel fundamental las transiciones $d \rightarrow u$ (esto es, a nivel de quarks)

$$J_{\text{quarks}}^\mu = \bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d, \quad (3.23)$$

nos damos cuenta de que solamente aparecen corrientes de primera clase, luego en estas transiciones g_2 y f_3 son nulos. En el caso de simetría SU(3) exacta, la corriente (3.23) está relacionada con las que median transiciones con $|\Delta S| = 1$, con lo que podemos concluir que para todas las transiciones, en el límite de simetría SU(3) exacta los factores g_2 y f_3 son nulos (esto es equivalente a afirmar que son proporcionales a la ruptura de la simetría).

Con todo esto, para el cálculo de los observables de interés de las desintegraciones semileptónicas de hiperones, solamente tendremos en cuenta los factores de forma f_1 , g_1 y f_2 .

Tabla 3.1: Parametrización de los factores de forma f_1 , g_1 y f_2 en el caso de simetría exacta

Desintegración	$f_1(0)$	$g_1(0)$	$\frac{-1}{2}f_2[2]$	$\frac{-1}{2}f_2[23]$
$n \rightarrow pe^{-\bar{\nu}}$	1	$D + F$	$\frac{M_n(\mu_p - \mu_n)}{M_p} = 1.855$	$\frac{(\mu_p - \mu_n)}{2} = 1.853$
$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 e^{-\bar{\nu}}$	-1	$D - F$	$-\frac{M_{\Xi^-}(\mu_p + 2\mu_n)}{M_p} = 1.432$	$-\frac{(\mu_p + 2\mu_n)}{2} = 1.017$
$\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda e^\pm \bar{\nu}$	0	$\sqrt{\frac{2}{3}}D$	$-\frac{M_{\Sigma^\pm}}{M_p} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mu_n)}{2} = 1.490$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mu_n)}{2} = 1.171$
$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 e^{-\bar{\nu}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2} \frac{M_{\Sigma^-}(\mu_p + \mu_n)}{M_p} = 0.755$	$\sqrt{2} \frac{(\mu_p + \mu_n)}{4} = 0.591$
$\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ e^{-\bar{\nu}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}F$	$\sqrt{2} \frac{M_{\Sigma^0}(\mu_p + \mu_n)}{M_p} = 0.751$	$\sqrt{2} \frac{(\mu_p + \mu_n)}{4} = 0.591$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ e^{-\bar{\nu}}$	1	$D + F$	$\frac{M_{\Xi^0}(\mu_p - \mu_n)}{M_p} = 2.597$	$\frac{(\mu_p - \mu_n)}{2} = 1.853$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 e^{-\bar{\nu}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D + F)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{M_{\Xi^-}(\mu_p - \mu_n)}{M_p} = 1.845$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(\mu_p - \mu_n)}{2} = 1.310$
$\Sigma^- \rightarrow ne^{-\bar{\nu}}$	-1	$D - F$	$-\frac{M_{\Sigma^-}(\mu_p + 2\mu_n)}{M_p} = 1.297$	$-\frac{(\mu_p + 2\mu_n)}{2} = -1.017$
$\Sigma^0 \rightarrow pe^{-\bar{\nu}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(D - F)$	$\frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{M_{\Sigma^0}(\mu_p + 2\mu_n)}{M_p} = 0.914$	$\frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{(\mu_p + 2\mu_n)}{2} = -0.719$
$\Lambda \rightarrow pe^{-\bar{\nu}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(D + 3F)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_\Lambda \mu_p}{M_p} = -1.306$	$-\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mu_p}{2} = -1.098$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda e^{-\bar{\nu}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(D - 3F)$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{M_{\Xi^-}(\mu_p + \mu_n)}{M_p} = -0.104$	$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mu_p + \mu_n)}{2} = -0.074$

3.2.3. El teorema de Ademollo–Gatto

Antes de comenzar el análisis de la ruptura de simetría SU(3) es conveniente comentar un teorema general que nos dará pistas sobre el patrón de la ruptura de la

simetría.

De un modo general se puede decir que así como la parte del hamiltoniano que conserva la simetría es un singlete de sabor, la parte del hamiltoniano que la viola pertenece a un octete. En el lagrangiano de QCD, es el término de masas el que viola la simetría SU(3):

$$\mathcal{L}_m = -\bar{q}\mathcal{M}q, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

en donde hemos supuesto que el isospín es conservado y $\hat{m} = \frac{m_u + m_d}{2}$. Esta matriz de masas se puede separar en una parte que conserve SU(3) y una que lo viole:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -\bar{q}\mathcal{M}q = -\frac{1}{3}(m_s + 2\hat{m})\bar{q}q - \Delta\mathcal{H}, \\ \Delta\mathcal{H} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(m_s - \frac{m_d + m_u}{2} \right) \bar{q}t^8q. \end{aligned} \quad (3.26)$$

El parámetro adimensional ϵ nos da el orden de la violación de la simetría, y lo podemos definir del siguiente modo:

$$\epsilon \sim \frac{m_s}{\Lambda_{QCD}}, \quad (3.27)$$

en donde Λ_{QCD} es la escala de energías en la que QCD es una teoría no perturbativa.

El teorema de Ademollo–Gatto [8] nos dice que para el factor de forma vectorial no hay correcciones de primer orden en ruptura de simetría. Podemos derivar el teorema de una forma sencilla siguiendo los pasos de [38]. A partir de las corrientes vectoriales podemos definir las cargas vectoriales en términos de campos de quarks:

$$V_\mu^{\bar{i}j}(x) = \bar{q}^i(x)\gamma_\mu q^j(x), \quad (3.28)$$

$$Q^{\bar{i}j} = \int d^3\vec{x} \bar{q}^i(x)\gamma^0 q^j(x) = \int d^3\vec{x} q^{\dagger i}(x)q^j(x), \quad (3.29)$$

$$Q^a(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu t^a q(x), \quad (3.30)$$

$$Q^a = \int d^3\vec{x} \bar{q}(x)\gamma^0 t^a q(x) = \int d^3\vec{x} q^\dagger(x)t^a q(x). \quad (3.31)$$

Estas cargas son independientes del tiempo cuando las corrientes vectoriales son de divergencia nula. Usando las ecuaciones del movimiento podemos obtener:

$$\partial^\mu V_\mu^{\bar{i}j}(x) = (m_i - m_j)\bar{q}^i(x)q^j(x), \quad (3.32)$$

con m_i la masa del quark i -ésimo. En el límite en el que SU(3) es exacta, todas las corrientes vectoriales son conservadas. Todas las corrientes diagonales ($i = j$) son conservadas. En particular j_μ^8 y j_μ^3 son conservadas.

Usando las relaciones de conmutación para las cargas vectoriales que median las transiciones $\Delta S = 1$ obtenemos:

$$[Q^{4+i5}, Q^{4-i5}] = Q^3 + \sqrt{3}Q^8 = Q^{\text{em}} + Y, \quad (3.33)$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}Q^8. \quad (3.34)$$

Tomando el valor esperado de esta igualdad para un barión B con momento p_B perteneciente al octete, obtenemos:

$$\begin{aligned} (Q^{\text{em}} + Y)_B \langle B(p_B) | B(p_B) \rangle &= - |\langle b | Q^{4+i5} | B(p_B) \rangle|^2 \\ &+ \sum_m |\langle m | Q^{4-i5} | B(p_B) \rangle|^2 - \sum_n |\langle n | Q^{4+i5} | B(p_B) \rangle|^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

en donde b es el único barión perteneciente al octete que está conectado por Q^{4+i5} , y m y n son bariones del decuplete. El primer sumando se obtiene gracias a que las corrientes vectoriales diagonales son exactamente conservadas.

Por un lado tenemos que

$$\langle B(p_B) | B(p_B) \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) u^\dagger(p_B) u(p_B), \quad (3.36)$$

por otro lado, la suma de estados intermedios se tiene que entender sumando también sobre polarizaciones e integrando sobre momentos:

$$\sum_m |n\rangle \langle n| = \sum_n \sum_{\lambda_n} \int \frac{d^3 \vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} |n, p_n, \lambda_n\rangle \langle n, p_n, \lambda_n|, \quad (3.37)$$

en donde $E_n = \sqrt{|\vec{p}_n|^2 + m_n^2}$. Del primer sumando de la eq. (3.35) obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle b, p, \lambda | Q^{4+i5} | B(p_B) \rangle &= \int d^3 \vec{x} \langle b, p, \lambda | \bar{u}(x) \gamma^0 s(x) | B(p_B) \rangle \\ &= \int d^3 \vec{x} \langle b, p, \lambda | e^{iPx} \bar{u}(0) \gamma^0 s(0) e^{-iPx} | B(p_B) \rangle \\ &= \int d^3 \vec{x} e^{iqx} \langle b, p, \lambda | \bar{u}(0) \gamma^0 s(0) | B(p_B) \rangle \\ &= \int d^3 \vec{x} e^{iqx} \bar{u}(p, \lambda) \left[f_1(q^2) \gamma^0 + \frac{i f_2(q^2) \sigma^{0\nu}}{2m_B} q_\nu + \frac{f_3(q^2)}{m_B} q^0 \right] u(p_B) \\ &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}) \bar{u}(p, \lambda) \left[f_1(q_0^2) \gamma^0 + \frac{f_3(q_0^2)}{m_B} q^0 \right] u(p_B) \\ &\doteq (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}) f_1(q_0^2) u^\dagger(p, \lambda) u(p_B). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Como posteriormente se demostrará que la expresión (3.38) debe evaluarse en $q^\mu = 0$, solamente nos quedaremos con el primer sumando, proporcional a f_1 . Con esto

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E} |\langle b, p, \lambda | Q^{4+i5} | B(p_B) \rangle|^2 \\
 &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{q}) f_1^2(q^2) \bar{u}(p_B) \gamma^0 u(p_b, \lambda) \bar{u}(p_b, \lambda) \gamma^0 u(p_B) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{0}) \bar{u}(p_B) (\not{p}_b^\dagger + m_b) u(p_B) \\
 &= \int \frac{d^3\vec{p}}{2E} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}) \delta^{(3)}(\vec{0}) \bar{u}(p_B) \{ (E_B + E) \gamma^0 + (m_b - m_B) \} u(p_B), \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

en donde hemos usado que la $\delta^{(3)}(\vec{q})$ implica que $\vec{p}_b = \vec{p}_B$ y que:

$$\begin{aligned}
 \not{p}_b &= E \gamma^0 - \vec{p}_b \vec{\gamma}, \\
 \not{p}_b^\dagger &= E \gamma^0 + \vec{p}_b \vec{\gamma}, \\
 (E_B \gamma^0 - \vec{p}_B \vec{\gamma}) u(p_B) &= m_B u(p_B). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Como (3.39) es invariante Lorentz, puedo calcularlo en cualquier sistema de referencia. En particular, al trabajar en el sistema de referencia $p_B \rightarrow \infty$ se obtienen simplificaciones notables. En este límite podemos despreciar las masas de ambos bariones, de modo que $E = E_B$, y con esto $q^\mu = 0$. Así pues en este límite la ecuación (3.39) queda:

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) f_1^2(0) u^\dagger(p_B) u(p_B). \quad (3.41)$$

En el límite en el que SU(3) es exacta, el segundo y tercer sumando del segundo miembro de la ecuación (3.35) (términos sumados) se anulan, ya que los operadores Q no nos sacan de la representación irreducible en la que estamos, esto es, el octete. Así pues, esos términos son de orden ϵ^2 (ya que aparecen al cuadrado). Con esto, comparando las ecuaciones (3.35), (3.36) y (3.41) obtenemos:

$$f_1(0)^2 = -(Q^{\text{em}} + Y)_B + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.42)$$

lo que implica que

$$f_1(0) = f_1^{\text{sim}}(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.43)$$

con lo que queda probado el teorema de Ademollo–Gatto, ya que la parte de la derecha de (3.42) representa la predicción para $f_1^2(0)$ en caso de suponer simetría SU(3) exacta.

Definamos a continuación un parámetro que nos indique el grado de ruptura de la simetría SU(3) en el factor de forma vectorial f_1 . Para cada proceso definiremos \tilde{f}_1 del siguiente modo:

$$\tilde{f}_1 = \frac{f_1}{f_1^{\text{sim}}}, \quad (3.44)$$

de modo que según (3.43)

$$\tilde{f}_1 = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.45)$$

3.2.4. Estudio de la ruptura de la simetría en el factor de forma f_1

En el límite de baja transferencia de momentos $q^2 \sim 0$, podemos hacer la reducción no relativista del elemento de matriz vectorial:

$$V^{\mu a} = \langle b | \bar{q} \gamma^{\mu} t^a q | B \rangle \longrightarrow V^{0a} = \langle b | \bar{q} \gamma^0 t^a q | B \rangle . \quad (3.46)$$

El valor de los elementos de matriz nos proporciona el factor de forma f_1 . V^{0a} es un singlete de espín y un octete de sabor, así que se transforma como una (0,8) respecto a $SU(2) \otimes SU(3)$.

En primer lugar calcularemos la expansión del operador de QCD en el caso de simetría $SU(3)$ exacta. Todos los operadores que se usan aquí se definieron en (2.23). Sólo aparece un operador de un cuerpo (el generador del grupo $SU(3)$), y uno de dos cuerpos:

$$\mathcal{O}_1^a = T^a , \quad (3.47)$$

$$\mathcal{O}_2^a = \{ J^i, G^{ia} \} = 2J^i G^{ia} , \quad (3.48)$$

el resto de operadores independientes se construirían anticonmutando estos dos con \vec{J}^2 ,¹ pero como nuestra expansión termina con operadores de tres cuerpos, solamente aparece un nuevo operador:

$$\mathcal{O}_3^a = \{ \vec{J}^2, T^a \} = 2\vec{J}^2 T^a , \quad (3.49)$$

que en el caso de nuestras transiciones, como no hay cambio de espín, \mathcal{O}_3^a puede ser absorbido en (3.47). De hecho incluso en el caso de considerar operadores de más de tres cuerpos se podrían reabsorber en los operadores (3.47) y (3.48). Este mismo argumento se utilizará a lo largo de todo el capítulo. Así pues, la expansión del operador sería:

$$V^{0a} = \sum_{n=1}^{N_C} \frac{c_n}{N_C^{n-1}} \mathcal{O}_n^a . \quad (3.50)$$

Como estamos en el caso de simetría $SU(3)$ exacta y además la corriente vectorial es conservada, obtenemos que de los coeficientes c_n solamente no es nulo $c_1 = 1$, con lo que:

$$V^{0a} = T^a . \quad (3.51)$$

Vamos ahora a incluir los efectos de la ruptura de $SU(3)$. Ya hemos comentado que estos efectos se transforman como un singlete de espín y un octete de sabor, esto es (0,8). Para ello debemos componer el producto tensorial de las representaciones:

$$(0, 8) \otimes (0, 8) = (0, 1) \oplus (0, 8) \oplus (0, 8) \oplus (0, 10) \oplus (0, \overline{10}) \oplus (0, 27) , \quad (3.52)$$

y si además tenemos en cuenta rupturas al siguiente orden tenemos que calcular también $(0, 8) \otimes (0, 8) \otimes (0, 8)$ con lo que aparecen también la (0,35) y la (0,64).

¹El operador \vec{J}^2 conmuta con los operadores T^a y J^i , pero no con G^{ia} .

De todas éstas debemos coger las que se transformen bajo inversión temporal² del mismo modo que V^{0a} , con lo que nos quedamos con las siguientes:

- (0,0) solamente encontramos los operadores:

$$\mathcal{O}_0 = 1, \quad (3.53)$$

$$\mathcal{O}_2 = \vec{J}^2, \quad (3.54)$$

pero como solamente tratamos con bariones de espín $\frac{1}{2}$, el segundo operador (3.54) puede ser reabsorbido en el primero (3.53).

- (0,8) en este caso los operadores son los mismos que en el caso de simetría exacta.
- (0,27) aparecen operadores de dos y tres cuerpos:

$$\mathcal{O}_2^{ab} = \{T^a, T^b\}, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3^{ab} &= \{T^a, \{J^i, G^{ib}\}\} + \{T^b, \{J^i, G^{ia}\}\} \\ &= 2\{T^a, J^i G^{ib}\} + 2\{T^b, J^i G^{ia}\}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

- (0,10+ $\overline{10}$) aparece un operador de tres cuerpos

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_3^{ab} &= \{T^a, \{J^i, G^{ib}\}\} - \{T^b, \{J^i, G^{ia}\}\} \\ &= 2\{T^a, J^i G^{ib}\} - 2\{T^b, J^i G^{ia}\}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

- (0,64) también aparece un operador de tres cuerpos

$$\mathcal{O}_3^{abc} = \{T^a, \{T^b, T^c\}\}. \quad (3.58)$$

Antes de seguir hay que hacer tres comentarios de interés. El primero es que los operadores de dos cuerpos aparecen del producto $(0, 8) \otimes (0, 8)$ y los de tres cuerpos del producto $(0, 8) \otimes (0, 8) \otimes (0, 8)$. Es por esto que en la (0,64) solamente aparecen operadores de tres cuerpos. En la (0,27) aparecen de dos y de tres porque la representación irreducible (0,27) aparece en los dos productos tensoriales y si en la (0,10+ $\overline{10}$) no aparecen operadores de dos cuerpos es porque hay una regla de reducción que los hace redundantes. El segundo comentario es que, en principio, de los operadores anteriores se deben sustraer las piezas que se transforman como representaciones de dimensión inferior. En el caso de de la (0,27) hay que sustraer el octete y el singlete y en el caso de la (0,64) hay que sustraer la (0,27) el octete y el singlete. En la práctica esto no es necesario ya que las piezas que se sustraen pueden ser reabsorbidas en otros operadores de dimensión inferior. Se pueden construir, a partir de los operadores que se han dado, nuevos operadores de un mayor número

²Si no tuviésemos en cuenta este hecho, nos encontraríamos al hacer el cálculo de los elementos de matriz de los operadores de espín-sabor entre los bariones, que obtenemos un resultado imaginario, lo que en principio es absurdo, ya que los coeficientes c_n son reales.

de cuerpos, anticonmutando con \vec{J}^2 , pero como los nuevos operadores son al menos de dos cuerpos, esto produciría operadores de al menos cuatro cuerpos, que ya no se tienen en cuenta. Además de este argumento, también hay que tener en cuenta que solamente trataremos con el octete de bariones y no con el decuplete, de manera que los nuevos operadores se pueden absorber en los anteriores.

Los tensores que pertenecen a la representación (0,8) tiene un índice en la representación adjunta de SU(3), de modo que al hacer el producto tensorial $(0,8) \otimes (0,8)$ deberíamos obtener operadores con dos índices en la representación adjunta. Sin embargo, al hacer la descomposición en las representaciones irreducibles, aparece la (0,1), que no tiene ningún índice. Del mismo modo, al hacer $(0,8) \otimes (0,8) \otimes (0,8)$ deberíamos obtener operadores con tres índices en la adjunta, pero aparecen representaciones irreducibles sin índices, con uno y con dos índices. Para entender esto tenemos que pensar en términos de métodos tensoriales. Hay ciertos tensores que pueden ser construidos con índices en la representación adjunta que permanecen invariantes cuando aplicamos una transformación sobre ellos, les llamaremos tensores invariantes. En el caso del grupo SU(N) son δ^{ab} , f^{abc} y d^{abc} . Al hacer el producto tensorial $(0,8) \otimes (0,8)$, para descomponer el resultado en representaciones irreducibles usando métodos tensoriales, debemos descomponer el tensor resultante en suma de tensores que se transformen bajo una representación determinada. En el caso de que los tensores de la representación irreducible tengan menos índices que el número de productos tensoriales de la representación adjunta que se han realizado, lo conseguimos multiplicando (y contrayendo algún índice si es necesario) los tensores pertenecientes a las representaciones irreducibles con los tensores invariantes.

Una vez tenemos los operadores, tenemos que transformarlos en operadores que rompan la simetría. En el caso de operadores sin índices de sabor, se multiplican por δ^{ab} y se pone a un índice el valor 8, o se multiplican por f^{abc} o d^{abc} y se ponen dos índices igual a 8. Como $f^{a88} = 0$ no lo tendremos en cuenta; asimismo, como $d^{a88} = -1/\sqrt{3}\delta^{a8}$, este término lo absorbemos en el que va multiplicado por δ^{a8} . En el caso de los operadores con un solo índice de sabor, los contraemos con d^{abc} y ponemos a uno de esos índices el valor 8 (no importa cual, dada la simetría de los índices de sabor)³. También podemos obtener $T^a\delta^{bc}$ y poner a dos de los tres índices el valor 8. Si elegimos los dos índices de la delta el resultado es T^a y se puede absorber, y si elegimos uno de la delta y el del tensor T obtenemos un nuevo operador $T^8\delta^{a8}$. En el caso de operadores con dos índices, podemos hacer dos cosas: en primer lugar le damos a uno de ellos el valor 8, en segundo lugar contraemos uno solo de sus índices con d^{abc} y ponemos a dos de los índices el valor 8. En el caso de operadores con tres índices, ponemos a dos de ellos el valor 8. El número de índices de sabor a los que les hemos asignado el valor 8 nos indica el orden de ruptura de

³Si se contrae con f^{abc} , el resultado se transformaría incorrectamente bajo inversión temporal.

la simetría. Con todo esto podemos escribir:

$$\begin{aligned}
 V^{0a} = & (1 + \epsilon a_1)T^a + \epsilon a_2 \frac{1}{N_C} \{J^i, G^{ia}\} + \epsilon b_1 d^{ab8} T^b + \\
 & \epsilon b_2 \frac{1}{N_C} d^{ab8} \{J^i, G^{ib}\} + \epsilon a_4 \frac{1}{N_C} \{T^a, T^8\} + \\
 & \epsilon a_5 \frac{1}{N_C^2} (\{T^a, \{J^i, G^{i8}\}\} + \{T^8, \{J^i, G^{ia}\}\}) + \\
 & \epsilon a_6 \frac{1}{N_C^2} (\{T^a, \{J^i, G^{i8}\}\} - \{T^8, \{J^i, G^{ia}\}\}) + \\
 & \epsilon^2 b_4 \frac{1}{N_C} d^{ab8} \{T^b, T^8\} + \epsilon^2 a_7 \frac{1}{N_C^2} \{T^a, \{T^8, T^8\}\} + \\
 & \epsilon^2 b_5 \frac{1}{N_C^2} d^{ab8} (\{T^b, \{J^i, G^{i8}\}\} + \{T^8, \{J^i, G^{ib}\}\}) + \\
 & \epsilon^2 b_6 \frac{1}{N_C^2} d^{ab8} (\{T^b, \{J^i, G^{i8}\}\} - \{T^8, \{J^i, G^{ib}\}\}) . \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

Aunque se podría pensar por ejemplo que el operador proporcional a a_2 está suprimido respecto al proporcional a a_1 , esto no es así, y sería incurrir en un error argumentar que está suprimido por las potencias en N_C , ya que como se comentó en capítulos precedentes, los elementos de matriz del operador G^{ia} dependen de la región del diagrama de sabor en la que se encuentre el barión, y en general debemos considerarlos como de orden N_C . Lo que sí podemos afirmar es que están suprimidos los términos con mayores potencias de ϵ , que indica el orden de ruptura de la simetría de sabor. Debido al teorema de Ademollo-Gatto es conveniente mantener la ruptura de simetría hasta segundo orden.

Antes de seguir, veamos como tratar convenientemente con tensores en los que se ha contraído uno de los índices con el símbolo d^{abc} :

$$d^{ab8} \mathcal{O}^b = \begin{cases} a = 1, 2, 3 & \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{O}^a \\ a = 4, 5, 6, 7 & \longrightarrow \frac{-1}{2\sqrt{3}} \mathcal{O}^a \\ a = 8 & \longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{3}} \mathcal{O}^a \end{cases} , \tag{3.60}$$

con esto podemos transformar una expresión que nos apareciera en todos los cálculos:

$$\begin{aligned}
 a' \mathcal{O}^a + b' d^{ab8} \mathcal{O}^b &= a' \mathcal{O}^a + \tilde{b} \left(\sqrt{3} d^{ab8} \right) \mathcal{O}^b = a \mathcal{O}^a + \tilde{b} \left(\sqrt{3} d^{ab8} - \delta^{ab} \right) \mathcal{O}^b \\
 &= a \mathcal{O}^a - \frac{3}{2} \tilde{b} \Delta^a \mathcal{O}^a - 2 \tilde{b} \delta^{a8} \mathcal{O}^8 \\
 &= a \mathcal{O}^a + b \Delta^a \mathcal{O}^a + \frac{4}{3} b \delta^{a8} \mathcal{O}^8 , \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

en donde

$$\tilde{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}b', \quad (3.62)$$

$$a' = a - \tilde{b}, \quad (3.63)$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}b' = -\frac{3}{2}\tilde{b}, \quad (3.64)$$

$$\Delta^a = \begin{cases} 1 & a = 4, 5, 6, 7 \\ 0 & a = 1, 2, 3, 8 \end{cases}, \quad (3.65)$$

$$\sqrt{3}d^{ab8} - \delta^{ab} = -\frac{3}{2}\Delta^a - 2\delta^{a8}. \quad (3.66)$$

Usando (3.66), las fórmulas del Apéndice B (B.63,B.65,B.107,B.109), y reabsorbiendo coeficientes, podemos reescribir (3.59) en términos de N_s y J_s^i . Tenemos que exigir también, que para transiciones en las que $\Delta S = 0$ no haya efectos de violación de simetría SU(3), ya que el isospín no es una simetría rota. Con esto obtenemos:

$$V^{0a} = T^a \quad \Delta S = 0, \quad (3.67)$$

$$V^{0a} = (1 + v_1)T^a + v_2\{T^a, N_s\} + v_3\{T^a, -I^2 + \vec{J}_s^2\} \quad |\Delta S| = 1, \quad (3.68)$$

en donde en (3.68) hemos usado además el hecho de que para nuestras transiciones, no todos los operadores son independientes, de modo que se han mantenido solamente los independientes, reabsorbiendo los coeficientes.

En el caso de este factor de forma, se han incluido correcciones de segundo orden en ruptura de simetría, como ya se ha comentado, porque el teorema de Ademollo–Gatto nos asegura que no hay correcciones a primer orden. Esto parece estar en contradicción con el hecho de que en nuestro cálculo haya operadores que violan la simetría a primer orden. El teorema de Ademollo–Gatto nos dice que si tenemos una carga conservada y el operador que media las transiciones no nos puede sacar del multiplete de sabor, entonces no hay correcciones de primer orden. Pero esto es consecuencia de la conservación en QCD de las corrientes vectoriales diagonales en sabor (3.32), y no tiene que ver las transformaciones bajo el grupo SU(3) de la corriente vectorial (que son iguales, por ejemplo, a las de las corrientes vector–axiales). Podemos discutir una demostración del teorema en el lenguaje de las expansiones en gran número de colores. Cuando se parametriza hasta primer orden en ruptura de simetría una corriente que incluye en el multiplete de corrientes una que sea conservada, si exigimos que lo sea (porque conocemos esta información adicional de QCD), obtenemos unas condiciones sobre los coeficientes que multiplican a nuestros operadores. El teorema de Ademollo–Gatto asegura que estas condiciones implican que todos los coeficientes que multiplican a los operadores que rompen la simetría a primer orden son nulos. En el caso de que parametricemos nuestras corrientes hasta segundo orden en ruptura de simetría, al exigir que nuestra corriente conservada lo sea, obtendremos de nuevo unas relaciones entre los coeficientes, pero ahora la solución a estas condiciones ya no es la trivial, aunque eso sí, hemos reducido

Tabla 3.2: Elementos de matriz de los operadores para el factor de forma vectorial f_1 .

Transición	1	v_1	v_2	v_3
$n \rightarrow p$	1	0	0	0
$\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda$	0	0	0	0
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0
$\Sigma^- \rightarrow n$	-1	-1	-1	2
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$3\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{6}$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	0
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	1	1	3	0

el número de operadores independientes. Así pues, la aparente contradicción no es tal.

En la Tabla 3.2 aparecen los valores de los elementos de matriz de los operadores que multiplican a los respectivos coeficientes que aparecen en la fórmula (3.68) para las transiciones de interés.

3.2.5. Estudio de la ruptura de simetría en el factor de forma g_1

Si repetimos la reducción no relativista para el elemento de matriz vector-axial, encontramos lo siguiente:

$$A^{\mu a} = \langle b | \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 t^a q | B \rangle \longrightarrow A^{ia} = \langle b | \bar{q} \gamma^i \gamma_5 t^a q | B \rangle . \quad (3.69)$$

El valor de los elementos de matriz nos proporciona el factor de forma g_1 . Así pues A^{ia} es un triplete de espín y un octete de sabor y se transforma como una (1,8) bajo $SU(2) \otimes SU(3)$.

Como hicimos con el caso de f_1 primero calcularemos la expansión suponiendo simetría exacta. Solamente aparece un operador de un cuerpo, dos de dos cuerpos

y dos de tres cuerpos:

$$\mathcal{O}_1^{ia} = G^{ia}, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{D}_2^{ia} = \epsilon^{ijk} \{J^i, G^{ka}\}, \quad (3.71)$$

$$\mathcal{O}_2^{ia} = J^i T^a, \quad (3.72)$$

$$\mathcal{O}_3^{ia} = \{\vec{J}^2, G^{ia}\} - \frac{1}{2} \{J^i, \{J^j, G^{ja}\}\} = \{\vec{J}^2, G^{ia}\} - \{J^i, J^j G^{ja}\}, \quad (3.73)$$

$$\mathcal{D}_3^{ia} = \{J^i, \{J^j, G^{ja}\}\} = 2\{J^i, J^j G^{ja}\}, \quad (3.74)$$

el resto de operadores se pueden construir anticonmutando con \vec{J}^2 , pero solamente en el caso de \mathcal{O}_1^{ia} obtenemos un operador de menos de cuatro cuerpos. Por otro lado, como ya se ha comentado con anterioridad, dado que nuestras transiciones no cambian en el espín, este operador puede ser reabsorbido en (3.70). Los operadores \mathcal{D}_n^{ia} son operadores diagonales, en el sentido en el que sólo tienen elementos de matriz no nulos entre estados del mismo espín. Por contra los operadores \mathcal{O}_n^{ia} , $n > 1$, son operadores fuera de la diagonal, en el sentido en el que sólo tienen elementos de matriz no nulos entre estados de espín diferente. Para nuestros procesos, pues, estos operadores no intervendrán. El operador (3.70) no es ni diagonal ni fuera de la diagonal. Los operadores \mathcal{D}_n^{ia} y los \mathcal{O}_{2m+1}^{ia} son impares bajo inversión temporal, mientras que \mathcal{O}_{2m}^{ia} son pares. Dado que A^{ia} es impar bajo inversión temporal, estos últimos operadores no entran en la expansión:

$$A^{ia} = a_1 \mathcal{O}_1^{ia} + a_2 \frac{1}{N_C} \mathcal{D}_2^{ia} + a_3 \frac{1}{N_C^2} \mathcal{D}_3^{ia}. \quad (3.75)$$

Si ahora queremos hacer un análisis de qué términos están suprimidos en N_C respecto a otros, tenemos que hacerlo cuidadosamente. En algunas partes del diagrama de sabor, G^{ia} puede tener elementos de matriz de orden N_C^{-1} de modo que es del mismo orden que el término proporcional a \mathcal{D}_2^{ia} . Sin embargo, en el caso de \mathcal{D}_3^{ia} , ni aun cuando el operador G^{ia} tome valores del orden N_C contribuirá tanto como G^{ia} o \mathcal{D}_2^{ia} , de modo que este operador sí podemos considerar que está suprimido. De modo que a primer orden en $1/N_C$ podríamos escribir:

$$A^{ia} = a_1 G^{ia} + a_2 \frac{J^i T^a}{N_C}. \quad (3.76)$$

Pasemos ahora a estudiar la ruptura de la simetría SU(3). En este caso nos quedaremos a primer orden en la ruptura, ya que no hay un equivalente del teorema de Ademollo–Gatto para la corriente vector–axial. También nos quedaremos a primer orden en la expansión en $1/N_C$. El producto tensorial $(1, 8) \otimes (0, 8)$ es totalmete análogo al caso $(1, 8) \otimes (1, 8)$, y el resultado es exactamente el mismo que (3.52) cambiando en la casilla del espín los ceros por unos. Como hemos dicho que nos quedamos a primer orden en N_C y ϵ no hará falta calcular $(1, 8) \otimes (0, 8) \otimes (0, 8)$.

- (1,0) tenemos un operador de un cuerpo:

$$\mathcal{O}_1^i = J^i. \quad (3.77)$$

- (1,8) tenemos los mismos que en el caso de la simetría no rota.
- (1,10+ $\overline{10}$) tenemos un operador:

$$\mathcal{O}_2^{iab} = \{G^{ia}, T^b\} - \{G^{ib}, T^a\} - \frac{2}{3} f^{abc} f^{cgh} \{G^{ig}, T^h\}, \quad (3.78)$$

y usando que

$$[\vec{J}^2, [T^b, G^{ia}]] = [T^2, [T^b, G^{ia}]] = f^{abc} f^{cgh} \{G^{ig}, T^h\}, \quad (3.79)$$

podemos reescribirlo como:

$$\mathcal{O}_2^{iab} = \{G^{ia}, T^b\} - \{G^{ib}, T^a\} - \frac{2}{3} [\vec{J}^2, [T^b, G^{ia}]]. \quad (3.80)$$

- (1,27) tenemos un solo operador, en donde no nos hemos preocupado de restar las partes pertenecientes al octete y al singlete, ya que pueden ser reabsorbidas en operadores de otras representaciones:

$$\mathcal{O}_{2,27}^{iab} = \{G^{ia}, T^b\} + \{G^{ib}, T^a\}. \quad (3.81)$$

Como ya se comentó en el caso de f_1 , los singletes de sabor se multiplican por δ^{ab} y los objetos con un índice se contraen con f^{abc} . En el caso de (3.71) tenemos:

$$f^{acb} \epsilon^{ijk} \{J^i, G^{jc}\} \propto [\vec{J}^2, [T^b, G^{ia}]]. \quad (3.82)$$

Teniendo todo esto en cuenta, y usando (B.63,B.65,B.107,B.109) obtenemos:

$$\begin{aligned} A^{ia} &= (a\delta^{ab} + \epsilon c_1 d^{ab8}) G^{ib} + (b\delta^{ab} + \epsilon c_2 d^{ab8}) \frac{J^i T^b}{N_C} \\ &+ \epsilon c_3 \frac{\{G^{ia}, N_s\}}{N_C} + \epsilon c_4 \frac{\{J_s^i, T^a\}}{N_C} + \epsilon \frac{c_5}{3N_C} [J^2, [N_s, G^{ia}]], \end{aligned} \quad (3.83)$$

en donde hemos eliminado los términos proporcionales a δ^{a8} porque no hay ninguna transición mediada por el elemento 8 del álgebra. El término proporcional a c_5 sólo contribuye en procesos que cambian tanto espín como extrañeza, de modo que no interviene en nuestros procesos:

$$\begin{aligned} A^{ia} &= (a\delta^{ab} + \epsilon c_1 d^{ab8}) G^{ib} + (b\delta^{ab} + \epsilon c_2 d^{ab8}) \frac{J^i T^b}{N_C} \\ &+ \epsilon c_3 \frac{\{G^{ia}, N_s\}}{N_C} + \epsilon c_4 \frac{\{J_s^i, T^a\}}{N_C}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

si ahora usamos (3.66) y eliminamos los términos proporcionales a δ^{a8} obtenemos:

$$A^{ia} = aG^{ia} + bJ^i T^a + \Delta^a (c_1 G^{ia} + c_2 J^i T^a) + c_3 \{G^{ia}, N_s\} + c_4 \{T^a, J_s^i\}. \quad (3.85)$$

Este es el resultado final en el caso en el que estudiemos tanto transiciones en las que se cambia la extrañeza como aquellas en las que se conserva la extrañeza. Si quisiésemos concentrarnos sólo en las transiciones con cambio de extrañeza, $\Delta^a = 1$, podemos reducir el numero de operadores y de coeficientes independientes (para transiciones sin cambio de extrañeza $\Delta^a = 0$). Llamaremos \tilde{a} y \tilde{b} a los nuevos coeficientes, tras reabsorber los coeficientes c_1 y c_2 :

$$\begin{aligned} A^{ia} &= \tilde{a}G^{ia} + \tilde{b}J^iT^a + c_3\{G^{ia}, N_s\} + c_4\{T^a, J_s^i\}. \\ \tilde{a} &= a + c_1, \\ \tilde{b} &= b + c_2. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Podemos ahora reescribir (3.85) en términos de \tilde{a} y \tilde{b} :

$$A^{ia} = \tilde{a}G^{ia} + \tilde{b}J^iT^a + (\Delta^a - 1)(c_1G^{ia} + c_2J^iT^a) + c_3\{G^{ia}, N_s\} + c_4\{T^a, J_s^i\}, \quad (3.87)$$

esta fórmula nos será útil cuando vayamos a realizar ajustes en los que tengamos en cuenta la desintegración del neutrón. Como $(\Delta^a - 1)$ es cero en el caso de desintegraciones con cambio de extrañeza, (3.87) es igual a (3.86) para éstas; en el caso de las desintegraciones sin cambio de extrañeza el valor de $(\Delta^a - 1)$ es menos uno. Si solamente consideramos una desintegración sin cambio de extrañeza (neutrón desintegrándose a protón), podemos redefinir el nuevo término que aparece como un solo elemento de matriz reducido ρ , de modo que en nuestros ajustes solamente aparece un nuevo factor de forma reducido y no dos:

$$- \langle p | (c_1G^{ia} + c_2J^iT^a) | n \rangle \equiv \rho. \quad (3.88)$$

En la Tabla 3.3 aparecen los valores de los elementos de matriz de los operadores que multiplican a los respectivos coeficientes que aparecen en las fórmula (3.85), (3.87) y (3.88) para las transiciones de interés.

3.2.6. Resto de factores de forma

El único factor de forma que se va a tener en cuenta en los cálculos de los observables, aparte de f_1 y g_1 , es f_2 . Las contribuciones de f_2 y g_2 a las amplitudes están suprimidas por la transferencia de momento. En el límite de SU(3) exacta, las masas de todos los bariones del octete coinciden, de modo que no hay transferencia de momento, y estas contribuciones se cancelan. Así pues, las correcciones de primer orden de ruptura de simetría en f_2 y g_2 son realmente de segundo orden a nivel de amplitudes.

Se calcularán pues los valores de f_2 en el límite de simetría SU(3) exacta. Podemos aprovechar entonces los resultados de la segunda sección de este capítulo y leer los resultados de la Tabla 3.1.

Tabla 3.3: Elementos de matriz de los operadores para el vector de forma vector-axial g_1 .

Transición	a, \tilde{a}	b, \tilde{b}	c_1	c_2	c_3	c_4	ρ
$n \rightarrow p$	$\frac{5}{3}$	1	0	0	0	0	1
$\Sigma^\pm \rightarrow \Lambda$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{8}{3}}$	0	0
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0
$\Sigma^- \rightarrow n$	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{7}{\sqrt{6}}$	0
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{5}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	1	5	1	0

3.2.7. Comparativa de los casos de ruptura de simetría y simetría exacta

La diferencia más notable entre estos marcos de trabajo es que en el caso de simetría exacta no se tiene en cuenta el espín del operador, de manera que a nivel de operadores no hay distinción entre la corriente vector-axial y la corriente vectorial. En otras palabras, los coeficientes de Clebsh-Gordan son los mismos, solamente cambian los elementos de matriz reducidos. Esto no ocurre en el marco de las expansiones en $1/N_C$ de los bariones cuando estudiamos la ruptura de la simetría $SU(3)$, en donde sí existe esta distinción. Así pues la parametrización de las corrientes vector-axiales y vectoriales es diferente en este marco de trabajo.

Otra distinción importante es que trabajando en el marco de la expansión de QCD en $1/N_C$, esperamos que unos elementos de matriz reducidos sean menores que otros. Se ha argumentado que no podemos despreciar ninguno de los términos en (3.76), ya que aunque tienen un factor de supresión $1/N_C$, el valor de los elementos de matriz puede cancelar esa supresión. Sin embargo, como finalmente lo que se ajusta a los datos experimentales no es a_2 sino a_2/N_C , sí que se espera encontrar una supresión en el valor del coeficiente ajustado frente a a_1 .

Capítulo 4

Observables en la desintegración semileptónica de hiperones

4.1. Introducción

Una vez tengamos parametrizados los factores de forma en términos de elementos de matriz reducidos, debemos hacer una comparación con los datos experimentales. Experimentalmente, no se puede medir de forma directa el valor de estos factores de forma. El experimento nos proporciona el valor de ciertos observables, y mediante el cálculo teórico de los mismos en términos de los factores de forma, podemos obtener el valor de estos últimos.

Los observables los podemos dividir en dos tipos:

- Observables absolutos: Son proporcionales a la constante de acoplo de la interacción.
- Observables relativos: Son cocientes de observables absolutos, de modo que no son proporcionales a la constante de acoplo. A su vez estos se subdividen en:
 - Correlaciones: No requieren ningún tipo de polarización. Típicamente son coeficientes de correlación entre dos partículas.
 - Asimetrías: Requieren o bien haces polarizados o bien que se mida la polarización del barión final.

Los observables absolutos son invariantes Lorentz, mientras que para los relativos es necesario especificar un sistema de referencia concreto, típicamente el del barión inicial o final en reposo. Otra característica muy importante que distingue a los observables es la siguiente: mientras que con observables absolutos y correlaciones no obtenemos información sobre el signo de los factores de forma, con las asimetrías sí la obtenemos.

El cálculo de estos observables se puede hacer a partir de la matriz de colisión, expresando el espacio fásico en términos de las variables adecuadas, integrando

unas, y dejando otras sin integrar¹.

La invariancia bajo inversión temporal de las interacciones fuertes requiere que todos los factores de forma sean reales, siempre y cuando no haya contribuciones de partes absorptivas. Se puede comprobar fácilmente que en nuestros procesos no puede haber partes absorptivas. Los términos con factores de forma inducidos (f_3 y g_3), una vez contraídas las corrientes leptónica y hadrónica, resultan en contribuciones proporcionales a m_e/m_B , de modo que son despreciables. El factor de forma $g_2(q^2)$ también se despreciará, ya que tal y como se explicó este factor de forma es exactamente nulo en el límite de simetría SU(3) exacta, luego su valor es proporcional a la ruptura de simetría. Por consistencia, se estudiará la ruptura de simetría a primer orden en los factores de forma vectorial y vector-axial, y sin ruptura en los de magnetismo débil y de electricidad débil, con lo que este último lo consideraremos nulo.

4.2. Dependencia en q^2 de los factores de forma

Cuando uno calcula, por ejemplo, la vida media del hiperón inestable, y desarrolla el resultado en serie de Taylor en función de la diferencia de las masas de los bariones, obtiene que el primer término no nulo es proporcional a la quinta potencia de esta diferencia. Para los observables relativos, el primer término no nulo es independiente de esta diferencia. Para ser sensible a la influencia del factor de forma f_2 en los observables, es necesario mantener un orden más que el primero que no anula la serie. Por lo tanto, para ser consistentes con este hecho, debemos tener en cuenta la dependencia de los factores de forma con q^2 . En el caso de f_2 esta dependencia puede ser ignorada, puesto que en el cálculo del observable ya es proporcional a la diferencia de las masas.

La dependencia de los factores de forma con q^2 está determinada por las interacciones fuertes, de modo que solamente puede ser obtenida mediante la fenomenología de estas interacciones. Un posible método para obtener esta dependencia, basado en relaciones de dispersión, podría ser incluir los efectos de los polos más cercanos, asumiendo que dominan el comportamiento de los factores de forma para q^2 pequeños. Sin embargo resulta más razonable usar directamente la información experimental obtenida de electroproducción y experimentos con neutrinos [32].

En el caso de f_1 y g_1 , con mantener un término lineal en q^2 será suficiente. Para estos últimos usaremos una parametrización dipolar [33], ya que ha proporcionado buenos resultados en los ajustes a los experimentos de electroproducción y de

¹En todo el cálculo se despreciarán las masas de los leptones, que son pequeñas comparadas con la transferencia máxima del proceso, y la diferencia de las masas de los bariones inicial y final.

neutrinos:

$$f_1(q^2) = \frac{f_1(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{M_V^2}\right)^2} \longrightarrow f_1(0) \left(1 + \frac{2q^2}{M_V^2}\right), \quad (4.1)$$

$$g_1(q^2) = \frac{g_1(0)}{\left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)^2} \longrightarrow g_1(0) \left(1 + \frac{2q^2}{M_A^2}\right), \quad (4.2)$$

donde $M_V = 0.97 \text{ GeV}$ y $M_A = 1.11 \text{ GeV}$ para transiciones semileptónicas de hiperones con $|\Delta S| = 1$ [33].

La sensibilidad de los observables a la elección de las masas en la parametrización dipolar de los factores de forma vectorial y vector-axial es pequeña [32]. Por otro lado, la dependencia en q^2 del resto de factores de forma se puede ignorar, por ser pequeña y por motivos de consistencia.

4.3. Correcciones radiativas

La precisión en los experimentos de desintegración semileptónica de hiperones ha llegado a un nivel tal que es necesario tener en cuenta las correcciones radiativas, ya que éstas son comparables a la sensibilidad de los experimentos.

Al intentar calcular las correcciones radiativas, uno se encuentra con varios problemas. El primer problema es que estamos usando una teoría efectiva en la que los grados de libertad no son los quarks, sino los bariones, debido al carácter no perturbativo de las interacciones fuertes a bajas energías. Este inconveniente no aparece en la desintegración del muón. Este problema conduce a que las correcciones radiativas tengan partes dependientes de modelo. Se puede demostrar que las correcciones radiativas que solamente involucran QED, a orden α , se pueden absorber en la definición de los factores de forma y de la constante de acoplo G . La constante de Fermi G_F se define a partir de la vida media del muón. En esta definición G_F es igual a la constante G que aparece en el lagrangiano de Fermi por un factor de correcciones radiativas. Es muy importante que la parte de las correcciones que se absorbe en la constante de acoplo sea exactamente la misma en el caso de la desintegración del muón y de los hiperones, ya que estamos comprobando la universalidad de las interacciones débiles. Afortunadamente esto es así. En el resto de las correcciones radiativas, la parte dependiente de modelo no se puede eliminar. Esto es así porque involucra a las interacciones fuertes en la región no perturbativa. En el caso de desintegración semileptónica de hiperones es conveniente separar las correcciones radiativas en tres contribuciones diferentes:

$$\mathcal{M}'^2 = \mathcal{M}^2(1 + \delta_a)(1 + \delta_b)(1 + \delta_c) \simeq \mathcal{M}^2(1 + \delta_a + \delta_b + \delta_c) = \mathcal{M}^2(1 + \delta_{\text{RC}}), \quad (4.3)$$

en donde \mathcal{M}^2 es el elemento de matriz al cuadrado sin tener en cuenta las correcciones radiativas y \mathcal{M}'^2 es el elemento de matriz al cuadrado con las correcciones radiativas, δ_a y δ_b corresponden a las correcciones independientes de modelo, mientras que δ_c es dependiente de modelo.

La corrección δ_a da cuenta de la interacción Coulombiana entre el electrón y el barión final. Solamente aparecerá en el caso de desintegración de bariones neutros, ya que el barión final debe estar cargado para interactuar con el electrón. Viene dado por la expresión:

$$\delta_a = \frac{\pi\alpha}{\beta} \simeq \pi\alpha, \quad (4.4)$$

en donde β es la velocidad del electrón. Como estamos considerando que la masa del electrón es nula, por consistencia haremos $\beta = 1$. Por lo tanto esta contribución no depende de la energía del electrón, y factoriza fuera de la integral de espacio fásico. Esta contribución es común a todas las desintegraciones en las que interviene. Para éstas su valor es:

$$\delta_a = 0.0229. \quad (4.5)$$

La corrección δ_b contiene una dependencia en la energía del electrón y por tanto no puede factorizar de la integral de espacio fásico. No depende de los detalles de la interacción fuerte ni de la débil. Viene dada aproximadamente por:

$$\delta_b = \frac{\alpha}{2\pi} g(E, E_M), \quad (4.6)$$

en donde E y E_M son la energía y la energía máxima del electrón, respectivamente. En primera aproximación se puede calcular un promedio de δ_b en el espacio fásico, de modo que así nos evitamos integrarla junto a \mathcal{M}^2 , y lo factorizamos. También en primera aproximación se puede tomar el espectro de energías del electrón como en el Diagrama de Curie:²:

$$dN \propto \beta E^2 (E_M - E)^2, \quad (4.7)$$

con lo que obtenemos:

$$\tilde{g}(E, E_M) = 3 \ln \left(\frac{m_{ch}}{2E_M} \right) + \frac{81}{10} - \frac{4\pi^2}{3}, \quad (4.8)$$

$$E_M = \frac{m_B^2 - m_b^2}{2m_B}, \quad (4.9)$$

en donde m_{ch} es la masa del barión cargado en el proceso y E_M es la energía máxima de los electrones. Pero lo cierto es que usando esta fórmula se obtienen para algunos de los procesos resultados poco fiables cuando se comparan con un cálculo más detallado. Los resultados proporcionados en [39] tienen la ventaja de ser proporcionados de tal manera que se pueden usar como si factorizaran de la integral de espacio fásico. Los distintos valores de δ_b se muestran en la Tabla 4.1.

En (4.3) δ_c es independiente de la energía del electrón. Éste es el término dependiente de modelo, y que depende de la interacción fuerte y de los detalles de la interacción débil. Una expresión aproximada de su valor es la siguiente:

$$\delta_c = \frac{\alpha}{2\pi} \left[3 \ln \left(\frac{m_Z}{m_p} \right) + 6\bar{Q} \ln \left(\frac{m_Z}{M} \right) + 2C + A_S \right], \quad (4.10)$$

²Este espectro se obtiene integrando en el espacio fásico todas las variables cinemáticas del barión final y del ν . Para obtener el Diagrama de Curie se desprecia la energía de retroceso del barión final (no su momento), pero no la masa del electrón.

Tabla 4.1: Correcciones radiativas δ_b y δ_{RC} para los cinco procesos con $\Delta S = 1$ que se van a considerar en este trabajo. Se proporcionan las correcciones usando diversos métodos de cálculo.

Proceso	δ_b y δ_{RC} usando (4.9)		δ_b y δ_{RC} en Ref. [33]		δ_b y δ_{RC} en Ref. [39]	
$\Lambda \rightarrow p$	-0.0022	0.0430	-0.0022	0.0430	-0.0057	0.0395
$\Sigma^- \rightarrow n$	-0.0025	0.0189	-0.0025	0.0189	-0.0041	0.0182
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	-0.0015	0.0208	-0.0015	0.0208	-0.0020	0.0203
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	-0.0000	0.0223	-0.0011	0.0212	×	×
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	-0.0003	0.0449	-0.0011	0.0441	×	×

en donde m_Z es la masa del bosón Gauge Z, m_p es la masa del protón y $M \cong 1 \text{ GeV}$. $\overline{Q} = \frac{Q_u + Q_d}{2} = \frac{1}{6}$ es la media de las cargas de los quarks. Se estima que $|2C| \simeq 1$ y que A_S , contribución de la interacción fuerte, es totalmente despreciable. Esta contribución es común a todas las desintegraciones, y además esta contribución es del mismo orden que la corrección coulombiana:

$$\delta_c = 0.0223. \quad (4.11)$$

La contribución dominante a la incertidumbre de las correcciones radiativas viene del término dependiente de modelo δ_c . Debido a que hemos despreciado C y A_S en (4.10), introducimos un error que se puede estimar como $\epsilon(\delta_c) \approx 0, 15 \%$. Este error es despreciable frente a los errores de las medidas experimentales, pero aun así se ha tenido en cuenta. La incertidumbre correspondiente a la elección del valor de M es despreciable debido a su dependencia logarítmica.

Bajo la hipótesis de que las correcciones radiativas se pueden factorizar del espacio fásico, es inmediato darse cuenta de que éstas solamente afectarán a la anchura de desintegración, y nunca a las asimetrías y correlaciones [33]. Esto es así ya que las asimetrías y correlaciones son cocientes de la matriz de colisión, tras haber integrado parte del espacio fásico, por lo que las correcciones radiativas se cancelan.

Con todo esto, la anchura de las desintegraciones semileptónicas de hiperones se pueden calcular del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Gamma &= G_F^2 |V_{us}|^2 |f_1(0)|^2 (1 + \delta_{\text{RC}}) \mathcal{R} \left(\frac{g_1(0)}{f_1(0)}, \frac{f_2}{f_1(0)}, M_V, M_A \right) \\ &= G_F^2 (1 + \delta_{\text{RC}}) |V_{us}|^2 R(f_1(0), g_1(0), f_2, M_A, M_V), \end{aligned} \quad (4.12)$$

en donde $R(f_1(0), g_1(0), f_2, M_A, M_V)$ es el cálculo de la vida media sin tener en cuenta las correcciones radiativas y factorizando la constante de acoplo. Obviamente se cumple que $R(f_1(0), g_1(0), f_2, M_A, M_V) = |f_1(0)|^2 \mathcal{R} \left(\frac{g_1(0)}{f_1(0)}, \frac{f_2}{f_1(0)}, M_V, M_A \right)$.

4.4. Cálculos analíticos

El cálculo de los observables se ha realizado haciendo uso de la librería FeynCalc [40] del programa Mathematica [41] que permite tratar con gran facilidad el álgebra espinorial de Dirac.

El cálculo lo organizaremos de la siguiente manera [31]:

$$\mathcal{M} = G [\bar{u}_b(p_b) H_\mu u_B(p_B)] [\bar{u}_e(p_e) L^\mu u_\nu(p_B)] , \quad (4.13)$$

$$\sum_{s_e s_\nu} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} G^2 H_{\mu\alpha} L^{\mu\alpha} , \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} L^{\mu\alpha} &= Tr (L^\mu \not{p}_e \bar{L}^\alpha \not{p}_\nu) \\ &= 8 (p_e^\mu p_\nu^\alpha + p_e^\alpha p_\nu^\mu + i \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} p_e^\beta p_\nu^\gamma) , \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$H^{\mu\alpha} = \frac{1}{4} Tr [H^\mu (1 + \gamma_5 \not{S}_B) (\not{p}_B + m_B) \bar{H}^\alpha (1 + \gamma_5 \not{S}_b) (\not{p}_b + m_b)] , \quad (4.16)$$

en donde

$$\bar{L}_\alpha = \gamma^0 L_\alpha^\dagger \gamma^0 = L_\alpha , \quad (4.17)$$

$$\bar{H}_\alpha = \gamma^0 H_\alpha^\dagger \gamma^0 , \quad (4.18)$$

y además se ha usado la fórmula (E.7) para escribir los espinores de los bariones en forma de traza, aunque no se sumen las polarizaciones.

Con todo esto, en general, podemos escribir la anchura de desintegración más general posible de la siguiente forma³:

$$d\Gamma = \frac{G^2}{2m_B} (A_{00} - A_\mu^B S_B^\mu - A_\mu^b S_b^\mu - A_{\mu\nu}^{B,b} S_B^\mu S_b^\nu) dQ_3 . \quad (4.19)$$

En donde S_B^μ, S_b^μ son los tetra-vectores de polarización de los bariones final e inicial, respectivamente, y cumplen la condición:

$$S_i p_i = 0, \quad S_i^2 = -1 , \quad (4.20)$$

y

$$\begin{aligned} dQ_3 &= \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) , \quad (4.21) \\ E_i &= \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2} , \end{aligned}$$

es el espacio fásico de tres partículas. Es en este punto en el que podemos discutir la invariancia Lorentz de nuestros observables. El elemento de la matriz de colisión es un invariante Lorentz, y la integral de espacio fásico también lo es, siempre y cuando integremos completamente el espacio fásico. Por lo tanto, cuando integramos

³Para nuestros observables no se medirá nunca la polarización de los leptones finales, de modo que sumamos sobre los espines de éstos.

el elemento de la matriz de colisión sobre todo el espacio fásico, el resultado es un invariante Lorentz. Pero si dejamos una de las variables del espacio fásico sin integrar, entonces el resultado (una sección eficaz diferencial) ya no es un invariante Lorentz. Sin embargo, si la variable que dejamos por integrar es en sí misma un invariante Lorentz, la sección eficaz diferencial resultante es invariante.

En realidad, para nuestros observables nunca tendremos que tener en cuenta las polarizaciones de los dos bariones al mismo tiempo, pero se ha puesto, por completitud, la fórmula más general. De (4.19) se pueden calcular todos los observables.

4.4.1. Vida media

Éste es el cálculo más sencillo, ya que no involucra ninguna polarización. Además, como la vida media es un invariante Lorentz, podemos escribir en términos de variables de Mandelstam tanto el elemento de matriz como el espacio fásico y la región del Diagrama de Dalitz.

Como se van a tener en cuenta tanto el factor de forma f_2 como la dependencia de los factores de forma f_1 y g_1 con q^2 , la integración del espacio fásico no se puede hacer de forma analítica. Tenemos entonces dos opciones:

1. Integrar numéricamente. Esto implica que se calcularían numéricamente los coeficientes que acompañan a los bilineales en factores de forma de la vida media⁴. Tiene el inconveniente de que hay que hacer un cálculo numérico particular para cada proceso.
2. Hacer un cálculo perturbativo en la diferencia de las masas de los bariones inicial y final, que en general es pequeña. Para obtener un parámetro adimensional esta cantidad se divide por la suma de las masas de los bariones⁵. De este modo las integrales se pueden hacer analíticamente y un solo cálculo es válido para todos los procesos. En general, la expansión perturbativa se puede llevar al orden que se desee, siendo su precisión suficiente para comparar con los datos experimentales (el error de estos está por encima del que cometemos en la expansión perturbativa). Para realizar esta expansión se usarán los resultados del Apéndice C.

Sumando sobre polarizaciones finales y promediando sobre polarizaciones iniciales en (4.16) obtenemos el elemento de matriz al cuadrado, al que solamente le falta ser integrado en el espacio fásico. Usando los resultados del Apéndice C podemos calcular la vida media hasta el orden en η que deseemos. Quedándonos a primer orden en η e ignorando f_2 y la dependencia de los factores de forma con q^2 el resultado es el siguiente:

$$R = \frac{\Delta^5 \eta^5}{60\pi^3} (f_1^2 + 3g_1^2)(1 - 3\eta), \quad (4.22)$$

⁴Esta misma discusión se aplica al resto de los observables.

⁵De aquí en adelante, a este parámetro de expansión se le llamará $\eta = \frac{m_B - m_b}{m_B + m_b}$.

en donde

$$\Delta = m_B + m_b. \quad (4.23)$$

Para realizar los ajustes numéricos se tendrán en cuenta en todos los observables tanto f_2 y la dependencia de los factores de forma con q^2 .

4.4.2. Correlación electrón–neutrino

Definimos el coeficiente de correlación electrón–neutrino como:

$$\alpha_{e\nu} = 2 \frac{N(\theta_{e\nu} < \frac{\pi}{2}) - N(\theta_{e\nu} > \frac{\pi}{2})}{N(\theta_{e\nu} < \frac{\pi}{2}) + N(\theta_{e\nu} > \frac{\pi}{2})}. \quad (4.24)$$

En donde $N(\theta_{e\nu} < \frac{\pi}{2})$ es el número de pares electrón–neutrino emitidos en direcciones tales que el ángulo que forman entre ellos es menor que $\frac{\pi}{2}$.

Para hacer este cálculo podemos aprovechar los resultados del apartado anterior, ya que tampoco se mide ningún tipo de polarización. Del apartado anterior tenemos calculado el elemento de matriz al cuadrado en términos de variables de Mandelstam. Simplemente debemos reescribir esas variables en términos del ángulo de correlación y de la energía de uno de los leptones. Usando las técnicas del Apéndice C, escribimos la integral de espacio fásico también en términos de esas variables. Por último transformamos la integral con la fórmula (C.13), pero en este caso, sólo para la integral en energías, y dejamos la variable angular por integrar. A este resultado lo llamaremos \mathcal{K} . De la definición de (4.24) obtenemos:

$$\alpha_{e\nu} = 2 \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d \cos \theta \mathcal{K} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d \cos \theta \mathcal{K}}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d \cos \theta \mathcal{K}}, \quad (4.25)$$

en donde no hemos incluido factores de proporcionalidad, ya que éstos se cancelan al hacer el cociente. Quedándonos a primer orden en η e ignorando f_2 y la dependencia de los factores de forma con q^2 el resultado es el siguiente:

$$\alpha_{e\nu} = \frac{f_1^2 - g_1^2}{f_1^2 + 3g_1^2} - 2\eta. \quad (4.26)$$

4.4.3. Desintegración de un barión polarizado

En este caso se cuenta con un haz de bariones de polarización conocida, y no se mide la polarización del barión final. Se pueden definir tres coeficientes de asimetría, correspondientes a los ángulos que forma el vector de polarización con la dirección del tri–momento de cada una de las partículas finales. Para definir estos ángulos es necesario elegir un sistema de referencia concreto. Dado que el espín del barión

inicial sólo está bien definido en su sistema de referencia en reposo, ésta será nuestra elección. Dadas las distribuciones de partículas:

$$I(\cos \theta_i) = \frac{1}{2}(1 + \alpha_i \cos \theta_i), \quad i = e, \nu, b, \quad (4.27)$$

tenemos definidos los coeficientes α_i .

Para el cálculo usaremos la fórmula (4.19) sumando sobre polarizaciones finales. No es necesario preocuparse de factores de proporcionalidad dado que este observable es relativo. Separaremos el espacio fásico de tres partículas de este modo:

$$\int dQ_3 = \int \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2), \quad (4.28)$$

con $q = P - p_3$. Con esto hemos reducido el elemento de matriz de tres partículas finales al de dos, seguido de una integración en las variables cinemáticas de esta tercera partícula. El siguiente paso es, usando las técnicas del Apéndice D, integrar el elemento de matriz, pero solamente usando la segunda integral de (4.28). Esto se puede realizar exactamente, sin hacer ninguna expansión en η . Una vez hecho esto, se reescribe el resultado en términos de las variables relativas al sistema de referencia del barión en reposo. En la integral restante se utiliza:

$$\frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} = \frac{1}{16\pi^2} \sqrt{E_3^2 - m_3^2} d \cos \theta_3 dE_3, \quad (4.29)$$

y se utiliza la fórmula (C.13) para integrar la energía. Para hallar (4.27) dividimos el resultado de integrar solamente la energía entre el resultado de integrar tanto la energía como el ángulo. De aquí ya se puede leer α_i . Quedándonos a primer orden en η e ignorando la dependencia de los factores de forma con q^2 el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \frac{2(f_1 g_1 - g_1^2) - \frac{2}{3}\eta[(f_1 + g_1)^2 + f_2'(f_1 + g_1)]}{f_1^2 + 3g_1^2}, \\ \alpha_\nu &= \frac{2(f_1 g_1 + g_1^2) + \frac{2}{3}\eta[(f_1 - g_1)^2 + f_2'(f_1 - g_1)]}{f_1^2 + 3g_1^2}, \\ \alpha_B &= \frac{-\frac{5}{2}f_1 g_1 + \frac{5}{3}\eta(f_1 + f_2')g_1}{f_1^2 + 3g_1^2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde

$$f_2' = \frac{m_B + m_b}{m_B} f_2. \quad (4.31)$$

4.4.4. Medidas de polarización sobre el barión final

En este caso, lo que se mide realmente es la matriz densidad del estado final (en realidad, del barión final). Como el barión final es una partícula de espín $\frac{1}{2}$, esta

matriz queda perfectamente definida por su vector de polarización:

$$\rho = \frac{1}{2} \left(1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma} \right), \quad (4.32)$$

$$\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \text{Tr}(\rho \vec{\sigma}), \quad (4.33)$$

en donde σ_i son las matrices de Pauli, que cumplen:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (4.34)$$

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{ij}, \quad (4.35)$$

$$\text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad (4.36)$$

$$\sigma_i = \sigma_i^\dagger. \quad (4.37)$$

La matriz densidad siempre cumple que $\text{Tr} \rho = 1$ y además, si el estado es puro, cumple que $\text{Tr} \rho^2 = 1$, si está parcialmente polarizado $\frac{1}{2} \leq \text{Tr} \rho^2 \leq 1$ y si es un estado completamente despolarizado $\text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{2}$. Dado que podemos escribir

$$\text{Tr} \rho^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \vec{P}^2 \right), \quad (4.38)$$

estos tres casos se reducen a $\vec{P}^2 = 1$, $0 < \vec{P}^2 < 1$ y $\vec{P}^2 = 0$, respectivamente. \vec{P}^2 se puede considerar como el grado de la polarización de la partícula.

En nuestro caso, el valor esperado de la polarización del barión final es:

$$\langle \vec{\sigma} \rangle_b = \frac{\text{Tr} (T \rho_i T^\dagger \vec{\sigma})}{\text{Tr} (T \rho_i T^\dagger)}. \quad (4.39)$$

En donde ρ_i es la matriz de polarización del barión inicial. Como en nuestro caso el haz está totalmente despolarizado, $\rho_i = \frac{1}{2}$. T es la matriz de colisión en el espacio de espín de los bariones inicial y final:

$$T = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Las trazas se toman pues en el espacio de estos espines, y no en el espacio de Dirac. Entonces:

$$\langle \vec{\sigma} \rangle_b = \frac{\text{Tr} (T T^\dagger \vec{\sigma})}{\text{Tr} (T T^\dagger)}. \quad (4.41)$$

Por lo tanto:

$$T_{ij} = [\bar{u}_b(p_b, i) H^\mu u_B(p_B, j)] \sum_{s_e, s_\nu} [\bar{u}_e(p_e) L_\mu v_\nu(p_\nu)], \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} (T T^\dagger)_{ij} &= \sum_k T_{ik} T_{kj}^\dagger \\ &= \text{Tr} [u_b(p_b, j) \bar{u}_b(p_b, i) H^\mu (\not{p}_B + m_B) \bar{H}^\nu] \text{Tr} [\not{p}_e L_\mu \not{p}_\nu \bar{L}_\nu] \\ &= \text{Tr} [u_b(p_b, j) \bar{u}_b(p_b, i) H^\mu (\not{p}_B + m_B) \bar{H}^\nu] L_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Y ahora solamente tenemos que usar (E.3) para evaluar $u_B(p_B, j)\bar{u}_b(p_b, i)$. Aunque en (E.3) aparecen helicidades y no espinores, esto no es un problema. Como se indica en el Apéndice E, con nuestra convención, en el sistema en el que una partícula está en reposo, helicidad y espín coinciden. Y este observable se calcula en el sistema de referencia en el que el barión final está en reposo. Por último:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(TT^\dagger) &= \sum_{ki} T_{ik}T_{ki}^\dagger \\ &= \text{Tr}[(\not{p}_b + m_b)H^\mu(\not{p}_B + m_B)\bar{H}^\nu] \text{Tr}[\not{p}_e L_\mu \not{p}_\nu \bar{L}_\nu] \\ &= H^{\mu\nu}L_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{4.44}$$

Pero para medir el vector de polarización del estado final, es necesario indicar una base que sea inherente al sistema, y no una base que esté ligada, por ejemplo, a un sistema de referencia del laboratorio. Para ello usaremos los tri-vectores momento de las partículas finales. Aunque tengamos tres, sólo dos de ellos son independientes, a causa de la conservación del tri-momento. Sean los vectores unitarios:

$$\hat{p}_e = \frac{\vec{p}_e}{|\vec{p}_e|} = \frac{\vec{p}_e}{E_e},\tag{4.45}$$

$$\hat{p}_\nu = \frac{\vec{p}_\nu}{|\vec{p}_\nu|} = \frac{\vec{p}_\nu}{E_\nu},\tag{4.46}$$

$$\hat{p}_e \cdot \hat{p}_\nu = \cos \theta_{e\nu}.\tag{4.47}$$

Los vectores que forman una base ortonormal son los siguientes:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \theta_{e\nu})}}(\hat{p}_e + \hat{p}_\nu), \\ \hat{\beta} &= \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \theta_{e\nu})}}(\hat{p}_e - \hat{p}_\nu), \\ \hat{n} &= \frac{\hat{\alpha} \times \hat{\beta}}{|\sin \theta_{e\nu}|}.\end{aligned}\tag{4.48}$$

De modo que podemos escribir:

$$\begin{aligned}\vec{P}_b &= \frac{A_\alpha \hat{\alpha} + A_\beta \hat{\beta} + A_n \hat{n}}{\text{Tr}(T\rho_i T^\dagger)} \\ &= P_b^\alpha \hat{\alpha} + P_b^\beta \hat{\beta} + P_b^n \hat{n}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

Se puede demostrar que A_n y por tanto P_b^n son nulos, debido a que los factores de forma son reales.

En principio, una vez hecho este cálculo, nos damos cuenta de que tanto A_n como P_b^n dependen de las variables cinemáticas en cuestión. Lo que debemos calcular entonces es un promedio sobre el espacio fásico. Pero para hacer esto debemos estar seguros de que nuestra base no cambie sobre el espacio fásico, para poder sacar los

vectores de la base fuera de la integral. Afortunadamente la base (4.48) cumple esto. Esto es fácil de ver, ya que la base es interna al sistema físico, y además es una base ortonormal, de modo que no cambian ni el modulo de cada vector ni tampoco su orientación relativa. A lo sumo puede girar la base como un todo, pero como es una base inherente al sistema físico y no al laboratorio, este giro es irrelevante. Así pues, adaptando la definición de vector de polarización, el promedio sobre el espacio físico será:

$$\langle \vec{P}_b \rangle = \frac{\left(\int dQ_3 A_\alpha \right) \hat{\alpha} + \left(\int dQ_3 A_\beta \right) \hat{\beta}}{\int dQ_3 \text{Tr} (TT^\dagger)} \equiv A\hat{\alpha} + B\hat{\beta}. \quad (4.50)$$

Una vez se entiende completamente todo el proceso seguido, uno se da cuenta de que había una forma mucho más directa de llegar al resultado. Partiendo de la fórmula (4.19), y haciendo en ella el tetra-vector polarización del barión inicial cero. Una vez hecho esto, se escribe el tetra-vector polarización del barión final en el sistema de referencia del barión final en reposo:

$$S_b^\mu = (0, \vec{S}_b), \quad (4.51)$$

de modo que obtenemos:

$$d\Gamma = \frac{G^2}{2m_B} \left(A_{00} + \vec{A}_b \cdot \vec{S}_b \right) dQ_3. \quad (4.52)$$

Ahora escribimos \vec{A}_b en función de la base ortonormal:

$$\vec{A}_b = A_\alpha \hat{\alpha} + A_\beta \hat{\beta}, \quad (4.53)$$

y el resultado deseado es:

$$\langle \vec{P}_b \rangle = \frac{\left(\int dQ_3 A_\alpha \right) \hat{\alpha} + \left(\int dQ_3 A_\beta \right) \hat{\beta}}{\int dQ_3 A_{00}} \equiv A\hat{\alpha} + B\hat{\beta}. \quad (4.54)$$

Quedándonos a primer orden en η e ignorando f_2 y la dependencia de los factores de forma con q^2 el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \frac{8}{3} \frac{f_1 g_1}{f_1^2 + 3g_1^2}, \\ B &= \frac{8}{3} \frac{g_1^2}{f_1^2 + 3g_1^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Como comentario final diremos que estas asimetrías se miden observando la desintegración del barión final (en el caso de que sea inestable y con vida media no muy corta) a otro barión y a un mesón (por ejemplo $\Lambda \rightarrow p\pi^-$).

Capítulo 5

Análisis numérico y resultados

5.1. Introducción

En este capítulo se van a exponer los resultados de un gran número de ajustes que se han hecho usando los observables calculados a partir de los factores de forma, la parametrización de los factores de forma en términos de elementos de matriz reducidos y los datos experimentales.

Se realizarán dos tipos de ajustes. En el primero, no se ajustará el valor de V_{us} , sino que se fijará al valor (1), y simplemente se comprobará el patrón de ruptura de simetría en los factores de forma. En el segundo se dejará V_{us} como parámetro libre, de modo que se podrá dilucidar si la información experimental y el conocimiento teórico son suficientes para ver qué efectos en V_{us} tiene la ruptura de simetría.

En primera instancia el error asociado a cada parámetro ajustado será el puramente estadístico, es decir, el determinado por χ^2 . En consecuencia no se tendrán en cuenta de momento posibles errores de modelo, el hecho de estar despreciando algunos factores de forma, variaciones de q^2 en f_2 o variaciones de orden superior en q^2 para los factores de forma g_1 y f_1 . Posteriormente discutiremos el impacto numérico de las distintas fuentes de errores sistemáticos.

5.2. Diferentes opciones de valores experimentales para realizar el ajuste

Como se puede observar en la Tabla 5.1, al menos en varios de los procesos de interés tenemos información, por un lado de todas las vidas medias, y por otro de asimetrías, correlaciones y cocientes de factores de forma. Toda esta información no es independiente. Los valores de los cocientes de los factores de forma de g_1 y f_1 están determinados a partir de las medidas experimentales de las correlaciones y asimetrías imponiendo la aproximación usual $g_2 = 0$. Por lo tanto si se utilizan unas no se pueden utilizar las otras. En principio es más conveniente utilizar cuantos más datos experimentales mejor, ya que aumentamos el número de grados de libertad, el ajuste es más fiable, y estadísticamente más significativo. De todos modos se

Tabla 5.1: Datos experimentales de cinco procesos de desintegración semileptónica de hiperones con $|\Delta S| = 1$. \mathcal{R} es la vida media multiplicada por el probabilidad de transición al canal deseado, y sus unidades son 10^6 s^{-1} .

	$\Lambda \rightarrow pe^-\bar{\nu}_e$	$\Sigma^- \rightarrow ne^-\bar{\nu}_e$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda e^-\bar{\nu}_e$	$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 e^-\bar{\nu}_e$	$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ e^-\bar{\nu}_e$
\mathcal{R}	3.161 ± 0.058	6.88 ± 0.24	3.44 ± 0.19	0.53 ± 0.10	0.93 ± 0.14
$\alpha_{e\nu}$	-0.019 ± 0.013	0.347 ± 0.024	0.53 ± 0.10		
α_e	0.125 ± 0.066	-0.519 ± 0.104			
α_ν	0.821 ± 0.060	-0.230 ± 0.061			
α_B	-0.508 ± 0.065	0.509 ± 0.102			
A			0.62 ± 0.10		
g_1/f_1	0.718 ± 0.015	-0.340 ± 0.017	0.25 ± 0.05	1.287 ± 0.158	1.32 ± 0.22

realizarán los dos tipos de ajustes: usando las vidas medias y los cocientes de g_1 y f_1 , y las vidas medias y las correlaciones y asimetrías, de modo que se puedan comparar los resultados.

Además de esta elección tenemos otra posibilidad, que es la de incluir la información que nos proporciona la desintegración del neutrón. Por un lado el valor de g_1/f_1 está medido con una gran precisión, y además no está afectado por efectos de ruptura de simetría $SU(3)$; $f_1 = 1$, queda fijado por la conservación de la corriente vectorial, y entonces tenemos un valor experimental adicional. Como se explica en el Capítulo 3, aparentemente, el hecho de incluir procesos con $\Delta S = 0$, hace que tengamos dos coeficientes indeterminados más en la parametrización de g_1 , cuando consideramos la ruptura de la simetría. En otras palabras, ya no podemos usar (3.86), sino que debemos usar (3.85). Sin embargo, dado que solamente nos interesan un pequeño número de desintegraciones, estos dos nuevos parámetros no son independientes. Podemos redefinir los elementos de matriz reducidos y reexpresar todos los factores de forma en función de solamente un nuevo factor de forma reducido ρ . En otras palabras, usaremos la ecuación (3.87) y los resultados de la Tabla 3.3. En el caso en el que suponemos simetría exacta, esto no introduce ninguna modificación, así que incluiremos la información de la desintegración del neutrón. En el resto de casos haremos dos ajustes y compararemos los resultados. El valor de g_1 para la desintegración del neutrón lo sacamos de [42] y tiene un valor

$$g_1 = 1.2703 \pm 0.0006. \quad (5.1)$$

5.3. Ajuste suponiendo simetría exacta

En este ajuste sólo tendremos como parámetros libres a y b , de la expresión (3.76), lo que es equivalente a poner en (3.86) el resto de los coeficientes, c_3 y c_4 , nulos. Hay

Tabla 5.2: Parametrización de los factores de forma suponiendo simetría SU(3) exacta.

Desintegración	g_1	f_1
$n \rightarrow p$	$\frac{5}{3}a + b$	1
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(a + b)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Sigma^- \rightarrow n$	$\frac{1}{3}a - b$	-1
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\frac{1}{\sqrt{6}}a + \sqrt{\frac{3}{2}}b$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	$\frac{5}{3}a + b$	1

Tabla 5.3: Ajustes a los datos experimentales en el caso de simetría exacta.

	Asimetrías		Cocientes	
	V_{us} fijo	V_{us} libre	V_{us} fijo	V_{us} libre
V_{us}	$\sqrt{}$	0.2214 ± 0.0017	$\sqrt{}$	0.2216 ± 0.0017
a	0.804 ± 0.006	0.805 ± 0.006	0.808 ± 0.007	0.810 ± 0.006
b	-0.070 ± 0.011	-0.072 ± 0.010	-0.077 ± 0.011	-0.081 ± 0.010
χ^2/dof	40.90/15	40.24/14	11.69/8	14.16/7

que recordar que en el caso de no tener en cuenta ruptura de simetría, $\tilde{a} = a$ y $\tilde{b} = b$. En el caso de la corriente vectorial todo queda determinado por las propiedades electromagnéticas de los nucleones, tanto para f_1 como para f_2 , y pueden leerse sus valores de la Tabla 3.1. Los resultados se presentan en la Tabla 5.3. Los parámetros a y b están relacionados con los coeficientes usados en la Tabla 3.1 del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 D &= a, \\
 F &= b + \frac{2}{3}a.
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

De los resultados de la Tabla 5.2 obtenemos los valores para D y F mostrados en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4: Valores de los parámetros F y D.

	Asimetrías		Cocientes	
	V_{us} fijo	V_{us} libre	V_{us} fijo	V_{us} libre
F	0.466 ± 0.012	0.465 ± 0.011	0.462 ± 0.012	0.459 ± 0.011
D	0.804 ± 0.006	0.805 ± 0.006	0.808 ± 0.007	0.810 ± 0.006
F+D	1.270 ± 0.015	1.270 ± 0.015	1.270 ± 0.016	1.269 ± 0.015

Tabla 5.5: Parametrización de los factores de forma suponiendo simetría SU(3) exacta en f_1 y ruptura a primer orden en g_1 .

Desintegración	g_1	f_1
$n \rightarrow p$	$\frac{5}{3}\tilde{a} + \tilde{b} + \rho$	1
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(\tilde{a} + \tilde{b} + c_3 + c_4)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Sigma^- \rightarrow n$	$\frac{1}{3}(\tilde{a} + c_3 + c_4) - \tilde{b}$	-1
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tilde{a} + 7c_4) + \sqrt{\frac{3}{2}}(\tilde{b} + c_3)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}(\tilde{a} + 3c_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{b} + c_4)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	$\frac{5}{3}\tilde{a} + \tilde{b} + 5c_3 + c_4$	1

5.4. Ruptura de simetría en g_1

El siguiente paso es considerar la ruptura de simetría en los factores de forma. Debido al teorema de Ademollo–Gatto sabemos que a primer orden solamente hay ruptura en el factor de forma vector–axial g_1 , así que en el siguiente ajuste se va a considerar simetría exacta en f_1 y f_2 , usando la Tabla 3.1, y ruptura de simetría en g_1 , usando por tanto la expresión (3.86). Los resultados se presentan en las Tabla 5.6 y 5.5.

5.5. Ruptura de simetría en f_1 y g_1

En último lugar consideraremos la ruptura de simetría en los factores de forma vectorial f_1 y vector–axial g_1 , mientras que para f_2 seguiremos considerando el valor simétrico. Por tanto, para f_1 usaremos la expresión (3.68). Los resultados se presen-

Tabla 5.6: Ajustes a los datos experimentales en el caso de ruptura en g_1 sin usar la desintegración del neutrón.

	Asimetrías		Cocientes	
	V_{us} fijo	V_{us} libre	V_{us} fijo	V_{us} libre
V_{us}	✓	0.2265 ± 0.0027	✓	0.2239 ± 0.0028
\tilde{a}	0.70 ± 0.03	0.69 ± 0.03	0.72 ± 0.03	0.72 ± 0.03
\tilde{b}	-0.072 ± 0.011	-0.071 ± 0.010	-0.081 ± 0.011	-0.081 ± 0.011
c_3	0.03 ± 0.02	0.03 ± 0.02	0.022 ± 0.022	0.023 ± 0.021
c_4	0.052 ± 0.018	0.046 ± 0.017	0.050 ± 0.018	0.049 ± 0.018
χ^2/dof	21.50/13	18.11/12	2.51/6	2.15/5

Tabla 5.7: Ajustes a los datos experimentales en el caso de ruptura en g_1 usando la desintegración del neutrón.

	Asimetrías		Cocientes	
	V_{us} fijo	V_{us} libre	V_{us} fijo	V_{us} libre
V_{us}	✓	0.2265 ± 0.0027	✓	0.2239 ± 0.0028
\tilde{a}	0.71 ± 0.03	0.7 ± 0.03	0.73 ± 0.03	0.72 ± 0.03
\tilde{b}	-0.072 ± 0.011	-0.071 ± 0.010	-0.081 ± 0.011	-0.081 ± 0.011
ρ	0.16 ± 0.05	0.17 ± 0.04	0.14 ± 0.05	0.15 ± 0.05
c_3	0.01 ± 0.02	0.01 ± 0.02	0.02 ± 0.02	0.02 ± 0.02
c_4	0.059 ± 0.019	0.053 ± 0.018	0.050 ± 0.018	0.048 ± 0.018
χ^2/dof	20.41/13	18.11/12	2.51/6	2.15/5

Tabla 5.8: Parametrización de los factores de forma ruptura a primer orden en g_1 y ruptura a segundo orden en f_1 .

Desintegración	g_1	f_1
$n \rightarrow p$	$\frac{5}{3}\tilde{a} + \tilde{b} + \rho$	1
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(\tilde{a} + \tilde{b} + c_3 + c_4)$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + v_1 + v_2)$
$\Sigma^- \rightarrow n$	$\frac{1}{3}(\tilde{a} + c_3 + c_4) - \tilde{b}$	$-1 - v_1 - v_2$
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tilde{a} + 7c_4) + \sqrt{\frac{3}{2}}(\tilde{b} + c_3)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + v_1 + 3v_2) + \sqrt{6}v_3$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}(\tilde{a} + 3c_3) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{b} + c_4)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + v_1 + 3v_2)$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	$\frac{5}{3}\tilde{a} + \tilde{b} + 5c_3 + c_4$	$1 + v_1 + 3v_2$

tan en la Tabla 5.9.

Cuando se realiza el cálculo ajustando el valor de V_{us} , se observa que la función χ^2 es plana. Esto quiere decir que cerca de su valor mínimo existen una gran cantidad de mínimos locales, para los cuales el valor de χ^2 es aproximadamente el mismo (numéricamente esto se manifiesta en que si cambiamos el punto inicial de búsqueda de mínimo, obtenemos valores finales de los parámetros muy diferentes para un valor de χ^2 aproximadamente constante). La naturaleza de estos mínimos locales es puramente aleatoria. Evidentemente, uno de estos mínimos será el mínimo absoluto, pero el valor de los parámetros en este punto no es más significativo que el del resto de mínimos.

Los resultados obtenidos en el caso en el que intentamos ajustar V_{us} son poco satisfactorios. Por un lado obtenemos valores de V_{us} absurdos, y por otro lado, el valor que obtenemos de v_1 es muy grande, y sabemos por el teorema de Ademollo–Gatto que debe ser pequeño (v_1 es una corrección al caso simétrico). Como el resto de parámetros que modifican f_1 respecto a su valor simétrico (v_2 y v_3) son pequeños, podemos razonar del siguiente modo:

$$\epsilon^2 = \frac{|f_1^{sym} - f_1|}{f_1} \simeq |v_1|. \quad (5.3)$$

Sabiendo que la ruptura de simetría de SU(3), ϵ , es del 15 al 20%, podemos hacer un ajuste en el que exijamos que la ruptura de la simetría en f_1 no supere el 2 o 4%. Esto se consigue exigiendo que $|v_1| \leq 0.02$ o $|v_1| \leq 0.04$.

Al hacer esto, acotamos la región plana de la función χ^2 , de modo que sigue habiendo cierta cantidad de mínimos locales, pero los valores de los parámetros en

Tabla 5.9: Ajustes a los datos experimentales en el caso de ruptura en f_1 y g_1 sin ajustar V_{us} .

	Sin neutrón		Con neutrón	
	Asimetrías	Cocientes	Asimetrías	Cocientes
\tilde{a}	0.71 ± 0.03	0.74 ± 0.03	0.68 ± 0.06	0.75 ± 0.03
\tilde{b}	-0.072 ± 0.011	-0.081 ± 0.011	-0.072 ± 0.011	-0.081 ± 0.011
ρ	\times	\times	0.20 ± 0.10	0.09 ± 0.05
c_3	0.03 ± 0.02	0.02 ± 0.02	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.02
c_4	0.04 ± 0.02	0.04 ± 0.04	0.09 ± 0.05	0.04 ± 0.02
v_1	0.06 ± 0.04	-0.03 ± 0.04	0.02 ± 0.06	-0.03 ± 0.04
v_2	0.02 ± 0.03	0.03 ± 0.03	-0.01 ± 0.05	0.032 ± 0.03
v_3	-0.010 ± 0.015	-0.008 ± 0.016	-0.012 ± 0.016	-0.008 ± 0.016
χ^2/dof	15.27/10	0.64/3	15.94/10	0.64/3

Tabla 5.10: Ajustes a los datos experimentales en el caso de ruptura en f_1 y g_1 sin usar la desintegración del neutrón y exigiendo que la ruptura de la simetría en el factor f_1 no supere cierto porcentaje.

	4%		2%	
	Asimetrías	Cocientes	Asimetrías	Cocientes
V_{us}	0.2104 ± 0.0081	0.216 ± 0.019	0.2145 ± 0.0083	0.2105 ± 0.0096
\tilde{a}	0.75 ± 0.05	0.76 ± 0.07	0.74 ± 0.05	0.78 ± 0.05
\tilde{b}	-0.075 ± 0.011	-0.083 ± 0.013	-0.074 ± 0.011	-0.086 ± 0.012
c_3	0.03 ± 0.02	0.02 ± 0.02	0.03 ± 0.02	0.02 ± 0.02
c_4	0.04 ± 0.08	0.04 ± 0.02	0.04 ± 0.02	0.04 ± 0.02
v_1	0.04 ± 0.08	0.01 ± 0.05	0.02 ± 0.04	0.02 ± 0.02
v_2	0.03 ± 0.03	0.03 ± 0.03	0.03 ± 0.03	0.03 ± 0.03
v_3	-0.012 ± 0.014	-0.009 ± 0.014	-0.012 ± 0.013	-0.009 ± 0.014
χ^2/dof	16.74/9	0.66/2	16.90/9	0.66/2

Tabla 5.11: Ajustes a los datos experimentales en el caso de ruptura en f_1 y g_1 usando la desintegración del neutrón y exigiendo que la ruptura de la simetría en el factor f_1 no supere un cierto porcentaje.

	4%		2%	
	Asimetrías	Cocientes	Asimetrías	Cocientes
V_{us}	0.221 ± 0.012	0.2065 ± 0.0080	0.219 ± 0.013	0.211 ± 0.013
\tilde{a}	0.70 ± 0.10	0.81 ± 0.05	0.70 ± 0.109	0.793 ± 0.005
\tilde{b}	-0.074 ± 0.011	-0.087 ± 0.012	-0.072 ± 0.011	-0.085 ± 0.007
ρ	0.18 ± 0.16	0.01 ± 0.08	0.17 ± 0.16	0.03 ± 0.08
c_3	0.01 ± 0.02	0.00 ± 0.02	0.01 ± 0.02	0.04 ± 0.03
c_4	0.07 ± 0.05	0.05 ± 0.02	0.08 ± 0.05	0.05 ± 0.03
v_1	0.04 ± 0.07	0.04 ± 0.04	0.02 ± 0.04	0.02 ± 0.04
v_2	-0.01 ± 0.05	0.04 ± 0.03	-0.01 ± 0.05	0.03 ± 0.04
v_3	-0.005 ± 0.014	-0.009 ± 0.015	-0.013 ± 0.014	-0.009 ± 0.015
χ^2/dof	15.95/9	0.66/2	16.63/9	0.66/2

estos mínimos locales tienen mayor sentido físico. Al acotar uno de los parámetros, aumentamos los errores estadísticos.

5.6. Estudio de los errores sistemáticos

En la determinación del error de V_{us} , además de la contribución estadística, existe una contribución de errores sistemáticos. Estos provienen de los errores asociados a determinados parámetros que aparecen como entradas en las funciones a ajustar, pero que no son parámetros a ajustar. El error en las masas de los hiperones es muy pequeño, de modo que su contribución al error sistemático es despreciable. El hecho de haber despreciado la masa del electrón (o del neutrino, con mayor motivo) tampoco introduce un error sistemático significativo. Lo mismo se puede decir de G_F . Las principales fuentes de error sistemático son los valores de f_2 y de los parámetros M_V y M_A que aparecen en (4.1) y (4.2). El error asociado a estos parámetros es el de la ruptura de SU(3).

El valor de M_V y M_A , siguiendo los pasos de [32], se obtiene del siguiente modo: de los experimentos de neutrinos y de electroproducción, se pueden determinar los factores de forma vectoriales y vector-axiales correspondientes a corrientes diagonales en sabor para $q^2 < 0$. Las medidas realizadas se ajustan bien a las parametrizaciones dipolares (4.1) y (4.2) con valores $m_V = (0.84 \pm 0.04)\text{GeV}$ y $m_A = (1.08 \pm 0.08)\text{GeV}$. Extrapolando a las regiones en las que q^2 es positivo, podemos usar estas fórmulas para las desintegraciones de hiperones con $\Delta S = 0$. Para las desintegraciones

con $\Delta S = 1$ podemos adoptar la hipótesis del dominio de resonancias mesónicas vectoriales para tener en cuenta la ruptura de la simetría SU(3). Para $\Delta S = 0$ la resonancia vectorial más cercana es el mesón ρ ($m_\rho = 0.77$ GeV), mientras que para $\Delta S = 1$ el polo vectorial más cercano es K^* ($m_{K^*} = 0.89$ GeV). Estas resonancias afectan al factor de forma vectorial. En el caso del factor de forma vector-axial, para $\Delta S = 1$ el polo vector-axial más cercano es $K_1(1270)$ ($m_{K_1} = 1.27$). Para $\Delta S = 0$ la resonancia vector-axial más cercana con isospín $\frac{1}{2}$ es el mesón $a_1(1235)$ ($m_{a_1} = 1.23$ GeV). Así pues obtenemos:

$$M_V = m_V \frac{m_{K^*}}{m_\rho} = 0.98 \text{ GeV}, \quad (5.4)$$

$$M_A = m_A \frac{m_{K_1}}{m_{a_1}} = 1.12 \text{ GeV}, \quad (5.5)$$

Claramente ésta es una estimación muy ruda. Además de esto, M_V y M_A están multiplicando a q^2 , lo que implica que están a un orden en ruptura de simetría mayor que $f_1(0)$ y $g_1(0)$, con lo que en principio podrían ser rechazados. Por todo ello, para estimar el error sistemático introducido por M_V y M_A , variaremos sus valores en los ajustes entre m_V y m_A y los correspondientes a (5.4) y (5.5).

Para el caso de f_2 procedemos del siguiente modo: En la ec. (3.8) aparece el factor f_2 en la forma $i f_2 / (2m_B) \sigma^{\mu\nu} q_\nu$. Lo importante es que lo que multiplica a la estructura de Dirac no es f_2 sino f_2/m_B así que en principio, los elementos de matriz reducidos que calculamos son de f_2/m_B y no de f_2 . Suponiendo que la simetría SU(3) no está rota, los valores de m_B para todos los hiperones de espín 1/2 son iguales, de modo que podemos calcular los factores de forma reducidos indistintamente para f_2 o f_2/m_B , ya que la diferencia es un factor global. Este es el punto de vista que se ha adoptado en [23]. Por otro lado, podemos calcular los elementos de matriz reducidos manteniendo las masas de los hiperones diferentes. Este es el punto de vista que se ha adoptado en [2], y cuyos resultados se presentan en la Tabla 3.1. Para estimar el error sistemático introducido por cada una de las f_2 , variaremos por separado cada uno de los valores de las f_2 entre los dos valores anteriormente propuestos.

5.7. Valores finales

1. Simetría exacta. En este caso los resultados obtenidos usando cocientes y asimetrías son casi los mismos:

- Asimetrías

$$|V_{us}| = 0.2214 \pm 0.0017 \pm 0.0006 \simeq 0.2232 \pm 0.0023. \quad (5.6)$$

- Cocientes

$$|V_{us}| = 0.2216 \pm 0.0017 \pm 0.0004 \simeq 0.2228 \pm 0.0021. \quad (5.7)$$

Tabla 5.12: Estimación de los errores sistemáticos en la determinación de V_{us} en el caso de suponer que no hay ruptura de simetría.

	valor	Asimetrías	Cocientes
$f_2(\Lambda \rightarrow p)$	1.20 ± 0.10	+0.0001 -0.0001	+0.0001 -0.0001
$f_2(\Sigma^- \rightarrow \Lambda)$	-1.16 ± 0.14	+0.0001 -0.0000	+0.0001 -0.0000
$f_2(\Xi^- \rightarrow n)$	0.089 ± 0.015	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
$f_2(\Xi^- \rightarrow \Sigma^0)$	-1.6 ± 0.3	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
$f_2(\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+)$	-2.2 ± 0.4	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
M_A	1.10 ± 0.09	+0.0001 -0.0001	+0.0001 -0.0001
M_V	0.91 ± 0.07	+0.0005 -0.0006	+0.0004 -0.0005
Error sistemático total		0.0006	0.0004

Tabla 5.13: Estimación de los errores sistemáticos en la determinación de V_{us} en el caso de suponer que hay ruptura de simetría en el factor de forma vector-axial.

parámetro	valor	Sin neutrón		Con neutrón	
		Asimetrías	Cocientes	Asimetrías	Cocientes
$f_2(\Lambda \rightarrow p)$	1.20 ± 0.10	+0.0001 -0.0000	+0.0001 -0.0002	+0.0000 -0.0000	+0.0001 -0.0001
$f_2(\Sigma^- \rightarrow \Lambda)$	-1.16 ± 0.14	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0001	+0.0000 -0.0000	+0.0001 -0.0001
$f_2(\Xi^- \rightarrow n)$	0.089 ± 0.015	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
$f_2(\Xi^- \rightarrow \Sigma^0)$	-1.6 ± 0.3	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
$f_2(\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+)$	-2.2 ± 0.4	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000	+0.0000 -0.0000
M_A	1.10 ± 0.02	+0.0001 -0.0001	+0.0001 -0.0001	+0.0001 -0.0001	+0.0001 -0.0001
M_V	0.91 ± 0.07	+0.0002 -0.0002	+0.0006 -0.0005	+0.0002 -0.0002	+0.0005 -0.0006
Error sistemático total		0.0002	0.0006	0.0002	0.0006

5.8 Consistencia de la ruptura de la simetría SU(3) en los obserables 77

2. Simetría rota en g_1 : En este caso, los valores obtenidos usando cocientes o asimetrías son diferentes, pero es compatible dentro del error:

Sin neutrón:

- Asimetrías

$$|V_{us}| = 0.2265 \pm 0.0027 \pm 0.0002 \simeq 0.2316 \pm 0.0037. \quad (5.8)$$

- Cocientes

$$|V_{us}| = 0.2239 \pm 0.0028 \pm 0.0006 \simeq 0.2248 \pm 0.0038. \quad (5.9)$$

Con neutrón:

- Asimetrías

$$|V_{us}| = 0.2265 \pm 0.0027 \pm 0.0002 \simeq 0.2316 \pm 0.0029. \quad (5.10)$$

- Cocientes

$$|V_{us}| = 0.2239 \pm 0.0028 \pm 0.0006 \simeq 0.2249 \pm 0.0034. \quad (5.11)$$

5.8. Consistencia de la ruptura de la simetría SU(3) en los obserables

En general, podemos escribir el módulo al cuadrado del elemento de matriz de nuestras transiciones de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{ji} A_{ij} f_i(q^2) f_j(q^2) \\ &= A_{f_1 f_1} f_1(q^2)^2 + A_{f_1 g_1} f_1(q^2) g_1(q^2) + A_{g_1 g_1} g_1(q^2)^2 \\ &\quad + A_{f_1 f_2} f_1(q^2) f_2(q^2) + A_{g_1 f_2} g_1(q^2) f_2(q^2) + A_{f_2 f_2} f_2(q^2)^2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

tras integrar el espacio fásico, para cada observable O_β obtenemos una expansión del tipo:

$$\begin{aligned} O_\beta &= A_{f_1 f_1}^\beta f_1(0)^2 + A_{f_1 g_1}^\beta f_1(0) g_1(0) + A_{g_1 g_1}^\beta g_1(0)^2 + A_{f_1 f_2}^\beta f_1(0) f_2(0) \\ &\quad + A_{g_1 f_2}^\beta g_1(0) f_2(0) + A_{f_2 f_2}^\beta f_2(0)^2 + A_{f_1 M_V}^\beta \frac{f_1(0)^2}{M_V} + A_{M_V M_V}^\beta \frac{f_1(0)^2}{M_V^2} \\ &\quad + A_{f_1 M_V}^\beta \frac{f_1(0)^2}{M_V} + A_{M_V M_V}^\beta \frac{f_1(0)^2}{M_V^2} + A_{g_1 M_A}^\beta \frac{g_1(0)^2}{M_A} + A_{M_A M_A}^\beta \frac{g_1(0)^2}{M_A^2} \\ &\quad + A_{f_1 M_A}^\beta f_1(0) g_1(0) \left(\frac{1}{M_V} + \frac{1}{M_A} \right) + A_{M_A M_A}^\beta \frac{f_1(0) g_1(0)}{M_A M_V} \\ &\quad + A_{M_V f_2}^\beta \frac{f_1(0) f_2(0)}{M_V} + A_{M_A f_2}^\beta \frac{g_1(0) f_2(0)}{M_A}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

en donde para los observables relativos hay que entender $O_\beta = \Gamma \tilde{O}_\beta$, con \tilde{O}_β el observable relativo. Estamos ahora en condiciones de discutir hasta qué orden en ruptura de simetría SU(3) conocemos cada sumando. Hay que tener en cuenta que los coeficientes A_{ij}^β pueden llevar implícitos factores de ruptura de simetría. Como ya se discutió, cada factor de forma f_2 va acompañado de un factor ϵ de ruptura de simetría, de modo que $A_{f_2i} = \epsilon \tilde{A}_{f_2i}$ y $A_{f_2f_2} = \epsilon^2 \tilde{A}_{f_2f_2}$. Lo mismo se podría decir de los coeficientes que acompañan a $\frac{1}{M_V}$ y $\frac{1}{M_A}$. Teniendo en cuenta que conocemos

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_1^{sim} + \epsilon^2 f_1^{rot} + O(\epsilon^3), \\ g_1(0) &= g_1^{sim} + \epsilon g_1^{rot} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$f_2(0) = f_2^{sim} + O(\epsilon), \quad (5.15)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1(0)^2 &= (f_1^{sim})^2 + 2f_1^{sim} f_1^{rot} \epsilon^2 + O(\epsilon^3), \\ g_1(0)^2 &= (g_1^{sim})^2 + 2g_1^{sim} g_1^{rot} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ f_1(0)g_1(0) &= f_1^{sim} g_1^{sim} + f_1^{sim} g_1^{rot} \epsilon + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon f_2(0)f_1(0) &= \epsilon f_1^{sim} f_2^{sim} + O(\epsilon^2), \\ \epsilon f_2(0)g_1(0) &= \epsilon g_1^{sim} f_2^{sim} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (5.17)$$

y sabiendo que los coeficientes $A_{f_1f_1}^\beta$, $A_{g_1g_1}^\beta$ y $A_{f_1g_1}^\beta$ no se anulan cuando ϵ tiende a cero, podemos concluir que:

$$O_\beta = O_\beta^{sim} + O_\beta^{rot} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (5.18)$$

o lo que es lo mismo, que con la información teórica que tenemos, no somos sensibles a la ruptura a segundo orden del factor de forma $f_1(0)$, y que por consistencia, deberíamos poner en la expresión de O_β , f_1^{sim} en lugar de $f_1(0)$. La conclusión de este análisis es que no podemos ajustar los factores de forma reducidos v_1 , v_2 y v_3 con nuestro conocimiento teórico.

5.9. Impacto numérico de f_2

Dado que en la expansión (5.13), el único término en el que no hay ningún factor de forma reducido a ajustar (admitiendo que se es capaz de obtener alguna información de la ruptura de simetría en el factor de forma f_1 y por tanto incluyendo los parámetros v_1 , v_2 y v_3) es el proporcional a f_2^2 . Como se argumenta en la sección 6.13, si este factor fuese cero, no podríamos obtener separadamente del ajuste $|V_{us}|$ de $|f_1 V_{us}|$, merece la pena hacer un estudio del impacto numérico de f_2 . En primer lugar, los coeficientes A_{f_2i} y $A_{f_2f_2}$ son muy pequeños comparados con $A_{f_1f_1}$ y $A_{g_1f_1}$, con lo que imaginamos que su impacto numérico va a ser muy pequeño. Por otro lado, podemos repetir los diferentes ajustes en los que no se implementa

Tabla 5.14: Impacto numérico del factor de forma f_2 en la determinación de V_{us} . La columna de la izquierda se refiere a ajustes usando asimetrías y la de la derecha a ajustes usando cocientes.

Tipo de ajuste	$\frac{ \delta V_{us} }{ V_{us} }$	
	Simetría exacta	0.3 %
Ruptura de la simetría en g_1 sin usar la desintegración del neutrón	0.2 %	0.2 %
Ruptura de la simetría en g_1 usando la desintegración del neutrón	0.2 %	0.2 %

la ruptura de simetría en el factor f_1 , pero poniendo todos los factores de forma f_2 iguales a cero. Los resultados se presentan en la Tabla 5.14.

El impacto numérico de f_2 sobre el valor de $|V_{us}|$ resulta ser del 0.2-0.3 %, lo que nos indica que no somos sensibles a $|V_{us}|$ sino a $|f_1 V_{us}|$ y que por tanto no tiene sentido hacer un ajuste en el que se tiene en cuenta la ruptura de simetría en el factor de forma f_1 .

5.10. Estimaciones de la ruptura de simetría SU(3) en f_1

Según hemos concluido en la sección 6.10, con la parametrización teórica que hemos realizado de f_1 y g_1 no podemos extraer de los datos experimentales información de la ruptura de simetría SU(3) en f_1 , esto es, no somos capaces de ver más allá de $\tilde{f}_1 = 1$. Para obtener esta información debemos ser capaces de hacer un cálculo que no tenga parámetros libres. Se podría decir que hay tres maneras de hacer este cálculo: usando técnicas de lattice QCD, usando modelos de quarks o usando teoría quiral de perturbaciones. Mientras que no hay en la literatura resultados de lattice, sí los hay para los otros dos métodos.

En [34] se calcula \tilde{f}_1 usando el modelo quark no relativista. Los resultados son que el valor de \tilde{f}_1 es común para todas las desintegraciones con $|\Delta S| = 1$, con valor $\tilde{f}_1 = 0.987$. La corrección es siempre negativa. En [35] se usa un modelo quark relativista, y los resultados son muy parecidos a los de [34]. Las correcciones son siempre negativas y con valor aproximadamente común a todas las transiciones

$\tilde{f}_1 = 0.976$. Tanto en [36] como en [37] se usa la teoría quiral de perturbaciones, pero con resultados muy diferentes. En [36] se usa teoría quiral de perturbaciones usando como parámetro de expansión el momento típico del proceso, mientras que en [37] usan teoría quiral de perturbaciones de bariones pesados, en donde se considera que los bariones son mucho más pesados que los mesones, de modo que el parámetro de expansión es el inverso de la masa del barión. En ambos se concluye que \tilde{f}_1 es diferente para cada proceso, pero mientras en el primero las correcciones son negativas, en el segundo son positivas. En ambos trabajos calculan las correcciones cuánticas debidas a *loops* de mesones (no de bariones) y las correcciones de segundo orden en ruptura de simetría SU(3). Creemos que las discrepancias en sus resultados son debidas a que ninguno de ellos tiene en cuenta todas las contribuciones a segundo orden.

En [22] y [23] se usa la parametrización (3.68) y se ajusta a los datos experimentales. Los resultados son correcciones siempre positivas. Creemos que encuentran correcciones positivas debido a que están ignorando la ruptura de simetría SU(3) de segundo orden en el factor de forma g_1 .

En [2] se argumenta de un modo totalmente independiente de modelo que para al menos una transición, $\Sigma^- \rightarrow n$, \tilde{f}_1 es menor que la unidad. El argumento es el siguiente: a la vista de la ecuación (3.35) para el caso $B = \Sigma^-$, los estados m que contribuyen al primer sumatorio tienen números cuánticos $S = -2$, $I = \frac{3}{2}$; no se conoce ninguna resonancia bariónica con esos números cuánticos. Aceptando la hipótesis de que los sumatorios en (3.35) están dominados por resonancias hadrónicas, concluimos que el segundo sumatorio es mayor que el primero, con lo que la corrección a \tilde{f}_1 debe ser negativa. En la tabla 5.15 se presentan los resultados obtenidos por los diferentes métodos.

Como necesitamos una estimación del valor de \tilde{f}_1 para poder asociar un error a $|V_{us}|$, tenemos que decidirnos entre los resultados anteriores. Teniendo en cuenta el argumento de que para $\Sigma^- \rightarrow n$, \tilde{f}_1 es menor que la unidad y que en todos los trabajos parece que las correcciones son, o todas positivas o todas negativas, supondremos que las correcciones son todas negativas. A la vista de los resultados de los modelos de quark, asignaremos un error conservador del 4% a \tilde{f}_1 , pero en la dirección negativa, de modo que tenemos $\tilde{f}_1 = 1_{-0.04}^{+0.00}$ para todos los procesos.

5.11. Estimación del error inducido en $|V_{us}|$ por la ruptura de simetría

Como en todos los ajustes que estamos realizando estamos suponiendo que no hay ruptura de simetría en f_1 , lo que realmente estamos ajustando no es el valor de $|V_{us}|$, sino el de $|\tilde{f}_1 V_{us}|$. Para obtener un valor final de $|V_{us}|$ con un error realista hay que estimar el error de \tilde{f}_1 . Para ello se pueden usar los análisis existentes en la literatura o tratar de estimarlo de los ajustes realizados en esta sección.

Podemos adoptar el primer punto de vista y usar las estimaciones hechas en el anterior apartado, de modo que se obtiene:

Tabla 5.15: Valores de \tilde{f}_1 calculados con diferentes técnicas.

	$\Lambda \rightarrow p$	$\Sigma^- \rightarrow n$	$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$
[23]	1.02±0.02	1.04±0.03	1.04±0.04	1.08±0.05	1.08±0.05
[22]	1.02±0.02	1.04±0.02	1.10±0.04	1.12±0.05	1.12±0.05
[37]	1.024	1.100	1.059	1.011	
[34]	0.987	0.987	0.987	0.987	0.987
[36]	0.943	0.987	0.957	0.943	
[35]	0.976	0.975	0.976	0.976	

- Asimetrías
0.2288±0.0097 .
- Cocientes
0.2239±0.0099 .

5.12. Comparativa del resultado obtenido en este trabajo con resultados obtenidos en otros estudios.

Recientemente se han publicado artículos en los que se obtiene el valor de $|V_{us}|$ usando desintegraciones semileptónicas de hiperones. Nos referimos a las referencias [2] y [23]. En el primero se obtiene un valor final de $|V_{us}| = 0.2250 \pm 0.0027$, pero se aclara que si se tiene en cuenta la ruptura de simetría en f_1 el valor central debería ser movido a los valores $|V_{us}| = 0.2279 \pm 0.0027$ o $|V_{us}| = 0.2307 \pm 0.0027$, según como se estimen dichas rupturas. En [23] obtienen $|V_{us}| = 0.2199 \pm 0.0026$.

¿Por qué son sus resultados tan distintos? ¿Por qué los valores obtenidos son diferentes a los obtenidos en nuestro trabajo? Primero tendríamos que discutir el tipo de ajuste que se ha realizado en cada artículo.

En [2] se ha realizado un análisis considerando que no hay ruptura de simetría SU(3). Pese a esto, a la hora de realizar la determinación de $|V_{us}|$ se han usado como datos experimentales las vidas medias de los hiperones correspondientes y los valores experimentales de $\frac{g_1(0)}{f_1(0)}$. El único parámetro a ajustar era precisamente $|V_{us}|$, de modo que solamente se ha hecho la hipótesis de que $\tilde{f}_1(0) = 1$. No hay ninguna hipótesis sobre el valor de $g_1(0)$ porque se toma su valor experimental. Lo que se ajusta en realidad es $|\tilde{f}_1(0)V_{us}|$. No se ha hecho un estudio de los errores sistemáticos.

En [23] se realiza un análisis casi idéntico al realizado en nuestro trabajo. Sin embargo, el valor final lo obtiene haciendo un ajuste de g_1 hasta primer orden de ruptura de simetría, f_1 hasta segundo orden y $|V_{us}|$. Como ya se ha argumentado de diversas maneras en este capítulo, tal ajuste no tiene sentido. El valor que obtiene es menor que el nuestro, y esto se debe a que obtienen valores de $\tilde{f}_1(0)$ mayores que la unidad. Además, no se ha hecho un estudio de los errores sistemáticos.

Llegados a este punto podemos afirmar que nuestro trabajo trata de esclarecer las diferencias entre [2] y [23]. Creemos que un punto intermedio entre ignorar completamente la ruptura de simetría SU(3) y tratar de obtener información experimental de su ruptura hasta segundo orden es lo adecuado. Además de esto, se ha hecho un estudio exhaustivo de los errores sistemáticos, de modo que no solamente obtenemos un valor central fiable, sino también un error más realista.

5.13. Análisis de los resultados

Antes de analizar los resultados discutamos un poco los factores que afectan a nuestros ajustes. En primer lugar cuando nuestro objetivo es ajustar el valor de V_{us} , hay que darse cuenta que éste depende fuertemente de f_1 . Esto es así ya que este parámetro solamente aparece en la vida media. Imaginemos que hacemos un ajuste de la siguiente manera: usamos solamente los valores experimentales de los cocientes g_1/f_1 , los cuales introducimos en la fórmula de la anchura de desintegración. Si por un momento hubiésemos despreciado la contribución de f_2 , veríamos que una vez metido el valor experimental de g_1/f_1 en la anchura, esta resultaría proporcional a $|f_1 V_{us}|$. En cuanto tenemos en cuenta f_2 esto ya no es cierto, ya no podemos factorizar f_1 ¹. Pero si el impacto numérico de este término es muy pequeño, tal y como se ha visto que es en la sección 5.9, entonces no es muy diferente del caso en el que es lícito factorizar. Este argumento, aunque solamente parece válido en el caso en el que introducimos directamente el valor experimental de g_1/f_1 en la fórmula de la anchura y luego realizamos el ajuste, es muy ilustrativo y nos da una idea de lo que ocurre en general. De hecho usando argumentos un poco más sofisticados se puede demostrar que la conclusión es de carácter completamente general. Veamos esto de una forma más cuantitativa. Sabiendo que las en fórmulas de la anchura siempre aparece la combinación $\zeta = |V_{us}|f_1(0)$, reparametricemos esto del siguiente modo: $\zeta = |V_{us}|(1 + v_1 + v_2)\hat{f}_1(0)$. En la Tabla 5.16 aparece el valor de $\hat{f}_1(0)$ para los procesos que se estudian. Aunque aparentemente ζ depende de cuatro parámetros, $|V_{us}|$, v_1 , v_2 y v_3 , en realidad solamente depende de tres: $|V_{us}|(1 + v_1 + v_2)$, v_2 y v_3 . Así pues no puedo determinar el valor de $|V_{us}|$ del ajuste.

En nuestro caso, el término de la anchura proporcional a f_2 no es muy importante. Así pues, en los casos en los que fijemos el valor de f_1 mediante la carga eléctrica, y por tanto no tengamos que ajustarlo, esto no será un problema. En el caso en el que también ajustemos el valor de f_1 a los datos experimentales, uno tiene que ser

¹Esto es así porque siempre usamos un valor de f_2 que conocemos de antemano, relacionado con los momentos magnéticos de los nucleones.

Tabla 5.16: Parametrización de \hat{f}_1 .

Desintegración	f_1
$\Lambda \rightarrow p$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\Sigma^- \rightarrow n$	-1
$\Xi^- \rightarrow \Lambda$	$\sqrt{\frac{3}{2}}(1 + 2v_2 + 2v_3)$
$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2v_2)$
$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+$	$1 + 2v_2$

muy cuidadoso a la hora de sacar conclusiones.

De todos los ajustes realizados, podemos extraer las siguientes conclusiones:

- Si comparamos los ajustes en que se ha utilizado la información proporcionada por la desintegración del neutrón, con los que no se ha utilizado, nos damos cuenta de que los grados de libertad no varían, ya que la incorporación de un nuevo dato experimental implica la adición de un nuevo factor de forma reducido a ajustar. A la vista de los resultados, el $\chi^2/\text{d.o.f.}$ y los resultados varían en menos de un uno por ciento, de modo que ambos ajustes son igualmente fiables. El hecho de que nada varía se puede interpretar muy fácilmente: el nuevo dato experimental que introducimos tiene un error mucho más pequeño que el resto, de modo que su peso estadístico es mucho mayor. Como también introducimos un nuevo parámetro, lo que está ocurriendo es que el nuevo dato experimental “fija” el valor de la nueva constante (esto solamente sería estrictamente cierto en el caso de que el error del nuevo dato experimental fuese exactamente cero), de modo que el resto del ajuste (con un parámetro menos y un dato experimental menos) es el mismo que el ajuste en el que no se había incluido la desintegración del neutrón.
- Los ajustes en los que se consideraba simetría exacta. En este caso vemos en primer lugar el patrón esperado por la expansión en $1/N_C$, esto es que el valor de a es mayor que el de b , que es orden N_C^{-1} respecto al primero. En el análisis hecho en términos de F y G , sin tener en cuenta la expansión $1/N_C$, F y G eran funciones de a y b , de modo que aparecía mezclada la dependencia en N_C .
- Ajustes en el caso en el que solamente se rompe la simetría en g_1 . Aquí haremos el análisis, primero de manera absoluta, y luego comparando con el ajuste

anterior. En primer lugar, como se esperaba, tanto cuando fijamos V_{us} como cuando lo ajustamos, vemos que los coeficientes c_3 y c_4 son claramente más pequeños que a y b , ya que están suprimidos tanto en $1/N_C$ como en el parámetro de ruptura de la simetría ϵ . Por último vemos que a y b han modificado apreciablemente su valor respecto del caso simétrico, lo cual indica que era necesario tener en cuenta la ruptura de la simetría en este factor. Si comparamos los resultados obtenidos usando las asimetrías o usando los cocientes, vemos que las asimetrías prefieren valores de V_{us} mayores y valores de a menores. Una vez se tiene en cuenta los errores estadísticos, los valores son totalmente compatibles. Antes de comentar el último caso, se podría argumentar que este es un buen punto para parar. Esto es así porque el teorema de Ademollo–Gatto nos asegura que el factor f_1 está protegido de la ruptura de la simetría a primer orden, y además sabemos que puede ser peligroso incluirlo como parámetro a ajustar. Aun así, debido justamente a esto, es posible que el valor de V_{us} esté más afectado por los efectos de la ruptura de la simetría, ya que está íntimamente ligado al factor f_1 . Por todo ello es interesante realizar el ajuste antes de sacar conclusiones.

- Ajustes en el caso en el que se rompe la simetría tanto en g_1 como en f_1 . Si fijamos el valor de V_{us} y procedemos al ajuste, encontramos resultados coherentes, ya que las correcciones que aparecen al factor de forma f_1 son, tal y como se esperaba, pequeñas, y el valor de g_1 es prácticamente el mismo que en el caso anterior. Esto quiere decir que sí es un ajuste interesante si lo que queremos estudiar es el patrón de ruptura de simetría de los factores de forma, aunque como ya se comentó, es necesario conocer g_1 a segundo orden en ruptura de simetría. Ahora bien, si dejamos libre V_{us} , las cosas cambian de manera drástica. En seguida nos damos cuenta de que el resultado no tiene sentido físico alguno, ya que en lugar de pequeñas correcciones a los resultados obtenidos en el caso anterior, obtenemos grandes correcciones. Y no solamente cuando comparamos con el caso anterior, incluso si comparamos los ajustes realizados usando los diferentes observables (asimetrías o cocientes), vemos que entre ellos los resultados son completamente incompatibles, síntoma inequívoco de que algo no está funcionando. Lo que está ocurriendo es justamente lo que se comentaba al principio de esta sección, que la función χ^2 es plana en la zona cercana al mínimo, y que por tanto no podemos extraer información útil del proceso de minimización. Respecto al ajuste en el que exigimos que la ruptura de simetría en f_1 no supere cierto porcentaje, los resultados obtenidos tienen sentido físico, pero el error estadístico asociado es muy grande, con lo que no es competitivo. Asimismo, la función χ^2 sigue siendo plana, con lo que el mínimo absoluto que encontramos no es mejor ni peor que el resto de los mínimos locales que están dentro de la región de parámetros que hemos acotado.

Como análisis final el ajuste más satisfactorio para la determinación de V_{us} es aquel en el que solamente se rompe la simetría en g_1 .

Conclusiones

Debido a las discrepancias entre el valor experimental de V_{us} (1) y el extraído de la desintegración semileptónica de hiperones suponiendo simetría SU(3) exacta, es necesario hacer un estudio de la ruptura de esta simetría en el caso de los hiperones. En el caso de mesones, el conocimiento teórico de los efectos de ruptura de simetría SU(3) es mucho mayor que en el caso de los bariones y permite un mejor control de sus efectos.

Como QCD es una teoría no perturbativa a bajas energías, no es posible trabajar directamente con el lagrangiano de QCD en términos de quarks, gluones y la constante de acoplo α_s para calcular las propiedades de los hadrones compuestos de grados de libertad ligeros (quarks u,d y s). En el caso de la desintegración semileptónica de hiperones los efectos de las interacciones fuertes son muy importantes, y quedan reflejados en los factores de forma. La única manera de obtener información de los factores de forma es usando alguna técnica no perturbativa. En principio se podría pensar en usar una teoría efectiva como teoría quiral de perturbaciones, que tan buenos resultados da en el sector pseudo-escalar de los hadrones, pero su éxito con los bariones es muy limitado, además de que si se quiere estudiar la ruptura de simetría con estas técnicas, aparecen gran cantidad de operadores, de modo que no tenemos poder predictivo. Siempre tenemos la opción de usar un modelo para la ruptura de la simetría, pero esto incluiría errores de modelo en la determinación de V_{us} , y además no nos permitiría aprender demasiadas cosas de esta ruptura en el marco de QCD. Una última posibilidad sería usar Lattice QCD. Con estas técnicas, en principio, usando directamente el lagrangiano de QCD en términos de quarks, gluones y la constante de acoplo α_s , y con la ayuda de potentes ordenadores, se podrían calcular estos factores de forma. Sin embargo la precisión alcanzada por los cálculos de Lattice QCD es demasiado pequeña para extraer un valor competitivo de V_{us} .

Todo parece indicar que el marco adecuado para el estudio de las propiedades estáticas de los bariones, incluyendo ruptura de simetría SU(3) es la expansión en $1/N_C$ de QCD. Haciendo un estudio de la interacción pion-nucleón a bajas energías en el marco de la expansión de QCD en $1/N_C$, descubrimos una condición de consistencia. Esta condición nos lleva a darnos cuenta de que QCD en el límite de gran número de colores tiene una simetría en el sector de los bariones que no aparece a nivel del lagrangiano de QCD. Es esta simetría la que nos permitirá calcular las propiedades estáticas de los bariones con una precisión competitiva para nuestros objetivos.

Haciendo uso del teorema de Ademollo–Gatto hacemos un cálculo a primer orden tanto en $1/N_C$ como en el parámetro de ruptura de la simetría ϵ en el caso del factor de forma vector–axial y a segundo orden en $1/N_C$ y ϵ en el caso del factor de forma vectorial. En el caso del factor f_2 un cálculo simétrico es suficiente. También tenemos en cuenta el hecho de que la corriente vectorial es conservada. Con todo esto tenemos una parametrización de los factores de forma que es independiente de modelo y que solamente usa QCD.

Sin embargo, a la hora de hacer los ajustes a los datos experimentales, encontramos algunos problemas. De todos los ajustes realizados hay uno que claramente da resultados poco satisfactorios. Es el ajuste en el que rompemos la simetría tanto en f_1 como en g_1 y ajustamos además V_{us} . Por un lado tenemos que aunque seamos capaces de calcular el factor de forma f_1 hasta segundo orden en ruptura de simetría SU(3), el resto de factores de forma solamente los conocemos a primer orden. Esto implica que los observables los conozcamos solamente a primer orden, de modo que no podemos obtener información sobre los factores de forma reducidos que parametrizan la ruptura de simetría de segundo orden de f_1 . Por otro lado, sabemos que para poder obtener en un ajuste separadamente los valores de $|V_{us}|$ y $|\tilde{f}_1 V_{us}|$ necesitamos que los factores de forma f_2 no sean nulos. El impacto numérico de éstos sobre los ajustes realizados es del 2-3 %, con lo que no podemos ser sensibles a separaciones entre $|V_{us}|$ y $|\tilde{f}_1 V_{us}|$.

Para poder obtener un resultado competitivo en el caso del último ajuste sería necesario un conocimiento teórico más profundo de los factores de forma, y sobre todo, una mayor cantidad de datos experimentales y además de mayor precisión.

Se puede sacar la conclusión de que la desintegración semileptónica de hiperones no es el escenario adecuado para hacer física de precisión. Debido a las incertidumbres tanto teóricas como experimentales no podemos ser competitivos frente a otras determinaciones alternativas de $|V_{us}|$, mencionadas en la introducción.

El valor final de $|V_{us}|$ que nos parece más adecuado, después de realizar todo el análisis, es:

$$|V_{us}| = 0.2239 \pm 0.0097 . \quad (5.19)$$

Apéndice A: Notas sobre el grupo SU(3)

SU(N) es el grupo de Lie de las matrices $N \times N$ sobre el cuerpo de los números complejos, que son unitarias, $UU^\dagger = 1$ y unimodulares, $\det U = 1$. Cualquier matriz que cumpla esto se puede escribir del siguiente modo:

$$U(\alpha) = e^{i\alpha^a t^a}, \quad a = 1, 2, \dots, N^2 - 1, \quad (\text{A.1})$$

en donde α^a caracterizan completamente un elemento del grupo. Las matrices t^a forman el álgebra del grupo, y son hermíticas, $t^{\dagger a} = T^a$, de traza nula, $\text{Tr } t^a = 0$ y además cumplen las relaciones del álgebra de Lie:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (\text{A.2})$$

en donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo, y son totalmente anti-simétricas y reales².

La representación fundamental del álgebra, para el caso de N=2 son las matrices de Pauli, y para ³ N=3 $t^a = \frac{1}{2}\lambda^a$, con λ^a las matrices de Gell-Mann:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La representación fundamental del álgebra de SU(N) también cumple unas relaciones de anticonmutación:

$$\{t^a, t^b\} = \frac{1}{N}\delta^{ab} + d^{abc}t^c, \quad (\text{A.4})$$

²La relación de conmutación (A.2) la cumplen las matrices del álgebra T^a en cualquier representación.

³A partir de este punto se usará T^a para designar las matrices del álgebra en cualquier representación irreducible y t^a para las matrices del álgebra en la representación fundamental.

que definen el símbolo d , un tensor con tres índices, real y completamente simétrico. Usando las propiedades de conmutación y anticonmutación, uno encuentra que:

$$t^a t^b = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N} \delta^{ab} + (i f^{abc} + d^{abc}) t^c \right]. \quad (\text{A.5})$$

Para $N=3$ los valores de los símbolos que no son nulos son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f^{123} &= f^{147} = -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} f^{458} = \frac{1}{\sqrt{3}} f^{678} = \frac{1}{2}, \\ d^{146} &= d^{157} = -d^{247} = d^{256} = d^{344} = d^{355} = -d^{366} = -d^{377} = \frac{1}{2}, \\ d^{118} &= d^{228} = d^{338} = -2d^{448} = -2d^{558} = -2d^{668} = -2d^{778} = -d^{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Tanto las constantes de estructura como el símbolo d se pueden calcular fácilmente con las matrices de la representación fundamental del álgebra:

$$\begin{aligned} f^{abc} &= -2i \text{Tr} (t^a [t^b, t^c]), \\ d^{abc} &= 2 \text{Tr} (t^a \{t^b, t^c\}). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Para lo cual se ha utilizado la condición de normalización que cumplen las matrices del álgebra en la representación fundamental:

$$\text{Tr} (t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{A.8})$$

La identidad de Fierz nos dice:

$$(t^a)_{\beta}^{\alpha} (t^a)_{\delta}^{\gamma} = \frac{1}{2} \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_{\beta}^{\gamma} - \frac{1}{2N} \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\gamma}, \quad (\text{A.9})$$

de donde se puede derivar:

$$\begin{aligned} \text{Tr} (t^a X t^a Y) &= \frac{1}{2} (\text{Tr} X) (\text{Tr} Y) - \frac{1}{2N} \text{Tr} (XY), \\ \text{Tr} (t^a X) \text{Tr} (t^a Y) &= \frac{1}{2} \text{Tr} (XY) - \frac{1}{2N} (\text{Tr} X) (\text{Tr} Y), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

y de éstas se puede mostrar:

$$\begin{aligned}
 d^{aab} &= 0, \\
 d^{abc} d^{abd} &= \left(N - \frac{4}{N} \right) \delta^{cd}, \\
 f^{abc} f^{abd} &= N \delta^{cd}, \\
 f^{abc} f^{ade} d^{bdc} &= \frac{N}{2} d^{cef}, \\
 d^{abc} d^{ade} d^{bdf} &= \left(\frac{N}{2} - \frac{6}{N} \right) d^{cef}, \\
 d^{abc} d^{ade} f^{bdf} &= \left(\frac{N}{2} - \frac{2}{N} \right) f^{cef}, \\
 f^{abe} f^{cde} + f^{ace} f^{dbe} + f^{ade} f^{bce} &= 0, \\
 f^{abe} d^{cde} + f^{ace} d^{dbe} + f^{ade} d^{bce} &= 0,
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

en donde los índices repetidos están sumados.

Comentemos en último lugar que hasta ahora solamente se ha hablado de la representación fundamental del grupo y del álgebra, esto es, actuando sobre un espacio vectorial de la dimensión de las matrices T. Una de las propiedades de los grupos y álgebras de Lie es que se pueden definir representaciones irreducibles de estos grupos, para que actúen sobre espacios vectoriales diferentes al fundamental. Un ejemplo de esto es el espín, cuya representación fundamental es la de espín $\frac{1}{2}$, pero es bien conocido que el mismo grupo SU(2) sirve para describir partículas de cualquier espín entero o semientero. O en el caso de SU(3), aunque la representación fundamental es un triplete de estados (los quarks), también nos describe octetes y decupletes de partículas. Sin querer entrar en mucho detalle en teoría de representación de grupos y álgebras sí es importante remarcar que mientras el álgebra de conmutación la satisfacen las matrices del álgebra en cualquier representación, no ocurre lo mismo con el resto de propiedades (como por ejemplo las relaciones de anticonmutación). Hay una representación muy especial que merece especial atención, ésta es la representación adjunta. Su característica fundamental es que el grupo actúa sobre el espacio vectorial expandido por las matrices del álgebra. Así pues las matrices del álgebra actúan sobre sí mismas: cuando hacen de estado son vectores de $N^2 - 1$ componentes, y cuando hacen de operador, son matrices de dimensión $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$. Los elementos de estas últimas se calculan de manera muy directa:

$$(T_A^a)^{bc} = -i f^{abc}. \tag{A.13}$$

La representación adjunta es siempre una representación real. Un tensor con un índice en la representación fundamental α y uno en la anti-fundamental β , se puede transformar en un tensor con un solo índice en la representación adjunta del siguiente modo:

$$\mathcal{T}_\beta^\alpha \longrightarrow \mathcal{T}^a = (t^a)_\alpha^\beta \mathcal{T}_\beta^\alpha. \tag{A.14}$$

Apéndice B: Funciones de onda de los bariones

En este Apéndice se proporcionan las funciones de onda totalmente simétricas en espín-sabor de los bariones en su estado fundamental. Estas funciones de onda coinciden con las del modelo quark no relativista, pero esto no quiere decir, como ya se ha insistido en anteriores capítulos, que estemos haciendo ningún tipo de hipótesis sobre el carácter relativista de los quarks. Los resultados coinciden porque, como ya se indicó en capítulos anteriores, las líneas de quarks de los bariones son completamente antisimétricas en color, por lo que son completamente simétricas en el resto de números cuánticos. En otras palabras, los bariones del estado fundamental pertenecen a la representación irreducible **56**, completamente simétrica, del grupo $SU(2N_F) \rightarrow SU(6)$ de espín-sabor. Esta representación se descompone en el octete y en el decuplete, según sus propiedades de transformación bajo el grupo de sabor y del grupo de espín $SU(2) \otimes SU(3)$, como ya se ha discutido.

En primer lugar escribimos las funciones de onda de los bariones de espín $\frac{3}{2}$. Éste es el caso más sencillo, puesto que la parte de espín ya es completamente simétrica, y factoriza de la simetrización de sabor. Las funciones de onda totalmente simétricas en sabor son:

$$|\Delta^{++}\rangle = uuu, \quad (\text{B.1})$$

$$|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu), \quad (\text{B.2})$$

$$|\Delta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(ddu + dud + udd), \quad (\text{B.3})$$

$$|\Delta^{--}\rangle = ddd, \quad (\text{B.4})$$

$$|\Sigma^{*+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu), \quad (\text{B.5})$$

$$|\Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + dsu + usd + sdu + sud), \quad (\text{B.6})$$

$$|\Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu), \quad (\text{B.7})$$

$$|\Sigma^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd), \quad (\text{B.8})$$

$$|\Omega\rangle = sss, \quad (\text{B.9})$$

y los estados completamente simétricos de espín son:

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \uparrow\uparrow\uparrow, \quad (\text{B.10})$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow). \quad (\text{B.11})$$

Sin embargo a veces es conveniente tener explícitamente la forma no factorizada de la función de onda. La función de onda no factorizada de los bariones de espín $\frac{3}{2}$ con tercera componente de máxima son:

$$\left| \Delta^{++}, \frac{3}{2} \right\rangle = u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow, \quad (\text{B.12})$$

$$\left| \Delta^+, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow), \quad (\text{B.13})$$

$$\left| \Delta^0, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (d^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow), \quad (\text{B.14})$$

$$\left| \Delta^{--}, \frac{3}{2} \right\rangle = d^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow, \quad (\text{B.15})$$

$$\left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow + u^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow), \quad (\text{B.16})$$

$$\left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (u^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow), \quad (\text{B.17})$$

$$\left| \Sigma^{*-}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (d^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow + d^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow d^\uparrow), \quad (\text{B.18})$$

$$\left| \Xi^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow s^\uparrow u^\uparrow), \quad (\text{B.19})$$

$$\left| \Xi^{*-}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (d^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow s^\uparrow d^\uparrow), \quad (\text{B.20})$$

$$\left| \Omega^-, \frac{3}{2} \right\rangle = s^\uparrow s^\uparrow s^\uparrow, \quad (\text{B.21})$$

En segundo lugar, las funciones de onda de estos mismos bariones, pero con la tercera componente del espín igual a $\frac{1}{2}$:

$$\left| \Delta^{++}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + u^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow), \quad (\text{B.22})$$

$$\left| \Delta^+, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow), \quad (\text{B.23})$$

$$\left| \Delta^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow) , \quad (\text{B.24})$$

$$\left| \Delta^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (d^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow + d^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow + d^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow) , \quad (\text{B.25})$$

$$\left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow + u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow + u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow + u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow + u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow + u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow + s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow + s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow) , \quad (\text{B.26})$$

$$\left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} (u^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + s^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow + d^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + s^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow + u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow) , \quad (\text{B.27})$$

$$\left| \Sigma^{*-}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow + d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow + d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow + d^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow + d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow + d^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow + s^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow + s^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow) , \quad (\text{B.28})$$

$$\left| \Xi^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (s^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow + s^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow + s^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow + s^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow + s^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow + u^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow + u^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow + u^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow) , \quad (\text{B.29})$$

$$\left| \Xi^{*-}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3} (s^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow + s^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow + s^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow + s^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow + s^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow + s^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow + d^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow + d^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow + d^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow) , \quad (\text{B.30})$$

$$\left| \Omega^-, \frac{1}{2} \right\rangle = (s^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow + s^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow + s^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow) . \quad (\text{B.31})$$

En tercer lugar, las funciones de onda de los bariones de espín $\frac{1}{2}$. En este caso, la simetrización no se puede factorizar en el producto de la parte de espín por la de sabor, y el resultado es un poco más complejo. Podemos descomponer el resultado como suma de dos términos en que sí es posible la factorización de espín por sabor. La parte de espín y de sabor de estos dos términos no será ni simétrica ni anti-simétrica, sino que tendrá simetría mixta. Llamaremos a estas simetrías *simetría*- ρ y *simetría*- λ . Las funciones de ondas se pueden escribir entonces como:

$$\left| B, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| B, \lambda \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \lambda \right\rangle + \left| B, \rho \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2}, \rho \right\rangle \right) . \quad (\text{B.32})$$

Las funciones de espín con simetría mixta son:

$$\left| \frac{1}{2}, \rho \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) , \quad (\text{B.33})$$

$$\left| \frac{1}{2}, \lambda \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{6}} (\uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow - 2\uparrow\uparrow\downarrow) , \quad (\text{B.34})$$

mientras que las funciones de onda de sabor con simetría mixta son:

$$|p, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (udu - duu) , \quad (\text{B.35})$$

$$|p, \lambda\rangle = \frac{-1}{\sqrt{6}} (udu + duu - 2uud) ; \quad (\text{B.36})$$

$$|n, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (udd - dud) , \quad (\text{B.37})$$

$$|n, \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (dud + udd - 2ddu) ; \quad (\text{B.38})$$

$$|\Sigma^+, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (usu - suu) , \quad (\text{B.39})$$

$$|\Sigma^+, \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (suu + usu - 2uus) ; \quad (\text{B.40})$$

$$|\Sigma^0, \rho\rangle = \frac{1}{2} (sud - usd + sdu - dsu) , \quad (\text{B.41})$$

$$|\Sigma^0, \lambda\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} (sud + usd + sdu + dsu - 2uds - 2dus) ; \quad (\text{B.42})$$

$$|\Sigma^-, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (dsd - sdd) , \quad (\text{B.43})$$

$$|\Sigma^-, \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (sdd + dsd - 2dds) ; \quad (\text{B.44})$$

$$|\Lambda, \rho\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2uds - 2dus + usd - dsu - sud + sdu) , \quad (\text{B.45})$$

$$|\Lambda, \lambda\rangle = \frac{1}{2} (usd - dsu + sud - sdu) ; \quad (\text{B.46})$$

$$|\Xi^0, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (sus - uss) , \quad (\text{B.47})$$

$$|\Xi^0, \lambda\rangle = \frac{-1}{\sqrt{6}} (sus + sus - 2ssu) ; \quad (\text{B.48})$$

$$|\Xi^-, \rho\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (sds - dss) , \quad (\text{B.49})$$

$$|\Xi^-, \lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (sds + sds - 2ssd) . \quad (\text{B.50})$$

Hay que comentar que en el caso de las funciones de onda de sabor de los bariones Σ^0 y Λ , que se encuentran en un lugar del diagrama de pesos con degeneración doble, la elección que hemos tomado es justamente la que hace que la Σ^0 tenga isospín uno

y la Λ tenga isospín cero. Los estados con U -espín y V -espín bien definidos son:

$$|U = 1\rangle = \frac{-1}{2} \left(|\Sigma^0\rangle - \sqrt{3}|\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.51})$$

$$|U = 0\rangle = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}|\Sigma^0\rangle + |\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.52})$$

$$|V = 1\rangle = \frac{1}{2} \left(|\Sigma^0\rangle + \sqrt{3}|\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.53})$$

$$|V = 0\rangle = \frac{1}{2} \left(\sqrt{3}|\Sigma^0\rangle - |\Lambda\rangle \right). \quad (\text{B.54})$$

Al igual que en el caso de los bariones de espín $\frac{3}{2}$ es conveniente tener una expresión de las funciones de onda en donde se haya realizado explícitamente los productos tensoriales, siendo el resultado:

$$\left| p, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(2u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + 2u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow - u^\uparrow d^\downarrow u^\downarrow - u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow - u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow - d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow - d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow - u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow \right), \quad (\text{B.55})$$

$$\left| n, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} \left(2d^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow + 2d^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow + u^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow - d^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow - d^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow - d^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow - u^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow - u^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow - d^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow \right), \quad (\text{B.56})$$

$$\left| \Sigma^+, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(2u^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow + 2u^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow + s^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow - u^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow - u^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow - u^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow - s^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow - s^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow - u^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow \right), \quad (\text{B.57})$$

$$\left| \Sigma^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{6} \left(2u^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow + 2u^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow + 2s^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow + 2d^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow + 2d^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow + 2s^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow - u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow - u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow - d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow - d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow - d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow - u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow - s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow - s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow - d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow - s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow - s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow - u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow \right), \quad (\text{B.58})$$

$$\left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(2d^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow + 2d^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow + s^\downarrow d^\uparrow d^\uparrow - d^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow - d^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow - d^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow - s^\uparrow d^\uparrow d^\downarrow - s^\uparrow d^\downarrow d^\uparrow - d^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow \right), \quad (\text{B.59})$$

$$\left| \Lambda^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left(u^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow + u^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow + d^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow - d^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow + d^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow - u^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow + s^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow + s^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow + d^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow - s^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow - s^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow - u^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow \right), \quad (\text{B.60})$$

$$\left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} \left(2s^\uparrow s^\uparrow u^\downarrow + 2s^\uparrow u^\downarrow s^\uparrow + u^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow - s^\uparrow u^\uparrow s^\downarrow - s^\uparrow s^\downarrow u^\uparrow - s^\downarrow u^\uparrow s^\uparrow - u^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow - u^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow - s^\downarrow s^\uparrow u^\uparrow \right), \quad (\text{B.61})$$

$$\left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3\sqrt{2}} \left(2s^\uparrow s^\uparrow d^\downarrow + 2s^\uparrow d^\downarrow s^\uparrow + d^\downarrow s^\uparrow s^\uparrow - s^\uparrow d^\uparrow s^\downarrow - s^\uparrow s^\downarrow d^\uparrow - s^\downarrow d^\uparrow s^\uparrow - d^\uparrow s^\uparrow s^\downarrow - d^\uparrow s^\downarrow s^\uparrow - s^\downarrow s^\uparrow d^\uparrow \right). \quad (\text{B.62})$$

Nótese que en el caso de Λ , es el quark s el que lleva el espín del barión, lo cual se traducirá en que será autoestado de ciertos operadores.

Los resultados anteriores deben interpretarse de la siguiente forma: los quarks con espín son operadores de creación que actúan en cada una de las $N_C = 3$ líneas de quarks del barión, y a su vez sobre el vacío, de modo que el orden es importante. No se ha añadido un subíndice que denote en qué línea actúa cada quark, ni una daga para indicar que son operadores de creación, para agilizar la notación. Asimismo, tampoco se ha escrito el vacío $|0\rangle$ sobre el que actúan los operadores.

A continuación se presentan unas tablas con la actuación de los operadores de un cuerpo de la representación adjunta del álgebra de espín-sabor sobre los estados bariónicos. Sólo se incluyen aquellos operadores que, a priori, no dan resultado nulo, y que contribuyen a los procesos de interés. Tampoco se incluyen aquellos operadores de los cuales son autoestados todos los bariones, por ejemplo:

$$T^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(N_C - 3N_s) \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - N_s), \quad (\text{B.63})$$

$$T^3 = \frac{1}{2}(N_u - N_d), \quad (\text{B.64})$$

$$G^{i8} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(J^i - 3J_s^i), \quad (\text{B.65})$$

$$G^{i3} = \frac{1}{2}(J_u^i - J_d^i), \quad (\text{B.66})$$

$$T^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}T^8 \equiv T^{3+\frac{8}{\sqrt{3}}} = T^Q. \quad (\text{B.67})$$

En donde (B.67) es el generador de la carga eléctrica.

En primer lugar, la actuación de los generadores del grupo de sabor $SU(3)$ T^a . En este caso no nos salimos de la representación octete⁴.

$$T^{1+i2}|n\rangle = |p\rangle, \quad (\text{B.68})$$

$$T^{1+i2}|\Sigma^-\rangle = \sqrt{2}|\Sigma^0\rangle, \quad (\text{B.69})$$

$$T^{4-i5}|\Lambda\rangle = -\sqrt{\frac{3}{2}}|p\rangle, \quad (\text{B.70})$$

$$T^{4-i5}|\Sigma^-\rangle = -|n\rangle, \quad (\text{B.71})$$

$$T^{4-i5}|\Xi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\Sigma^0\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}}|\Lambda\rangle, \quad (\text{B.72})$$

$$T^{4-i5}|\Xi^0\rangle = |\Sigma^+\rangle. \quad (\text{B.73})$$

A continuación la actuación de los operadores “mixtos” G^{ia} . En este caso, el operador nos lleva fuera de la representación octete, y necesitamos los estados del decuplete.

⁴No se discute la actuación de los generadores del grupo de momento angular por ser esta trivial. Es sencillamente la misma que tendría sobre partículas “fundamentales”, es decir, es transparente al contenido en sabor de los bariones.

En primer lugar se proporcionan los resultados de los operadores G^{3a} , que son los que se utilizarán en el cálculo.

$$G^{3(1+i2)} \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{5}{6} \left| p, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \Delta^+, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.74})$$

$$G^{3(1+i2)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.75})$$

$$G^{3(4-i5)} \left| \Lambda, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \left| p, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.76})$$

$$G^{3(4-i5)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{6} \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \Delta^0, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.77})$$

$$G^{3(4-i5)} \left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{3}{2\sqrt{2}} \left| \Sigma^0, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{2\sqrt{6}} \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.78})$$

$$G^{3(4-i5)} \left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{5}{6} \left| \Sigma^+, \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \Sigma^{*+}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.79})$$

G^{+a} denota $G^{(1+i2)a}$ esto es, la proyección del operador sobre la dirección del espacio de espín correspondiente al operador escalera. Dicho de otro modo, es un elemento de la base de Cartan. Lo mismo se aplica a G^{-a} :

$$G^{+(1+i2)} \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Delta^+, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.80})$$

$$G^{+(1+i2)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.81})$$

$$G^{+(4-i5)} \left| \Lambda, \frac{1}{2} \right\rangle = 0, \quad (\text{B.82})$$

$$G^{+(4-i5)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \left| \Delta^0, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.83})$$

$$G^{+(4-i5)} \left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.84})$$

$$G^{+(4-i5)} \left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{6} \left| \Sigma^{*+}, \frac{3}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.85})$$

$$G^{-(1+i2)} \left| n, \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{5}{3} \left| p, \frac{-1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \Delta^+, \frac{-1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.86})$$

$$G^{-(1+i2)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \left| p, \frac{-1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \Lambda, \frac{-1}{2} \right\rangle + \frac{1}{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{-1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.87})$$

$$G^{-(4-i5)} \left| \Lambda, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{6\sqrt{6}} \left| p, \frac{-1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.88})$$

$$G^{-(4-i5)} \left| \Sigma^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{3} \left| n, \frac{-1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} G^{-(4-i5)} \left| \Delta^0, \frac{-1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.89})$$

$$G^{-(4-i5)} \left| \Xi^-, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left| \Sigma^0, \frac{-1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \Lambda, \frac{-1}{2} \right\rangle - \frac{1}{3} \left| \Sigma^{*0}, \frac{-1}{2} \right\rangle, \quad (\text{B.90})$$

$$G^{-(4-i5)} \left| \Xi^0, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{-5}{3} \left| \Sigma^+, \frac{-1}{2} \right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \Sigma^{*+}, \frac{-1}{2} \right\rangle. \quad (\text{B.91})$$

En el siguiente grupo de igualdades no se especifica el espín de las partículas, lo cual puede inducir a confusión en el caso de los bariones pertenecientes al decuplete. Teniendo en cuenta que J_s^3 conserva la tercera componente de momento angular, se sobreentiende que todos los estados tienen espín $+\frac{1}{2}$.

$$J_s^3 |n\rangle = 0, \quad (\text{B.92})$$

$$J_s^3 |p\rangle = 0, \quad (\text{B.93})$$

$$J_s^3 |\Sigma^+\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}} |\Sigma^+\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{3} |\Sigma^{*+}\rangle, \quad (\text{B.94})$$

$$J_s^3 |\Sigma^0\rangle = \frac{-1}{3} |\Sigma^0\rangle - \sqrt{2} |\Sigma^{*0}\rangle, \quad (\text{B.95})$$

$$J_s^3 |\Sigma^-\rangle = \frac{-1}{3} |\Sigma^-\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3} |\Sigma^{*-}\rangle, \quad (\text{B.96})$$

$$J_s^3 |\Lambda\rangle = |\Lambda\rangle, \quad (\text{B.97})$$

$$J_s^3 |\Xi^0\rangle = \frac{4}{3} |\Xi^0\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3} |\Xi^{*0}\rangle, \quad (\text{B.98})$$

$$J_s^3 |\Xi^-\rangle = \frac{4}{3} |\Xi^-\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{3} |\Xi^{*-}\rangle. \quad (\text{B.99})$$

Nótese que, tal y como se había indicado con anterioridad, Λ es autoestado del operador J_s^3 .

Finalmente, la actuación de los operadores U^2 , V^2 , $J^i G^{i3}$ sobre los estados del centro del diagrama de pesos de los bariones de espín $\frac{1}{2}$:

$$U^2 |\Sigma^0\rangle = \frac{1}{2} \left(|\Sigma^0\rangle - \sqrt{3} |\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.100})$$

$$U^2 |\Lambda\rangle = \frac{-\sqrt{3}}{2} \left(|\Sigma^0\rangle - \sqrt{3} |\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.101})$$

$$V^2 |\Sigma^0\rangle = \frac{1}{2} \left(|\Sigma^0\rangle + \sqrt{3} |\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.102})$$

$$V^2 |\Lambda\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(|\Sigma^0\rangle + \sqrt{3} |\Lambda\rangle \right), \quad (\text{B.103})$$

$$J^i G^{i3} |\Sigma^0\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} |\Lambda\rangle, \quad (\text{B.104})$$

$$J^i G^{i3} |\Lambda\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4} |\Sigma^0\rangle. \quad (\text{B.105})$$

$$(\text{B.106})$$

Tabla B.1: Elementos de matriz $\langle B | \mathcal{O} | B \rangle$ del conjunto de operadores de los cuales son estados propios todos los bariones.

	p	n	Σ^+	Σ^0	Σ^-	Ξ^-	Ξ^0	Λ
$2T^3$	1	-1	2	0	-2	1	-1	0
N_s	0	0	1	1	1	2	2	1
N_u	2	1	2	1	0	1	0	1
N_d	1	2	0	1	2	0	1	1
$4I^2$	3	3	8	8	8	3	3	0
$4U^2$	3	8	3	2	3	8	3	6
$4V^2$	8	3	3	4	3	3	8	6
$4J_s^2$	0	0	3	3	3	8	8	3
$4J_u^2$	8	3	8	3	0	3	0	3
$4J_d^2$	3	8	0	3	8	0	3	3
$2\sqrt{3}T^8$	3	3	0	0	0	-3	-3	0
$8\sqrt{3}J^i G^{i8}$	3	3	6	6	6	-9	-9	6
$8J^i G^{i3}$	-5	-5	4	0	-4	-1	1	0

Por completitud se proporcionan unas identidades que son de mucha utilidad:

$$J^i G^{i8} = \frac{1}{\sqrt{12}} (3I^2 - J^2 - 3J_s^2) , \quad (\text{B.107})$$

$$J^i G^{i3} = \frac{1}{4} (J_u^2 - J_d^2 + V^2 - U^2) , \quad (\text{B.108})$$

$$\frac{J^i G^{ia}}{J^2} = \frac{2}{3} \left(T^a + \frac{1}{2} \{T^a, N_s\} \right) . \quad (\text{B.109})$$

En donde (B.109) es válida solamente para transiciones con $\Delta S = 2\Delta I$ (es por ello que si ponemos $a=8$ en (B.109) no obtenemos (B.107)). Éstas son las transiciones que nos interesan.

En la Tabla B.1 se presentan los elementos de matriz de los operadores de los cuales son estados propios todos los bariones, a excepción de los bariones Σ^0 y Λ , para los que se pone el valor del elemento de matriz aunque no sean estados propios del operador.

Apéndice C: Comentarios sobre el espacio fásico

Dado que para el cálculo de los observables de interés en los procesos de desintegración semileptónica de hiperones es necesario integrar los elementos de la matriz de colisión en el espacio fásico, merece la pena tratar con cierto detalle algunas de sus características.

Para empezar, discutamos cuál es el rango máximo de variación de los invariantes relativistas que caracterizan el proceso⁵:

$$P_B = p_b + p_e + p_\nu, \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} t_1 &= (P_B - p_b)^2 = (p_b + p_\nu)^2 = s_{23} \longrightarrow (m_B - m_b)^2 \geq s_{23} \geq (m_e + m_\nu)^2, \\ t_2 &= (P_B - p_e)^2 = (p_\nu + p_b)^2 = s_{13} \longrightarrow (m_B - m_e)^2 \geq s_{13} \geq (m_b + m_\nu)^2, \\ t_3 &= (P_B - p_\nu)^2 = (p_e + p_b)^2 = s_{12} \longrightarrow (m_B - m_\nu)^2 \geq s_{12} \geq (m_e + m_b)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Estos tres invariantes relativistas no son independientes, y cumplen la ligadura:

$$t_1 + t_2 + t_3 = s_{12} + s_{13} + s_{23} = m_B^2 + m_b^2 + m_e^2 + m_\nu^2. \quad (\text{C.3})$$

En el sistema en reposo del barión inicial se cumple:

$$E_i = \frac{m_B^2 - m_i^2 - t_1}{2m_B}, \quad |\vec{p}_i| = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(m_B^2, m_i^2, t_1)}{2m_B}, \quad (\text{C.4})$$

en donde $\lambda(a, b, c)$ se define en (D.3). La integral de espacio fásico de tres partículas tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int dQ_3 &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - p_1 - p_2 - p_3) \\ &= \frac{1}{256\pi^5} \int \frac{d^3\vec{p}_2 d^3\vec{p}_3}{E_1^* E_2 E_3} \delta(P^0 - E_1^* - E_2 - E_3) \\ &= \frac{1}{32\pi^3} \int d\cos\theta_{12} dE_2 dE_3 \\ &= \frac{1}{128m_B^2\pi^3} \int ds_{23} ds_{13}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

⁵Mantendremos la masa de los leptones por darle mayor generalidad a algunas fórmulas, pero para los casos particulares que nos interesan, las consideraremos nulas.

en donde el cálculo se ha realizado en el sistema de referencia del barión inicial en reposo, aunque el resultado es independiente de esto. En el cálculo se ha supuesto que el elemento de matriz era independiente de ciertos ángulos, esto es, que no se medían polarizaciones. Esto no es cierto para todos nuestros cálculos, pero es ilustrativo para la siguiente discusión. Por último, se ha decidido dejar sin integrar dos invariantes relativistas, pero cualquier otra elección hubiese sido igualmente válida. En la segunda y tercera igualdad de (C.5) hay que entender E_i como función del tri-momento $|\vec{p}_i|$ de una partícula sobre la capa másica; sin embargo en la tercera igualdad se ha de entender como variable independiente. Se ha usado que:

$$\begin{aligned}
\vec{P} = 0 &\longrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}, \\
E_1^* &= \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_3|^2 + 2|\vec{p}_2||\vec{p}_3| \cos \theta_{12} + m_1^2}, \\
d^3\vec{p}_i &= d\Omega_i |\vec{p}_i|^2 d|\vec{p}_i| = d\Omega_i E_i |\vec{p}_i|^* dE_i, \\
d\Omega_2 &= d\varphi_2 d\cos \theta_{12}, \\
\delta(P^0 - \tilde{E}_1 - E_2 - E_3) &= \frac{\tilde{E}_1}{|\vec{p}_1|^* |\vec{p}_2|^*} \delta(\cos \theta_{12} - \cos \theta_{12}^*), \\
|\vec{p}_i|^* &= \sqrt{E_i^2 - m_i^2}, \\
\tilde{E}_1 &= \sqrt{|\vec{p}_2|^*{}^2 + |\vec{p}_3|^*{}^2 + 2|\vec{p}_2|^* |\vec{p}_3|^* \cos \theta_{12} + m_1^2}, \\
dE_2 = \frac{-ds_{13}}{2m_B} &, \quad dE_3 = \frac{-ds_{23}}{2m_B}.
\end{aligned}$$

El punto importante de toda esta discusión es que la delta no solamente nos reduce el número de integrales a realizar, sino que nos dice también la región del plano $s_{13} - s_{23}$ en la que debemos realizar la integral doble. Si hubiésemos decidido mantener otras variables a integrar, también tendríamos que tener en cuenta este hecho. En el caso de $s_{13} - s_{23}$ la región es:

$$(s_{ij})_{\min}^{\max} = \frac{1}{4s_{ik}} \left\{ (m_B^2 + m_i^2 - m_j^2 - m_k^2)^2 - \left[\lambda^{\frac{1}{2}}(m_B^2, s_{ik}, m_j) \mp \lambda^{\frac{1}{2}}(m_i^2, m_k, s_{ik}) \right]^2 \right\}. \quad (C.6)$$

en donde la función $\lambda(a, b, c)$ se define en el Apéndice D (D.3).

En el caso en el que consideramos nulas las masas de los leptones finales, el resultado se simplifica notablemente:

$$\begin{aligned}
(m_B - m_b)^2 &\geq s_{23} \geq 0, \\
m_B^2 &\geq s_{13} \geq m_b^2,
\end{aligned} \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned}
m_B^2 &\geq s_{12} \geq m_b^2, \\
s_{12} + s_{13} + s_{23} &= m_B^2 + m_b^2,
\end{aligned} \quad (C.8)$$

$$E_b = \frac{m_B^2 + m_b^2 - s_{23}}{2m_B}, \quad (E_b)_{\text{máx}} = \frac{m_B^2 + m_b^2}{2m_B}, \quad (E_b)_{\text{mín}} = m_b, \quad (\text{C.9})$$

$$E_e = |\vec{p}_e| = \frac{m_B^2 - s_{13}}{2m_B}, \quad (E_e)_{\text{máx}} = \frac{m_B^2 - m_b^2}{2m_B}, \quad (E_e)_{\text{mín}} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$E_\nu = |\vec{p}_\nu| = \frac{m_B^2 - s_{12}}{2m_B}, \quad (E_\nu)_{\text{máx}} = \frac{m_B^2 - m_b^2}{2m_B}, \quad (E_\nu)_{\text{mín}} = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$s_{12}^{\text{máx}} = (m_B^2 + m_b^2) - s_{13}, \quad s_{12}^{\text{mín}} = \frac{m_B^2 m_b^2}{s_{13}}. \quad (\text{C.12})$$

La forma del espacio fásico es la que se muestra en la Fig C.1

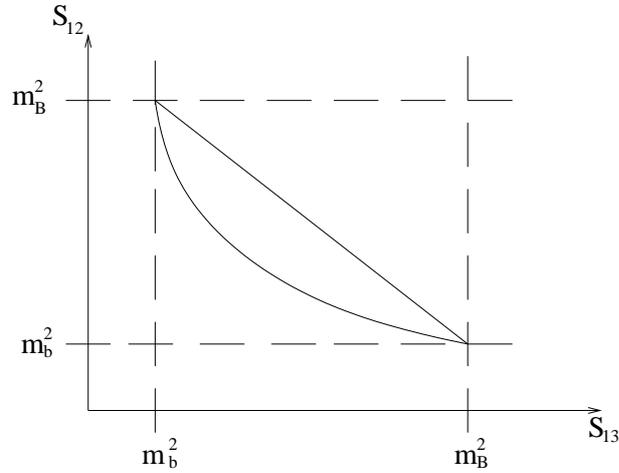


Figura C.1: Forma del Diagrama de Dalitz.

Antes de seguir con diferentes elecciones de variables para el espacio fásico discutiremos cómo transformar la integral. Si queremos realizar una expansión del resultado de la integral, es conveniente realizar la expansión antes de integrar, ya que en caso contrario incluso es posible que la integral no sea analítica. Muchas veces el parámetro de expansión no aparece solamente en el integrando, sino también en los límites de integración, así que hay que hacer una transformación de la integral para que esta dependencia desaparezca de los límites de la integral:

$$\int_a^b dx f(x) = (b-a) \int_0^1 d\epsilon_x f(a + (b-a)x). \quad (\text{C.13})$$

En nuestro caso esto se reduce a realizar los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned} s_{13} &= m_b^2 + \epsilon_{13}(m_B^2 - m_b^2), \\ s_{12} &= \frac{m_b^2 m_B^2}{s_{13}} + \epsilon_{12} \left(m_B^2 + m_b^2 - s_{13} - \frac{m_b^2 m_B^2}{s_{13}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Pasemos ahora a escribir el espacio fásico en unas variables adecuadas para el cálculo de la correlación electrón–neutrino. Estas variables son la energía del electrón

y el coseno del ángulo que forman entre ellos el neutrino y el electrón:

$$\begin{aligned} dQ_3 &= \frac{1}{128\pi^5} \frac{E_e E_\nu^2}{m_B^2 - 2m_B \left(\frac{m_B}{2} - E_e\right)} dE_e d\Omega_e d\Omega_\nu \quad (C.15) \\ &= \frac{1}{64\pi^3} \frac{E_e [m_b^2 + m_B(m_B - 2E_e)]^2}{[m_B^2 - 2m_B \left(\frac{m_B}{2} - E_e\right)] [2E_e(1 - \cos\theta) - 2m_B]^2} dE_e d\cos\theta, \end{aligned}$$

lo cual se ha obtenido de una manera directa, del mismo modo que se obtuvo en el caso de los invariantes. La gran pregunta es cómo calculamos ahora el equivalente al Diagrama de Dalitz. De hecho, podríamos preguntarnos con mayor generalidad ¿existe alguna manera estándar y directa de obtener la región del espacio fásico en función de cualesquiera dos variables? La respuesta afortunadamente es que sí. Definamos en primer lugar el determinante de Cayley [43]:

$$G(x, y, z, u, v, w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & v & x & z \\ 1 & v & 0 & u & y \\ 1 & x & u & 0 & w \\ 1 & z & y & w & 0 \end{vmatrix}. \quad (C.16)$$

Entonces, el espacio fásico permitido cumple que:

$$G(s_{23}, s_{13}, m_B^2, m_2^2, m_1^2, m_3^2) \leq 0. \quad (C.17)$$

Expresando s_{13} y s_{23} en términos de las variables adecuadas (cosa que siempre se puede hacer), obtenemos el resultado deseado.

En nuestro caso particular el resultado es muy sencillo, ya que es una región rectangular, como se puede observar en la Fig C.2.

Ahora ya podemos usar la fórmula (C.13) para poder hacer la expansión antes de integrar, de una forma directa.

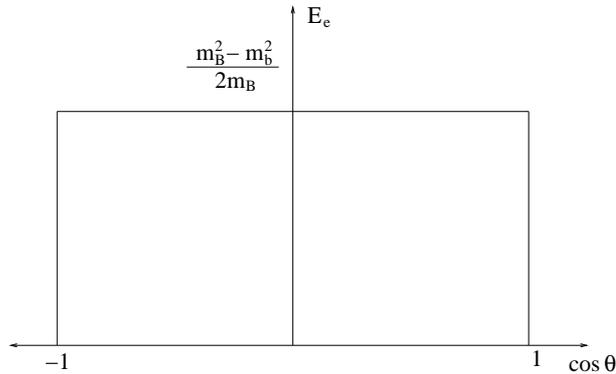


Figura C.2: Forma del nuevo Diagrama de Dalitz.

Apéndice D: Integración de estructuras de Lorentz

En este Apéndice se proporcionan algunas integrales muy útiles no solamente para los cálculos realizados en este trabajo, sino también para otras muchas aplicaciones. Antes de empezar aclaremos un poco la notación: $E_i = E_i(\vec{p}_i) = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m_i^2}$. Nótese también que tanto la $\delta^{(4)}(q - p_1 - p_2)$ como la estructura diferencial $\frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}$ son invariantes Lorentz, y esto es esencial para el cálculo de las integrales. Con todo esto, tenemos que:

$$\mathcal{I}^{\mu\nu} = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} p_1^\mu p_1^\nu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) = A(q^2) q^2 g^{\mu\nu} + B(q^2) q^\mu q^\nu. \quad (\text{D.1})$$

Esto tiene que ser así, ya que, la integral de la derecha se transforma como un 2-tensor covariante Lorentz (cosa que se puede comprobar fácilmente), luego la parte de la derecha se tiene que poder escribir en términos de 2-tensores covariantes Lorentz. Tras la integración solamente sobrevive el tetra-vector q , con lo que las únicas estructuras algebraicas que nos quedan son las que acompañan a A y a B . A y B solamente pueden depender de q^2 por covariancia. Contrayendo ambas partes de la integral con $g^{\mu\nu}$ (lo que es equivalente a calcular la traza) y con $q^\mu q^\nu$, y eligiendo un sistema de referencia concreto⁶, se pueden calcular los resultados. Siendo $p_i^2 = m_i^2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\mu\nu} = & \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{24\pi q^4} \left\{ - [m_1^4 + (m_2^2 - q^2)^2 - 2m_1^2(m_2^2 + q^2)] \frac{g^{\mu\nu}}{4} \right. \\ & \left. + \left[\frac{(m_1^2 - m_2^2 + q^2)^2}{q^2} - m_1^2 \right] q^\mu q^\nu \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

En donde

$$\lambda(a, b, c) = (a + b - c)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc. \quad (\text{D.3})$$

⁶El sistema de referencia más conveniente es el del centro de masas de q , esto es, aquel en el que $q^\mu = (q^0, \vec{0}) = (\sqrt{q^2}, \vec{0})$, ya que q es un vector temporal.

es totalmente simétrica en los tres argumentos. Es interesante discutir sus casos particulares, ya que serán útiles para posteriores discusiones:

$$\begin{aligned}\lambda(a, 0, 0) &= a^2, \\ \lambda(a, b, 0) &= (a - b)^2, \\ \lambda(a, b, b) &= a^2 - 4ab = a^2 \left(1 - 4\frac{b}{a}\right).\end{aligned}$$

Particularicemos la solución para diversos casos de interés:

$$\mathcal{I}^{\mu\nu} = \begin{cases} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow \frac{1}{24\pi} \left(-\frac{q^2}{4} g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu \right) \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow \frac{(q^2 - m^2)^3}{24\pi q^4} \left(-\frac{q^2}{4} g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu \right) \\ m_2 = 0, m_1 = m & \rightarrow \frac{q^2 - m^2}{24\pi q^4} \left[-(q^2 - m^2)^2 \frac{g^{\mu\nu}}{4} + \frac{(q^2 + m^2)^2}{q^2} q^\mu q^\nu \right] \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{24\pi q^2} \left[(4m^2 - q^2) \frac{q^2 g^{\mu\nu}}{4} + (q^2 - m^2) q^\mu q^\nu \right] \end{cases}, \quad (\text{D.4})$$

Del mismo modo se pueden calcular otras integrales:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{\mu\nu\alpha} &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} p_1^\mu p_1^\nu p_1^\alpha (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \\ &= \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)(q^2 + m_1^2 - m_2^2)}{16\pi q^6} \left\{ [q^4 - 2m_2^2 q^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2] \frac{q^\mu q^\nu q^\alpha}{2q^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left[m_1^2 q^2 - \frac{1}{4}(q^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 \right] (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\alpha\mu} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) \right\}, \quad (\text{D.5})\end{aligned}$$

y sus casos particulares:

$$\mathcal{I}^{\mu\nu\alpha} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{32\pi} \left[q^\mu q^\nu q^\alpha - \frac{q^2}{6} (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\alpha\mu} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) \right] \\ m_1 = m, m_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{q^4 - m^4}{32\pi q^6} \left[(q^4 + m^4) \frac{q^\mu q^\nu q^\alpha}{q^2} \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{6} (q^2 - m^2)^2 (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\alpha\mu} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) \right] \\ m_2 = m, m_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{(q^2 - m^2)^2}{16\pi q^6} \left[\frac{q^\mu q^\nu q^\alpha}{q^2} - \frac{1}{6} (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\alpha\mu} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) \right] \\ m_1 = m_2 = m \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{16\pi} \left\{ \left(1 - \frac{2m^2}{q^2} q^\mu q^\nu q^\alpha \right) + \frac{1}{3} \left[\frac{q^2}{4} - m^2 \right] \right\} \end{array} \right. , \quad (D.6)$$

Nótese que, en este caso, además de exigir covariancia Lorentz, también se ha exigido que el tensor sea completamente simétrico en los tres índices, de modo que las estructuras Lorentz que aparecen a la derecha de la igualdad son muchas menos de las que serían en el caso de un tensor sin ningún tipo de simetría. En el caso de la integración de dos momentos, también podríamos haber tenido en cuenta la simetría del tensor, pero en ese caso era completamente innecesario, ya que cualquier tensor que pudiésemos construir con dos índices y un solo momento q , es siempre simétrico.

Y por último, la integral más compleja:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{\mu\nu\alpha\beta} &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} p_1^\mu p_1^\nu p_1^\alpha p_1^\beta (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) \\ &= A(q^2) q^\mu q^\nu q^\alpha q^\beta \\ &+ B(q^2) q^2 (q^\mu q^\nu g^{\alpha\beta} + q^\beta q^\mu g^{\nu\alpha} + q^\alpha q^\beta g^{\mu\nu} + q^\nu q^\alpha g^{\beta\mu} + q^\mu q^\alpha g^{\nu\beta} + q^\nu q^\beta g^{\mu\alpha}) \\ &+ C(q^2) q^4 (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}). \end{aligned} \quad (D.7)$$

En este caso, el uso de la simetría de los índices es esencial para construir los tensores de cuatro índices con un solo momento, ya que existen un número enorme de tensores con simetría arbitraria y cuatro índices que se pueden construir con un solo momento q la métrica y el símbolo de Levi-Civita ϵ .

Los coeficientes invariantes son:

$$A(q^2) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{40\pi q^{10}} [m_1^8 + (q^2 - 4m_2^2)m_1^6 + (6m_2^4 - 6q^2m_2^2 + q^4)m_1^4 - (m_2^2 - q^2)^2(4m_2^2 - q^2)m_1^2 + (m_2^2 - q^2)^4], \quad (\text{D.8})$$

$$B(q^2) = -\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{960\pi q^{10}} [(m_1 - m_2)^2 - q^2] [(m_1 + m_2)^2 - q^2] [3m_1^4 + (4q^2 - 6m_2^2)m_1^2 + 3(m_2^2 - q^2)^2], \quad (\text{D.9})$$

$$C(q^2) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{1920\pi q^{10}} [m_1^4 - 2(m_2^2 + q^2)m_1^2 + (m_2^2 - q^2)^2]^2, \quad (\text{D.10})$$

y sus casos particulares:

$$A(q^2) = \begin{cases} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow \frac{1}{40\pi} \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow \frac{(m_2^2 - q^2)^5}{40\pi q^{10}} \\ m_2 = m, m_1 = 0 & \rightarrow \frac{q^2 - m^2}{40\pi q^{10}} (q^8 + q^6 m^2 + q^4 m^4 + q^2 m^6 + m^2) \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{80\pi q^8} (m^4 - 3q^2 m^2 + q^4) \end{cases}, \quad (\text{D.11})$$

$$B(q^2) = \begin{cases} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow -\frac{1}{960\pi} \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow -\frac{(m_2^2 - q^2)^5}{960\pi q^{10}} \\ m_2 = m, m_1 = 0 & \rightarrow -\frac{q^2 - m^2}{960\pi q^{10}} (m_1^2 - q^2)^2 (3m_1^4 + 4q^2 m_1^2 + 3q^4) \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{960\pi q^8} (8m^4 - 14m^2 q^2 + 3q^4) \end{cases}, \quad (\text{D.12})$$

$$C(q^2) = \begin{cases} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow \frac{1}{1920\pi} \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow \frac{(m_2^2 - q^2)^5}{1920\pi q^{10}} \\ m_2 = m, m_1 = 0 & \rightarrow \frac{q^2 - m^2}{1920\pi q^{10}} (m_1^2 - q^2)^4 \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{1920\pi q^8} (q^2 - 4m^2)^2 \end{cases}, \quad (\text{D.13})$$

Uno se podría preguntar si lo que hemos obtenido es el caso más general que nos podemos encontrar, ya que en todas las integrales aparece solamente p_1 y nunca p_2 . La respuesta es que sí, es completamente general. Esto es así debido a la delta de conservación: si pusiésemos un p_2 , mediante la delta, se podría escribir como $q - p_1$, la q es una constante, luego el problema queda reducido a la integral con p_1 más integrales con menos momentos a integrar, pero todos ellos p_1 .

Por completitud, incluiremos los dos casos más sencillos:

- Integral con un solo momento

$$\mathcal{I}^\mu = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} p_1^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{16\pi q^4} (q^2 + m_1^2 - m_2^2) q^\mu, \quad (\text{D.14})$$

y sus casos particulares:

$$\mathcal{I}^\mu = \begin{cases} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow \frac{1}{16\pi} q^\mu \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow \frac{(q^2 - m^2)^2}{16\pi q^4} q^\mu \\ m_2 = m, m_1 = 0 & \rightarrow \frac{q^4 - m^4}{16\pi q^4} q^\mu \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{16\pi} q^\mu \end{cases}, \quad (\text{D.15})$$

- La integral de espacio fásico total de dos partículas:

$$Q_3 = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(q^2, m_1^2, m_2^2)}{8\pi q^2}, \quad (\text{D.16})$$

y sus casos particulares:

$$Q_3 = \left\{ \begin{array}{ll} m_1 = m_2 = 0 & \rightarrow \frac{1}{8\pi} \\ m_1 = 0, m_2 = m & \rightarrow \frac{q^2 - m^2}{8\pi q^2} \\ m_2 = m, m_1 = 0 & \rightarrow \frac{q^2 - m^2}{8\pi q^2} \\ m_1 = m_2 = m & \rightarrow \frac{\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{q^2}}}{8\pi} \end{array} \right. , \quad (\text{D.17})$$

Apéndice E: Fórmulas útiles para trabajar con espinores

En este Apéndice se van a discutir algunas fórmulas que nos serán de gran ayuda para muchos de los cálculos realizados en este trabajo. Cuando es necesario tratar con haces polarizados o bien se quiere medir también la polarización de las partículas finales, las técnicas ordinarias de sumar sobre espines finales y promediar sobre los iniciales no se pueden aplicar, de modo que el cálculo no se reduce a unas trazas, al menos no directamente.

Antes de empezar con cosas técnicas es importante indicar que aunque experimentalmente se mide el espín en el sistema de referencia de la partícula en reposo, a la hora de hacer los cálculos es mejor tratar con helicidades. Por otro lado la conexión de éstas con el espín es directa, ya que la helicidad se reduce al espín en cuanto ponemos la partícula en reposo, pero eso sí, es importante remarcar que la dirección de la polarización coincide con la dirección del momento que tenía la partícula. Visto en el sentido inverso la helicidad se obtiene aplicando un *boost* a la partícula en reposo, en la dirección que indica su polarización.

Típicamente, una amplitud puede tener la forma:

$$\mathcal{A} = \bar{u}(p, \lambda) \Gamma u(p', \lambda'), \quad (\text{E.1})$$

en donde Γ es una matriz cualquiera en el espacio de espinores de Dirac. Habitualmente se calcula su módulo al cuadrado, pero con las técnicas que se discuten a continuación seremos capaces de calcular directamente esta amplitud, usando un método totalmente covariante y con técnicas de trazas. Entonces (E.1) se puede reescribir:

$$\mathcal{A} = \text{Tr} [u(p', \lambda') \bar{u}(p, \lambda) \Gamma], \quad (\text{E.2})$$

Así pues, nos vamos a concentrar en cómo calcular $u(p', \lambda') \bar{u}(p, \lambda)$ mediante técnicas covariantes.

En primer lugar partimos de la identidad [44, 46]:

$$u(p, \lambda') \bar{u}(p, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) (\delta_{\lambda\lambda'} + \gamma_5 \not{\eta}^i \sigma_{\lambda\lambda'}^i), \quad (\text{E.3})$$

donde σ^i son las matrices de Pauli, y en la expresión se suma sobre $i = 1, 2, 3$. Las η^i están definidas de modo que cumplan:

$$\begin{aligned} \eta_i \cdot \eta_j &= -\delta_{ij}, \\ \eta_i \cdot p &= 0. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Esto es, son los vectores de espín correspondientes al tetra-momento p . Para

$$\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (\text{E.5})$$

una representación estándar de η^i es:

$$\begin{aligned} \eta_1^\mu &= (0; \cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \\ \eta_2^\mu &= (0; -\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \eta_3^\mu &= \left(\frac{|\vec{p}|}{m}; \frac{E}{m} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

en donde $\eta_k^\mu = (0, \delta_k^j)$ cuando $|\vec{p}| = 0$. Nótese que si en la fórmula (E.3) ponemos $\lambda = \lambda'$ obtenemos:

$$u(p, \lambda) \bar{u}(p, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) (1 + \lambda \gamma_5 \not{\eta}_3), \quad (\text{E.7})$$

en donde podemos identificar η_3^μ como la dirección del tetra-vector de polarización de la partícula S^μ , ya que la parte espacial es paralela al tri-momento de la partícula, $\eta_3 \cdot p = 0$ y $\eta_3^2 = -1$.

La fórmula (E.3) solamente es válida si ambos espinores tienen el mismo momento. Vamos a obtener una fórmula más general, para el caso de momentos diferentes. En general un espinor $u(p', \lambda')$ se puede desarrollar en términos de $u(p, \lambda)$ del siguiente modo:

$$u(p', \lambda') = \mathcal{N} \sum_{\lambda} C_{\lambda\lambda'} (\not{p}' + m') u(p, \lambda), \quad (\text{E.8})$$

donde $p'^2 = m'^2$. Nótese que el índice de helicidad λ está definido respecto a la dirección de \vec{p} , mientras que λ' respecto a \vec{p}' , es decir, los sistemas de referencia en los que están definidos estas helicidades están rotados uno respecto al otro. Para obtener la ecuación (E.8) sólo hay que fijarse en que los espinores deben cumplir las siguientes propiedades:

$$(\not{p}' - m') u(p', \lambda') = 0, \quad (\text{E.9})$$

$$\bar{u}(p', \lambda) u(p', \lambda') = 2m', \quad (\text{E.10})$$

de la primera condición (E.9) obtenemos que

$$u(p', \lambda') = (\not{p}' + m') \tilde{u}(p', \lambda'), \quad (\text{E.11})$$

en donde $\tilde{u}(p, \lambda)$ es un vector fila de cuatro componentes tal que cumpla la segunda condición (E.10) y la propiedad que defina los estados propios de helicidad. Identificando obtenemos:

$$\tilde{u}(p', \lambda') = \mathcal{N} \sum_{\lambda} C_{\lambda\lambda'} u(p, \lambda). \quad (\text{E.12})$$

De una manera directa se obtiene [45]:

$$C_{\lambda\lambda'} = \mathcal{N} \bar{u}(p, \lambda) u(p', \lambda'), \quad (\text{E.13})$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2(p \cdot p' + mm')}} , \quad (\text{E.14})$$

y además la matriz $C_{\lambda\lambda'}$ es unitaria en helicidad. Con esto obtenemos:

$$u(p', \lambda') \bar{u}(p, \lambda) = \frac{\mathcal{N}}{2} \sum_{\lambda''} C_{\lambda'\lambda''} (\not{p}' + m') (\not{p} + m) (\delta_{\lambda\lambda''} + \gamma_5 \eta^i \sigma_{\lambda\lambda''}^i). \quad (\text{E.15})$$

Las expresiones concretas para $C_{\lambda\lambda'}$ son:

$$\begin{aligned} C_{++} &= \left(\frac{EE' - |\vec{p}||\vec{p}'| + mm'}{p \cdot p' + mm'} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{i(\phi' - \phi)} \right), \\ C_{-+} &= \left(\frac{EE' + |\vec{p}||\vec{p}'| + mm'}{p \cdot p' + mm'} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta'}{2} e^{-i\phi'} - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta'}{2} e^{-i\phi} \right), \\ C_{--} &= C_{++}^*, \\ C_{-+} &= -C_{+-}^*. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

En el caso en el que nos encontremos en el sistema de referencia centro de masas con $\vec{p} = -\vec{p}'$ las expresiones de $C_{\lambda\lambda'}$ se simplifican:

$$\begin{aligned} C_{\pm\pm} &= 0, \\ C_{\pm\mp} &= \mp e^{\pm i\phi}. \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Y si además de esto se cumple que $m = m'$ entonces:

$$\begin{aligned} u(p', \lambda) \bar{u}(p, \lambda) &= -\lambda \frac{1}{2} \gamma_0 (\not{p}' + m) \gamma_5 \eta^\lambda e^{i\lambda\phi}, \\ u(p', \lambda) \bar{u}(p, -\lambda) &= -\lambda \frac{1}{2} \gamma_0 (\not{p}' + m) (1 - \lambda \gamma_5 \eta^3) e^{i\lambda\phi}, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

donde

$$\eta^\lambda = \eta_1 - i\lambda\eta_2, \quad (\text{E.19})$$

y para finalizar, en el caso de espinores sin masa obtenemos:

$$u(p', \lambda') \bar{u}(p, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2p \cdot p'}} C_{\lambda\lambda'} \not{p}' \not{p} (1 - \lambda \gamma_5) & \text{for } \lambda' = -\lambda, \\ \frac{1}{2\sqrt{2p \cdot p'}} C_{\lambda'\lambda} \not{p}' \not{p} \gamma_5 \eta^\lambda & \text{for } \lambda' = \lambda. \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

Por completitud incluiremos las siguientes identidades:

$$v(p, \lambda) = -\lambda \gamma_5 u(p, -\lambda) \quad , \quad u(p, \lambda) = \lambda \gamma_5 v(p, -\lambda), \quad (\text{E.21})$$

$$\gamma_5 \not{\eta}_3 u(p, \lambda) = \lambda u(p, \lambda) \quad , \quad \gamma_5 \not{\eta}_3 v(p, \lambda) = \lambda v(p, \lambda), \quad (\text{E.22})$$

$$\not{p} u(p, \lambda) = m u(p, \lambda) \quad , \quad \not{p} v(p, \lambda) = -m v(p, \lambda), \quad (\text{E.23})$$

$$u(p, \lambda) \bar{u}(p, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} - m) (1 + \lambda \gamma_5 \not{\eta}_3), \quad (\text{E.24})$$

$$v(p, \lambda') \bar{v}(p, \lambda) = \frac{1}{2} (\not{p} - m) (\delta_{\lambda\lambda'} + \gamma_5 \eta^i \sigma_{\lambda\lambda'}^i), \quad (\text{E.25})$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma = g_{\mu\nu} \gamma_\sigma + g_{\sigma\mu} \gamma_\nu + g_{\nu\sigma} \gamma_\mu + i \gamma_5 \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \gamma^\rho. \quad (\text{E.26})$$

Bibliografía

- [1] A. Pich “The standard model of electroweak interactions”, [arXiv:hep-ph/0502010].
- [2] N. Cabibbo, E. C. Swallow and R. Winston, “Semileptonic hyperon decays”, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53** (2003) 39 [arXiv:hep-ph/0307298].
- [3] T. Alexopoulos *et al.* [KTeV Collaboration], “A determination of the CKM parameter $|V(us)|$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 181802 [arXiv:hep-ex/0406001].
- [4] A. Sher *et al.*, “New, high statistics measurement of the $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ ($K(e3)^+$) branching ratio”, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 261802 [arXiv:hep-ex/0305042].
- [5] M. Battaglia *et al.*, “The CKM matrix and the unitarity triangle”, arXiv:hep-ph/0304132.
- [6] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab, “Determination of $m(s)$ and $|V(us)|$ from hadronic tau decays,” *JHEP* **0301** (2003) 060 [arXiv:hep-ph/0212230].
- [7] W. J. Marciano, “Precise determination of $|V(us)|$ from lattice calculations of pseudoscalar decay constants”, arXiv:hep-ph/0402299.
- [8] Ademollo M, Gatto R. “Nonrenormalization Theorem For The Strangeness Violating Vector Currents”, *Phys. Rev. Lett.* 13:264 (1964).
- [9] G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory For Strong Interactions”, *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.
- [10] G. 't Hooft, “A Two-Dimensional Model For Mesons”, *Nucl. Phys. B* **75** (1974) 461.
- [11] A. Pich, “Aspects of quantum chromodynamics”, arXiv:hep-ph/0001118.
- [12] A. V. Manohar, “Large N QCD”, arXiv:hep-ph/9802419.
- [13] A. Pich, “Colourless mesons in a polychromatic world”, arXiv:hep-ph/0205030.
- [14] E. Witten, “Baryons In The $1/N$ Expansion”, *Nucl. Phys. B* **160** (1979) 57.

-
- [15] R. F. Dashen and A. V. Manohar, “Baryon - pion couplings from large $N(c)$ QCD,” Phys. Lett. B **315** (1993) 425 [arXiv:hep-ph/9307241].
- [16] J. L. Gervais and B. Sakita, “Large- N Baryonic Soliton And Quarks”, Phys. Rev. D **30** (1984) 1795.
- [17] E. Jenkins, “Large- N_C baryons”, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **48** (1998) 81 [arXiv:hep-ph/9803349].
- [18] R. F. Dashen, E. Jenkins and A. V. Manohar, “Spin flavor structure of large N_C baryons”, Phys. Rev. D **51** (1995) 3697 [arXiv:hep-ph/9411234].
- [19] E. Jenkins, “QCD baryons in the $1/N_C$ expansion”, arXiv:hep-ph/0111338.
- [20] E. Jenkins, “Chiral Lagrangian for Baryons in the $1/N_C$ Expansion”, Phys. Rev. D **53** (1996) 2625 [arXiv:hep-ph/9509433].
- [21] J. Dai, R. F. Dashen, E. Jenkins and A. V. Manohar, “Flavor symmetry breaking in the $1/N(c)$ expansion”, Phys. Rev. D **53** (1996) 273 [arXiv:hep-ph/9506273].
- [22] R. Flores-Mendieta, E. Jenkins and A. V. Manohar, “SU(3) symmetry breaking in hyperon semileptonic decays”, Phys. Rev. D **58** (1998) 094028 [arXiv:hep-ph/9805416].
- [23] R. Flores-Mendieta, “ V_{us} from hyperon semileptonic decays”, arXiv:hep-ph/0410171.
- [24] E. Jenkins and R. F. Lebed, “Baryon mass splittings in the $1/N_C$ expansion”, Phys. Rev. D **52** (1995) 282 [arXiv:hep-ph/9502227].
- [25] E. Jenkins and A. V. Manohar, “Baryon magnetic moments in the $1/N_C$ expansion”, Phys. Lett. B **335** (1994) 452 [arXiv:hep-ph/9405431].
- [26] A. Pich, “Effective field theory”, arXiv:hep-ph/9806303.
- [27] A. Pich, “Flavourdynamics”, arXiv:hep-ph/9601202.
- [28] A. Pich, “The Standard model of electroweak interactions”, arXiv:hep-ph/9412274.
- [29] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry And Leptonic Decays,” Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.
- [30] I. Bender, V. Linke, H.J. Rothe, “Leptonic Decays of Baryons”, Z. Phys. **212** (1968) 190-212.
- [31] V. Linke, “Leptonic Decays Of Polarized Baryons”, Nucl. Phys. B **12** (1969) 669.

- [32] J. M. Gaillard and G. Sauvage, “Hyperon Beta Decays,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **34** (1984) 351.
- [33] A. Garcia, P. Kielanowski “The Beta Decay Of Hyperons”, *Lecture Notes in Physics Vol. 222* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [34] J. F. Donoghue, B. R. Holstein and S. W. Klimt, “K-M Angles And SU(3) Breaking In Hyperon Beta Decay”, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 934.
- [35] F. Schlumpf, “Beta decay of hyperons in a relativistic quark model”, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2262 [arXiv:hep-ph/9409272].
- [36] A. Krause, “Baryon Matrix Elements Of The Vector Current In Chiral Perturbation Theory,” *Helv. Phys. Acta* **63** (1990) 3.
- [37] J. Anderson and M. A. Luty, “Chiral corrections to hyperon vector form-factors”, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 4975 [arXiv:hep-ph/9301219].
- [38] S. Fubini and G. Furlan *Physics* 1:229 (1965).
- [39] K. Toth, K. Szego and T. Margaritisz, “Radiative Corrections For Semileptonic Decays Of Hyperons: The ‘Model Independent’ Part”, *Phys. Rev. D* **33** (1986) 3306.
- [40] R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, “Feyn Calc: Computer Algebraic Calculation Of Feynman Amplitudes”, *Comput. Phys. Commun.* **64** (1991) 345.
[http://www.feyncalc.org]
- [41] S. Wolfram *et al.*, “Mathematica”, Version Number 4.1.0.0, © 1988-2000 Wolfram Research, Inc. [http://www.wolfram.com]
- [42] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Sirlin, “Precision measurements and CKM unitarity”, arXiv:hep-ph/0406324.
- [43] E. Byckling, K. Kajantie “Particle Kinematics” John Wiley and Sons Ltd (April 30, 1973).
- [44] C. Bouchiat and L. Michel, *Nucl. Phys.* **5**, 416 (1958).
- [45] R. Vega and J. Wudka, “A Covariant Method for Calculating Helicity Amplitudes”, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 5286 [Erratum-ibid. *D* **56** (1997) 6037] [arXiv:hep-ph/9511318].
- [46] H. E. Haber, “Spin formalism and applications to new physics searches”, arXiv:hep-ph/9405376.
- [47] D. Binosi and L. Theussl, “JaxoDraw: A Graphical User Interface For Drawing Feynman Diagrams”, arXiv:hep-ph/0309015.

Agradecimientos

Quiero agradecer la ayuda prestada por los miembros de mi grupo, ya que siempre han tenido tiempo y ganas de echar una mano a un estudiante inexperto. Quiero agradecer a Jorge Portolés su infinita disponibilidad y paciencia, a Pedro Ruiz-Femenía por dejar cualquier cosa que estuviese haciendo para escuchar mis dudas (y también por su habilidad con el escaner) y a Diego Aristizábal y a Ignaci Rosell por sus ayudas con el lenguaje \LaTeX . Y por supuesto a mi director, Antonio Pich, quien pese a tener una agenda muy apretada, ha sabido encontrar huecos en ella cuando ha sido necesario.

A los profesores Arcadi Santamaría y José Bernabeu, agradecerles que me echaran una mano cuando estaba perdido.

También quiero dar las gracias a Oscar Maciá por ayudarme a entender las álgebras contraídas y la teoría de las representaciones inducidas, aunque eso sí, sin mucho éxito.

Para la realización de los diagramas de Feynman he utilizado el programa Jaxo-Draw [47], los creadores del cual son miembros del Departamento de Física Teòrica de la Universitat de València.