TESIS DOCTORAL

## EXTENSIÓN DE CHPT A ENERGÍAS SUPERIORES

FRANCISCO GUERRERO CORTINA



UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Antonio Pich Zardoya, Catedrático del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valencia

**CERTIFICA:** Que la presente Memoria "**Extensión de CHPT a energías superiores**", ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Valencia por **Francisco Guerrero Cortina**, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Física.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presenta ante la Facultad de Física de la Universidad de Valencia la referida Tesis, firmando el presente certificado en

Burjassot, a 21 de Octubre de 1998

Fdo. Antonio Pich Zardoya.

## Índice General

## 1 INTRODUCCIÓN

<b>2</b>	LA	GRANGIANOS QUIRALES	13
	2.1	Simetrías de QCD	14
	2.2	ChPT	16
		$2.2.1$ Orden $n^2$	18
		2.2.1 Orden $p^4$	10
	<u> </u>		-10 -00
	2.0	$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \end{array} \\ \end{array} $	22
		2.3.1 Contribución a las constantes de $\mathcal{L}_4$	24
		2.3.2 Campo vectorial	26
3	EX	PANSIÓN EN $1/N_c$	29
	3.1	QCD en $1/N_c$	31
	3.2	Mesones en $1/N_{c}$	33
	3.3	Fenomenología	36
	0.0 2 4	ChDT	27
	0.4		37
	3.5	Resonancias	39
4	FAG	CTOR DE FORMA DEL PIÓN	41
	4.1	Resultados de los lagrangianos quirales efectivos	43
	4.2	Ecuación de Omnès y su solución	46
	13	Exponenciación	/18
	4.0	$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\$	40 51
		4.5.1 Anchura de la $\rho$	51
		4.3.2 Destasaje	54
	4.4	Comparación con el cálculo en ChPT a orden $p^6$	57
		4.4.1 Término de orden $p^6$ en ChPT	59

 $\mathbf{7}$ 

Ę	4.5 4.6 5 <b>OT</b>	4.4.2       Término de orden $p^6$ en la parametrización exponenciada         4.4.3       Comparación         Resonancias $\rho'$ y $\rho''$ Resumen       Seconda	. 61 . 62 . 66 . 72 <b>75</b>
	5.1	Factor de forma pión-kaón	. 76
		5.1.1 Factor de forma vectorial	. 76
		5.1.2 Factor de forma escalar	. 79
		5.1.3 Anchura de desintegración $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau} \dots$	. 86
	5.2	Factor de forma del kaón	. 90
6	6 AM	<b>IPLITUDES DE SCATTERING</b> $\pi\pi$ y $K\overline{K}$	95
	6.1	Introducción	. 96
	6.2	Método de la Amplitud Inversa (IAM)	. 98
		6.2.1 Caso elástico	. 98
		6.2.2 Canales acoplados $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	. 102
	6.3	Unitarización de las amplitudes $\pi\pi$ y $KK$	. 104
		6.3.1 Amplitud de scattering $\pi\pi \to \pi\pi$	. 105
		6.3.2 Amplitud de scattering $\pi \pi \to K K$	. 107
		6.3.3 Amplitud de scattering $KK \to KK$	. 111
	C 4	6.3.4 Unitarización	. 117
	0.4 6 5	Ajuste y obtención de desiasajes e inelasticidad	. 121
	0.0 6.6	Factores de forma escalar y vectorial del pion	. 129
	0.0		. 104
7	CO	NCLUSIONES	135
I	A Inte	egrales de Feynman	141
I	3 Tec	orema de Watson	145
(	C Sol	ución de la ecuación de Omnès	147
I	O An	chura de la $\rho$	151

6

$\mathbf{E}$	Factor de forma electromagnético del pión	155
$\mathbf{F}$	Relación entre las constantes $\overline{\ell}_i$ y $L^r_i$	161
G	Kaon Polarizabilities in Chiral Perturbation Theory	163
Bibliografía		174

# CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Desde que en 1910 Rutherford descubrió el núcleo atómico en su famoso experimento, los físicos han tratado de desentrañar cuál es la naturaleza de la interacción fuerte, una fuerza de un alcance cortísimo pero de una intensidad extraordinaria.

En los años 50 y 60 los estudios de la interacción fuerte en hadrones obtuvieron importantes resultados basados en el análisis de la estructura de la matriz S empleando técnicas de relaciones de dispersión. Sin embargo, los resultados obtenidos en base a estas técnicas carecían del fundamento teórico que tendría una teoría de las interacciones fuertes basada en primeros principios.

A finales de los 60 el panorama cambió. En los estudios encaminados a encontrar alguna lógica entre los muchos hadrones descubiertos apareció la primera indicación de que los hadrones no eran partículas elementales. La clasificación de los hadrones, el espectro de masas hadrónicas y las interacciones entre hadrones se podían explicar, al menos cualitativamente, si se consideraba que los hadrones estaban constituidos por quarks.

Del mismo modo que Rutherford investigó la estructura interna del átomo bombardeándolo con partículas suficientemente energéticas (partículas  $\alpha$ ), en los años 60 se repitió un experimento análogo para sondear la estructura del protón en SLAC. En esta ocasión el proyectil era una partícula sin estructura (un electrón) acelerada hasta altas energías.

Los resultados del experimento confirmaron que el protón era una partícula compuesta por quarks y que estos se comportaban como partículas libres a las altas energías en que se realizaron las pruebas. Esta característica fue denominada libertad asintótica.

El siguiente paso era encontrar una teoría fundamental para la interacción de los quarks que satisfaciera los resultados empíricos: libertad asintótica a altas energías y confinamiento (en el interior de los hadrones; los quarks no existen libres en la naturaleza) a bajas energías.

En los estudios teóricos se encontró ([1, 2] y otros) que las características requeridas las poseen las teorías de campos gauge no abelianos.

Por otro lado existía la evidencia de que los quarks debían poseer un nuevo número cuántico: el color. Esto resolvía ciertos problemas técnicos, como la construcción de la función de onda de los bariones.

Finalmente la teoría quedó establecida cuando Fritzsch y Gell-Mann identificaron la simetría de color con el grupo gauge sobre el que debía construirse: SU(3), donde el 3 es el número de colores que puede poseer un quark [3]. Esta teoría fue denominada Cromodinámica Cuántica (QCD, en inglés).

Desde entonces, QCD ha superado con éxito varios tests y, actualmente, se considera la teoría fundamental de las interacciones fuertes.

La interacción entre los quarks queda explicada con el intercambio de gluones entre ellos, de manera similar a lo que ocurre en Electrodinámica Cuántica (QED, en inglés) donde los electrones interaccionan entre sí intercambiando fotones.

La analogía termina en el hecho de que, mientras los fotones no interaccionan entre sí, los gluones sí que lo hacen. Es este fenómeno lo que genera la libertad asintótica de los quarks.

De manera cualitativa, las propiedades de confinamiento y libertad asintótica se pueden intuir al ver la evolución de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  (acoplamiento quark-gluón) con la energía involucrada.

QCD es una teoría renormalizable, por lo que es posible, gracias a las ecuaciones del grupo de renormalización obtener la evolución en energía de  $\alpha_s(E)$ . Se observa que  $\alpha_s(E)$  decrece conforme la energía E aumenta. Es decir, cuando E tiende a infinito los quarks quedan libres. Por otro lado, cuando E es pequeña  $\alpha_s(E)$  es muy grande. La teoría deja de ser perturbativa a bajas energías porque la interacción es muy fuerte. Los quarks quedan confinados en hadrones con número cuántico de color nulo.

Esto hace que QCD sea soluble de manera perturbativa a altas energías, pero que, por otro lado, a bajas energías sea imposible estudiar las interacciones de los hadrones en términos de quarks.

En esta tesis estudiaremos algunos aspectos básicos de las interacciones fuertes en el régimen de bajas energías. Obtendremos resultados para amplitudes de scattering, desfasajes, factores de forma, etc. Todo ello restringido al caso de mesones.

Ahora bien, a energías tan bajas (siempre menos de 1 GeV) hemos visto que QCD no es perturbativa y calcular cualquier observable es imposible.

Sin embargo, como veremos en el capítulo 2 existe una solución al problema: construir una teoría efectiva de las interacciones fuertes. Empleando los grados de libertad relevantes a esas energías (los mesones  $\pi$ , K,  $\eta$ ) e imponiendo las mismas simetrías que posee el lagrangiano de QCD se obtiene un lagrangiano efectivo que describe las interacciones fuertes de dichos mesones a bajas energías: es el lagrangiano de la Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT, en inglés). Esta teoría fue desarrollada fundamentalmente en [4, 5, 6, 7] y ha sido aplicada con éxito en numerosos cálculos de observables.

Al ser una teoría efectiva válida sólo por debajo de cierta escala de energía sus resultados están siempre organizados en serie de potencias de momentos y masas sobre dicha escala.

La misma idea utilizada en ChPT se empleó de nuevo en [8, 9] para poder describir energías superiores. Al aumentar la escala de energía el lagrangiano efectivo tiene que incluir los nuevos grados de libertad accesibles: las resonancias. Con esta nueva teoría efectiva el número de procesos a estudiar es mayor ya que ahora contiene también interacciones entre resonancias y los mesones  $\pi$ , K,  $\eta$ .

En el capítulo 3 se introduce otra herramienta útil para la comprensión de las interacciones fuertes: la expansión sobre el número de colores  $N_c$  [10].

En el mundo real el número de colores es igual a tres, sin embargo, desarrollando QCD como una serie de potencias en  $1/N_c$  la interacción fuerte se simplifica. Tanto es así, que esta expansión es la única explicación conocida para muchas de las características observadas experimentalmente de las interacciones fuertes. Algunos de sus resultados nos son de gran utilidad a la hora de estudiar en las interacciones entre mesones qué contribuciones son las más importantes.

Empleando ChPT, el lagrangiano efectivo de las resonancias y la expansión en  $1/N_c$  es posible explicar muchos de los fenómenos de bajas energías. El propósito de esta tesis es utilizar métodos que nos permitan llegar a energías más altas a partir de los lagrangianos quirales efectivos mencionados.

En general los observables calculados por medio de lagrangianos quirales quedan expresados en forma de series de potencias de masas y momentos. Para aumentar el rango de energías válidas es fundamental encontrar métodos matemáticos que nos permitan resumar en buena aproximación las contribuciones a todos los órdenes en potencias de momentos.

Para ello mostraremos en esta tesis la eficacia de dos métodos: la ecuación de Omnès [11, 12] y el Método de la Amplitud Inversa (IAM,

Capítulo 1. Introducción

en inglés) [13, 14, 15].

Ambos métodos se basan en la propiedades de analiticidad y unitariedad que deben satisfacer las amplitudes de scattering. Es decir, hemos vuelto a las técnicas desarrolladas en los años 60 en el estudio de las interacciones fuertes, pero con la ayuda esencial ahora de los lagrangianos efectivos.

En el capítulo 4 hacemos una descripción detallada del factor de forma del pión [16, 17] aplicando el método de la ecuación de Omnès a los resultados de los lagrangianos quirales. Obtenemos una parametrización que describe muy bien los datos experimentales hasta 1.2 GeV y comprobamos que la resumación que este método efectúa de la serie de potencias es una aproximación muy buena [18].

En el capítulo 5 volvemos a aplicar dicho método para describir esta vez los factores de forma pión-kaón y el factor de forma del kaón con buenos resultados.

En el capítulo 6 trabajamos en el otro método, el IAM. En concreto utilizamos una expresión matricial que permite trabajar con canales acoplados. Mostramos la eficacia de este método al ser capaces de describir de manera satisfactoria desfasajes e inelasticidad de las amplitudes de scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$  y  $\pi\pi \to \overline{K}K$ , así como los factores de forma escalar y vectorial del pión [19].

Por último incluimos unos apéndices con algunos aspectos técnicos de los cálculos implicados en los capítulos precedentes, así como una aplicación directa de ChPT en el estudio de la polarizabilidad del kaón mostrado en el Apéndice G [20].

Con los dos métodos de resumación que se describen en este trabajo hemos conseguido extender el rango de energías hasta 1.2 GeV aproximadamente y describir con una base teórica justificada un buen número de observables fundamentales para la comprensión de las interacciones fuertes a bajas energías.

Capítulo 1. Introducción

## CAPÍTULO 2

## LAGRANGIANOS QUIRALES

### 2.1 Simetrías de QCD

La Cromodinámica Cuántica (QCD, siglas en inglés) es la teoría fundamental de las interacciones fuertes. Describe las interacciones entre quarks y gluones. Desde el punto de vista experimental se encuentra bien confirmada cualitativamente: medida del número de colores, libertad asintótica, etc. Cuantitativamente los mejores resultados se han obtenido, como es lógico, en la región de altas energías, donde la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  es pequeña y la teoría se puede resolver perturbativamente. Se han realizado numerosos experimentos con resultados a justados a la predicción teórica.

En la región de bajas energías la teoría no es perturbativa debido a que  $\alpha_s$  es demasiado grande. La interacción es tan fuerte que los quarks y gluones no pueden existir como estados libres. Los estados asintóticamente libres son en este caso los hadrones (mesones y bariones).

La teoría efectiva de QCD en esta región de energías es la Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT). En ella, como veremos más adelante, los grados de libertad involucrados son los mesones del octete pseudoescalar  $(\pi, K, \eta)$ .

Como toda teoría efectiva, ChPT debe poseer las mismas simetrías que el lagrangiano fundamental del que procede, en este caso QCD, sólo que expresadas a partir de diferentes grados de libertad. Veamos por tanto cuáles son las simetrías que presenta QCD.

En el caso más sencillo consideraremos sólo tres sabores de quarks: u,d y s, y con masas nulas. El lagrangiano de QCD restringido a estas condiciones es

$$\mathcal{L}^{0}_{QCD} = -\frac{1}{4} G^{a}_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_{a} + i \overline{q}_L \gamma^{\mu} D_{\mu} q_L + i \overline{q}_R \gamma^{\mu} D_{\mu} q_R \,, \qquad (2.1)$$

donde q es un vector en el espacio de sabores (u,d,s). Su descomposición en helicidades left y right responde a

$$q_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} q, \qquad q_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} q.$$
 (2.2)

#### 2.1 Simetrías de QCD

En primer lugar este lagrangiano es invariante bajo las simetrías discretas siguientes: paridad (P), conjugación de carga (C) e inversión temporal (T).

Pero lo importante es que también presenta invariancia bajo la simetría quiral global en el espacio de sabor

$$U(1)_V \times U(1)_A \times SU(3)_L \times SU(3)_R.$$
(2.3)

La simetría  $U(1)_V$  corresponde al número bariónico y se satisface trivialmente. No ocurre lo mismo con la simetría  $U(1)_A$  que está rota por efectos cuánticos (anomalía).

Finalmente, como simetría relevante nos queda el grupo quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Actúa independientemente sobre cada estado de helicidad de los quarks de la forma

$$q_L \to g_L q_L, \qquad q_R \to g_R q_R, \qquad g_{L,R} \in SU(3)_{L,R}$$
 (2.4)

Por el teorema de Noether las corrientes asociadas

$$J_X^{a\mu} = \bar{q}_X \gamma^{\mu} \frac{\lambda_a}{2} q_X, \qquad (X = L, R; \quad a = 1, ..., 8)$$
(2.5)

son conservadas ( $\lambda_a$  son las matrices de Gell-Mann).

Dadas estas simetrías, si realmente fueran manifiestas en la naturaleza de las interacciones fuertes deberían quedar plasmadas en el propio espectro hadrónico. En particular, los octetes mesónicos de menor masa deberían ser dos: uno escalar y uno pseudoescalar, ambos degenerados en masa. Esto no sucede en la realidad debido a que la simetría quiral está espontáneamente rota.

La simetría que subyace bajo la estructura del espectro hadrónico es SU(3) vectorial. Todos los estados hadrónicos están definidos por las representaciones irreducibles de este grupo. Por tanto, el patrón de la rotura espontánea de la simetría quiral es

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_V$$
. (2.6)

Por el teorema de Goldstone sabemos que existirán ocho bosones pseudoescalares sin masa procedentes de los ocho generadores de  $SU(3)_L \times$   $SU(3)_R/SU(3)_V$  que ya no dejan invariante el vacío. Es sencillo identificarlos como los componentes del octete pseudoescalar más ligero: el octete  $\pi$ , K,  $\eta$ .

Pero aparte de esta rotura espontánea existe también una rotura explícita de la simetría quiral en el lagrangiano de QCD que generará las masas de los pseudoescalares.

Para verlo claramente escribimos el lagrangiano de QCD acoplado a campos clásicos externos

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{QCD}^{0} + \frac{1}{2} \overline{q} \gamma^{\mu} \left(1 - \gamma_{5}\right) \ell_{\mu} q + \frac{1}{2} \overline{q} \gamma^{\mu} \left(1 + \gamma_{5}\right) r_{\mu} q - \overline{q} \left(s - i \gamma_{5} p\right) q.$$

$$(2.7)$$

Siendo  $l_{\mu}$  el campo left,  $r_{\mu}$  el right, s el escalar y p el pseudoescalar. Este lagrangiano es invariante bajo las transformaciones locales siguientes

$$q_L \to g_L q_L, \qquad q_R \to g_R q_R, \qquad (2.8)$$
$$l_\mu \to g_L l_\mu g_L^{\dagger} + i g_L \partial_\mu g_L^{\dagger}, \qquad r_\mu \to g_R r_\mu g_R^{\dagger} + i g_R \partial_\mu g_R^{\dagger} \quad ,$$
$$s + i p \to g_R \left(s + i p\right) g_L^{\dagger} \quad .$$

Esta simetría también deberá ser satisfecha en la teoría efectiva y por tanto será la utilizada a la hora de construir el lagrangiano de ChPT.

Podemos ver en (2.7) como fijando s a un valor dado en el espacio de sabores generamos un término de masa para los quarks. Esto rompe la simetría quiral de manera explícita y, como se verá en la siguiente sección, hace que los bosones de Goldstone (octete pseudoescalar) adquieran masa.

#### 2.2 ChPT

La Teoría Quiral de Perturbaciones (ChPT) es la teoría efectiva de QCD para bajas energías. En ella los grados de libertad son los campos del octete pseudoescalar más ligero, i. e.  $\pi$ , K,  $\eta$ .

#### $2.2 \ \mathrm{ChPT}$

Para un estudio exhaustivo del tema existen abundantes referencias en la literatura, [4, 5, 6, 7, 21, 22] entre otras, donde se muestra el origen del lagrangiano efectivo a partir de las simetrías y también las variadas aplicaciones fenomenológicas que de él se derivan.

Aquí simplemente resumimos algunos aspectos relevantes a la hora de construir el lagrangiano y mostramos la notación que se empleará en el resto del trabajo.

A partir del patrón de la rotura espontánea de la simetría

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_V$$
 (2.9)

conocemos la ley de transformación de los campos pseudoescalares en una representación dada bajo la actuación del grupo quiral.

Escogiendo la representación matricial

$$U(\phi) = u(\phi)^2 = \exp[i\sqrt{2}\Phi/f],$$
 (2.10)

donde

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\lambda} \vec{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_8 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta_8 & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta_8 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

conocemos cómo se transforma bajo  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ :

$$U(\phi) \to g_R U(\phi) g_L^{\dagger} . \tag{2.12}$$

Como ChPT es la teoría efectiva de QCD, su lagrangiano debe satisfacer las mismas simetrías. Es decir, invariancia bajo paridad, conjugación de carga, inversión temporal e invariancia bajo transformaciones locales  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  [ver ecuación (2.8)].

Con estas simetrías podemos construir el lagrangiano invariante más general posible y organizarlo como una serie de potencias en momentos (i.e. en número de derivadas). Debido a la invariancia bajo paridad los términos de la serie corresponderán siempre a números de potencias pares, esto es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \cdots \tag{2.13}$$

### **2.2.1** Orden $p^2$

El primer término de este desarrollo en serie es

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f^2}{4} \left\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U + U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \right\rangle \,. \tag{2.14}$$

Los campos externos  $l_{\mu}, r_{\mu}$  s y p aparecen en las derivadas covariantes (debido a que la simetría es local) y en la matriz  $\chi$ :

$$D_{\mu}U = \partial_{\mu}U - ir_{\mu}U + iU\ell_{\mu}, \qquad D_{\mu}U^{\dagger} = \partial_{\mu}U^{\dagger} + iU^{\dagger}r_{\mu} - i\ell_{\mu}U^{\dagger}, \quad (2.15)$$
$$\chi = 2B_{0}(s + ip),$$

donde  $B_0$  es una constante indeterminada.

Aparecen en  $\mathcal{L}_2$  dos constantes,  $f \neq B_0$ , que no pueden fijarse a partir de la simetría quiral. Sus significados físicos al orden más bajo son sencillos de comprender. f es la constante de desintegración del pión definida por el elemento de matriz de la corriente axial entre el vacío y un pión,

$$\left\langle 0 \left| (J_A^{\mu})^{12} \right| \pi^{\pm} \right\rangle \equiv i\sqrt{2} f_{\pi} p^{\mu} \,. \tag{2.16}$$

A orden  $p^2$  tendremos  $f_{\pi} = f = 93.3$  MeV.

Por otro lado la constante  $B_0$  está relacionada con el condensado de quarks por medio de

$$\left\langle 0 \left| \overline{q}^{j} q^{i} \right| 0 \right\rangle = -f^{2} B_{0} \delta^{ij} \tag{2.17}$$

y tiene su origen en la rotura espontánea de la simetría quiral.

Pero la teoría efectiva (ChPT) además de reproducir la rotura espontánea de la simetría quiral que tiene lugar en QCD también reproduce la rotura explícita que genera las masas del octete de mesones pseudoescalares.

Fijando  $s = \mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$  y p = 0 se rompe explícitamente la simetría quiral en el lagrangiano efectivo y los pseudoescalares  $(\pi, K, \eta)$ adquieren masa. Es más, incluso  $SU(3)_V$  se rompe explícitamente dado que las masas de los quarks no son iguales.

20

 $2.2 \ \mathrm{ChPT}$ 

En el caso particular de conservación de isospín  $(m_u = m_d)$  se obtiene que las masas satisfacen la relación de Gell-Mann-Okubo:

$$3M_{n_8}^2 = 4M_K^2 - M_\pi^2 \,. \tag{2.18}$$

En el resto de este trabajo siempre consideraremos que el isospín es conservado.

El lagrangiano quiral a orden  $p^2$ ,  $\mathcal{L}_2$ , reproduce de manera sencilla los resultados del álgebra de corrientes. Además permite calcular correcciones de orden superior de manera sistemática.

### **2.2.2 Orden** $p^4$

Los diagramas a un loop con vértices de  $\mathcal{L}_2$  dan lugar a contribuciones de orden  $p^4$ . Pero también tendremos contribuciones de orden  $p^4$  provenientes directamente de  $\mathcal{L}_4$ .

Imponiendo las mismas simetrías que en el caso de  $\mathcal{L}_2$  el lagrangiano más general posible de orden  $p^4$  es el siguiente:

$$\mathcal{L}_{4} = L_{1} \left\langle D_{\mu} U^{\dagger} D^{\mu} U \right\rangle^{2} + L_{2} \left\langle D_{\mu} U^{\dagger} D_{\nu} U \right\rangle \left\langle D^{\mu} U^{\dagger} D^{\nu} U \right\rangle$$
$$+ L_{3} \left\langle D_{\mu} U^{\dagger} D^{\mu} U D_{\nu} U^{\dagger} D^{\nu} U \right\rangle + L_{4} \left\langle D_{\mu} U^{\dagger} D^{\mu} U \right\rangle \left\langle U^{\dagger} \chi + \chi^{\dagger} U \right\rangle$$
$$+ L_{5} \left\langle D_{\mu} U^{\dagger} D^{\mu} U \left( U^{\dagger} \chi + \chi^{\dagger} U \right) \right\rangle + L_{6} \left\langle U^{\dagger} \chi + \chi^{\dagger} U \right\rangle^{2} \qquad (2.19)$$
$$+ L_{7} \left\langle U^{\dagger} \chi - \chi^{\dagger} U \right\rangle^{2} + L_{8} \left\langle \chi^{\dagger} U \chi^{\dagger} U + U^{\dagger} \chi U^{\dagger} \chi \right\rangle$$
$$- iL_{9} \left\langle F_{R}^{\mu\nu} D_{\mu} U D_{\nu} U^{\dagger} + F_{L}^{\mu\nu} D_{\mu} U^{\dagger} D_{\nu} U \right\rangle + L_{10} \left\langle U^{\dagger} F_{R}^{\mu\nu} U F_{L\mu\nu} \right\rangle$$
$$+ H_{1} \left\langle F_{R\mu\nu} F_{R}^{\mu\nu} + F_{L\mu\nu} F_{L}^{\mu\nu} \right\rangle + H_{2} \left\langle \chi^{\dagger} \chi \right\rangle ,$$

donde

$$F_{L}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\ell^{\nu} - \partial^{\nu}\ell^{\mu} - i[\ell^{\mu}, \ell^{\nu}], \qquad F_{R}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}r^{\nu} - \partial^{\nu}r^{\mu} - i[r^{\mu}, r^{\nu}].$$
(2.20)

Las constantes  $L_i$  y  $H_i$  son arbitrarias, no fijadas por la simetría, y son los contratérminos que absorben las divergencias producidas por los loops con vértices de  $\mathcal{L}_2$ .

En general, aunque, como toda teoría efectiva, ChPT no es renormalizable (necesita infinitos contratérminos) sí que lo es orden a orden. De este modo, a un orden dado las predicciones siempre serán finitas.

En regularización dimensional (con la notación  $D = 4 + 2\epsilon$ ) las constantes desnudas  $L_i$  se redefinen como

$$L_{i} = L_{i}^{r}(\mu) + \frac{\Gamma_{i}}{32\pi^{2}} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln(4\pi) + \gamma - 1 + \ln\mu^{2}\right), \qquad (2.21)$$

donde los valores de las  $\Gamma_i$  son

$$\Gamma_{1} = \frac{3}{32}, \quad \Gamma_{2} = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_{3} = 0, \quad \Gamma_{4} = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_{5} = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_{6} = \frac{11}{144}, 22$$
  
$$\Gamma_{7} = 0, \quad \Gamma_{8} = \frac{5}{48}, \quad \Gamma_{9} = \frac{1}{4}, \quad \Gamma_{10} = -\frac{1}{4}, \quad \tilde{\Gamma}_{1} = -\frac{1}{8}, \quad \tilde{\Gamma}_{2} = \frac{5}{24}.$$

Una vez renormalizadas, las constantes  $L_i^r(\mu)$  dependen de la escala  $\mu$ . El *running* con dicha escala es

$$L_i^r(\mu_2) = L_i^r(\mu_1) + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \log\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) .$$
 (2.23)

Por supuesto los observables no pueden depender de este parámetro  $\mu$ . Es decir, la dependencia en  $\mu$  de los loops debe cancelar exactamente la de los contratérminos en cualquier cantidad medible.

Los valores de las constantes se han obtenido experimentalmente a partir de diferentes observables. En la Tabla 2.1 se muestran sus valores actuales así como el observable de donde fueron extraídos.

El lagrangiano mostrado aquí para el orden  $p^4$  no contiene el término procedente de la anomalía. Ha sido omitido porque no se necesitará en el desarrollo del trabajo, pero se puede encontrar información sobre él en [23, 24].

Como se puede ver el número de constantes arbitrarias del lagrangiano quiral crece rápidamente con el número de potencias de momento. Para

#### $2.2 \ \mathrm{ChPT}$

i	$L_i^r(M_\rho) \times 10^3$	Fuentes
1	$0.4 \pm 0.3$	$K_{e4}, \pi\pi \to \pi\pi$
2	$1.4 \pm 0.3$	$K_{e4}, \pi\pi \to \pi\pi$
3	$-3.5 \pm 1.1$	$K_{e4}, \pi\pi \to \pi\pi$
4	$-0.3 \pm 0.5$	Regla de Zweig
5	$1.4 \pm 0.5$	$F_K$ : $F_\pi$
6	$-0.2 \pm 0.3$	Regla de Zweig
7	$-0.4 \pm 0.2$	Gell-Mann-Okubo, $L_5, L_8$
8	$0.9 \pm 0.3$	$M_{K^0} - M_{K^+}, L_5, (m_s - \hat{m}) : (m_d - m_u)$
9	$6.9 \pm 0.7$	$\langle r^2 \rangle_V^{\pi}$
10	$-5.5 \pm 0.7$	$\pi \to e \nu \gamma$

Tabla 2.1: Valores experimentales de las constantes renormalizadas y las fuentes empleadas para su obtención

 $\mathcal{L}_2$  hay dos constantes arbitrarias. Para  $\mathcal{L}_4$  son doce las que aparecen. El siguiente término,  $\mathcal{L}_6$ , posee 143 constantes.

Hasta orden  $p^4$  se puede reproducir una gran cantidad de fenomenología de las interacciones del octete pseudoescalar gracias al lagrangiano de ChPT. Permite calcular los elementos de matriz hadrónicos presentes en multitud de procesos. Por citar algunos, en la región de bajas energías se han descrito con éxito amplitudes de scattering, factores de forma, constantes de desintegración, desintegraciones semileptónicas de kaones, etc.

Sin embargo, estos resultados quedan limitados a la región de energías menores que 500-600 MeV.

En la práctica no es posible intentar alcanzar energías superiores aumentando el número de potencias del lagrangiano quiral ya que la proliferación de constantes hace imposible cualquier predicción.

Existe además otra razón fundamental y es que a energías más altas aparecen nuevos grados de libertad en el espectro hadrónico que no están incluidos (al menos directamente) en ChPT. Se trata de las resonancias.

#### 2.3 Resonancias

Como ya se ha dicho, ChPT es la teoría efectiva de QCD válida a bajas energías, es decir, válida por debajo de una cierta escala  $\Lambda$ , típicamente cercana a las masas de las resonancias (~ 1 GeV). Por construcción, en toda teoría efectiva la información sobre los grados de libertad pesados ( $M > \Lambda$ ) queda contenida en las constantes de acoplamiento que determinan las interacciones entre los grados de libertad ligeros. En particular, esto supone que, como veremos, las constantes  $L_i$  del lagrangiano  $\mathcal{L}_4$  recibirán contribuciones de las interacciones con resonancias [8, 9, 21].

Del mismo modo que el lagrangiano de ChPT se construye partiendo de las simetrías de QCD es posible construir un lagrangiano efectivo que incluya las resonancias como grados de libertad y que respete (al igual que QCD) las simetrías de paridad, conjugación de carga y la simetría quiral local  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

En un mismo formalismo se pueden tratar todas las resonancias, sean vectoriales (denotadas por V), axiales (A), escalares (S) o pseudoescalares (P).

En el caso de las resonancias de espín uno, vectoriales y axiales, existe la posibilidad de representarlas por medio de un campo tensorial antisimétrico  $V_{\mu\nu}$   $(A_{\mu\nu})$  o por medio de un campo vectorial usual  $V_{\mu}$  $(A_{\mu})$ .

En este trabajo se ha utilizado la formulación por campo antisimétrico, si bien ambas formulaciones se ha comprobado que son equivalentes a bajas energías [9].

En [8] se explica detalladamente el proceso de construcción del lagrangiano efectivo de las resonancias (limitándonos a estudiar solamente la pieza lineal en los campos resonantes). Para una mayor claridad en la exposición, el lagrangiano resultante se puede descomponer en una parte cinética más una parte de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{res}} = \sum_{R=V,A,S,P} \left\{ \mathcal{L}_{\text{cin}}(R) + \mathcal{L}_{\text{int}}(R) \right\}.$$
 (2.24)

El término cinético es

2.3 Resonancias

$$\mathcal{L}_{\rm cin}(R) = -\frac{1}{2} \left\langle \nabla^{\lambda} R_{\lambda\mu} \nabla_{\nu} R^{\nu\mu} - \frac{1}{2} M_R^2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right\rangle \qquad (2.25)$$
$$-\frac{1}{2} \partial^{\lambda} R_{1,\lambda\mu} \partial_{\nu} R_1^{\nu\mu} + \frac{1}{2} M_{R_1}^2 R_{1,\mu\nu} R_1^{\mu\nu}$$

para $R=V\!,A,$ y

$$\mathcal{L}_{\rm cin}(R) = -\frac{1}{2} \left\langle \nabla^{\mu} R \nabla_{\mu} R - M_R^2 R^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\{ \partial^{\mu} R_1 \partial_{\mu} R_1 - M_{R_1}^2 R_1^2 \right\} (2.26)$$

para R = S, P.

Por otro lado los términos de interacción son

$$\mathcal{L}_{\text{int}}\left[V\right] = \frac{F_V}{2\sqrt{2}} \left\langle V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \right\rangle + \frac{iG_V}{\sqrt{2}} \left\langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right\rangle , \qquad (2.27)$$
$$\mathcal{L}_{\text{int}}\left[A\right] = \frac{F_A}{2\sqrt{2}} \left\langle A_{\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \right\rangle , \qquad \mathcal{L}_{\text{int}}\left[S\right] = c_d \left\langle Su_\mu u^\mu \right\rangle + c_m \left\langle S\chi_+ \right\rangle + \tilde{c}_d S_1 \left\langle u_\mu u^\mu \right\rangle + \tilde{c}_m S_1 \left\langle \chi_+ \right\rangle , \\ \mathcal{L}_{\text{int}}\left[P\right] = id_m \left\langle P\chi_- \right\rangle + i\tilde{d}_m P_1 \left\langle \chi_- \right\rangle , \qquad (2.27)$$

donde todas las constantes son reales, y deben ser fijadas experimentalmente.

La notación empleada representa los octetes de resonancias en general por R, i.e. V, A,  $S \neq P$ , y los singletes por  $R_1$ , i.e.  $S_1 \neq P_1$ , (con índices Lorentz en los casos de vector y axial). Los campos externos  $l_{\mu}$  $y r_{\mu}$  se introducen a través de la derivada covariante  $\nabla_{\mu}$ , definida como

$$\nabla_{\mu}R = \partial_{\mu}R + [\Gamma_{\mu}, R] , \qquad (2.28)$$

donde

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \left\{ u^{+} \left[ \partial_{\mu} - ir_{\mu} \right] u + u \left[ \partial_{\mu} - i\ell_{\mu} \right] u^{+} \right\} \,. \tag{2.29}$$

Recordemos que  $U(\Phi) = u(\Phi)^2$ .

En los términos de interacción aparecen una serie de cantidades que se transforman como octetes y que corresponden a

$$u_{\mu} = iu^{+}D_{\mu}Uu^{+}, \qquad (2.30)$$
  

$$\chi_{\pm} = u^{+}\chi u^{+} \pm u\chi^{+}u, \qquad f_{\pm}^{\mu\nu} = uF_{L}^{\mu\nu}u^{+} \pm u^{+}F_{R}^{\mu\nu}u,$$

Los octetes de resonancias son matrices  $3 \times 3$  en el espacio de sabores. Por ejemplo, el campo  $V_{\mu\nu}$  es

$$V_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \overline{K}^{*0} & -\frac{2\omega_8}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}_{\mu\nu} .$$
(2.31)

En resumen, tenemos una teoría efectiva de QCD que incorpora explícitamente los campos de las resonancias y que, por tanto, es válida a energías algo más altas que ChPT. Describe, de acuerdo con las simetrías de QCD, las interacciones entre los mesones pseudoescalares incluyendo los intercambios de resonancias entre ellos.

#### 2.3.1 Contribución a las constantes de $\mathcal{L}_4$

Dado que este lagrangiano con resonancias es de orden  $p^2$  en potencias de momento, su contribución a cualquier proceso entre mesones pseudoescalares por medio del intercambio de una resonancia comenzará en orden  $p^4$ .

Como ChPT es una teoría efectiva a una escala más baja, su término  $\mathcal{L}_4$  del lagrangiano debe contener información sobre las resonancias.

Tomando la teoría efectiva con resonancias e integrando los campos pesados  $(V, A, S \neq P)$  en el funcional generador obtendremos otra teoría efectiva con sólo el octete  $(\pi, K, \eta)$  como grados de libertad. Como presentará las mismas simetrías que ChPT contendrá los mismos términos que  $\mathcal{L}_4$  pero en el lugar de las constantes  $L_i$  habrá factores dependientes de los acoplamientos de las resonancias  $(F_V, G_V, \text{ etc.})$ . En [8] se explica más detalladamente este asunto.

Para simplificar la situación consideremos sólo las resonancias vectoriales y axiales. Efectuando la integración en el funcional generador de las resonancias, su contribución a las constantes  $L_i$  es

#### 2.3 Resonancias

	$L_i^r(M_\rho)$	$L_i^{V+A}$
$L_1^r$	$0.4\pm0.3$	0.6
$L_2^r$	$1.4\pm0.3$	1.2
$L_3^r$	$-3.5 \pm 1.1$	-3.6
$L_9^r$	$6.9\pm0.7$	6.9
$L_{10}^{r}$	$-5.5 \pm 0.7$	-6.0

Tabla 2.2: Comparación entre los valores experimentales y la contribución debida al intercambio de resonancias. Las unidades son de  $10^{-3}$ 

$$L_{1}^{V} = \frac{G_{V}^{2}}{8M_{V}^{2}}, \qquad L_{2}^{V} = 2L_{1}^{V}, \qquad L_{3}^{V} = -6L_{1}^{V}, \qquad (2.32)$$
$$L_{9}^{V} = \frac{F_{V}G_{V}}{2M_{V}^{2}}, \qquad L_{10}^{V+A} = -\frac{F_{V}^{2}}{4M_{V}^{2}} + \frac{F_{A}^{2}}{4M_{A}^{2}}, \qquad H_{1}^{V} = -\frac{1}{2}L_{10}^{V}.$$

Las constantes  $L_4, L_5, L_6, L_7$  y  $L_8$  no reciben contribución de las resonancias vectoriales. Utilizando la información experimental disponible los parámetros  $M_V, F_V$  y  $G_V$  quedan fijados.  $M_V$  es aproximadamente la masa de la resonancia  $\rho$ .  $F_V$  se obtiene del proceso  $\rho \rightarrow e^+e^-$  y  $G_V$ del radio electromagnético del pión.  $F_A$  y  $M_A$  se deducen de las reglas de suma de Weinberg [25] tal y como se muestra en [9]. Las constantes renormalizadas  $L_1^r(\mu), L_2^r(\mu), L_3^r(\mu), L_9^r(\mu)$  y  $L_{10}^r(\mu)$  quedan saturadas por la contribución debida al intercambio de resonancias, para una escala  $\mu = M_{\rho}$ . Ver Tabla 2.2.

Este fenómeno se conoce con el nombre de dominio de los mesones vectoriales (VMD) porque significa que en los procesos en los que intervengan resonancias vectoriales (y axiales) su contribución será la más importante de todas.

Las resonancias escalares y pseudoescalares contribuyen a las restantes constantes  $L_i$ . Sin embargo la posibilidad de fijar los acoplamientos  $c_d$ ,  $c_m$ ,  $\tilde{c}_d$ ,  $\tilde{c}_m$ ,  $d_m$  y  $\tilde{d}_m$  a partir de los datos experimentales es complicada. En [8] se obtienen algunos de estos valores empleando argumentos de número de colores grande  $(N_c)$  y suponiendo saturación por intercambio de resonancias de ciertas  $L_i$ . Sin embargo la situación en este sector no está resuelta.

Volviendo de nuevo al caso del intercambio de resonancias vectoriales se puede comprobar [9] que aplicando restricciones obtenidas de QCD a altas energías para el factor de forma del pión y la desintegración  $\pi \to e\nu\gamma$  tenemos que

$$F_V = \sqrt{2} f_\pi , \qquad G_V = \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} .$$
 (2.33)

Utilizando también las reglas de suma de Weinberg se obtiene además que [9]

$$F_A = f_\pi, \qquad M_A = \sqrt{2M_V} \tag{2.34}$$

y, por tanto,

$$L_1^V = \frac{L_2^V}{2} = -\frac{L_3^V}{6} = \frac{L_9^V}{8} = -\frac{L_{10}^{V+A}}{6} = \frac{f_\pi^2}{16M_V^2}.$$
 (2.35)

#### 2.3.2 Campo vectorial

Repitiendo el proceso de construcción del lagrangiano con resonancias invariante quiral, pero empleando ahora campos vectoriales en lugar de antisimétricos resulta

$$\mathcal{L}_V = \mathcal{L}_{\rm cin} + \mathcal{L}_{\rm int} \tag{2.36}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\rm cin} = -\frac{1}{4} \left\langle \hat{V}_{\mu\nu} \hat{V}^{\mu\nu} - 2M_V^2 \hat{V}_{\mu} \hat{V}^{\mu} \right\rangle$$

$$\mathcal{L}_{\rm int} = -\frac{f_V}{2\sqrt{2}} \left\langle \hat{V}_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \right\rangle - \frac{ig_V}{2\sqrt{2}} \left\langle \hat{V}_{\mu\nu} \left[ u^{\mu}, u^{\nu} \right] \right\rangle$$
(2.37)

siendo

2.3 Resonancias

$$\hat{V}_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\hat{V}_{\nu} - \nabla_{\nu}\hat{V}_{\mu}$$

La primera diferencia con el caso antisimétrico es que este lagrangiano es de orden  $p^3$ . El intercambio de una resonancia dará lugar a una contribución de orden  $p^6$  y no de orden  $p^4$  como en el caso anterior. Claramente las constantes  $L_i$  no recibirán contribución de este lagrangiano.

Se demuestra sin embargo en [9] que ambos formalismos son equivalentes si se añade el término  $\mathcal{L}_4$  de ChPT y se imponen restricciones de QCD a cortas distancias. Es decir,

$$\mathcal{L}_{I} = \mathcal{L}_{2} + \mathcal{L}_{4}^{I} + \mathcal{L}_{\text{res}}$$

$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_{2} + \mathcal{L}_{4}^{II} + \mathcal{L}_{V}$$
(2.38)

son equivalentes.

Las restricciones de cortas distancias fijan las constantes de acoplo de los lagrangianos  $\mathcal{L}_4^{\mathrm{I}}$  y  $\mathcal{L}_4^{\mathrm{II}}$ . En el caso antisimétrico se encuentra que todas las constantes de orden  $p^4$  son nulas,  $L_i^{\mathrm{I}} = 0$ .

Un ejemplo sencillo de esta equivalencia es el del factor de forma del pión. Siguiendo [9] obtenemos para  $\mathcal{L}_I$ 

$$F_I(s) = 1 + \frac{F_V G_V}{f^2} \frac{s}{M_V^2 - s} + \frac{2L_9^I}{f^2} s$$
(2.39)

y para  $\mathcal{L}_{II}$ 

$$F_{II}(s) = 1 + \frac{2L_9^{II}}{f^2}s + \frac{f_V g_V}{f^2} \frac{s^2}{M_V^2 - s}$$
(2.40)

La consistencia con QCD a altas energías asegura que el factor de forma del pión obedece una relación de dispersión con una sustracción como máximo (en realidad hay una fuerte evidencia de que no necesita ninguna) y su estructura debe ser

$$F(s) = 1 + k \frac{s}{M_V^2 - s}.$$
 (2.41)

Por tanto  $L_9^I = 0$ , mientras que  $L_9^{II} = f_V g_V/2$ . Considerando que  $f_V = F_V/M_V$  y  $g_V = G_V/M_V$  ambos formalismos conducen al mismo resultado, tanto en la expresión del factor de forma del pión como en la de  $L_9^V$ .

Capítulo 2. Lagrangianos quirales

# CAPÍTULO 3 EXPANSIÓN EN $1/N_c$

Como sabemos, QCD es la teoría fundamental de las interacciones fuertes. Los grados de libertad involucrados son los quarks y los gluones. La estructura del lagrangiano de QCD procede de la simetría gauge SU(3) en el espacio de color sobre la que está construido. Los campos de quarks en dicho espacio se representan como  $q^i$ , donde *i* es el índice de color, mientras que los campos de gluones (correspondientes a la representación adjunta de SU(3)) se representan como matrices  $(G_a^{\mu})^{ij}$ con dos índices de color.

De esta forma se obtiene el lagrangiano de QCD

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a + \sum_f \bar{q}_f \left( i\gamma^\mu D_\mu - m_f \right) q_f \tag{3.1}$$

donde

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^{\mu}G_a^{\nu} - \partial^{\nu}G_a^{\mu} + g_s f^{abc}G_b^{\mu}G_c^{\nu}$$
$$D^{\mu} = \partial^{\mu} - i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu}$$
(3.2)

siendo las matrices  $\lambda^a$  los generadores de la representación fundamental de SU(3) y  $f^{abc}$  las constantes de estructura de SU(3).

Es fácil ver a partir de estas expresiones que los vértices quarkquark-gluón y gluón-gluón son proporcionales a la constante de acoplamiento  $g_s$ , mientras que el vértice de cuatro gluones es proporcional a  $g_s^2$ .

Sin embargo, obtener a partir del lagrangiano de QCD una descripción para todos los fenómenos de las interacciones fuertes es hoy por hoy imposible. Ni siquiera características fundamentales como amplitudes de scattering y constantes de desintegración pueden ser descritos.

't Hooft [26] fue quien propuso por primera vez la posibilidad de expandir QCD en potencias de  $1/N_c$ , ( $N_c$  es el número de colores). Es decir, generalizó QCD a  $N_c$  colores y un grupo gauge  $SU(N_c)$ .

Posteriormente se realizaron numerosos estudios en los que se comprobó cómo QCD se simplifica en el límite  $N_c \to \infty$ . Entre estos trabajos destacan en particular los de Witten [27, 10, 28]. Este capítulo está basado fundamentalmente en [10, 29].  $3.1 \text{ QCD en } 1/N_c$ 



Figura 3.1: Autoenergía del gluón

Los resultados cualitativos obtenidos a partir de QCD para  $N_c$ grande indican que la expansión en  $1/N_c$  es un asunto que merece ser investigado en detalle.

De hecho, muchas características de la fenomenología de las interacciones fuertes tienen en la expansión en  $1/N_c$  la única explicación conocida. Algunos ejemplos son la supresión del mar  $\bar{q}q$  en núcleos, la ausencia de mesones exóticos  $\bar{q}q\bar{q}q\bar{q}q$ , la regla de Zweig, que las desintegraciones a muchas partículas finales están dominadas por estados intermedios de dos cuerpos, etc.

Veremos cómo la expansión en  $1/N_c$  explica cualitativamente de manera sencilla estas cuestiones.

### **3.1 QCD** en $1/N_c$

Vamos a ver de manera sencilla, siguiendo a [10], qué tipo de diagramas están favorecidos y cuáles suprimidos cuando  $N_c$  es grande.

Los campos de gluones son matrices  $N_c \times N_c$  en el espacio de color. Por tanto tienen  $N_c^2 - 1 \simeq N_c^2$  componentes. Por otro lado, los campos de quarks tienen sólo  $N_c$  componentes. Es decir, para  $N_c$  grande hay muchos más estados de gluones que de quarks, lo que se traducirá en una mayor importancia de la contribución de los gluones frente a la de los quarks.

En lo que a color se refiere, se podrían representar los gluones como un par quark-antiquark. Esto conduce a la típica notación de línea doble para representar al gluón en los diagramas de Feynman y permite realizar el contaje de potencias de  $N_c$  de una manera más sencilla.

En la figura 3.1 se muestra el diagrama de autoenergía del gluón en la notación tradicional y en la de línea doble.

En esta última, cada línea representa la propagación de un valor de



Figura 3.2: Comparación entre diagramas planos y no planos para la autoenergía del gluón

color dado. Se ve en el diagrama cómo, después de fijar los índices de color iniciales y finales queda todavía un loop interior por el que pueden correr  $N_c$  colores distintos.

Teniendo en cuenta que hay dos vértices vemos que el diagrama va como  $g_s^2 N_c$  para  $N_c$  grande. Ahora bien, queremos que la autoenergía del gluón sea bien comportada cuando  $N_c \to \infty$ . Para ello redefinimos  $g_s$  como  $g_s/\sqrt{N_c}$ . De esta forma el diagrama será de orden 1 en  $1/N_c$ .

De acuerdo con esto los vértices gluón-quark-quark y gluón-gluón-gluón serán de orden  $1/\sqrt{N_c}$ , mientras que el vértice de cuatro gluones será de orden  $1/N_c$ .

Si en la autoenergía del gluón ponemos un loop de quarks en el lugar del loop de gluones el contaje de potencias es  $(1/\sqrt{N_c})^2$  para los vértices más  $N_c^0 = 1$  por el loop de quarks, en total el diagrama resulta de orden  $1/N_c$ . Es decir, está suprimido por un factor  $1/N_c$  respecto al de la figura 3.1.

Consideremos ahora los diagramas de la figura 3.2.

La única diferencia entre los de arriba y los de abajo es que los primeros son planos y los segundos no (un gluón pasa por debajo del otro).

Para el primero el contaje es  $\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^6 \frac{1}{N_c} N_c^4 = 1$ , del mismo orden que el de la figura 3.1.

Para el segundo tenemos  $\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^6 N_c = \frac{1}{N_c^2}$ . Al no ser plano el número de loops de color ha pasado de cuatro a uno y además no hay vértice central.

3.2 Mesones en  $1/N_c$ 



Figura 3.3: Diagrama básico del correlador de dos puntos

Lo que acabamos de ver para el caso particular de la autoenergía del gluón es extensible a todo tipo de diagramas.

En general tenemos las dos reglas de selección siguientes:

1.- Los diagramas no planos están suprimidos por el factor  $1/N_c^2$ .

2.- Los loops de quarks internos están suprimidos por el factor  $1/N_c$ 

Es decir, en el límite  $N_c \to \infty$  los diagramas son planos y sin loops internos de quarks.

En la práctica estas consideraciones se aplican a elementos de matriz de operadores invariantes gauge, como por ejemplo los bilineales  $\bar{q}q$  o  $\bar{q}\gamma^{\mu}q$ . En el caso del correlador de dos puntos  $\langle J(x)J(y)\rangle$  (donde J(x)es cualquier bilineal de quarks) los diagramas dominantes son de orden  $N_c$ , como se ve en la figura 3.3.

En este caso los diagramas dominantes serán planos, sin loops internos de quarks y manteniendo en los bordes del diagrama siempre las líneas de quarks.

Se puede ver que, en general, para cualquier número de corrientes (i.e.  $\langle J \cdot J \cdots J \rangle$ ) la contribución dominante es de orden  $N_c$ .

## **3.2** Mesones en $1/N_c$

Para estudiar los mesones en el límite  $N_c$  grande consideraremos los elementos de matriz de operadores que tengan los números cuánticos



Figura 3.4:  $\langle JJ \rangle$  representado como intercambio de mesones a nivel árbol

correctos para crear un mesón. Dichos operadores son bilineales locales de quarks, como  $\bar{q}q$  o  $\bar{q}\gamma^{\mu}q$ , que denotaremos como J(x).

Es posible demostrar que J(x) actuando sobre el vacío sólo creará estados de un mesón (en el límite  $N_c \to \infty$ ). En [10] se demuestra fácilmente comprobando que si se corta por el medio el diagrama de la figura 3.3, incluyendo todas las correcciones gluónicas que respeten la planaridad del diagrama, el estado intermedio resultante nunca contendrá más de un singlete de color. Es decir, el quark, el antiquark y los gluones estarán acoplados en un único singlete de color: constituyen por tanto un único mesón.

De acuerdo con esto tendremos que el correlador  $\langle JJ\rangle$ será de la forma

$$\langle J(k)J(-k)\rangle = \sum_{n} \frac{a_{n}^{2}}{k^{2} - m_{n}^{2}},$$
 (3.3)

donde  $a_n = \langle 0 | J | n \rangle$  y la suma es sobre estados de mesones. En la figura 3.4 se muestra de manera diagramática.

De aquí podemos extraer algunas conclusiones. Como ya habíamos visto,  $\langle JJ \rangle$  era de orden  $N_c$ , lo que supone según (3.3) que  $a_n \sim \sqrt{N_c}$ . Es decir, las constantes de desintegración de mesones son de orden  $\sqrt{N_c}$ . Por otro lado, para que el límite  $N_c \to \infty$  de (3.3) sea correcto se obtiene que las masas de mesones son de orden 1 en una expansión  $1/N_c$ .

Por otro lado, el comportamiento a altos momentos de  $\langle JJ \rangle$  se sabe que es logarítmico. Esto obliga a que el número de mesones intermedios sea infinito. Si fuera finito, el término de la derecha de (3.3) iría como  $1/k^2$  para  $k^2 \to \infty$ .

En resumen, el correlador  $\langle J(x)J(y)\rangle$  se reduce, en el límite  $N_c \to \infty$ , a una suma de diagramas a nivel árbol en los que J(x) crea un

36
3.2 Mesones en  $1/N_c$ 



Figura 3.5:  $\langle JJJ \rangle$  y  $\langle JJJJ \rangle$  representados como intercambio de mesones a nivel árbol

mesón con amplitud  $a_n$  que se propaga según  $1/(k^2 - m_n^2)$  y se aniquila en J(y).

Es posible generalizar esto a correladores con un número arbitrario de corrientes. En la figura 3.5 se muestra esto esquemáticamente para tres y cuatro corrientes.

Como las dependencias en  $N_c$  de los correladores y las amplitudes  $a_n$  son conocidas se obtiene fácilmente que el vértice de tres mesones es de orden  $1/\sqrt{N_c}$  y el de cuatro de orden  $1/N_c$ .

El vértice de tres mesones es el responsable de las desintegraciones del tipo  $A \to BC$ . Vemos que están suprimidas por  $1/\sqrt{N_c}$ , o equivalentemente, que en  $N_c = \infty$  los mesones son estables. Esta es la razón por la cual los propagadores de (3.3) no contienen partes imaginarias.

Del correlador de cuatro corrientes extraemos la conclusión de que la amplitud de scattering  $AB \rightarrow CD$  está suprimida por el factor  $1/N_c$ (tanto si consideramos la propagación de un mesón intermedio como si no). Por tanto, para  $N_c = \infty$  los mesones son libres y sin interacción y, además, estables.

### 3.3 Fenomenología

En [10] se cita una serie de aspectos fenomenológicos de QCD que apoyan la idea de que una expansión en  $1/N_c = 1/3$  funciona. Aquí reproducimos algunos de ellos.

1.- La supresión del mar de  $\overline{q}q$  en física de hadrones. La ausencia de mesones exóticos  $\overline{q}q\overline{q}q$ .

Esto se explica por el hecho de que existen muchos más estados de gluones  $(N_c^2)$  que de quarks  $(N_c)$ . Por tanto, en  $N_c = \infty$  el mar de  $\overline{q}q$  desaparece.

En cuanto a los mesones exóticos, basta recordar que para  $N_c = \infty$  los mesones no interaccionan, de manera que dos mesones  $\bar{q}q$  no se pueden unir para formar un mesón exótico.

2.- La regla de Zweig.

Los procesos  $A \to BC$  en los que es necesario crear un par  $\overline{q}q$  están suprimidos por un factor  $1/N_c$  respecto a los procesos que no tienen que crear dicho par (los que cumplen la regla de Zweig).

3.- Las desintegraciones de mesones a muchas partículas finales están dominadas por desintegraciones resonantes a dos partículas intermedias.

En la expansión en  $1/N_c$  es sencillo de comprender. Supongamos que tenemos la desintegración  $A \to 4B$  directa y la  $A \to CB$  donde  $C \to 3B$ , indirecta. El vértice  $A \to 4B$  es de orden  $1/N_c^{3/2}$ , mientras que el  $A \to CB$  es  $1/\sqrt{N_c}$ . El proceso a dos partículas intermedias está favorecido.

Además de los que acabamos de mencionar existen más aspectos de QCD cuya única interpretación existente se basa en los resultados de la expansión en  $1/N_c$ .

3.4 ChPT

# **3.4** ChPT

Dado que ChPT es la teoría efectiva de QCD a bajas energías podemos analizar cuáles son las dependencias en  $N_c$  de sus parámetros.

A orden  $p^2$  el lagrangiano de ChPT contiene sólo dos parámetros:  $f_{\pi} \ge B_0$ .

Como vimos en (2.16)  $f_{\pi}$  es la constante de desintegración del pión dada por

$$\langle 0 | J_A^{\mu} | \pi \rangle = i \sqrt{2} f_{\pi} p^{\mu} .$$
 (3.4)

Por tanto, por lo explicado anteriormente,  $f_{\pi}$  equivale a las  $a_n$  de (3.3), es decir,

$$f_{\pi} \sim \sqrt{N_c} \,. \tag{3.5}$$

La constante  $B_0$  estaba relacionada con el condensado de quarks,

$$\left\langle 0 \left| \overline{q}^{j} q^{i} \right| 0 \right\rangle = -f_{\pi}^{2} B_{0} \delta^{ij} .$$

$$(3.6)$$

Dado que el elemento de matriz es proporcional a  $N_c$  y  $f_{\pi}^2$  también, se obtiene que  $B_0$  no depende de  $N_c$ .

Con estas dependencias en  $N_c$  la amplitud de scattering satisface lo obtenido en la sección anterior. Por ejemplo, para el scattering  $\pi\pi$ tendremos que la amplitud es

$$T = \frac{s - m_{\pi}^2}{f_{\pi}^2} \sim \frac{1}{N_c}, \qquad (3.7)$$

y tiene la dependencia correcta.

Concluimos que el lagrangiano de orden  $p^2$  dado en (2.14) tiene una dependencia global de orden  $N_c$  debido al factor  $f_{\pi}^2$  multiplicativo.

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4} \left\langle D_\mu U^\dagger D^\mu U + U^\dagger \chi + \chi^\dagger U \right\rangle \,. \tag{3.8}$$

En el caso del lagrangiano de orden  $p^4$ , ec. (2.19), las dependencias son algo más complicadas.

Los términos con una sola traza implican un solo loop de quarks, mientras que los de dos trazas tienen un loop de quarks adicional. Según hemos visto en las secciones previas los términos con dos trazas estarán suprimidos por un factor  $1/N_c$  respecto a los de una sola traza. Sabiendo que la dependencia global del lagrangiano debe ser  $N_c$  (como para el orden  $p^2$ ) deducimos que las constantes  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_4$ ,  $L_6$  y  $L_7$  deben ser de orden uno, mientras que  $L_3$ ,  $L_5$ ,  $L_8$ ,  $L_9$  y  $L_{10}$  deben ser de orden  $N_c$ .

Sin embargo, esto no es del todo correcto [6, 29]. Existe la identidad

$$\left\langle AB^{\dagger}AB^{\dagger}\right\rangle = -2\left\langle AA^{\dagger}BB^{\dagger}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle AA^{\dagger}\right\rangle \left\langle BB^{\dagger}\right\rangle + \left\langle AB^{\dagger}\right\rangle^{2}, \quad (3.9)$$

válida para matrices arbitrarias  $3 \times 3$  sin traza  $A \neq B$ . Tomando  $A = D_{\mu}UU^{\dagger} \neq B = D_{\nu}UU^{\dagger}$  en (3.9) resulta:

$$\left\langle D_{\mu}UD_{\nu}U^{\dagger}D^{\mu}UD^{\nu}U^{\dagger} \right\rangle = -2 \left\langle D_{\mu}UD^{\mu}U^{\dagger}D_{\nu}UD^{\nu}U^{\dagger} \right\rangle$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle D_{\mu}UD^{\mu}U^{\dagger} \right\rangle \left\langle D_{\nu}UD^{\nu}U^{\dagger} \right\rangle + \left\langle D_{\mu}UD_{\nu}U^{\dagger} \right\rangle \left\langle D^{\mu}UD^{\nu}U^{\dagger} \right\rangle 3.10$$

El operador  $\langle D_{\mu}UD_{\nu}U^{\dagger}D^{\mu}UD^{\nu}U^{\dagger}\rangle$  tiene una sola traza y, en principio puede aparecer en  $\mathcal{L}_4$  con un coeficiente c de orden  $N_c$ . Al eliminar este operador de  $\mathcal{L}_4$  por medio de la identidad (3.10) el coeficiente cdaría contribuciones a  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  de la forma  $\delta L_1 = c/2$ ,  $\delta L_2 = c$  y  $\delta L_3 = -2c$ .  $L_3$  ya era de orden  $N_c$ , así que permanece igual.  $L_1$  y  $L_2$ son ahora de orden  $N_c$  debido a c. Sin embargo la combinación  $2L_1 - L_2$ es de orden uno.

Finalmente tendremos:

- Orden  $N_c$ :  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_5$ ,  $L_8$ ,  $L_9$  y  $L_{10}$ .
- Orden 1 :  $2L_1 L_2$ ,  $L_4$ ,  $L_6$  y  $L_7$ .

Con esto tenemos caracterizado el orden de todos los coeficientes de ChPT hasta orden  $p^4$ . No es posible calcular sus valores a partir de QCD, pero la expansión en  $1/N_c$  nos dice cuáles son los dominantes. 3.5 Resonancias

### **3.5** Resonancias

A modo de ejemplo nos centraremos en el caso del lagrangiano de las resonancias vectoriales que vimos en el capítulo anterior

$$\mathcal{L}_{\rm int}[V] = \frac{F_V}{2\sqrt{2}} \left\langle V_{\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \right\rangle + \frac{iG_V}{\sqrt{2}} \left\langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \right\rangle \,. \tag{3.11}$$

Queremos conocer cuál es la dependencia en  $N_c$  de los acoplamientos  $F_V \ge G_V$ .

En el caso de  $F_V$  utilizamos el elemento de matriz de la corriente vectorial entre la resonancia  $\rho$  y el vacío

$$\langle \rho | V^{\alpha}(x) | 0 \rangle = -\sqrt{2} F_V M_{\rho} \epsilon^{\alpha} \left( \vec{p}, \lambda \right) .$$
(3.12)

De la misma manera que ocurría en (3.4) este elemento de matriz es de orden  $\sqrt{N_c}$ , por tanto,

$$F_V \sim \sqrt{N_c} \tag{3.13}$$

El acoplamiento  $G_V$  lo podemos estudiar a partir del vértice  $\rho \to \pi \pi$ . La amplitud de este proceso, obtenida a partir del lagrangiano (3.11) es

$$T = \frac{i}{M_{\rho}} \frac{G_V}{f_{\pi}^2} s \left( p_{\pi^-} - p_{\pi^0} \right)_{\mu} \epsilon^{\mu} \left( \vec{p}, \lambda \right)$$
(3.14)

Como veíamos en la figura 3.5 el vértice de tres mesones es de orden  $1/\sqrt{N_c}$ . Como  $f_{\pi} \sim \sqrt{N_c}$  obtenemos que

$$G_V \sim \sqrt{N_c} \tag{3.15}$$

En general, todos los acoplamientos que aparecieron en el lagrangiano de las resonancias del capítulo anterior se ve que son de orden  $\sqrt{N_c}$  [8, 29].

Todas las dependencias en  $N_c$  de los acoplamientos vistas aquí serán de gran importancia para obtener los resultados que mostraremos en los siguientes capítulos.

Capítulo 3. Expansión en  $1/N_{c}$ 

42

# CAPÍTULO 4

# FACTOR DE FORMA DEL PIÓN

Por la propia estructura del lagrangiano de ChPT hemos visto que, en general, los cálculos para determinados observables no van más allá del orden  $p^4$  (i.e. un loop). En algunos casos particulares se ha llegado hasta el orden  $p^6$  (dos loops), como por ejemplo en la amplitud de scattering  $\pi\pi$  [30] o en el propio factor de forma del pión [31, 32, 33]. En estos mismos trabajos se muestra cómo la validez de estas predicciones queda restringida a energías por debajo de los 400-500 MeV. Para poder describir estos observables a energías superiores tenemos que utilizar algo más que simplemente ChPT.

Existen métodos en la literatura que intentan extender este rango de energías empleando técnicas de relaciones de dispersión que resuman las contribuciones de todos los órdenes bajo unas determinadas condiciones. Es el caso del Método del Inverso de la Amplitud (IAM) [13, 34], que veremos en el capítulo siguiente, o el de la ecuación de Omnès [11, 12].

Este último es el tema central de este capítulo.

El método de la ecuación de Omnès se aplica en este trabajo al cálculo del factor de forma del pión.

La definición, en el límite de isospín conservado  $(m_u = m_d)$ , para dicho factor de forma F(s) es la siguiente:

$$\langle \pi^0 \pi^- | \bar{d} \gamma^\mu u | 0 \rangle = \sqrt{2} F(s) \left( p_{\pi^-} - p_{\pi^0} \right)^\mu, \qquad (4.1)$$

donde  $s = (p_{\pi^-} + p_{\pi^0})^2$ .

La estructura Lorentz está determinada por la conservación de la corriente vectorial. Asimismo, los números cuánticos de isospín (I) y espín (J) están fijados a I = J = 1.

Los datos experimentales de F(s) proceden de fuentes distintas según el valor de s. Para s por encima del umbral de producción de dos piones ( $s > 4m_{\pi}^2$ ), F(s) se extrae de la desintegración  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$  y del proceso  $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$  (de su componente I=1). Para s negativo la fuente es el scattering elástico  $e^-\pi^+$ .

En este capítulo veremos cómo extender el rango de energía de ChPT aplicado al factor de forma del pión.

Primero incorporaremos la contribución debida al intercambio de la resonancia  $\rho$  (resonancia vectorial 1<sup>--</sup>). Para ello emplearemos el lagrangiano quiral efectivo que contiene a las resonancias como grados de libertad, ec. (2.27). Esto nos incorpora una resumación de términos locales a todos los órdenes en la aproximación de VMD. En el límite de número de colores muy grande  $(N_c \to \infty)$  es la contribución dominante.

Pero, para poder obtener una descripción válida en el pico de la resonancia  $\rho$ , hemos de obtener una resumación también para la interacción de los dos piones del estado final. Esta contribución no es dominante en el límite  $N_c \to \infty$ , pero resulta fundamental para reproducir los datos experimentales correctamente.

Empleando la ecuación de Omnès, basada en las propiedades de unitariedad y analiticidad del factor de forma, efectuamos dicha resumación.

Finalmente obtenemos una descripción de F(s) con las propiedades analíticas y comportamiento asintótico  $(s \to \infty)$  correctos y sin parámetros libres.

En las siguientes secciones se desarrollan todas esas ideas siguiendo los trabajos [16, 18].

# 4.1 Resultados de los lagrangianos quirales efectivos

A energías próximas al umbral de producción de dos piones ( $s = 4m_{\pi}^2$ ) el factor de forma del pión está bien descrito por ChPT. A orden  $p^4$  intervienen los diagramas de la figura 4.1 y la expresión del factor de forma es [7]:

$$F(s)^{ChPT} = 1 + \frac{2L_9^r(\mu)}{f_\pi^2} s - \frac{s}{96\pi^2 f_\pi^2} \left[ A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/\mu^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/\mu^2) \right] ,$$
(4.2)

siendo

$$A(m_P^2/s, m_P^2/\mu^2) = \ln\left(m_P^2/\mu^2\right) + \frac{8m_P^2}{s} - \frac{5}{3} + \sigma_P^3 \ln\left(\frac{\sigma_P + 1}{\sigma_P - 1}\right) \quad (4.3)$$

las funciones que resultan de las integrales de los loops, donde  $\sigma_P \equiv$ 



Figura 4.1: Diagramas involucrados en el cálculo del factor de forma del pión a orden  $p^4$  en ChPT.

 $\sqrt{1-4m_P^2/s}$  es el factor de espacio fásico habitual \*.

En el caso de ChPT restringida a  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  existen cálculos analíticos a dos loops [32, 33].

La constante renormalizada  $L_9^r(\mu)$  cancela la dependencia en  $\mu$  de las funciones de los loops. A partir de los datos experimentales se deduce el valor de dicha constante. Para ello consideremos la expansión en s, alrededor de s = 0, del factor de forma

$$F(s) = 1 + \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle^{\pi^{\pm}} s + \cdots, \qquad (4.4)$$

donde  $\langle r^2\rangle^{\pi^\pm}$  es el radio el c<br/>tromagnético del pión. La expresión (4.2) de ChPT a un loop nos dice que

$$\langle r^2 \rangle^{\pi^{\pm}} = \frac{12L_9^r(\mu)}{f_\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2 f_\pi^2} \left[ 2\ln\left(\frac{m_\pi^2}{\mu^2}\right) + \ln\left(\frac{m_K^2}{\mu^2}\right) + 3 \right] \,. \tag{4.5}$$

Por tanto, a partir del valor experimental [35]

<sup>\*</sup>Ver Apéndice A

4.1 Resultados de los lagrangianos quirales efectivos



Figura 4.2: Diagrama de intercambio de la resonancia  $\rho$ .

$$\langle r^2 \rangle^{\pi^{\pm}} = (0.439 \pm 0.008) \,\mathrm{fm}^2$$
 (4.6)

se puede fijar  $L_9^r(\mu)$ . Para  $\mu = M_\rho$  resulta ser

$$L_9^r(M_\rho) = (6.9 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}. \tag{4.7}$$

Ahora bien, siendo generosos, el resultado a un loop en ChPT reproduce los datos experimentales únicamente hasta una energía de unos 450 MeV. Más allá hay que considerar órdenes superiores y, sobre todo, la contribución de la resonancia  $\rho$  que domina claramente este canal.

Para esto último empleamos el lagrangiano quiral con resonancias explicado en el capítulo anterior para calcular el diagrama de la figura 4.2 y se obtiene [8, 9] para el factor de forma la expresión

$$F(s)^{V} = 1 + \frac{F_{V}G_{V}}{f_{\pi}^{2}} \frac{s}{M_{o}^{2} - s}.$$
(4.8)

La evidencia empírica y los prejuicios teóricos sugieren que (basado en QCD a altas energías) el factor de forma del pión obedece una relación de dispersión sin sustracciones. Esto supone que F(s) va a cero cuando  $s \to \infty$ . Aplicando esto a  $F(s)^V$  (donde resonancias de masa superior no han sido consideradas) obtenemos la condición

$$\frac{F_V G_V}{f_\pi^2} = 1 \tag{4.9}$$

y, en consecuencia,

$$F(s)^{V} = \frac{M_{\rho}^{2}}{M_{\rho}^{2} - s}, \qquad (4.10)$$

que es la expresión habitual de VMD. Si desarrollamos  ${\cal F}(s)^V$  en potencias de s

$$F(s)^V = 1 + \frac{s}{M_{\rho}^2} + \left(\frac{s}{M_{\rho}^2}\right)^2 + \cdots$$
 (4.11)

observamos que lo que tenemos es una suma infinita de términos locales. VMD implica que las contribuciones locales a todos los órdenes en ChPT están saturadas por el intercambio de resonancias y, por tanto, corresponden a (4.11).

En el límite  $N_c \to \infty$  las contribuciones de loops desaparecen [10] y sólo quedan términos locales. Por tanto, en dicho límite, (4.10) es la resumación de los términos dominantes en  $1/N_c$ .

Comparando (4.2) con (4.11) en el límite  $N_c \to \infty$  obtenemos una predicción para  $L_9$ 

$$L_9 = \frac{F_V G_V}{2M_{\rho}^2} = \frac{f_{\pi}^2}{2M_{\rho}^2} = 7.2 \cdot 10^{-3}.$$
(4.12)

Este valor es compatible con el extraído del radio electromagnético del pión en (4.7) tal y como apunta VMD.

Combinando las expresiones (4.2) y (4.10) obtenemos una mejor descripción para el factor de forma del pión (fijando  $\mu = M_{\rho}$ )

$$F(s) = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s} - \frac{s}{96\pi^2 f_{\pi}^2} \left[ A(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/M_{\rho}^2) \right].$$
(4.13)

La fórmula de VMD nos da el término dominante en  $1/N_c$  que suma un número infinito de contribuciones locales de ChPT a todos los órdenes en potencias de momentos. Las contribuciones de loop dadas por las funciones  $A(m_P^2/s, m_P^2/M_{\rho}^2)$  son las correcciones de orden siguiente en el desarrollo en potencias de  $1/N_c$ .

Estas funciones son las que contienen además la interacción entre los dos piones finales que también resumaremos a todos los órdenes.

# 4.2 Ecuación de Omnès y su solución

El factor de forma del pión es una función analítica en el plano complejo s excepto en un corte en el eje real positivo desde  $4m_{\pi}^2$  hasta  $+\infty$  donde la parte imaginaria es discontinua.

Esta parte imaginaria corresponde a las contribuciones de los estados intermedios colocados sobre la capa de masas,

$$Im F(s) = Im F(s)_{2\pi} + Im F(s)_{4\pi} + \dots + Im F(s)_{K\bar{K}} + \dots$$
(4.14)

En la región  $s<16m_\pi^2=(552\,{\rm MeV})^2$ nos encontramos en el caso elástico donde sólo el estado intermedio de dos piones contribuye.

Según el teorema de Watson [36], en esta región, la parte imaginaria satisface<sup>†</sup>

$$Im F(s) = \sigma_{\pi} T_1^1(s) F(s)^*, \qquad (4.15)$$

donde  $T_1^1(s)$  es la amplitud en onda parcial con isospín y momento angular iguales a uno, I = J = 1, dada por

$$T_1^1(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^{+1} dz \, z \, \langle \pi^0 \pi^- \left| T^1 \right| \pi^0 \pi^- \rangle \,, \tag{4.16}$$

siendo  $z = \cos \theta_{13}$ , el coseno del ángulo que forman las partículas 1 y 3 en el sistema centro de masas.

La amplitud  $T_1^1(s)$  en términos del desfasaje resulta ser

$$\sigma_{\pi} T_1^1(s) = e^{i\delta_1^1} \sin \delta_1^1.$$
(4.17)

Sustituyendo en (4.15) tenemos que la parte imaginaria de F(s) es

$$Im F(s) = e^{i\delta_1^1} \sin \delta_1^1 F(s)^*.$$
(4.18)

Como la función espectral ImF(s) es real se concluye automáticamente que la fase del factor de forma F(s) es el desfasaje  $\delta_1^1(s)$ . Teniendo esto en cuenta se satisface que

$$e^{i\delta_1^1}\sin\delta_1^1 F(s)^* = \tan\delta_1^1 \cdot \operatorname{Re} F(s).$$
 (4.19)

<sup>†</sup>Ver Apéndice B

La ecuación de Omnès es una relación de dispersión con n sustracciones de la forma

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} F(0) + \frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\tan \delta_1^1(z) \operatorname{Re} F(z)}{z - s - i\epsilon} \,.$$
(4.20)

El factor de forma satisface exactamente esta ecuación por debajo del umbral inelástico ( $s < 16m_{\pi}^2$ ). Sin embargo, la contribución de los estados intermedios siguientes ( $4\pi$ ,  $6\pi$ , ...,  $K\bar{K}$ ...) está bastante suprimida por espacio fásico y por expansión quiral, por lo que la solución de la ecuación de Omnès se espera que sea una buena aproximación incluso para  $s > 16m_{\pi}^2$ .

La solución de (4.20) resulta ser [11, 12]

$$F(s) = Q_n(s) \exp\left\{\frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z - s - i\epsilon}\right\},$$
 (4.21)

donde

$$\ln Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \ln F(0).$$
(4.22)

La derivación de la solución se muestra en el Apéndice C.

# 4.3 Exponenciación

Como acabamos de ver si queremos aplicar la solución de Omnès al factor de forma del pión necesitamos calcular el desfasaje  $\delta_1^1(s)$ .

Para ello empleamos la amplitud de scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$ , que al orden más bajo en ChPT es

$$T(s) = \frac{s - m_{\pi}^2}{f_{\pi}^2}.$$
(4.23)

La componente de isospín igual a uno es

$$T^{1} = T(t) - T(u) = \frac{t - u}{f_{\pi}^{2}}.$$
(4.24)

#### 4.3 Exponenciación

Teniendo en cuenta que

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -\frac{s}{2}\sigma_\pi^2 (1 - z),$$
  
$$u = (p_1 - p_4)^2 = -\frac{s}{2}\sigma_\pi^2 (1 + z),$$
 (4.25)

podemos obtener por medio de (4.16) la amplitud en onda parcial $T_1^1(\boldsymbol{s})$ a orden $p^2$ 

$$T_1^1(s) = \frac{s\sigma_\pi^2}{96\pi f_\pi^2} \,. \tag{4.26}$$

A bajas energías el desfasaje se obtiene fácilmente de  $T_1^1(\boldsymbol{s});$ 

$$\delta_1^1(s) = \sigma_\pi T_1^1(s) = \frac{s\sigma_\pi^3}{96\pi f_\pi^2} \,. \tag{4.27}$$

La integral de Omnès (4.20) genera la función del loop definida como

$$-sA(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/\mu^2)/(96\pi^2 f^2)$$
 ,

salvo por un polinomio que depende del número de sustracciones aplicadas. Por ejemplo, para  $\delta_1^1(s)$  dado arriba son necesarias como mínimo dos sustracciones (ya que  $\delta_1^1(s) \sim s$  cuando  $s \to +\infty$ ). La integral de Omnès con dos sustracciones da como resultado

$$F(s) = Q_2(s) \,\Omega_2(s) \,, \tag{4.28}$$

donde

$$\Omega_{2}(s) = \exp\left\{\frac{s}{96\pi^{2}f^{2}}\left[\frac{8}{3} - \frac{8m_{\pi}^{2}}{s} - \sigma^{3}\ln\frac{\sigma+1}{\sigma-1}\right]\right\}$$
(4.29)
$$= \exp\left\{-\frac{s}{96\pi^{2}f^{2}}\left[A(m_{\pi}^{2}/s, m_{\pi}^{2}/\mu^{2}) - \left(\ln\frac{m_{\pi}^{2}}{\mu^{2}} + 1\right)\right]\right\},$$
(4.30)

donde  $\sigma = \sqrt{1 - 4m_{\pi}^2/s}$ .

El polinomio antes mencionado aparece en el segundo término del exponente. Por tanto, la integral de Omnès proporciona una resumación en forma de exponencial de las correcciones logarítmicas.

La función  $Q_n(s)$  puede determinarse parcialmente igualando el resultado de Omnès con el de ChPT a un loop mostrado en (4.2). Esto fija los dos primeros términos en la expansión de Taylor de  $Q_n(s)$  alrededor de s = 0. Sin embargo, queda todavía una ambigüedad a órdenes superiores. Esto significa una indeterminación orden a orden entre la parte polinómica del factor de forma del pión que debe estar en  $Q_n(s)$ y la que debe estar en la exponencial.

Comparando con el ejemplo para dos sustracciones, vemos que para n tendríamos que

$$F(s) = Q_n(s) \Omega_n(s), \qquad (4.31)$$

donde

$$Q_n(s) = 1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1},$$
  

$$\Omega_n(s) = \exp\left\{-\frac{s}{96\pi^2 f^2} A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/\mu^2) + b_1(\mu)s + \dots + b_{n-1}(\mu)s^{n-1}\right\}.$$
(4.32)

Los polinomios  $a_i s^i$  y  $b_i s^i$  tenemos la libertad de escoger colocarlos en  $Q_n(s)$  o en  $\Omega_n(s)$ .

Para resolver la ambigüedad igualamos esta expresión, a bajas energías, con el resultado (4.13) donde los términos locales ya estaban resumados. Esto obliga a bajar el polinomio  $b_i s^i$  a la función  $Q_n(s)$  obteniéndose

$$Q_n(s) = 1 + \frac{s}{M_{\rho}^2} + \left(\frac{s}{M_{\rho}^2}\right)^2 + \dots = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s},$$

52

4.3 Anchura de la  $\rho$ 

$$\Omega_n(s) = \exp\left\{-\frac{s}{96\pi^2 f^2} A(m_\pi^2/s, m_\pi^2/M_\rho^2)\right\}.$$
(4.33)

Tenemos, por tanto, que el factor de forma resulta

$$F(s) = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s} \exp\left\{-\frac{s}{96\pi^2 f^2} A(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2)\right\}.$$
 (4.34)

Esta expresión para el factor de forma del pión satisface todos los requisitos previos a bajas energías y, además, tiene la fase correcta a orden  $p^4$ . Vemos ahora cómo efectivamente esta expresión suma por un lado, en el propagador de la  $\rho$ , los términos dominantes en  $1/N_c$  y por otro lado los subdominantes debidos a la interacción entre los piones finales en la exponencial.

Sin embargo, la ec. (4.34) tiene defectos obvios. Hemos utilizado una aproximación a orden  $p^2$  para el desfasaje  $\delta_1^1(s)$ , que es una descripción muy pobre en la parte de altas energías de la región de integración. Incrementando el número de sustracciones aumenta la contribución, en la integral de Omnès, de la zona de bajas energías de la región de integración. Dado que nuestra parametrización ha fijado un número infinito de sustracciones, el resultado (4.34) debe predecir bien el factor de forma incluso a energías no demasiado bajas. De acuerdo con esto, utilizar  $\delta_1^1(s)$  a orden  $p^4$  en lugar de a orden  $p^2$  mejoraría solamente el comportamiento a bajas energías donde (4.34) da ya una aproximación bastante buena. Sin embargo, estamos más interesados en obtener una extrapolación que se pueda utilizar en el pico de la  $\rho$ .

#### 4.3.1 Anchura de la $\rho$

Para poder describir el pico de la  $\rho$  es necesario que tengamos una expresión de su anchura.

La anchura de la  $\rho$  fuera de la capa de masa (off-shell) se puede obtener fácilmente con el lagrangiano efectivo quiral de las resonancias [8, 9]. Para ello se calcula la autoenergía de la  $\rho$  a un loop y haciendo una suma de Dyson se introduce en el denominador del propagador de la  $\rho$ .

El resultado del cálculo del diagrama de la figura 4.3 es



Figura 4.3: Autoenergía de la  $\rho$  al orden más bajo

$$\Sigma_{\mu\sigma\nu\epsilon} = \left[g_{\mu\sigma}p_{\nu}p_{\epsilon} - g_{\mu\epsilon}p_{\nu}p_{\sigma} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right]\Sigma(s), \qquad (4.35)$$

siendo

$$\Sigma(s) = \frac{i}{M_{\rho}^2(M_{\rho}^2 - s)} B \frac{i}{M_{\rho}^2(M_{\rho}^2 - s)}, \qquad (4.36)$$

donde

$$B = -\frac{i}{(16\pi^2 f_\pi^4)} M_\rho^4 \left[ \tilde{A}(m_\pi^2/s, m_\pi^2/\mu^2) + \frac{1}{2} \tilde{A}(m_K^2/s, m_K^2/\mu^2) \right].$$
(4.37)

Aquí la función  $\tilde{A}(m_P^2/s, m_P^2/\mu^2)$  es divergente. Su expresión es igual a  $-2\alpha (p, m, m)$ , donde  $\alpha (p, m, m)$  está definida en el Apéndice A. Para renormalizarla se necesitaría construir un lagrangiano con resonancias de orden superior. Sin embargo, como estamos interesados en la parte imaginaria, que es finita, no nos ocuparemos de esto.

Sumando (4.35) al propagador de la  $\rho$ vemos que sólo contribuye al término no local y que resulta

$$\Delta_{\mu\sigma\nu\epsilon}^{\text{sum}} = \Delta_{\mu\sigma\nu\epsilon}^{\text{local}} + \left(g_{\mu\sigma}p_{\nu}p_{\epsilon} - g_{\mu\epsilon}p_{\nu}p_{\sigma} - (\mu\leftrightarrow\nu)\right)\Delta_{\text{sum}}, \qquad (4.38)$$

donde

$$\Delta_{\text{sum}} = \frac{i}{M_{\rho}^2(M_{\rho}^2 - s)} + \frac{i}{M_{\rho}^2(M_{\rho}^2 - s)} B \frac{i}{M_{\rho}^2(M_{\rho}^2 - s)} + \cdots$$
(4.39)

La suma de la serie es

4.3 Anchura de la  $\rho$ 

$$\Delta_{\rm sum} = \frac{i}{M_{\rho}^2 (M_{\rho}^2 - s - iB/M_{\rho}^2)} = \frac{i}{M_{\rho}^2 (M_{\rho}^2 - s - iM_{\rho}\Gamma_{\rho}(s))}, \quad (4.40)$$

de donde obtenemos la anchura de la  $\rho$ 

$$\Gamma_{\rho}(s) = \frac{M_{\rho}s}{96\pi f^2} \left\{ \theta(s-4m_{\pi}^2) \,\sigma_{\pi}^3 + \frac{1}{2}\theta(s-4m_K^2) \,\sigma_K^3 \right\}$$
(4.41)

$$= -\frac{M_{\rho}s}{96\pi^2 f^2} \operatorname{Im} \left[ A(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2) + \frac{1}{2} A(m_K^2/s, m_K^2/M_{\rho}^2) \right] \,.$$

En el Apéndice D se muestra que el resultado es el mismo si se emplea el formalismo con campos vectoriales.

A  $s = M_{\rho}^2$ , obtenemos  $\Gamma_{\rho}(M_{\rho}^2) = 144$  MeV, que es una buena aproximación al valor experimental  $\Gamma_{\rho}^{\exp} = (150.7 \pm 1.2)$  MeV.

La ecuación (4.41) muestra que, por debajo del umbral  $K\overline{K}$ , la anchura de la  $\rho$  es proporcional al desfasaje del scattering  $\pi\pi$  a orden  $p^2$ :  $\Gamma_{\rho}(s) = M_{\rho} \delta_1^1(s)$ .

Introduciendo  $\Gamma_{\rho}(s)$  en el propagador de la  $\rho$  en (4.34) y expandiendo en s la expresión resultante se comprueba que la parte imaginaria generada por la anchura y la parte imaginaria contenida en la exponencial son iguales a orden  $p^4$ . Esto sugiere identificarlas como una sola contribución y desplazar la parte imaginaria de la función  $A(m_P^2/s, m_P^2/M_{\rho}^2)$  desde la exponencial al propagador. Incluyendo también la pequeña contribución debida al estado intermedio  $K\overline{K}$  obtenemos nuestra expresión definitiva

$$F(s) = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s - iM_{\rho}\Gamma_{\rho}(s)} \exp\left\{\frac{-s}{96\pi^2 f^2} \left[\operatorname{Re}A(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}A(m_K^2/s, m_K^2/M_{\rho}^2)\right]\right\}.$$
 (4.42)

Este cambio no modifica el resultado a orden  $p^4$ , que todavía coincide con ChPT, pero hace que el desfasaje pase por  $\pi/2$  para  $s = M_{\rho}^2$ . Gráficamente podemos ver en la figura 4.4 que (4.42) ajusta los datos experimentales [38] <sup>‡</sup> perfectamente incluso a energías bastante altas (hasta 1 GeV aproximadamente). Los únicos parámetros que aparecen en (4.42) son  $m_{\pi}$ ,  $m_K$ ,  $f_{\pi}$  y  $M_{\rho}$  para los que hemos tomado sus valores experimentales. Por tanto, se puede decir que (4.42) es una predicción sin parámetros libres.

A bajas energías el factor de forma está completamente dominado por la contribución polinómica generada por el propagador de la  $\rho$ . Sin embargo, la resumación de logaritmos quirales es crucial para obtener la normalización correcta en el pico de la  $\rho$ . La exponencial produce un aumento del 17% en |F(s)| para  $s = M_{\rho}^2$ .

#### 4.3.2 Desfasaje

A partir de la expresión (4.42) obtenemos también una predicción para el desfasaje  $\delta_1^1(s)$ :

$$\delta_1^1(s) = \arctan\left\{\frac{M_\rho \Gamma_\rho(s)}{M_\rho^2 - s}\right\}.$$
(4.43)

Para  $s \ll M_{\rho}^2$ , esta expresión se reduce al resultado de orden  $p^2$  de ChPT mostrado en (4.27). Como se ve en la figura 4.5, la mejora conseguida gracias a (4.43) proporciona una descripción muy buena de los datos experimentales [39, 40] sobre un rango de energías bastante amplio. A grandes energías, el desfasaje se aproxima al límite asintótico  $\delta_1^1(s) = \arctan\{-\xi M_{\rho}^2/(96\pi f_{\pi}^2)\}$ . Si solamente está incluido el estado intermedio de dos piones,  $\xi = 1$  y  $\delta_1^1(s \to \infty) = 167^0$ ; teniendo en cuenta también la contribución de  $K\overline{K}$ , se tiene que  $\xi = 3/2$ , lo que baja ligeramente el valor asintótico a  $\delta_1^1(s \to \infty) = 161^0$ .

Otro test para comprobar que el desfasaje es el correcto es reconstruir el factor de forma del pión a partir de  $\delta_1^1(s)$  mediante la solución de Omnès

<sup>&</sup>lt;sup>‡</sup>Los datos a s > 0 se han extraído de  $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ ; por tanto en el pico de la  $\rho$  hay una pequeña contaminación debida a la resonancia  $\omega$ . Esta contribución es bien conocida y genera una distorsión en la forma del pico, que puede ser fácilmente incluida en la fórmula teórica [17]. El efecto no se puede apreciar a la escala de la figura. Ver Apéndice E.



Figura 4.4: Factor de forma exponenciado comparado con los datos experimentales. Datos: [38]



Figura 4.5: Desfasaje obtenido comparado con los datos experimentales. Datos: [66]

4.4 Comparación con el cálculo en ChPT a orden  $p^6$ 

$$F(s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln F(0)\right]^{(k)} \frac{s^k}{k!}\right\} \exp\left\{\frac{s^n}{\pi} \int \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z-s}\right\},\qquad(4.44)$$

con

$$\left[\ln F(0)\right]^{(k)} = \left. \frac{d^{(k)} \ln F(s)}{ds^k} \right|_{s=0} , \qquad (4.45)$$

Los valores experimentales de  $[\ln F(0)]^{(k)}$  son

$$[\ln F(0)]^{(1)} = \frac{1}{6} \langle r_V^2 \rangle = 1.98 \,\mathrm{GeV}^{-2} \,,$$

$$\left[\ln F(0)\right]^{(2)} = 2c_V - \left(\frac{1}{6}\left\langle r_V^2 \right\rangle\right)^2 = 4.13 \,\text{GeV}^{-4} \,. \tag{4.46}$$

Tomando para  $c_V$  el valor dado en [32].

El resultado mostrado en la figura 4.6 es la solución numérica para la integral de dispersión (4.44) con una, dos y tres sustracciones (respectivamente las curvas inferior, superior e intermedia).

El ajuste obtenido a los datos es bastante bueno, y mejora con el número de sustracciones. Esto es debido al hecho comentado en la sección anterior de que aumentando el número de sustracciones la contribución proveniente de bajas energías (la región mejor entendida) es más y más importante. Esta gráfica muestra que la predicción dada para el desfasaje por la parametrización exponenciada es correcta.

# 4.4 Comparación con el cálculo en ChPT a orden $p^6$

La expresión exponenciada para el factor de forma del pión (4.42) se obtuvo partiendo del factor de forma en ChPT a orden  $p^4$ , por tanto la primera predicción se produce a orden  $p^6$ . En esta sección se compara la contribución de orden  $p^6$  generada en (4.42) con la obtenida por cálculo exacto en ChPT [32]. Básicamente se muestra el trabajo realizado en [18]



Figura 4.6: Resultado numérico de la integral de dispersión con una, dos y tres sustracciones (líneas inferior, superior e intermedia respectivamente). Datos: [38].

4.4 Término de orden  $p^6$  en ChPT

#### Término de orden $p^6$ en ChPT 4.4.1

En el cálculo exacto y analítico [32] del factor de forma del pión en ChPT con  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  la expresión dada se muestra con la ayuda de ciertas funciones. Aquí modificamos ligeramente la presentación para poder mostrar de manera más clara la comparación con la parametrización exponenciada. Escribimos sólo el término de orden  $p^6$ , denotado por  $F_{\text{ChPT}}^{(6)}(s)$ , como una expansión en potencias del logaritmo

$$L(s) = \ln \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \tag{4.47}$$

para valores de s por encima del umbral de dos piones. Siendo  $\sigma$  =  $\sigma_{\pi} = \sqrt{1 - 4m_{\pi}^2/s}.$ Tendremos una expresión de la forma

$$F_{\rm ChPT}^{(6)}(s) = a_0 + a_1 L(s) + a_2 (L(s))^2 + a_3 (L(s))^3.$$
(4.48)

Hay que recordar que el cálculo a un loop sólo contribuye a los dos primeros términos  $a_0$  y  $a_1$ , por tanto  $a_2$  y  $a_3$  proceden estrictamente del orden  $p^6$ .

Tomando el resultado de [32] las funciones  $a_i$  son, a dos loops, las siguientes

$$a_{0} = \left[\frac{sm_{\pi}^{2}}{6(16\pi^{2}f^{2})^{2}}\overline{f}_{1} + \frac{s^{2}}{(16\pi^{2}f^{2})^{2}}\overline{f}_{2} + \left(\frac{m_{\pi}^{2}}{16\pi^{2}f^{2}}\right)^{2}\left\{\left[\overline{\ell_{2}} - \overline{\ell_{1}} + \frac{\overline{\ell_{6}}}{2} - \frac{3}{2}\frac{\overline{\ell_{3}}}{x}\right]\frac{x^{2}}{27}(1+3\sigma^{2})\right]$$
$$-\frac{x^{2}}{30}\overline{\ell_{4}} + \frac{3191}{6480}x^{2} + \frac{223}{216}x - \frac{16}{9} - \frac{\pi^{2}x}{540}(37x+15) + \frac{1}{54}(7x^{2} - 151x+99)$$
$$-\frac{\pi^{2}}{72x}(x^{3} - 30x^{2} + 78x - 128) + 8\pi^{2}(x^{2} - \frac{13}{3}x - 2)\left(\frac{1}{192} - \frac{1}{32\pi^{2}} - \frac{1}{48x\sigma^{2}}\right)\right\}$$
$$+i\left[\left(\frac{m_{\pi}^{2}}{16\pi^{2}f^{2}}\right)^{2}\left\{\left(\overline{\ell_{2}} - \overline{\ell_{1}} + \frac{\overline{\ell_{6}}}{2} - \frac{3}{2}\frac{\overline{\ell_{3}}}{x}\right)\frac{\pi x^{2}\sigma^{3}}{18} + \frac{\pi\sigma}{108}(7x^{2} - 151x + 99)\right]\right\}$$

Capítulo 4. Factor de forma del pión

(4)

$$+8\pi^{2}(x^{2}-\frac{13}{3}x-2)\frac{1}{16\pi x\sigma}\bigg\}\bigg] \theta \left(s-4m_{\pi}^{2}\right) \,,$$

$$a_{1} = \left(\frac{m_{\pi}^{2}}{16\pi^{2}f^{2}}\right)^{2} \left\{ \left[ -\left(\overline{\ell_{2}} - \overline{\ell_{1}} + \frac{\overline{\ell_{6}}}{2} - \frac{3}{2}\frac{\overline{\ell_{3}}}{x}\right) \frac{x^{2}\sigma^{3}}{18} - \frac{\sigma}{108}(7x^{2} - 151x + 99) + 8\pi^{2}\left(x^{2} - \frac{13}{3}x - 2\right)\frac{2\pi^{2} - 3x\sigma^{2}}{48\pi^{2}x^{2}\sigma^{3}} \right] + i\left[\frac{-\pi}{36x\sigma^{2}}\left(x^{3} - 16x^{2} + 120x - 476 + 512/x\right)\right]\theta\left(s - 4m_{\pi}^{2}\right) \right\},$$

$$(4.50)$$

$$a_2 = \left(\frac{m_\pi^2}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \left\{ \left[\frac{1}{72x\sigma^2} \left(x^3 - 16x^2 + 120x - 476 + 512/x\right)\right] + i \left[\frac{\pi}{2x^2\sigma^3}\right] \right\}$$

$$\left(x^2 - \frac{13}{3}x - 2\right) \left[ \theta \left(s - 4m_\pi^2\right) \right], \qquad (4.51)$$

$$a_3 = -\left(\frac{m_\pi^2}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \left(x^2 - \frac{13}{3}x - 2\right) \frac{1}{6x^2\sigma^3}.$$
 (4.52)

Donde  $x = s/m_{\pi}^2$ .  $\bar{\ell}_i$  son los acoplamientos independientes de la escala de ChPT en  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  a orden  $p^4$  definidos en [5, 32], y  $\bar{f}_1$  y  $\bar{f}_2$  a orden  $p^6$ . Como puede verse  $a_3$  es real (su parte imaginaria aparece a orden  $p^6$ ), mientras que  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  son complejos.

Otra característica importante es que estas funciones  $a_i$  son divergentes en el umbral de dos piones (i.e. cuando  $\sigma = 0$ ). Obviamente  $F_{ChPT}^{(6)}(4m_{\pi}^2)$  no es divergente, dado que las divergencias de las funciones  $a_i$ , combinadas con las potencias en  $\sigma$  que aparecen en la expansión de L(s) para valores pequeños de  $\sigma$ , se cancelan entre sí. Estas divergencias se originan en los loops intercambiados en los canales t y u. Esto implica que no se espera que aparezcan en la resumación exponencial, dado que esta última suma sólo la interacción de estado final de los piones en el canal s.

62

# 4.4.2 Término de orden $p^6$ en la parametrización exponenciada

Expandiendo en potencias de momento obtenemos el término de orden  $p^6$  dado por (4.42). Ahora, siguiendo el procedimiento empleado para el cálculo en ChPT expandimos la expresión resultante en potencias del logaritmo L(s) de la forma

$$F_{exp}^{(6)}(s) = b_0 + b_1 L(s) + b_2 (L(s))^2 + b_3 (L(s))^3.$$
(4.53)

Las funciones  $b_i$  son

$$b_{0} = \left[\frac{s^{2}}{M_{\rho}^{4}} - \frac{\Gamma_{\rho}^{2}(s)}{M_{\rho}^{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(96\pi^{2}f^{2})^{2}}\left(s\ln\left(\frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}}\right) + 8m_{\pi}^{2} - \frac{5}{3}s\right)^{2} - \frac{s}{96\pi^{2}f^{2}M_{\rho}^{2}}\left(s\ln\left(\frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}}\right) + 8m_{\pi}^{2} - \frac{5}{3}s\right)\right] + i\left[\frac{2s^{2}\sigma^{3}}{96\pi f^{2}M_{\rho}^{2}} - \frac{\pi s\sigma^{3}}{(96\pi^{2}f^{2})^{2}}\left(s\ln\left(\frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}}\right) + 8m_{\pi}^{2} - \frac{5}{3}s\right)\right] \times \theta\left(s - 4m_{\pi}^{2}\right), \qquad (4.54)$$

$$b_{1} = \frac{s^{2}\sigma^{3}}{(96\pi^{2}f^{2})^{2}} \left[ \left\{ \ln\left(\frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}}\right) + \frac{8m_{\pi}^{2}}{s} - \frac{5}{3} - \frac{96\pi^{2}f^{2}}{M_{\rho}^{2}} \right\} - i\pi\sigma^{3}\theta \left(s - 4m_{\pi}^{2}\right) \right], \qquad (4.55)$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \frac{s^2 \sigma^6}{(96\pi^2 f^2)^2} \,, \tag{4.56}$$

$$b_3 = 0.$$
 (4.57)

Como se esperaba, los valores de las funciones  $b_i$  no son divergentes en el umbral de producción de dos piones. Por tanto, la comparación directa entre las funciones  $a_i$  y las  $b_i$  no tiene sentido para  $\sigma = 0$ . Sí que podremos comparar  $F_{exp}^{(6)}(4m_{\pi}^2)$  con  $F_{ChPT}^{(6)}(4m_{\pi}^2)$  porque estas dos cantidades sí que son finitas.

#### 4.4.3 Comparación

Ahora que hemos introducido las fórmulas necesarias podemos proceder a la comparación de ambos resultados.

De la manera en que están escritas las funciones  $a_i ext{ y } b_i$ , es decir, con sus expresiones analíticas completas, no se ve ninguna semejanza a primera vista entre ellas.

Para comprender mejor la física que hay detrás de estas fórmulas es conveniente ir al límite quiral  $(m_{\pi} = 0)$  donde el parecido se hace más evidente. En este límite las funciones  $a_i$  son finitas en el umbral de modo que las podemos comparar directamente con las funciones  $b_i$ .

Comenzamos con la potencia más alta del logaritmo,  $a_3$  y  $b_3$ . En este caso el límite quiral es fácil,

$$\hat{a}_3 = \hat{b}_3 = 0. \tag{4.58}$$

El símbolo <sup>^</sup> significa que la función está en el límite quiral.

Los coeficientes para la segunda potencia del logaritmo son también iguales (aunque ya distintos de cero),

$$\hat{a}_2 = \hat{b}_2 = \frac{1}{72} \left(\frac{s}{16\pi^2 f^2}\right)^2.$$
 (4.59)

Este resultado es importante porque significa que, en el límite quiral, la parametrización exponencial resuma correctamente los logaritmos a orden  $p^6$ . Este hecho no ocurre en resumaciones basadas en los aproximantes de Padé [0,1], tales como las obtenidas por medio del método de la amplitud inversa (IAM) [13, 41, 42] o la parametrización Gounaris-Sakurai [43].

En el término subdominante (i.e. el lineal en el logaritmo) tenemos las primeras diferencias. Los valores para las funciones son

#### 4.4 Comparación

$$\hat{a_1} = \left(\frac{s}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \left[ -\left\{\frac{1}{18}\left(\overline{\ell_2} - \overline{\ell_1} + \frac{\overline{\ell_6}}{2}\right) + \frac{7}{108}\right\} - i\frac{\pi}{36}\theta(s) \right],$$
$$\hat{b_1} = \left(\frac{s}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \left[\frac{1}{36}\left\{\ln\left(\frac{m_\pi^2}{M_\rho^2}\right) - \frac{5}{3} - \frac{96\pi^2 f^2}{M_\rho^2}\right\} - i\frac{\pi}{36}\theta(s)\right] 4.60\right)$$

Para establecer una buena comparación tenemos que manipular la parte real de  $\hat{a}_1$ , en particular las constantes  $\overline{\ell_i}$ . En [32] podemos encontrar cómo reescribirlas en términos de las constantes  $\ell_i^r$  usuales de Gasser y Leutwyler [5], y también cómo pasar a las constantes de  $SU(3)_L \times$  $SU(3)_R$  denotadas como  $L_i^r$ . La equivalencia es<sup>§</sup>

$$\overline{\ell_2} - \overline{\ell_1} + \frac{\overline{\ell_6}}{2} = 96\pi^2 (2L_2^r - 4L_1^r - 4L_3^r + 2L_9^r) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_\pi^2}{\mu^2}\right). \quad (4.61)$$

Aplicando ahora la hipótesis de dominio vectorial (VMD) de acuerdo con [8] a la escala  $\mu^2 = M_{\rho}^2$  (hay que recordar que para obtener la expresión exponenciada del factor de forma se aplicó VMD) obtenemos

$$\overline{\ell_2} - \overline{\ell_1} + \frac{\overline{\ell_6}}{2} = \frac{120\pi^2 f^2}{M_{\rho}^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_{\pi}^2}{M_{\rho}^2}\right).$$
(4.62)

De esta manera, la parte real de  $\hat{a_1}$  que da ahora, en la aproximación de VMD, como

$$\operatorname{Re}\hat{a_1} = \left(\frac{s}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \frac{1}{36} \left\{ \ln\left(\frac{m_\pi^2}{M_\rho^2}\right) - \frac{7}{3} - \frac{240\pi^2 f^2}{M_\rho^2} \right\} \,. \tag{4.63}$$

El logaritmo de masas se reproduce correctamente, sin embargo queda todavía una diferencia con  $\hat{b_1}$ dada por

$$\hat{a_1} - \hat{b_1} = \left(\frac{s}{16\pi^2 f^2}\right)^2 \frac{1}{36} \left\{\frac{-2}{3} - \frac{144\pi^2 f^2}{M_{\rho}^2}\right\}.$$
(4.64)

<sup>§</sup>Ver Apéndice F

Esta diferencia procede de la contribución debida al intercambio de una resonancia  $\rho$  en el canal t en la interacción de estado final entre los dos piones. Conviene recordar que la interacción de estado final resumada en la exponencial, viene del desfasaje a nivel árbol  $\delta_1^1(s)$  calculado a partir de la amplitud de scattering  $\pi\pi$ . Para obtener dicha contribución sería necesario incluir el término de orden  $p^4$  en  $\delta_1^1(s)$ .

Finalmente comparamos los términos polinómicos. Los límites quirales para  $a_0 \ge b_0$  son

$$\hat{a}_{0} = \left(\frac{s}{16\pi^{2}f^{2}}\right)^{2} \left[ \left\{ \overline{f}_{2} + \frac{4}{27} \left( \overline{\ell_{2}} - \overline{\ell_{1}} + \frac{\overline{\ell_{6}}}{2} \right) - \frac{\overline{\ell_{4}}}{30} + \frac{2411}{6480} - \frac{11\pi^{2}}{270} \right\} \right. \\ \left. + i \left\{ \left( \overline{\ell_{2}} - \overline{\ell_{1}} + \frac{\overline{\ell_{6}}}{2} \right) \frac{\pi}{18} + \frac{7\pi}{108} \right\} \theta(s) \right], \qquad (4.65)$$

$$\hat{b}_{0} = s^{2} \left[ \frac{1}{M_{\rho}^{4}} - \frac{1}{(96\pi^{2}f^{2})^{2}} + \frac{1}{2(96\pi^{2}f^{2})^{2}} \left( \ln \left( \frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}} \right) - \frac{5}{3} \right)^{2} \right. \\ \left. - \frac{1}{96\pi^{2}f^{2}M_{\rho}^{2}} \left( \ln \left( \frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}} \right) - \frac{5}{3} \right) \right] \right. \\ \left. + is^{2} \left[ \frac{1}{48\pi f^{2}M_{\rho}^{2}} - \frac{\pi}{(96\pi^{2}f^{2})^{2}} \left( \ln \left( \frac{m_{\pi}^{2}}{M_{\rho}^{2}} \right) - \frac{5}{3} \right) \right] \theta(s). \quad (4.66)$$

Para establecer comparaciones numéricas tomaremos los siguientes valores experimentales para las constantes  $\bar{\ell}_i$  [32]

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_1 &= -1.7 \pm 1.0 \,, \\ \bar{\ell}_2 &= 6.1 \pm 0.5 \,, \\ \bar{\ell}_3 &= 2.9 \pm 2.4 \,, \end{aligned}$$

66

4.4 Comparación

$$\bar{\ell}_4 = 4.3 \pm 0.9,$$
  
 $\bar{\ell}_6 = 16.5 \pm 1.1.$ 
(4.67)

Con estos valores se obtiene que

$$\hat{a}_0 = \left[ (1.16 \pm 0.16 + 0.53 \,\overline{f}_2) + i(1.59 \pm 0.4) \right] \, s^2 \,,$$
$$\hat{b}_0 = (3.84 + 1.52 \,i) \, s^2 \,, \tag{4.68}$$

donde s tiene que estar expresada en  $\text{GeV}^2$ .

Como se puede ver las partes imaginarias coinciden. Las partes reales son iguales para  $\overline{f}_2 = 5.1 \pm 0.3$ . Este valor es compatible con las estimaciones previas que existen en la literatura. Algunas de estas estimaciones son [32]  $\overline{f}_2 \sim 4.8$ , [43]  $\overline{f}_2 = 6.9$ , [31]  $\overline{f}_2 = 6.6$ , [41, 42]  $\overline{f}_2 = 3.7$ .

Después de toda esta colección de fórmulas se puede concluir que la parametrización exponenciada es, en el límite quiral, una buena extrapolación para ChPT a energías más altas. La predicción hecha para el término de orden  $p^6$  es básicamente igual al resultado de ChPT (el término de orden  $p^4$  es exactamente igual por construcción). Es diferente solamente en la parte real de  $a_1$  (es decir, dado que las funciones son complejas, en una de seis), donde ya se esperaba debido a los argumentos dados anteriormente.

Una vez hemos visto la física subyacente, analizando el límite quiral, podemos estudiar numéricamente las expresiones completas (sin ningún límite) para  $a_i$  y  $b_i$ .

Debemos recordar que las funciones  $a_i$  son divergentes en  $\sigma = 0$ , de modo que en ese punto la comparación entre ChPT y la exponencial tiene que hacerse para la suma total a orden  $p^6$  y no término a término.

Los valores son

$$F_{\text{ChPT}}^{(6)}(s = 4m_{\pi}^2) = 0.0227 \pm 0.0009 ,$$
  
 $F_{\text{exp}}^{(6)}(s = 4m_{\pi}^2) = 0.0216 .$  (4.69)

Son completamente equivalentes. Para  $F_{\text{ChPT}}^{(6)}$  hemos tomado la constante  $\overline{f}_2$  igual al valor obtenido previamente.

Se ha tomado  $\overline{f}_1 = 0$  como sugieren todos los autores. Esta elección está justificada porque la contribución de  $\overline{f}_1$  al radio electromagnético del pión es despreciable, dado que este radio está saturado por la resonancia  $\rho$  (i.e. la constante  $L_9$ )

Cuando aumentamos la energía  $\sqrt{s}$  la diferencia entre  $F_{\rm ChPT}^{(6)}$  y  $F_{\rm exp}^{(6)}$  también aumenta. Para  $\sqrt{s} \sim 0.7$  GeV la parte real en la expresión exponencial es sólo un 15% mayor que en la de ChPT, alcanzando el 33% alrededor de 1 GeV. En la parte imaginaria la comparación es incluso mejor manteniéndose la diferencia sobre el 3% para  $\sqrt{s} = 1$  GeV.

Sin embargo, a energías tan altas la expansión en ChPT no es válida en absoluto. Sólo hay que recordar que aproximadamente a 0.7 GeV la corrección de orden  $p^4$  tiene el mismo valor que la contribución a nivel árbol (a orden  $p^2$ ), y lo mismo ocurre a 0.8 GeV esta vez entre los órdenes  $p^4$  y  $p^6$ .

El estudio numérico nos permite concluir que la pieza más importante a orden  $p^6$  es el polinomio, seguida por el término lineal en el logaritmo, luego por el cuadrático y por último el cúbico.

Un punto delicado de la parametrización exponenciada es el desplazamiento de la parte imaginaria desde el exponente hasta el propagador [16] como vimos anteriormente. Si no se hace este desplazamiento y se mantiene la parte imaginaria en el exponente, los términos con logaritmos no se modifican en absoluto (i.e. las funciones  $b_1,b_2$  y  $b_3$  serían las mismas). Sin embargo, la parte imaginaria de la función  $b_0$  cambia sustancialmente. En el límite quiral su valor pasa de Im $\hat{b}_0 = 1.52 s^2$  a Im $\hat{b}_0 = 0.88 s^2$ , una diferencia del 50%. Por tanto, las correcciones de orden superior son resumadas de manera más eficiente haciendo este desplazamiento de la parte imaginaria; tal y como se esperaba de la suma de la serie de Dyson de la autoenergía de la  $\rho$ .

# 4.5 Resonancias $\rho' \mathbf{y} \rho''$

Desde finales de los años 80 existe la evidencia bien justificada experimentalmente de la existencia de las resonancias  $\rho' \ge \rho''$ . Los valores

#### 4.5 Resonancias $\rho' \ge \rho''$

aceptados para sus masas son  $M_{\rho'} \sim 1450 \text{ MeV} \text{ y } M_{\rho''} \sim 1700 \text{ MeV}.$ 

Dado que en este trabajo hemos obtenido una parametrización para el factor de forma del pión que describe bien los datos experimentales hasta 1 GeV, el siguiente paso natural es incorporar al formalismo las siguientes resonancias en el canal I=1, J=1. Esto equivale a incluir nuevos octetes en la construcción del lagrangiano quiral de las resonancias. Lógicamente, la estructura de dicho lagrangiano será la misma que en el caso de la  $\rho$ , pero añadiendo dos nuevos términos, para la  $\rho'$ y la  $\rho''$  con acoplamientos  $F'_V$ ,  $G'_V$  y  $F''_V$ ,  $G''_V$  respectivamente.

Por tanto, el factor de forma del pión en el límite  $N_c$  grande es

$$F(s) = 1 + \frac{F_V G_V}{f_\pi^2} \frac{s}{M_\rho^2 - s} + \frac{F_V' G_V'}{f_\pi^2} \frac{s}{M_{\rho'}^2 - s} + \frac{F_V' G_V''}{f_\pi^2} \frac{s}{M_{\rho''}^2 - s}.$$
(4.70)

Imponiendo que  $F(s) \to 0$  para  $s \to \infty$  obtenemos la condición

$$\frac{F_V G_V}{f_\pi^2} + \frac{F_V' G_V'}{f_\pi^2} + \frac{F_V'' G_V''}{f_\pi^2} = 1, \qquad (4.71)$$

que denotamos por simplicidad como

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{4.72}$$

Por otro lado, el incluir más resonancias afecta también al comportamiento a bajas energías. Recordemos que la constante  $L_9$  estaba saturada por la contribución procedente del intercambio de la  $\rho$ . Ahora recibirá contribuciones también de  $\rho' \ge \rho''$  de la forma:

$$L_9^V = \frac{\alpha f_\pi^2}{2M_\rho^2} + \frac{\beta f_\pi^2}{2M_{\rho'}^2} + \frac{\gamma f_\pi^2}{2M_{\rho''}^2}.$$
 (4.73)

Las condiciones (4.72) y (4.73) imponen restricciones a los valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ .

Todo el procedimiento de exponenciación a partir del factor de forma del pión a orden  $p^4$  en ChPT se repite aquí exactamente igual,

resultando una expresión final que incluye a las nuevas resonancias de la forma

$$F(s) = \left[ \alpha \frac{M_{\rho}^{2}}{M_{\rho}^{2} - s - iM_{\rho}\Gamma_{\rho}(s)} + \beta \frac{M_{\rho'}^{2}}{M_{\rho'}^{2} - s - iM_{\rho'}\Gamma_{\rho'}(s)} + \gamma \frac{M_{\rho''}^{2}}{M_{\rho''}^{2} - s - iM_{\rho''}\Gamma_{\rho''}(s)} \right]$$

$$\times \exp\left\{ \frac{-s}{96\pi^{2}f_{\pi}^{2}} \left[ \operatorname{Re}A\left(m_{\pi}^{2}/s, m_{\pi}^{2}/M_{\rho}^{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}A\left(m_{K}^{2}/s, m_{K}^{2}/M_{\rho}^{2}\right) \right] \right\}.$$
(4.74)

Como vemos, aquí ya se han incluido las anchuras de desintegración. Sus expresiones son igual que la calculada para la  $\rho$ , sólo se diferencian en los valores de los acoplamientos. En (4.74) estas anchuras corresponden a

$$\Gamma_{\rho,\rho',\rho''}(s) = \gamma_{\rho,\rho',\rho''} \frac{M_{\rho,\rho',\rho''s}}{96\pi f_{\pi}^2} \left[ \sigma_{\pi}^3 \theta \left( s - 4m_{\pi}^2 \right) + \frac{1}{2} \sigma_K^3 \theta \left( s - 4m_K^2 \right) \right].$$
(4.75)

donde

$$\gamma_{\rho,\rho',\rho''} = \frac{2}{f_{\pi}^2} \left\{ G_V^2, G_V'^2, G_V''^2 \right\} \,. \tag{4.76}$$

Nótese que aquí no hemos empleado la condición (2.33) según la cual,

$$F_V = \sqrt{2} f_{\pi}, \qquad G_V = \frac{f_{\pi}}{\sqrt{2}}.$$
 (4.77)

Sin embargo, veremos que los valores que obtengamos la satisfarán.

Empleando la expresión (4.74) hemos realizado un ajuste de los datos experimentales [38, 44, 45] tomando como parámetros libres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $M_{\rho}$ ,  $M_{\rho'}$ ,  $M_{\rho''}$ ,  $\gamma_{\rho}$ ,  $\gamma_{\rho'}$  y  $\gamma_{\rho''}$ . El parámetro  $\gamma$  está fijado por la condición (4.72).

Para realizar el ajuste hemos eliminado de los datos de [38] los puntos correspondientes al pico de la interferencia  $\rho - \omega$ , es decir, el

intervalo  $0.72 < \sqrt{s} < 0.8$  GeV. Dado que (4.74) no contiene la contribución de la  $\omega$  (puesto que sólo tenemos canal I=1) y esos puntos tienen un error muy pequeño, intentar el ajuste con todos los datos no tenía sentido. Hecho esto, el ajuste se ha realizado con los datos del detector OLYA dados en [38], más los del detector DM2 dados en [44], más los de ALEPH dados en [45].

Por medio del programa MINUIT efectuamos el ajuste obteniendo los siguientes valores de los parámetros:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.02 \pm 0.05 \,, \\ \beta &= -0.15 \pm 0.07 \,, \\ \gamma &= 1 - \alpha - \beta = 0.13 \pm 0.09 \,, \\ M_{\rho} &= 772 \pm 6 \,\,\mathrm{MeV} \,, \\ M_{\rho'} &= 1470 \pm 210 \,\,\mathrm{MeV} \,, \\ M_{\rho''} &= 1800 \pm 140 \,\,\mathrm{MeV} \,, \\ \gamma_{\rho} &= 1.04 \pm 0.09 \,, \\ \gamma_{\rho'} &= 0.41 \pm 0.09 \,, \\ \gamma_{\rho''} &= 0.09 \pm 0.09 \,. \end{aligned}$$

En la figura 4.7 se puede ver que el ajuste es relativamente bueno, con un  $\chi^2 = 1.4$ . En esa figura no sólo se han representado los datos que hemos utilizado sino que se muestran todos los dados en [38, 44, 45].

A partir de (4.78) podemos obtener los acoplamientos de las tres resonancias.

$$F_V = 132 \pm 9 \text{ MeV}, \qquad G_V = 67 \pm 3 \text{ MeV},$$
  

$$F'_V = -31 \pm 14 \text{ MeV}, \qquad G'_V = 42 \pm 5 \text{ MeV},$$
  

$$F''_V = 60 \pm 50 \text{ MeV}, \qquad G''_V = 20 \pm 10 \text{ MeV}. \quad (4.79)$$

Debido a que la  $\rho$  es la resonancia dominante en este canal, sus acoplamientos  $F_V$  y  $G_V$  coinciden con los dados en (2.33) a partir del comportamiento de QCD a altas energías [9], esto es

$$F_V = \sqrt{2} f_\pi = 132 \text{ MeV},$$
  $G_V = f_\pi / \sqrt{2} = 66 \text{ MeV}.$  (4.80)

Los valores para las masas de  $\rho$ ,  $\rho' \ge \rho''$  están de acuerdo con los dados previamente en otros ajustes [46, 44, 45].

No ocurre lo mismo con las anchuras de desintegración. Estas se obtienen a partir de (4.74) y resultan:

$$\Gamma_{\rho} (M_{\rho}) = 149 \pm 13 \text{ MeV},$$
  

$$\Gamma_{\rho'} (M_{\rho'}) = 600 \pm 270 \text{ MeV},$$
  

$$\Gamma_{\rho''} (M_{\rho''}) = 250 \pm 250 \text{ MeV}.$$
(4.81)

La anchura de la  $\rho$  coincide con la dada por el PDG [47], mientras que la de la  $\rho'$  se diferencia en 1.0 $\sigma$ . El error en la anchura de la  $\rho''$  es tan grande que el valor en realidad no sirve más que como una estimación.

Por último nos queda comprobar que el comportamiento del factor de forma (4.74) a bajas energías es el correcto. Para ello calculamos el valor de  $L_9^V$  por medio de (4.73), resulta ser

$$L_9^V = (7.4 \pm 0.3) \cdot 10^{-3} \,. \tag{4.82}$$

Un poco más alto que el valor experimental  $L_9^{exp} = (6.9 \pm 0.7) \cdot 10^{-3}$  y que el dado en [32]  $L^9 = (6.6 \pm 0.6) \cdot 10^{-3}$  pero compatible con ellos. De
4.6 Resumen.

Figura 4.7: Factor de forma comparado con los datos experimentales. Datos: triángulos [38, 44], círculos [45]

hecho, en la figura 4.7 el comportamiento a bajas energías es totalmente correcto.

Por tanto, después de estos tests podemos decir que la parametrización (4.74) para el factor de forma del pión es una buena extrapolación a energías aún mayores de la exponencial obtenida en (4.42).

## 4.6 Resumen

Utilizando nuestro conocimiento actual sobre teorías efectivas hadrónicas,

información de QCD a cortas distancias, la expansión en  $1/N_c$ , analiticidad y unitariedad, hemos derivado una expresión simple para el factor de forma del pión, en términos de  $m_{\pi}$ ,  $m_K$ ,  $M_{\rho}$  y  $f_{\pi}$ . La predicción resultante (y libre de parámetros) da una buena descripción de los datos experimentales hasta energías del orden de 1 GeV.

Nuestro resultado principal, dado en (4.42), contiene dos componentes básicos. El propagador de la  $\rho$  proporciona la contribución dominante en el límite de número de colores grande; suma un número infinito de términos locales en la expansión quiral a bajas energías. Las correcciones de los loops quirales, correspondientes a la interacción de estado final entre los dos piones, aparecen al siguiente orden en la expansión en  $1/N_c$ ; la exponencial de Omnès permite realizar una resumación de estas correcciones de unitariedad, extendiendo el dominio de validez más allá del original del cálculo en ChPT.

Requerir consistencia con la suma de Dyson de la autoenergía de la  $\rho$ , fuerza a desplazar la fase imaginaria desde la exponencial hasta el propagador de la  $\rho$ . Mientras que este cambio no modifica los resultados rigurosos de ChPT a bajas energías, sí que regula el polo de la  $\rho$  y hace que el desfasaje resultante pase por  $\pi/2$  en la masa de la resonancia  $\rho$ .

Como se ve en las figuras 4.4 y 4.5, el factor de forma experimental del pión está bien reproducido tanto en módulo como en fase. Aunque la contribución de la  $\rho$  es el efecto físico dominante, la resumación de Omnès resulta imprescindible para obtener la correcta normalización en el pico de la resonancia.

A continuación, dado que la expresión exponencial contiene contribuciones a todos los órdenes en potencias de momento, hemos comparado su término de orden  $p^6$  con el que aparece en el cálculo a dos loops del factor de forma del pión en ChPT para observar si la exponencial suma correctamente los logaritmos o no.

En el límite quiral hemos probado que la resumación es correcta al menos cualitativamente. Reproduce el factor correcto para el logaritmo dominante y un valor compatible con los existentes en la literatura para  $\overline{f}_2$ .

Numéricamente observamos que ambas contribuciones a orden  $p^6$ difieren sólo en unos pocos tantos por ciento en las partes reales y menos del uno por ciento en las imaginarias para la región de energías donde ChPT tiene sentido ( $\sqrt{s} < 500$  MeV). Esto demuestra que la

#### 4.6 Resumen.

parametrización contiene las contribuciones más relevantes a órdenes superiores. Las contribuciones no incluidas (loops y resonancias en los canales u y t) no son tan importantes cuantitativamente.

La diferencia observada en las funciones  $a_1$  y  $b_1$  entre ChPT y la exponencial pueden corregirse introduciendo  $\delta_1^1(s)$  a orden  $p^4$ . Por supuesto, en ese caso la correspondencia entre  $F_{ChPT}^{(6)}$  y  $F_{exp}^{(6)}$  sería exacta.

Obviamente la parametrización aquí presentada no es la única que existe en la literatura. Muchos estudios detallados sobre el factor de forma del pión se han llevado a cabo previamente [13, 31, 32, 41, 42, 43, 46, 48]. Todos los ingredientes que hemos utilizado se pueden encontrar en la literatura. Sin embargo, cuando uno combina todos estos elementos es cuando aparece una descripción tan sencilla para F(s).

Por último hemos realizado una extrapolación de la parametrización exponencial a energías mayores incluyendo las resonancias  $\rho' \ge \rho''$ . El ajuste de los datos experimentales que se obtiene es satisfactorio y los parámetros característicos de las resonancias resultan compatibles con los ya existentes en la literatura.

Capítulo 4. Factor de forma del pión

# CAPÍTULO 5 OTROS FACTORES DE FORMA

En el capítulo anterior hemos comprobado cómo la función de Omnès nos permite elaborar una parametrización para el factor de forma del pión que resuma las contribuciones de órdenes superiores y describe muy bien los datos experimentales.

La idea ahora es extender este formalismo a otros canales. En particular lo aplicaremos a los factores de forma de pión-kaón y al del kaón.

## 5.1 Factor de forma pión-kaón

Como en el caso del pión, definimos el factor de forma a partir del elemento de matriz de la corriente vectorial. Ahora el estado final es  $K\pi$  y resulta,

$$\langle K^{+}\pi^{0}|\bar{u}\gamma^{\mu}s|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \left( p_{K} - p_{\pi} - \frac{\Delta_{K\pi}}{s}q \right)^{\mu} F_{V}(s) + \frac{\Delta_{K\pi}}{s}q^{\mu} F_{S}(s) \right].$$
(5.1)

Debido a que las masas de kaón y pión son distintas, la corriente vectorial no se conserva. Por tanto, el elemento de matriz no es transverso a  $q_{\mu}$ , el cuadrimomento del par  $K\pi$ .

La estructura Lorentz de (5.1) contiene un primer término transverso a  $q_{\mu}$  y que corresponde a espín uno (J=1), donde  $\Delta_{K\pi} = m_K^2 - m_{\pi}^2$ , y un segundo término longitudinal en  $q_{\mu}$  con espín cero (J=0).

La dependencia en  $s = q^2$  está contenida en los factores de forma, denotados por  $F_V(s)$  para el vectorial y  $F_S(s)$  para el escalar.

Hay que comentar también que el factor de normalización  $1/\sqrt{2}$ pasa a ser  $\sqrt{2}$  cuando el estado final es  $K^0\pi^+$ .

#### 5.1.1 Factor de forma vectorial

La expresión del factor de forma vectorial se encuentra calculada a orden  $p^4$  en ChPT en [7]. Su expresión es

$$F_V(s) = 1 + \frac{3}{2f_\pi^2} \left\{ s \left( M_{K\pi}^r(s) + M_{K\eta}^r(s) \right) - \left( L_{K\pi}(s) + L_{K\eta}(s) \right) \right\} + \frac{2L_9^2}{f_\pi^2} s \left( \frac{1}{5.2} \right)^2 \right\}$$

Las funciones de loops  $M_{PQ}^{r}(s)$  y  $L_{PQ}(s)$  están definidas en [6] y reproducidas en las ecuaciones (6.41), (6.42) y (6.43).

El siguiente paso, siguiendo el paralelismo con el factor de forma del pión, es añadir la contribución debida al intercambio de resonancias.

En este proceso la resonancia involucrada es la  $K^\ast$ y su contribución es

$$\frac{F_V G_V}{f_\pi^2} \frac{s}{M_{K^*}^2 - s} \,. \tag{5.3}$$

Teniendo en cuenta la condición  $F_V G_V/f_\pi^2=1$  procedente de las restricciones de QCD a altas energías, nos queda

$$\frac{s}{M_{K^*}^2 - s} \,. \tag{5.4}$$

Asumiendo VMD para la saturación de la constante  $L_9$  podemos escribir el factor de forma vectorial incluyendo ahora ChPT a orden  $p^4$ más la resonancia  $K^*$ .

$$F_V(s) = \frac{M_{K^*}^2}{M_{K^*}^2 - s} + \frac{3}{2f_\pi^2} \left\{ s \left( M_{K\pi}^r(s) + M_{K\eta}^r(s) \right) - \left( L_{K\pi}(s) + L_{K\eta}(s) \right) \right\}$$
(5.5)

A partir de aquí la resumación es totalmente equivalente a la realizada en el caso del factor de forma del pión.

Para energías  $\sqrt{s} < m_K + m_\eta$  el proceso es elástico y podemos aplicar Omnès. La amplitud en onda parcial  $K\pi$  para I = 1/2 y J = 1 es

$$T_1^{1/2}(s) = \frac{1}{128\pi f_\pi^2 s} \lambda(s, m_K^2, m_\pi^2), \qquad (5.6)$$

donde

$$\lambda(s, m_P^2, m_Q^2) = \left(s - \left(m_P + m_Q\right)^2\right) \left(s - \left(m_P - m_Q\right)^2\right) \,. \tag{5.7}$$

Capítulo 5. Otros factores de forma

El desfasaje  $\delta_1^{1/2}(s)$  resulta

$$\delta_1^{1/2}(s) = \frac{1}{128\pi f_\pi^2 s^2} \lambda^{3/2}(s, m_K^2, m_\pi^2) \,. \tag{5.8}$$

Coincide exactamente con la parte imaginaria de (5.2) satisfaciendo el teorema de Watson [36].

Por tanto, repitiendo el procedimiento visto en el capítulo anterior obtenemos una expresión exponenciada para  $F_V(s)$ 

$$F_V(s) = \frac{M_{K^*}^2}{M_{K^*}^2 - s} \exp\left\{\frac{3}{2f_\pi^2} \left[sM_{K\pi}^r(s) - L_{K\pi}(s)\right]\right\}.$$
 (5.9)

Esta expresión satisface los requisitos del límite de bajas energías y tiene la fase correcta a orden  $p^4$ .

El siguiente paso es regularizar el polo de la resonancia y para ello calculamos la anchura por medio del lagrangiano quiral de las resonancias.

La suma de la serie de Dyson de la autoenergía de la  $K^*$  nos da que su anchura de desintegración es

$$\Gamma_V(s) = \frac{M_{K^*}}{128\pi f_\pi^2 s^2} \lambda^{3/2}(s, m_K^2, m_\pi^2)$$
(5.10)

para  $m_{\pi} + m_K < \sqrt{s} < m_K + m_{\eta}$ .

En el caso  $s = M_{K^*}^2$  resulta ser  $\Gamma_V(M_{K^*} = 0.892 \,\text{GeV}) = 55 \,\text{MeV},$ muy próximo al valor experimental  $\Gamma = 49.8 \pm 0.8 \,\text{MeV}.$ 

Al introducir  $\Gamma_V(s)$  en el propagador de  $F_V(s)$  en (5.9) se observa de nuevo (como con el pión) que, al expandir en potencias de momentos, la parte imaginaria procedente del propagador y la procedente de la exponencial son iguales a orden  $p^4$ . Actuando de la misma manera que en el caso del factor de forma del pión podemos identificar ambas contribuciones y regular el polo simplemente desplazando la parte imaginaria de la exponencial al propagador.

Añadiendo además la contribución del estado intermedio  $K\eta$ nos queda la expresión final siguiente

$$F_V(s) = \frac{M_{K^*}^2}{M_{K^*}^2 - s - iM_{K^*}\Gamma_V(s)} \exp\left\{\frac{3}{2f_\pi^2} \left[s\operatorname{Re}\left\{M_{K\pi}^r(s) + M_{K\eta}^r\right\}\right]\right\}$$

5.1 Factor de forma escalar

$$-\operatorname{Re}\left\{L_{K\pi}(s) + L_{K\eta}(s)\right\}\right\},\tag{5.11}$$

donde

$$\Gamma_{V}(s) = \frac{M_{K^{*}}}{128\pi f_{\pi}^{2}} \frac{1}{s^{2}} \left[ \lambda^{3/2}(s, m_{K}^{2}, m_{\pi}^{2})\theta \left(s - (m_{K} + m_{\pi})^{2}\right) + \lambda^{3/2}(s, m_{K}^{2}, m_{\eta}^{2})\theta \left(s - (m_{K} + m_{\eta})^{2}\right) \right].$$
(5.12)

La comparación con datos experimentales del módulo de  $F_V(s)$  se hará más adelante de manera indirecta a partir de desintegraciones del  $\tau$ .

El desfasaje sí que se puede comparar directamente a partir de los datos.

La predicción que (5.11) da para el desfasaje  $\delta_1^{1/2}(s)$  es

$$\delta_1^{1/2}(s) = \arctan\left\{\frac{M_{K^*}\Gamma_V(s)}{M_{K^*}^2 - s}\right\}.$$
 (5.13)

La figura 5.1 muestra cómo la predicción describe bastante bien los datos desde el umbral hasta 1.2 GeV.

A grandes energías nuestra predicción alcanza un límite, que es de 167° considerando sólo como estado intermedio el  $K\pi$  y de 155.6° si incluimos también el  $K\eta$ . En ambos casos el resultado es compatible con el experimento.

### 5.1.2 Factor de forma escalar

Según podemos ver en [7] la expresión del factor de forma escalar  $F_S(s)$  a orden  $p^4$  en ChPT es

$$F_S(s) = 1 + \frac{1}{8f_\pi^2} \left( 5s - 2\Sigma_{K\pi} - 3\frac{\Delta_{K\pi}^2}{s} \right) \overline{J}_{K\pi}(s)$$
$$+ \frac{1}{24f_\pi^2} \left( 3s - 2\Sigma_{K\pi} - \frac{\Delta_{K\pi}^2}{s} \right) \overline{J}_{K\eta}(s)$$



Figura 5.1: Desfasaje  $K\pi$  para I=1/2, J=1. Datos: triángulos [72], círculos [40].

5.1 Factor de forma escalar

$$+\frac{s}{4\Delta_{K\pi}}\left(5\mu_{\pi}-2\mu_{K}-3\mu_{\eta}\right)+\frac{4L_{5}^{r}}{f_{\pi}^{2}}s\,,\qquad(5.14)$$

donde

$$\mu_P = \frac{m_P^2}{32\pi^2 f_\pi^2} \ln \frac{m_P^2}{\mu^2}, \qquad \Sigma_{PQ} = m_P^2 + m_Q^2, \qquad (5.15)$$

y  $\overline{J}_{PQ}(s)$  está definida en (6.41).

Igual que antes hemos de calcular la contribución debida al intercambio de resonancias para poder ir a energías mayores. En este caso la resonancia involucrada es la  $K_0^*(1430)$  y su contribución, calculada con el lagrangiano quiral de las resonancias [8, 9] es

$$\frac{4c_d c_m}{f_\pi^2} \frac{s}{M_{K_0^*}^2 - s} \left[ 1 + \frac{c_m - c_d}{sc_d} \left( m_\pi^2 + m_K^2 \right) \right].$$
(5.16)

En [8] se dan como valores de los acoplamientos  $c_d$  y  $c_m$  los siguientes

$$|c_d| = 0.032 \pm 0.013 \,\text{GeV},$$
  
 $|c_m| = 0.042 \pm 0.007 \,\text{GeV},$   
 $c_d c_m > 0.$  (5.17)

Estos valores se obtuvieron suponiendo que las constantes  $L_5$  y  $L_8$  del lagrangiano  $\mathcal{L}_{\triangle}$  de ChPT están saturadas por las resonancias escalares.

En el límite  $N_c \to \infty$  y suponiendo saturación de  $L_5$  por la resonancia  $K_0^*$ , el factor de forma escalar es

$$F_S^{N_c}(s) = 1 + \frac{4c_d c_m}{f_\pi^2} \frac{s}{M_{K_0^*}^2 - s} \left[ 1 + \frac{c_m - c_d}{sc_d} \left( m_\pi^2 + m_K^2 \right) \right].$$
(5.18)

La condición de que  $F_S(s) \to 0$  cuando  $s \to \infty$  impone que

$$\frac{4c_d c_m}{f_\pi^2} = 1 \tag{5.19}$$

(de donde se deduce la condición dada en (5.17)) y, por tanto, podemos reescribir el factor de forma escalar según (5.18) en términos sólo de  $c_d$ .

$$F_S^{N_c}(s) = \frac{M_{K_0^*}^2}{M_{K_0^*}^2 - s} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_\pi^2}{4c_d^2} \right) \frac{m_\pi^2 + m_K^2}{M_{K_0^*}^2} \right].$$
 (5.20)

Incluyendo ahora las correcciones en  $1/N_c$  procedentes de los loops y dadas en (5.14) obtenemos una expresión que incorpora ChPT más la contribución de la resonancia:

$$F_{S}(s) = \frac{M_{K_{0}^{*}}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2} - s} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_{\pi}^{2}}{4c_{d}^{2}} \right) \frac{m_{\pi}^{2} + m_{K}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2}} \right] \\ + \frac{1}{8f_{\pi}^{2}} \left( 5s - 2\Sigma_{K\pi} - 3\frac{\Delta_{K\pi}^{2}}{s} \right) \overline{J}_{K\pi}(s) \\ + \frac{1}{24f_{\pi}^{2}} \left( 3s - 2\Sigma_{K\pi} - \frac{\Delta_{K\pi}^{2}}{s} \right) \overline{J}_{K\eta}(s) \\ + \frac{s}{4\Delta_{K\pi}} \left( 5\mu_{\pi} - 2\mu_{K} - 3\mu_{\eta} \right) , \qquad (5.21)$$

donde se ha fijado  $\mu = M_{\rho}$ .

Esta expresión describe mejor el factor de forma que la procedente de ChPT a orden  $p^4$ . Sin embargo queremos resumar también las correcciones de loops en forma exponenciada, como en los casos anteriores. De nuevo emplearemos la ecuación de Omnès, para lo cual hemos de obtener primero el desfasaje correspondiente.

Nos restringimos a la región elástica  $\sqrt{s} < m_K + m_\eta$  para poder aplicar Omnès. La amplitud en onda parcial I = 1/2, J = 0 del scattering  $K\pi$  es

$$T_0^{1/2}(s) = \frac{1}{128\pi f_\pi^2} \left( 5s - 2\Sigma_{K\pi} - 3\frac{\Delta_{K\pi}^2}{s} \right) \,. \tag{5.22}$$

A partir de esta expresión es fácil ver que (5.14) satisface el teorema de Watson. El desfasaje  $\delta_0^{1/2}(s)$  a orden  $p^2$  es

$$\delta_0^{1/2}(s) = \frac{1}{128\pi f_\pi^2} \left( 5s - 2\Sigma_{K\pi} - 3\frac{\Delta_{K\pi}^2}{s} \right) \frac{1}{s} \lambda^{1/2}(s, m_K^2, m_\pi^2) \,, \quad (5.23)$$

que, como cabía esperar, coincide con la parte imaginaria del factor de forma a orden  $p^4$  en ChPT (5.14).

Aplicando la ecuación de Omnès del mismo modo que en las secciones anteriores obtenemos la siguiente expresión exponenciada para el factor de forma escalar

$$F_S(s) = \frac{M_{K_0^*}^2}{M_{K_0^*}^2 - s} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{f_\pi^2}{4c_d^2} \right) \frac{m_\pi^2 + m_K^2}{M_{K_0^*}^2} \right] \exp\left\{ \operatorname{Re}F_4 + i\operatorname{Im}F_4 \right\} .$$
(5.24)

Incluyendo la pequeña contribución del estado intermedio  $K\eta$  tendremos que  $\operatorname{Re} F_4$  e  $\operatorname{Im} F_4$  son las partes real e imaginaria de la componente de orden  $p^4$  de (5.14) sin considerar la constante  $L_5^r$ . Es decir,

$$F_{4} = \frac{1}{8f_{\pi}^{2}} \left( 5s - 2\Sigma_{K\pi} - 3\frac{\Delta_{K\pi}^{2}}{s} \right) \overline{J}_{K\pi}(s) + \frac{1}{24f_{\pi}^{2}} \left( 3s - 2\Sigma_{K\pi} - \frac{\Delta_{K\pi}^{2}}{s} \right) \overline{J}_{K\eta}(s) + \frac{s}{4\Delta_{K\pi}} \left( 5\mu_{\pi} - 2\mu_{K} - 3\mu_{\eta} \right)$$
(5.25)

Hasta aquí todo ha sido igual que en los casos anteriores. Las diferencias llegan al introducir una anchura al propagador de la resonancia. Si procedemos calculando la autoenergía de la  $K_0^*$  y sumando la serie de Dyson, la expresión a la que se llega es

$$\Gamma_S(s) = \frac{3}{32\pi f_\pi^4 M_{K_0^*} s} \left[ c_d \left( s - m_\pi^2 - m_K^2 \right) + c_m \left( m_\pi^2 + m_K^2 \right) \right]^2$$

Capítulo 5. Otros factores de forma

$$\times \lambda^{1/2} (s, m_K^2, m_\pi^2) \theta \left( s - (m_\pi + m_K)^2 \right) + \frac{1}{864\pi f_\pi^4 M_{K_0^*} s} \left[ c_d \left( 3s - 7m_K^2 - m_\pi^2 \right) \right) + 3c_m \left( 5m_K^2 - 3m_\pi^2 \right) \right]^2 \times \lambda^{1/2} (s, m_K^2, m_\eta^2) \theta \left( s - (m_\eta + m_K)^2 \right)$$
(5.26)

Para los valores de  $c_d$  y  $c_m$  dados antes la anchura de la resonancia toma el valor  $\Gamma_S(M_{K_0^*}) = 1.3$  GeV, demasiado grande y alejado del valor experimental  $\Gamma_{\exp} = 287 \pm 23$  MeV. Otro indicio de que esta expresión no es la apropiada es su comportamiento asintótico. Cuando  $s \to \infty$ ,  $\Gamma_S(s) \sim s^2$  lo que se traduce en un mal comportamiento para el desfasaje de (5.24) (después de haber introducido la anchura en el propagador).

Por otro lado, con esta anchura no es posible realizar, como en los casos anteriores la identificación entre las contribuciones imaginarias procedentes del propagador y de la exponencial. No son iguales para ningún valor de  $c_d$  y  $c_m$ .

Por todas estas razones la parametrización que utilizaremos será

$$F_{S}(s) = \frac{M_{K_{0}^{*}}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2} - s - iM_{K_{0}^{*}}\Gamma_{S}(s)} \left[ 1 - \left(1 - \frac{f_{\pi}^{2}}{4c_{d}^{2}}\right) \frac{m_{\pi}^{2} + m_{K}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2}} \right] \\ \times \exp\left\{\operatorname{Re}F_{4} + i\operatorname{Im}F_{4}\right\}.$$
(5.27)

donde no hemos bajado  $\text{Im}F_4$  al propagador.

Para la anchura utilizaremos la expresión dada en [49]

$$\Gamma_S(s) = \Gamma_0 \frac{M_{K_0^*}^2}{s} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_K^2, m_\pi^2)}{\lambda^{1/2}(M_{K_0^*}^2, m_K^2, m_\pi^2)} \,.$$
(5.28)

El objetivo es realizar un ajuste de los datos experimentales del desfasaje  $\delta_0^{1/2}(s)$  [50] para determinar los valores de  $M_{K_0^*}$  y  $\Gamma_0$ . La predicción dada por la expresión (5.27) para el desfasaje es

5.1 Factor de forma escalar

$$\delta_0^{1/2}(s) = \arctan\left(\frac{M_{K_0^*}\Gamma_S(s)}{M_{K_0^*}^2 - s}\right) + \operatorname{Im} F_4.$$
(5.29)

Empleando esta expresión el ajuste es muy malo ya que  $\text{Im} F_4$  prácticamente satura los datos experimentales. Esto se debe a que  $\text{Im} F_4$  crece como s y nos encontramos en un proceso en el que s es bastante grande: el umbral está ya a 633 MeV y, por tanto, cerca del límite de predictibilidad de ChPT. Es por esto por lo que es aceptable aplicar a  $\text{Im} F_4$  una resumación del tipo Padé de la forma

$$\mathrm{Im}F_4 \to \frac{\mathrm{Im}F_4}{|1 - i\mathrm{Im}F_4|^2} \tag{5.30}$$

para conseguir un buen comportamiento en  $s \to \infty$ .

Por tanto, sustituyendo en (5.29) resulta

$$\delta_0^{1/2}(s) = \arctan\left(\frac{M_{K_0^*}\Gamma_S(s)}{M_{K_0^*}^2 - s}\right) + \frac{\mathrm{Im}F_4}{1 + (\mathrm{Im}F_4)^2}.$$
 (5.31)

Ajustamos con esta expresión los datos experimentales y obtenemos que el mejor ajuste corresponde a unos valores de

$$M_{K_0^*} = 1.396 \pm 0.006 \text{ GeV},$$
  
 $\Gamma_0 = 0.27 \pm 0.02 \text{ GeV},$  (5.32)

El ajuste obtenido es muy bueno \*, como se puede ver en la figura 5.2.

El interés de este factor de forma radica principalmente en su contribución a la determinación de la masa del quark extraño,  $m_s$ . Un canal muy apropiado para obtener  $m_s$  es precisamente el que aquí estamos utilizando: (I, J) = (1/2, 0). Un conocimiento detallado de la función espectral escalar-escalar (o equivalentemente, de la parte imaginaria del

<sup>\*</sup>Los errores mostrados en la figura 5.2 están deducidos a partir del tamaño de los puntos de la gráfica dada en [50] ya que los autores no proporcionan en el artículo los valores medidos. Probablemente esto produce una sobreestimación de los errores.

factor de forma escalar) es fundamental para poder determinar  $m_s$  a partir de las reglas de suma de QCD [49].

De acuerdo con todas las consideraciones anteriores, nuestra expresión final para el factor de forma escalar  $K\pi$  es

$$F_{S}(s) = \frac{M_{K_{0}^{*}}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2} - s - iM_{K_{0}^{*}}\Gamma_{S}(s)} \left[ 1 - \left(1 - \frac{f_{\pi}^{2}}{4c_{d}^{2}}\right) \frac{m_{\pi}^{2} + m_{K}^{2}}{M_{K_{0}^{*}}^{2}} \right] \\ \times \exp\left\{ \operatorname{Re}F_{4} + \frac{i\operatorname{Im}F_{4}}{1 + \left(\operatorname{Im}F_{4}\right)^{2}} \right\}.$$
(5.33)

## 5.1.3 Anchura de desintegración $\tau^- \rightarrow K^- \pi^0 \nu_{\tau}$

La anchura de desintegración  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$  permite medir experimentalmente el módulo del elemento de matriz de la corriente vectorial, dado en (5.1) entre el vacío y el estado  $K^- \pi^0$ .

A partir de los factores de forma  $F_V(s)$  y  $F_S(s)$  que hemos obtenido podemos realizar una predicción de la anchura  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$  y compararla con el experimento.

La amplitud de dicho proceso es

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} G_F \sin \theta_c \left[ \overline{u}_{\nu_\tau} \gamma^\mu \left( 1 - \gamma_5 \right) u_\tau \right] \left\langle K^- \pi^0 \left| \overline{s} \gamma_\mu u \right| 0 \right\rangle \,. \tag{5.34}$$

donde  $G_F$  es la constante de Fermi y  $\theta_c$  es el ángulo de Cabibbo.

Sustituyendo el elemento de matriz por su expresión (5.1) y resolviendo el espacio fásico, llegamos al resultado para la anchura de  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$ .

$$\Gamma\left(\tau^{-} \to K^{-} \pi^{0} \nu_{\tau}\right) = \frac{G_{F}^{2} \sin^{2} \theta_{c}}{256 \pi^{3} m_{\tau}^{3}} \int_{(m_{\pi} + m_{K})^{2}}^{m_{\tau}^{2}} \frac{ds}{6s^{2}} \left(m_{\tau}^{2} - s\right)^{2} \lambda^{1/2} \left(s, m_{K}^{2}, m_{\pi}^{2}\right) \\ \times \left\{ \left(m_{\tau}^{2} + 2s\right) \left[\lambda \left(s, m_{K}^{2}, m_{\pi}^{2}\right) |F_{V}(s)|^{2} - \Delta_{K\pi}^{2} |F_{S}(s)|^{2}\right] \right\}$$

5.1 Anchura de desintegración  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_\tau$ 



Figura 5.2: Desfasaje  $K\pi$  para I=1/2, J=0. Datos: [50].

Capítulo 5. Otros factores de forma

+ 2 
$$\left(s + 2m_{\tau}^{2}\right) \Delta_{K\pi}^{2} \left|F_{S}(s)\right|^{2}$$
 . (5.35)

Empleando los factores de forma de las secciones anteriores se comprueba que (5.35) reproduce el valor experimental

BR 
$$(\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_\tau) = 5.2 \cdot 10^{-3}$$
 (5.36)

si se toma  $c_d = 0.014$  GeV.

Recordemos que, para que  $F_S(s)$  tuviera un buen comportamiento en  $s \to \infty$  se debía satisfacer que

$$\frac{4c_d c_m}{f_\pi^2} = 1\,,\tag{5.37}$$

lo que, para el valor de  $c_d$  dado arriba, significa que  $c_m = 0.155$  GeV.

En [8] se dan las expresiones de la contribución de la resonancia a las constantes  $L_i$ . En particular se suponen  $L_5$  y  $L_8$  saturadas por la resonancia para, dando la vuelta al argumento, obtener  $c_d$  y  $c_m$ .

Con los valores deducidos aquí para  $c_d$  y  $c_m$  resulta

$$L_5^S = \frac{c_d c_m}{M_{K_0^*}^2} = \frac{f_\pi^2}{4M_{K_0^*}^2} = 1.1 \cdot 10^{-3}, \qquad (5.38)$$

muy próximo al valor experimental  $L_5^r = (1.4 \pm 0.5) \cdot 10^{-3}$ , con lo que se comprueba que nuestra sustitución de  $L_5^r$  por su parte resonante en (5.21) está justificada.

Una vez reproducido el valor del BR ( $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$ ) podemos comparar la distribución en energía de nuestra expresión (5.35) para la anchura con los datos experimentales. Esto se muestra en la figura 5.3, donde comprobamos que nuestra predicción es bastante buena. La línea sólida de la figura corresponde a  $1/\Gamma d\Gamma/d\sqrt{s}$  según (5.35), mientras que la línea de trazos representa la contribución puramente vectorial, i. e. se ha tomado  $F_S(s) = 0$ .

En el valor total de la anchura la contribución debida al factor de forma escalar supone alrededor de un 40% del total. En la figura 5.3 vemos como esa contribución es más o menos constante en todo el rango energías.



Figura 5.3: Distribución en momentos de la anchura  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$ . Datos: [51, 52].

## 5.2 Factor de forma del kaón

De modo análogo a los distintos factores de forma mostrados hasta ahora, el factor de forma del kaón lo podemos definir también a partir del elemento de matriz de la corriente vectorial entre el vacío y el estado  $K^0K^-$  de la siguiente manera:

$$\langle K^0 K^- | \overline{u} \gamma^{\mu} d | 0 \rangle = \frac{1}{2} F_K(s) \left( p_{K^0} - p_{K^-} \right)^{\mu} .$$
 (5.39)

Igual que en el factor de forma del pión, el estado final (ahora los dos kaones) corresponde a I = J = 1, de acuerdo con la conservación de la corriente vectorial.

Para obtener la expresión de  $F_K(s)$  a orden  $p^4$  hemos de trabajar un poco con los factores de forma dados en la literatura. En [7] encontramos los factores de forma para los estados finales  $K^+K^-$  y  $K^0\overline{K}^0$ . Denotados por  $F_c(s)$  y  $F_n(s)$  respectivamente sus expresiones son

$$F_{c}(s) = 1 + H_{\pi\pi}(s) + 2H_{KK}(s),$$
  

$$F_{n}(s) = -H_{\pi\pi}(s) + H_{KK}(s),$$
(5.40)

donde

$$H_{PP}(s) = \frac{-s}{192\pi^2 f_{\pi}^2} A(m_P^2/s, m_P^2/\mu^2) + \frac{2L_9^r}{3f_{\pi}^2}s.$$
 (5.41)

La función  $A(m_P^2/s, m_P^2/\mu^2)$  ya fue definida en (4.3).

Extrayendo de ambos,  $F_c(s)$  y  $F_n(s)$ , la componente I = 1 correspondiente al estado  $K^0K^-$  obtenemos  $F_K(s)$  a orden  $p^4$  en ChPT.

$$F_K(s) = F_c(s) - F_n(s) = 1 + 2H_{\pi\pi}(s) + H_{KK}(s).$$
(5.42)

Comparando con (4.2) comprobamos que, a orden  $p^4$ , el factor de forma del pión y el del kaón coinciden.

Ahora bien, el umbral de dos kaones se abre prácticamente a 1 GeV, de modo que intentar cualquier tipo de predicción sobre el factor de forma del kaón sólo con ChPT no tiene sentido. Necesitamos una resumación de órdenes superiores si pretendemos decir algo sobre los datos experimentales. Sin embargo, en este caso no podemos aplicar la función de Omnès puesto que para ningún valor de  $\sqrt{s}$  se satisface la condición de unitariedad elástica, al tener abierto el canal  $\pi\pi$  mucho antes que el elástico KK.

Basándonos en el hecho de que a bajas energías los factores de forma de pión y kaón coinciden haremos la hipótesis de que ambos son iguales también a energías superiores (esto es, supondremos simetría SU(3) exacta). Emplearemos para  $F_K(s)$  la expresión resumada que utilizamos ya para el factor de forma del pión y dada en (4.42). Recordemos que (4.42) constaba de un propagador y una exponencial. La parte del propagador es sencilla de calcular también en el caso del kaón y se comprueba que efectivamente coincide con la dada para el pión. Esta pieza resuma los términos locales dominantes en  $1/N_c$  del factor de forma asumiendo VMD.

Por tanto, la hipótesis de identificar ambos factores de forma se reduce a suponer que las correcciones de estado final, subdominantes en  $1/N_c$ , son las mismas en ambos casos y que su resumación corresponde a la exponencial de (4.42).

De acuerdo con todo esto tomaremos que  $F_K(s)$  es

$$F(s) = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s - iM_{\rho}\Gamma_{\rho}(s)} \exp\left\{\frac{-s}{96\pi^2 f^2} \left[\operatorname{Re}A(m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}A(m_K^2/s, m_K^2/M_{\rho}^2)\right]\right\}.$$
 (5.43)

donde  $A(m_P^2/s,m_P^2/M_\rho^2)$  está definido en (4.3) y la anchur<br/>a $\Gamma_\rho(s)$  en (4.41).

Para ver cómo funciona la hipótesis hemos de contrastarla con los datos experimentales. Estos datos corresponden a la distribución en energías de la anchura de desintegración  $\tau^- \to K^0 K^- \nu_{\tau}$  tomados en ALEPH [52] y CLEO [53]. Los comparamos con las curvas obtenidas a partir de

$$\Gamma(\tau^{-} \to K^{0}K^{-}\nu_{\tau}) = \frac{G_{F}^{2}\cos^{2}\theta_{c}}{768\pi^{3}} m_{\tau}^{3} \int_{4m_{K}^{2}}^{m_{\tau}^{2}} ds \left(1 - \frac{s}{m_{\tau}^{2}}\right)^{2} \\ \times \left(1 + \frac{2s}{m_{\tau}^{2}}\right) \sigma_{K}^{3} |F_{K}(s)|^{2} , \qquad (5.44)$$

empleando para  $F_K(s)$  las expresiones del factor de forma del pión.

Dado el rango de energías en que nos encontramos (1-1.8 GeV) es lógico suponer que las resonancias  $\rho' \ge \rho''$  jugarán un papel importante (recordemos que en realidad la resonancia  $\rho$  sólo contribuye con su cola). Por esta razón utilizaremos para  $F_K(s)$ , además de (5.43), la expresión (4.74) con la que en el capítulo anterior ajustamos el factor de forma del pión.

En la figura 5.4 se muestra la comparación entre las predicciones y los datos. La línea de trazos corresponde a la expresión (5.43), donde sólo está incluida la  $\rho$ , mientras que la línea continua corresponde a (4.74) e incorpora  $\rho'$  y  $\rho''$  con los parámetros resultantes del ajuste mencionado. Por su parte, los datos del histograma son los de ALEPH [52] y los puntos pertenecen a CLEO [53]. La falta de estadística hace que los errores sean muy grandes y que extraer cualquier conclusión resulte difícil.

Ambas curvas son compatibles con los datos, lo que sugiere que la hipótesis de identificar  $F_K(s)$  con las resumaciones efectuadas para el factor de forma del pión es, al menos en primera aproximación, correcta.

Más diferencias entre los resultados incluyendo o no las resonancias  $\rho' \ge \rho''$  se observan en sus predicciones para el valor de la anchura de desintegración  $\tau^- \to K^0 K^- \nu_{\tau}$ .

Incluyendo sólo la resonancia  $\rho$ se obtiene para la fracción de desintegración un valor de

BR 
$$(\tau^- \to K^0 K^- \nu_\tau)_\rho = 0.88 \cdot 10^{-3}$$
. (5.45)

Mientras que si añadimos  $\rho' \ge \rho''$  el valor sube a

BR 
$$\left(\tau^{-} \to K^{0} K^{-} \nu_{\tau}\right)_{\rho+\rho'+\rho''} = 1.9 \cdot 10^{-3},$$
 (5.46)



Figura 5.4: Distribución en momentos de la anchura  $\tau^- \to K^0 K^- \nu_{\tau}$ . Datos: histograma [52], puntos [53].

lo que demuestra que la contribución de estas resonancias es muy significativa.

El valor experimental es

BR 
$$(\tau^- \to K^0 K^- \nu_\tau) = (1.55 \pm 0.28) \cdot 10^{-3}$$
. (5.47)

Este valor es más cercano al dado por las tres resonancias juntas que al dado solamente por la  $\rho$ .

Podemos concluir, por un lado, que identificar ambos factores de forma parece razonable y, por otro, que la contribución de las resonancias  $\rho'$  y  $\rho''$  es muy importante.

Cuando se alcance mayor estadística en los datos será posible determinar más exactamente el papel de la  $\rho'$  y la  $\rho''$  en este proceso.

# CAPÍTULO 6 AMPLITUDES DE SCATTERING $\pi\pi$ y $K\overline{K}$

## 6.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos visto cómo calcular el factor de forma del pión a energías más altas que las alcanzables en ChPT. Uno de los ingredientes fundamentales para llevar a cabo este cálculo es la introducción de los grados de libertad de las resonancias: los siguientes en masa después del octete pseudoescalar. En el caso del factor de forma del pión la resonancia era la  $\rho$ , y, posteriormente también la  $\rho'$  y la  $\rho''$ . Dado que en toda teoría efectiva (y ChPT lo es) los acoplamientos entre los grados de libertad ligeros contienen información sobre los grados de libertad pesados no incluidos en la teoría, era posible obtener valores para las  $L_i$  partiendo de los parámetros del lagrangiano quiral de las resonancias y de la saturación de las costantes  $L_i$ . De este modo obteníamos el valor de  $L_9$  a partir del intercambio de la  $\rho$ .

En este capítulo el procedimiento es, en cierta manera, en dirección opuesta: dado que las constantes  $L_i$  contienen información de las resonancias obtendremos ahora la aportación fenomenológica de las resonancias a ciertos procesos partiendo de los valores de las  $L_i$ .

Existían en la literatura dos métodos de carácter no perturbativo que permiten extender el uso de ChPT a energías más altas.

El primero es el Método de la Amplitud Inversa (IAM) propuesto inicialmente en [13] y desarrollado posteriormente en [14, 15]. Se basa fundamentalmente en la unitariedad elástica impuesta sobre el inverso de la amplitud de scattering, que impone a todos los órdenes la relación

$$\operatorname{Im} T^{-1} = -\sigma, \qquad (6.1)$$

donde  $\sigma$  corresponde al factor de espacio fásico del proceso en cuestión. La condición de elasticidad obliga a considerar un solo canal, lo que hace imposible la mezcla entre distintos canales necesaria en algunos casos.

A partir del ajuste de las  $L_i$  a los datos experimentales, este método describe correctamente las ondas parciales (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0)para el scattering  $\pi\pi$  y las (I, J) = (3/2, 0) y (1/2, 1) para el scattering  $\pi K$ . Además genera como polos en la amplitud T las resonancias  $\rho$ ,  $K^*$  y  $\sigma$ .

Sin embargo, hay problemas en los canales (0,0) y (1,0) para los

#### 6.1 Introducción

que las resonancias  $f_0(980)$  y  $a_0(980)$  no aparecen.

El segundo método que extiende ChPT está desarrollado en [54]. Aplicado sólo a los canales J = 0, utiliza un formalismo de ecuaciones de Bethe-Salpeter (BS) para canales acoplados. Emplea para ello las amplitudes de scattering de los canales involucrados calculadas a orden  $p^2$  en ChPT. Una vez unitarizada, la amplitud en canales acoplados resultante describe bien desfasajes e inelasticidades en los canales (0,0) y (1,0) hasta energías del orden de 1200 MeV. Ahora sí aparecen las resonancias  $a_0$  y  $f_0$ . Es más, se prueba que su aparición se debe al acoplamiento con el canal  $K\overline{K}$ , no considerado en el IAM.

En este método los problemas aparecen al tratar de describir canales en J = 1, donde el IAM es más efectivo. Aquí la contribución de las  $L_i$ es fundamental, por lo que, al no estar incluida en el formalismo, este da resultados erróneos.

Dado que los resultados de ambos métodos son complementarios se formuló en [55] un formalismo que englobara a ambos, básicamente es el IAM reescrito para canales acoplados. Con él se describen con éxito en [56] todos los canales mencionados anteriormente y se generaban las resonancias  $f_0$ ,  $a_0$ ,  $\rho$ ,  $K^*$ ,  $\Phi$ ,  $\sigma$  y  $\kappa$ . Sin embargo, las amplitudes de scattering  $\pi\pi$ ,  $\pi K$  y  $K\overline{K}$  que se utilizaban eran aproximadas.

Este capítulo, basado en el trabajo [19], emplea este formalismo (IAM con canales acoplados) pero empleando las amplitudes de scattering exactas a orden  $p^4$  en ChPT.

Las amplitudes  $\pi\pi$  y  $\pi K$  se pueden encontrar en las referencias [5] y [57].

La amplitud  $K\overline{K}$  la calculamos explícitamente. En principio este cálculo no parece ser de mucha utilidad. Por ejemplo, el umbral de dos kaones se encuentra casi a 1 GeV y, además, para I = 0, 1 aparecen las resonancias  $f_0(980)$  y  $a_0(980)$  que se acoplan fuertemente al par  $K\overline{K}$ . De hecho, una vez calculada la amplitud de scattering, se observa que la contribución de orden  $p^4$  es mayor que la de orden  $p^2$  ya en el umbral de producción de dos kaones.

Esto nos dice que esta amplitud tal cual no es de utilidad a la hora de confrontarla con los datos experimentales.

Sin embargo, introduciéndola en el método IAM con canales acoplados aporta una contribución crucial para generar la resonancia  $f_0(980)$ .

En las siguientes secciones veremos cómo con estos ingredientes

podemos obtener las amplitudes de scattering para los canales (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0), generando las resonancias  $\rho$  y  $f_0$  y describiendo bien los datos experimentales hasta una energía de aproximadamente 1.2 GeV.

Finalmente, empleando en la ecuación de Omnès los desfasajes obtenidos para  $\pi\pi \to \pi\pi$  se obtiene una predicción para los factores de forma del pión vectorial y escalar. En el caso escalar no hay datos experimentales con los que comparar, pero sí que se observa cómo la aparición de la resonancia  $f_0$  está ligada a la existencia del canal acoplado  $K\overline{K}$ .

## 6.2 Método de la Amplitud Inversa (IAM)

#### 6.2.1 Caso elástico

La estructura analítica de una amplitud en onda parcial en el plano complejo s posee ciertas características. Presenta un corte en el eje real desde el umbral  $s_u$  hasta  $+\infty$ . Por tanto, por simetría de cruce presenta otro corte (denominado corte izquierdo) en el eje real negativo, desde s = 0 a  $-\infty$ ), además de un cierto número de polos y ceros no determinados a priori.

Ahora bien, por unitariedad elástica sabemos que para  $s > s_u$  y s menor que el primer umbral inelástico se satisface que

$$\operatorname{Im} T_{IJ} = \sigma \left| T_{IJ} \right|^2 \,, \tag{6.2}$$

donde I denota isospín y J espín.

En el caso de que dicha amplitud se haya obtenido a partir de ChPT sabemos que estará organizada como una serie de potencias de momentos y masas

$$T_{IJ} = T_{IJ}^{(2)} + T_{IJ}^{(4)} + \cdots$$
(6.3)

donde el superíndice indica la potencia de momentos.

La condición (6.2) también se puede desarrollar en serie de potencias

$$\operatorname{Im} T_{IJ}^{(2)} = 0,$$

6.2 Método de la Amplitud Inversa (IAM)

Im 
$$T_{IJ}^{(4)} = \sigma (T_{IJ}^{(2)})^2$$
. (6.4)

De esta manera, empleando una relación de dispersión, es posible obtener el término  $T_{IJ}^{(n)}$  a partir de los anteriores (salvo constantes de sustracción).

Ahora bien, las amplitudes de scattering presentan polos cuyo significado físico son las resonancias. Una expansión en momentos al estilo de ChPT no es posible cerca de una resonancia. Sin embargo, donde la amplitud  $T_{IJ}$  posee un polo su inversa  $T_{IJ}^{-1}$  tiene un cero. Por tanto es posible expandir  $T_{IJ}^{-1}$  en momentos alrededor de un polo de  $T_{IJ}$ .

Veamos cómo se aplica la relación de unitariedad (6.2) al inverso de la amplitud

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{T_{IJ}}\right) = -\frac{\operatorname{Im}T_{IJ}}{\left|T_{IJ}\right|^{2}} = -\sigma.$$
(6.5)

Es una relación similar a (6.2) pero con una diferencia fundamental: nos dice que la parte imaginaria del inverso de la amplitud para  $s > s_u$  es conocida a todos los órdenes (siempre en el caso elástico, por supuesto).

Esta es la base del IAM. Vamos a aplicar esto al caso particular de las amplitudes obtenidas por medio de ChPT siguiendo la demostración dada en [15].

Partiendo de (6.4) podemos escribir  $T_{IJ}^{(2)}$  y  $T_{IJ}^{(4)}$  en función de una relación de dispersión

$$T_{IJ}^{(2)}(s) = a_0 + a_1 s, \qquad (6.6)$$

$$T_{IJ}^{(4)}(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \frac{s^3}{\pi} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{dz}{z^3} \frac{\mathrm{Im} T_{IJ}^{(4)}(z)}{z - s - i\epsilon} + \mathrm{CI}(T_{IJ}^{(4)}),$$

donde  $\operatorname{CI}(T_{IJ}^{(4)})$  es la contribución del corte izquierdo dada por

$$\operatorname{CI}(T_{IJ}^{(4)}) = \frac{s^3}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{z^3} \frac{\operatorname{Im} T_{IJ}^{(4)}(z)}{z - s - i\epsilon}.$$
(6.7)

La estructura analítica del inverso de la amplitud es la misma que la de  $T_{IJ}$  salvo por posibles polos (ceros en  $T_{IJ}$ ).

Definimos ahora la función

$$G(s) = \frac{(T_{IJ}^{(2)})^2}{T_{IJ}}$$
(6.8)

y la reescribimos en términos de una relación de dispersión

$$G(s) = G_0 + G_1 s + G_2 s^2 + \frac{s^3}{\pi} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{dz}{z^3} \frac{\operatorname{Im} G(z)}{z - s - i\epsilon} + \operatorname{CI}(G) + \operatorname{CP}.$$
(6.9)

CP es la contribución de los polos que pudiera tener G(s). Ahora bien, debido a (6.4) y (6.5) obtenemos que

$$\operatorname{Im} G(s) = -\sigma \left(T_{IJ}^{(2)}\right)^2 = -\operatorname{Im} T_{IJ}^{(4)}, \qquad s > s_u. \qquad (6.10)$$

Es decir, conocemos Im G(s) exactamente de manera que podemos calcular la integral sobre el corte derecho (de  $s_u$  a  $+\infty$ ).

Expandiendo las constantes de sustracción  $G_i$  de la ecuación (6.9) en serie de potencias de momentos obtenemos

$$G(s) = \frac{(T_{IJ}^{(2)})^2}{T_{IJ}} \simeq a_0 + a_1 s - b_0 - b_1 s - b_2 s^2$$
$$-\frac{s^3}{\pi} \int_{(m_1 + m_2)^2}^{\infty} \frac{dz}{z^3} \frac{\operatorname{Im} T_{IJ}^{(4)}(z)}{z - s - i\epsilon} - \operatorname{CI}(T_{IJ}^{(4)}) + \operatorname{CP}$$
$$\simeq T_{IJ}^{(2)} - T_{IJ}^{(4)}.$$
(6.11)

donde se ha aproximado en el corte izquierdo  $\operatorname{Im} G(s) \simeq -\operatorname{Im} T_{IJ}^{(4)}(s)$  y se ha despreciado la contribución de posibles polos.

De esta manera se llega a la expresión del IAM para la amplitud de scattering

6.2 Método de la Amplitud Inversa (IAM)

$$T_{IJ} \simeq \frac{(T_{IJ}^{(2)})^2}{T_{IJ}^{(2)} - T_{IJ}^{(4)}}.$$
(6.12)

Esta expresión, por supuesto, satisface la condición de unitariedad elástica (6.2) y a bajas energías coincide con ChPT.

$$T_{IJ} \simeq T_{IJ}^{(2)} + T_{IJ}^{(4)} + \cdots$$
 (6.13)

La derivación de  $T_{IJ}$  se puede realizar igualmente empleando términos hasta orden  $p^6$  en ChPT. En ese caso la ecuación equivalente a (6.12) será

$$T_{IJ} \simeq \frac{(T_{IJ}^{(2)})^2}{T_{IJ}^{(2)} - T_{IJ}^{(4)} + (T_{IJ}^{(4)})^2 / T_{IJ}^{(2)} - T_{IJ}^{(6)}}$$
(6.14)

que también satisface (6.2).

En el resto del trabajo emplearemos el equivalente de (6.12) para canales acoplados.

A lo largo de la deducción de (6.12) se han efectuado ciertas aproximaciones. La validez de las mismas se analiza en detalle en [15]. Aquí sólo resaltaremos brevemente algunas cosas. Por ejemplo, la aproximación de tomar en el corte izquierdo que  $\text{Im } G(s) \simeq -\text{Im } T_{IJ}^{(4)}$  no introduce un error demasiado grande ya que la diferencia es orden  $p^6$  y la integral está suprimida. Para verlo consideremos la integral sobre el corte izquierdo

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{z^{3}} \frac{\mathrm{Im} \, T_{IJ}^{(4)}(z)}{z - s - i\epsilon}.$$
(6.15)

Dado que z < 0 y s > 0 en la región física de interés, el denominador nunca se anula. Comparando esto con la integral para el corte derecho en la que el denominador se hace muy pequeño para z = s se puede considerar en primera aproximación que la contribución del corte izquierdo frente a la del derecho es despreciable.

También se ha despreciado la posible contribución de polos en G(s).

Por otro lado está el problema de multiplicar por  $(T_{IJ}^{(2)})^2$  en la definición de G(s). Salvo excepciones, la onda parcial  $T_{IJ}^{(2)}$  es cero para valores de I, J generales (es distinta de cero en (0, 0), (1, 1), (2, 0),

(3/2,0), (1/2,0), (1/2,1)). En esos casos no es posible aplicar el IAM y se utiliza simplemente ChPT.

Introduciendo el IAM con canales acoplados se resuelve este problema y, lo que es más importante, podremos introducir estados intermedios que nos permitan calcular la amplitud  $T_{IJ}$  fuera de la región elástica.

#### 6.2.2 Canales acoplados

El IAM con un solo canal funciona muy bien para aquellos procesos en los que la contribución dominante proviene del scattering elástico. Sin embargo, en general, para un proceso de scattering dado, estados intermedios diferentes del inicial o final intervienen a través de los loops. En aquellos casos en los que la aproximación elástica no es válida hay que extender el IAM a canales acoplados.

El objetivo por tanto es, partiendo del teorema de Watson [36], obtener una expresión similar a (6.12) pero extendida al caso de canales acoplados. Seguiremos el procedimiento mostrado en [56].

La ecuación (6.2) nos daba el resultado del teorema de Watson para s por encima del umbral y un solo canal.

Supongamos ahora que tenemos un proceso de scattering entre un estado inicial i y un estado final f. Denotaremos con un subíndice k a los posibles estados intermedios. En este caso el teorema de Watson se puede escribir en notación matricial de la forma

$$\operatorname{Im} T_{if} = T_{ik} \,\sigma_{kk} \,T_{kf}^* \,, \tag{6.16}$$

donde  $\sigma_{kk}$  es una matriz diagonal y real que contiene los factores de espacio fásico correspondientes.

Podemos reescribir (6.16) usando matrices

$$\operatorname{Im} T = T \,\sigma \,T^* \,. \tag{6.17}$$

T ahora es una matriz donde cada componente es una amplitud de scattering distinta, con isospín y espín definidos, aunque por simplicidad no aparezcan explícitamente como subíndices en la ecuación. Despejando  $\sigma$  en (6.17) podemos ver que también con matrices conocemos la parte imaginaria de la amplitud inversa a todos los órdenes, es decir

$$Im T^{-1} = -\sigma \,. \tag{6.18}$$

Podemos escribir en consecuencia que

$$T = \left[\operatorname{Re} T^{-1} - i\sigma\right]^{-1}.$$
 (6.19)

Igual que ocurría en el caso elástico la expansión en serie de potencias de momentos del inverso de la amplitud tiene la ventaja de que se puede extender a regiones en las que aparezcan resonancias.

Si la amplitud T la expandimos como

$$T = T_2 + T_4 + \cdots, (6.20)$$

entonces la expansión matricial de  $T^{-1}$  es de la forma

$$T^{-1} = T_2^{-1} \left[ 1 - T_4 T_2^{-1} + \cdots \right] .$$
 (6.21)

Esta forma de escribirla tiene el inconveniente de que necesita la inversa de la matriz  $T_2$ , que no siempre es invertible.

Para evitar este problema técnico multiplicamos por  $T_2T_2^{-1}$  a la izquierda de (6.19) y por  $T_2^{-1}T_2$  a su derecha. Resulta

$$T = T_2 \left[ T_2 \operatorname{Re} T^{-1} T_2 - i T_2 \sigma T_2 \right]^{-1} T_2, \qquad (6.22)$$

donde como vemos nos hemos evitado utilizar la inversa de  $T_2$ .

Haciendo uso de la expansión (6.21) para  $T^{-1}$  obtenemos que

$$T_2 \operatorname{Re} T^{-1} T_2 = T_2 - \operatorname{Re} T_4 + \cdots$$
 (6.23)

Sustituyendo este resultado en (6.22) y teniendo en cuenta que

$$\operatorname{Im} T_4 = T_2 \,\sigma \,T_2 \,, \tag{6.24}$$

llegamos a

$$T = T_2 [T_2 - T_4]^{-1} T_2, \qquad (6.25)$$

que es la expresión final del IAM con canales acoplados.

Esta expresión satisface unitariedad a todos los órdenes (recuérdese que ChPT la satisface sólo orden a orden).

Esta extensión a canales acoplados convierte al IAM en un método mucho más poderoso. Ahora es posible obtener secciones eficaces de transición, además de las elásticas, así como inelasticidades y desfasajes.

Además de resolver el problema de estar restringidos a la región elástica que tenía el IAM con un sólo canal, se soluciona también el problema que presentaba el caso elástico cuando la amplitud  $T_2$  era cero. En ese caso ocurría que, como  $T_4 \neq 0$ , la amplitud T dada por (6.12) presentaba un cero doble. Sin embargo, en (6.25) es fácil ver que si por ejemplo  $(T_2)_{11} = 0$ , basta con que  $(T_2)_{12} \neq 0$  para que la amplitud resultante tenga el comportamiento correcto y sea  $T_{11} \simeq (T_4)_{11}$ .

Se prueba además en [56] que el IAM con canales acoplados engloba al método utilizado en [54] que describe con éxito el sector escalar (J = 0) hasta energías del orden de 1.2 GeV.

# 6.3 Unitarización de las amplitudes $\pi\pi$ y $K\overline{K}$

Como hemos visto en la sección anterior, nuestro propósito es utilizar el método de unitarización introducido en [55] para obtener las amplitudes de scattering  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$  que satisfacen unitariedad.

Esto ya se ha hecho en [55] y más extensamente en [56]. Sin embargo, en ambos trabajos las amplitudes de scattering a orden  $p^4$  empleadas eran aproximadas. Básicamente se utilizaba la amplitud de orden  $p^2$  más la parte polinómica del orden  $p^4$ . Es decir, no se calculaban las contribuciones a orden  $p^4$  dadas por los loops. La parte imaginaria se calculaba a partir de unitariedad.

En este trabajo vamos a emplear las amplitudes completas a orden  $p^4$  en ChPT. Para ello tomaremos de la literatura las amplitudes de scattering  $\pi\pi$  y  $K\pi$  [57] y calcularemos la de  $K\overline{K}$ .

A partir de los términos de orden  $p^2$  y  $p^4$  de estas amplitudes obtendremos las amplitudes finales unitarizadas (con espín e isospín definidos) por medio de la expresión deducida en [55], i.e. la ecuación

#### 6.3 Amplitud de scattering $\pi\pi \to \pi\pi$

(6.25)

$$T^{(I,J)} = T_2^{(I,J)} \cdot \left[T_2^{(I,J)} - T_4^{(I,J)}\right]^{-1} \cdot T_2^{(I,J)}.$$
 (6.26)

En nuestro caso  $T^{(I,J)}$ ,  $T_2^{(I,J)}$  y  $T_4^{(I,J)}$  son matrices  $2 \times 2$  para I = 0, 1y simples números para I = 2 donde sólo el canal  $\pi\pi$  está implicado (i.e. se reduce al IAM simple). Hemos etiquetado los estados intermedios como 1 para  $\pi\pi$  y 2 para  $K\overline{K}$ . Por tanto, la componente  $T_{11}^{(I,J)}$ será la amplitud unitarizada del scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$ , la  $T_{12}^{(I,J)}$  será análogamente la de  $\pi\pi \to K\overline{K}$ , y la  $T_{22}^{(I,J)}$  la de  $K\overline{K} \to K\overline{K}$ . La componente  $T_{11}^{(I,J)}$ , la que describe el scattering  $\pi\pi$  es la que

La componente  $T_{11}^{(I,J)}$ , la que describe el scattering  $\pi\pi$  es la que compararemos con los datos experimentales para (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0).

Veamos a continuación las expresiones de las amplitudes involuc<br/>radas  $T_2^{(I,J)} \ge T_4^{(I,J)}$ obtenidas de ChPT.

## **6.3.1** Amplitud de scattering $\pi\pi \to \pi\pi$

Las componentes  $[T_2^{(I,J)}]_{11}$  y  $[T_4^{(I,J)}]_{11}$  que necesitamos en (6.26) las obtenemos a partir de la amplitud de scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$  a orden  $p^4$  en ChPT calculada en [57]. En la notación habitual esta amplitud resulta ser

$$T_{\pi\pi}(s,t,u) = A(s,t,u) + B(s,t,u) + C(s,t,u), \qquad (6.27)$$

donde A(s, t, u) es el término de orden  $p^2$ 

$$A(s,t,u) = \frac{s - m_{\pi}^2}{f_{\pi}^2}, \qquad (6.28)$$

B(s,t,u) es el término de unitariedad de orden  $p^4$ 

$$B(s,t,u) = \frac{1}{f_{\pi}^{4}} \left\{ \frac{m_{\pi}^{4}}{18} J_{\eta\eta}^{r}(s) + \frac{1}{2} \left( s^{2} - m_{\pi}^{4} \right) J_{\pi\pi}^{r}(s) + \frac{1}{8} s^{2} J_{KK}^{r}(s) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} \left( t - 2m_{\pi}^{2} \right)^{2} J_{\pi\pi}^{r}(t) + t \left( s - u \right) \left[ M_{\pi\pi}^{r}(t) + \frac{1}{2} M_{KK}^{r}(t) \right]$$

Capítulo 6. Amplitudes de scattering  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$ 

$$+(t\leftrightarrow u)\bigg\},$$
 (6.29)

y C(s,t,u) es el término polinómico de orden  $p^4$ 

$$C(s,t,u) = \frac{4}{f_{\pi}^{4}} \left\{ L_{2}^{r} \left[ \left( t - 2m_{\pi}^{2} \right)^{2} + \left( u - 2m_{\pi}^{2} \right)^{2} \right] + \left( 4L_{4}^{r} + 2L_{5}^{r} \right) m_{\pi}^{2} \left( s - 2m_{\pi}^{2} \right) + \left( 8L_{6}^{r} + 4L_{8}^{r} \right) m_{\pi}^{4} \right\}.$$

$$(6.30)$$

En todas estas expresiones  $m_{\pi}$ ,  $m_K$ ,  $m_{\eta}$  y  $f_{\pi}$  son las cantidades físicas. Su expresión en función de las cantidades desnudas del lagrangiano  $\hat{m}_{\pi}$ ,  $\hat{m}_K$ ,  $\hat{m}_{\eta}$  y  $f_0$  se puede encontrar en [6]

En este caso particular, son relevantes únicamente las relaciones siguientes

$$m_{\pi}^{2} = \hat{m}_{\pi}^{2} \left[ 1 + \mu_{\pi} - \frac{1}{3}\mu_{\eta} + \frac{8\hat{m}_{\pi}^{2}}{f_{0}^{2}} \left( 2L_{8}^{r} + 2L_{6}^{r} - L_{4}^{r} - L_{5}^{r} \right) + \frac{16\hat{m}_{K}^{2}}{f_{0}^{2}} \left( 2L_{6}^{r} - L_{4}^{r} \right) \right],$$

$$f_{\pi} = f_0 \left[ 1 - 2\mu_{\pi} - \mu_K + \frac{4\hat{m}_{\pi}^2}{f_0^2} \left( L_4^r + L_5^r \right) + \frac{8\hat{m}_K^2}{f_0^2} L_4^r \right].$$
(6.31)

Siendo

$$\mu_P = \frac{m_P^2}{32\pi^2 f_0^2} \ln\left(\frac{m_P^2}{\mu^2}\right).$$
 (6.32)

No se necesita ninguna relación más puesto que en el término a orden  $p^2$  sólo aparecen  $m_{\pi}$  y  $f_{\pi}$ .

Las funciones de los loops  $J^r_{PP}$  y  $M^r_{PP}$  que aparecen en el término  $B\left(s,t,u\right)$  están definidas en [6] como

$$J_{PP}^{r}(s) = \frac{1}{16\pi^{2}} \left\{ 1 - \ln\left(\frac{m_{P}^{2}}{\mu^{2}}\right) + \sigma_{P} \ln\left(\frac{\sigma_{P}-1}{\sigma_{P}+1}\right) \right\},$$
$$M_{PP}^{r}(s) = \frac{1}{96\pi^{2}} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{4m_{P}^{2}}{s} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_{P}^{2}}{\mu^{2}}\right) + \frac{\sigma_{P}^{3}}{2} \ln\left(\frac{\sigma_{P}-1}{\sigma_{P}+1}\right) \right\} 33)$$
6.3 Amplitud de scattering  $\pi\pi \to K\overline{K}$ 

donde  $\sigma_P = \sqrt{1 - 4m_P^2/s}$ .

En el límite de ChPT en SU(2) la expresión (6.27) reproduce el resultado dado en [5].

Una vez tenemos determinada la amplitud dada en (6.27) tenemos ahora que proyectar sobre isospín definido para poder utilizar (6.26). En este trabajo vamos a estudiar los casos I = 0, 1 y 2. Estas amplitudes  $T^{(I)}$  se calculan a partir de (6.27) de acuerdo con las expresiones

$$T^{0}(s,t,u) = 3T_{\pi\pi}(s,t,u) + T_{\pi\pi}(t,s,u) + T_{\pi\pi}(u,t,s),$$
  

$$T^{1}(s,t,u) = T_{\pi\pi}(t,s,u) - T_{\pi\pi}(u,t,s),$$
  

$$T^{2}(s,t,u) = T_{\pi\pi}(t,s,u) + T_{\pi\pi}(u,t,s).$$
(6.34)

Ahora, para obtener las componentes de isospín definido a orden  $p^2$  (i.e.  $[T_2^{(I)}]_{11}$ ) sólo hay que sustituir en (6.34) la función  $T_{\pi\pi}$  por la función A dada en (6.28). Análogamente, para obtener  $[T_4^{(I)}]_{11}$  hay que sustituir en (6.34)  $T_{\pi\pi}$  por la suma B + C.

Finalmente quedará proyectar sobre espín definido (J) para tener las componentes  $[T_2^{(I,J)}]_{11}$  y  $[T_4^{(I,J)}]_{11}$  que emplearemos en (6.26) para los casos (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0). Esto se verá más adelante.

### **6.3.2** Amplitud de scattering $\pi\pi \to K\overline{K}$

De modo análogo al caso del scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$ , necesitamos también la amplitud de scattering  $\pi\pi \to K\overline{K}$  para obtener las componentes  $[T_2^{(I,J)}]_{12}$  y  $[T_4^{(I,J)}]_{12}$  que hemos de utilizar en (6.26).

En [57] encontramos calculada a orden  $p^4$  en ChPT la amplitud  $\pi^+K^+ \to \pi^+K^+$ . Esta amplitud tiene isospín definido I = 3/2 y es la única necesaria para, por simetría de cruce, obtener la correspondiente a  $\pi\pi \to K\overline{K}$  para I = 0 y 1.

El resultado para la amplitud dado en [57] es

$$T^{3/2}(s,t,u) = T_2(s,t,u) + T_4^T(s,t,u) + T_4^P(s,t,u) + T_4^U(s,t,u).$$
(6.35)

 $T_2$  es la pieza a nivel árbol (orden  $p^2$ ),  $T_4^T$  contiene los términos procedentes de los diagramas tadpole (orden  $p^4$ ),  $T_4^P$  los términos polinómicos de orden  $p^4$  (i.e. los términos lineales en  $L_i$ ) y finalmente  $T_4^U$  representa las correcciones de unitariedad.

Una por una estas piezas son:

- Orden  $p^2$ :

$$T_2(s,t,u) = \frac{m_\pi^2 + m_K^2 - s}{2f_\pi^2}.$$
 (6.36)

- Términos de los diagramas tadpole:

$$T_{4}^{T}(s,t,u) = \frac{1}{16f_{\pi}^{2}} \left\{ \mu_{\pi} \left[ 10s - 7m_{\pi}^{2} - 13m_{K}^{2} \right] + \mu_{K} \left[ 2m_{\pi}^{2} + 6m_{K}^{2} - 4s \right] + \mu_{\eta} \left[ 5m_{\pi}^{2} + 7m_{K}^{2} - 6s \right] \right\}.$$
(6.37)

- Término polinómico:

$$T_{4}^{P}(s,t,u) = \frac{2}{f_{\pi}^{4}} \left\{ 4L_{1}^{r} \left( t - 2m_{\pi}^{2} \right) \left( t - 2m_{K}^{2} \right) \right. \\ \left. + 2L_{2}^{r} \left[ \left( s - m_{\pi}^{2} - m_{K}^{2} \right)^{2} + \left( u - m_{\pi}^{2} - m_{K}^{2} \right)^{2} \right] \right. \\ \left. + L_{3}^{r} \left[ \left( u - m_{\pi}^{2} - m_{K}^{2} \right)^{2} + \left( t - 2m_{\pi}^{2} \right) \left( t - 2m_{K}^{2} \right) \right] \right. \\ \left. + 4L_{4}^{r} \left[ t \left( m_{\pi}^{2} + m_{K}^{2} \right) - 4m_{\pi}^{2} m_{K}^{2} \right] \right]$$

$$\left. + 2L_{5}^{r} m_{\pi}^{2} \left( m_{\pi}^{2} - m_{K}^{2} - s \right) + 8 \left( 2L_{6}^{r} + L_{8}^{r} \right) m_{\pi}^{2} m_{K}^{2} \right\} .$$

- Correcciones unitarias (contribuciones de loops entre dos vértices):

$$T_4^U(s,t,u) = \frac{1}{4f_\pi^4} \left\{ t \left( u - s \right) \left[ 2M_{\pi\pi}^r(t) + M_{KK}^r(t) \right] \right\}$$

6.3 Amplitud de scattering  $\pi\pi \to K\overline{K}$ 

$$+\frac{3}{2}\left[\left(s-t\right)\left\{L_{\pi K}(u)+L_{K\eta}(u)-u\left(M_{\pi K}^{r}(u)+M_{K\eta}^{r}(u)\right)\right\}\right]$$
$$+\left(m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2}\right)^{2}\left(M_{\pi K}^{r}(u)+M_{K\eta}^{r}(u)\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left(m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2}\right)\left[K_{\pi K}(u)\left(5u-2m_{\pi}^{2}-2m_{K}^{2}\right)\right]$$
$$+K_{K\eta}(u)\left(3u-2m_{\pi}^{2}-2m_{K}^{2}\right)\right]+J_{\pi K}^{r}(s)\left(s-m_{\pi}^{2}-m_{K}^{2}\right)^{2}$$
$$+\frac{1}{8}J_{\pi K}^{r}(u)\left[11u^{2}-12u\left(m_{\pi}^{2}+m_{K}^{2}\right)+4\left(m_{\pi}^{2}+m_{K}^{2}\right)^{2}\right]$$
$$+\frac{3}{8}J_{K\eta}^{r}(u)\left(u-\frac{3}{2}\left(m_{\pi}^{2}+m_{K}^{2}\right)\right)^{2}+\frac{1}{2}J_{\pi \pi}^{r}(t)t\left(2t-m_{\pi}^{2}\right)$$
$$+\frac{3}{4}J_{KK}^{r}(t)t^{2}+\frac{1}{2}J_{\eta \eta}^{r}(t)m_{\pi}^{2}\left(t-\frac{8}{9}m_{K}^{2}\right)\right\}.$$
(6.39)

Como en el caso del scattering  $\pi\pi$  las masas y la constante  $f_{\pi}$  toman sus valores físicos. En el scattering  $\pi K$  sólo hay que añadir a las mencionadas en la sección anterior la siguiente relación

$$m_K^2 = \hat{m}_K^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} \mu_\eta + \frac{16 \hat{m}_K^2}{f_0^2} \left( 2L_6^r + L_8^r - L_4^r - \frac{1}{2} L_5^r \right) + \frac{8 \hat{m}_K^2}{f_0^2} \left( 2L_6^r - L_4^r \right) \right].$$
(6.40)

La definición de  $\mu_P$  se encuentra en (6.32).

En (6.39) aparecen varias funciones procedentes de los loops. Estas funciones aparecen en [6], las reproducimos aquí por completitud. En comparación con el scattering  $\pi\pi$  ahora las partículas que circulan por

los loops tienen en algunos casos masas distintas por lo que las funciones son más complicadas.

Comenzamos definiendo la función  $\overline{J}_{PQ}(s).$  Las restantes se deducen a partir de esta.

$$\overline{J}_{PQ}(s) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ 2 + \left(\frac{\Delta}{s} - \frac{\Sigma}{\Delta}\right) \ln \frac{m_Q^2}{m_P^2} - \frac{\nu}{s} \ln \frac{(s+\nu)^2 - \Delta^2}{(s-\nu)^2 - \Delta^2} \right\}$$
(6.41)

donde

$$\nu^{2} = \lambda \left( s, m_{P}^{2}, m_{Q}^{2} \right) = \left( s - (m_{P} + m_{Q})^{2} \right) \left( s - (m_{P} - m_{Q})^{2} \right) ,$$
  

$$\Sigma = m_{P}^{2} + m_{Q}^{2} ,$$
  

$$\Delta = m_{P}^{2} - m_{Q}^{2} .$$
(6.42)

Las funciones que aparecen en (6.39) son

$$J_{PQ}^{r}(s) = \overline{J}_{PQ}(s) - 2k_{PQ},$$

$$K_{PQ}(s) = \frac{\Delta}{2s} \overline{J}_{PQ}(s),$$

$$L_{PQ}(s) = \frac{\Delta^{2}}{4s} \overline{J}_{PQ}(s),$$

$$K_{PQ}(s) = \frac{\Delta^{2}}{4s} \overline{J}_{PQ}(s),$$

$$K_{PQ}(s) = \frac{1}{4s} (s_{PQ}(s)) = \frac{1}{4s}$$

$$M_{PQ}^{r}(s) = \frac{1}{12s} \left( s - 2\Sigma \right) \overline{J}_{PQ}(s) + \frac{\Delta^{2}}{3s^{2}} \widetilde{J}_{PQ}(s) - \frac{1}{6} k_{PQ} + \frac{1}{288\pi^{2}} ,$$

siendo

$$k_{PQ} = \frac{f_{\pi}^2}{\Delta} \left(\mu_P - \mu_Q\right) ,$$
  
$$\tilde{J}_{PQ}(s) = \overline{J}_{PQ}(s) - s \,\overline{J}'_{PQ}(0) . \qquad (6.44)$$

Una vez tenemos la amplitud  $T^{3/2}(s, t, u)$  bien definida podemos proyectar sobre los estados de isospín definido. Como los kaones poseen isospín 1/2 esta vez la amplitud sólo contribuirá a I = 0 y 1, de acuerdo con las expresiones

$$T^{(0)}(s,t,u) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ T^{3/2}(u,s,t) + T^{3/2}(t,s,u) \right],$$

$$T^{(1)}(s,t,u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ T^{3/2}(u,s,t) - T^{3/2}(t,s,u) \right].$$
(6.45)

Igual que en el caso anterior, estas amplitudes nos dan las piezas de orden  $p^2$  y orden  $p^4$ . Proyectando después sobre espín tenemos las componentes  $[T_2^{(I,J)}]_{12}$  y  $[T_4^{(I,J)}]_{12}$  que necesitamos en (6.26).

Las amplitudes correspondientes al scattering inverso  $K\overline{K} \to \pi\pi$ no es necesario calcularlas puesto que son idénticas a las del proceso  $\pi\pi \to K\overline{K}$ .

## **6.3.3** Amplitud de scattering $K\overline{K} \to K\overline{K}$

Para calcular la amplitud  $\overline{KK}$  necesitamos evaluar dos amplitudes. Estas dos amplitudes independientes con isospín definido no pueden conectarse por medio de la simetría de cruce debido a que los kaones se encuentran agrupados en dos dobletes diferentes de isospín. Recordemos que en el caso de la amplitud  $\pi K$  ocurría lo contrario, era posible obtener la amplitud I = 1/2 a partir de la I = 3/2.

Mostraremos aquí con cierto detalle el cálculo que realizamos en [19] para obtener las dos amplitudes independientes  $K^+K^- \to K^+K^$ y  $K^+K^- \to K^0\overline{K}^0$  que hemos mencionado y que denotaremos por  $T_{cc}$ y  $T_{cn}$  respectivamente.

Las correspondientes amplitudes con isospín definido  $T^{(I)}$  pueden escribirse en términos de  $T_{cc}$  y  $T_{cn}$  de la siguiente manera:

$$T^{(0)}(s,t,u) = T_{cc}(s,t,u) + T_{cn}(s,t,u),$$
  

$$T^{(1)}(s,t,u) = T_{cc}(s,t,u) - T_{cn}(s,t,u).$$
(6.46)



Figura 6.1: Diagramas a orden  $p^4$ 

Procedemos ahora a describir el cálculo de estas amplitudes a orden  $p^4$ . Las contribuciones a orden  $p^2$  a las dos amplitudes  $K\overline{K}$  son

$$T_{cc,2}(s,t,u) = \frac{1}{f_0^2} \left[ \frac{2}{3} \hat{m}_K^2 + \frac{4}{3} m_K^2 - u \right],$$
  
$$T_{cn,2}(s,t,u) = \frac{1}{2f_0^2} \left[ \frac{2}{3} \hat{m}_K^2 + \frac{4}{3} m_K^2 - u \right].$$
(6.47)

donde el subíndice 2 significa orden  $p^2$ .

A orden  $p^2 f_0 = f_{\pi} = 93.3 \text{ MeV}$  and  $\hat{m}_K = m_K = 495.7 \text{ MeV}$ . Pero cuando vamos al siguiente orden estas igualdades no se satisfacen. Esta es la razón por la que mantenemos la distinción entre masas desnudas y físicas.

A orden  $p^4$  tenemos que calcular los diagramas mostrados de manera esquemática en la Fig. 6.1. En ella  $T_4^T$  representa las contribuciones procedentes del lagrangiano  $\mathcal{L}_2$  de ChPT con seis campos y un loop del tipo tadpole. El diagrama  $T_4^U$  representa los loops construidos a partir de  $\mathcal{L}_2$  con cuatro campos en cada vértice. Llamamos a este término contribución de unitariedad por ser el que hace que la amplitud sea unitaria a orden  $p^4$ . Este término contiene contribuciones de los loops en los canales s, t y u tal y como muestra la Fig. 6.2

Por último,  $T_4^{\vec{P}}$  representa la contribución polinómica procedente del lagrangiano  $\mathcal{L}_4$  de ChPT.

Cuando tenemos en cuenta la renormalización de la función de onda, Fig. 6.3, y la relación entre las masas y constantes de desintegración desnudas y físicas, aparecen otras contribuciones de orden  $p^4$  a partir de las amplitudes a nivel árbol.

114

6.3 Amplitud de scattering  $K\overline{K} \to K\overline{K}$ 



Figura 6.2: Diagramas para los canales s, t y u



Figura 6.3: Renormalización de la función de onda

La relación entre  $m_K$  y  $\hat{m}_K$  y la relación entre  $f_0$  y  $f_{\pi}$  a orden  $p^4$  se puede obtener de [6] (ver los apartados anteriores).

La amplitud final a orden  $p^4$  se obtiene sum ando todas las contribuciones mencionadas. La expresamos dividida en cu atro partes:  $T_2, T_4^T$ ,  $T_4^U$  y  $T_4^P$  donde los subíndices indican el orden en potencias de momento.

En  $T_4^T$  y  $T_4^P$  hemos incluido, además de las contribuciones de la Fig. 6.1, las contribuciones de orden  $p^4$  procedentes de la renormalización de la función de onda, las masas y las constantes de desintegración. Los términos con las constantes  $L_i$  han sido incluidos en  $T_4^P$  y el resto, los loops del tipo tadpole, en  $T_4^T$ .

La amplitud para  $K^+K^- \to K^+K^-$  es:

$$T_{cc,2}(s,t,u) = \frac{2m_K^2 - u}{f_\pi^2}.$$
(6.48)

$$T_{cc,4}^{T} = \frac{A_{\pi}^{r}}{288f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(8m_{K}^{2} + m_{\pi}^{2} - 3u) + \frac{A_{K}^{r}}{288f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(8m_{K}^{2} + 3u)$$

Capítulo 6. Amplitudes de scattering  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$ 

$$+\frac{A_{\eta}^{r}}{288f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(20m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2}-6u). \qquad (6.49)$$

$$\begin{split} T^U_{cc,4} &= \frac{-20m_K^4 - 2s^2 - 2su + u(3m_\pi^2 + u) + m_K^2(8s + 11u - 4m_\pi^2)}{192f_\pi^4 \pi^2} \\ &+ \frac{A_\pi^r}{288f_\pi^4 \pi^2} (13m_K^2 - m_\pi^2 - 6u) + \frac{A_K^r}{576f_\pi^4 \pi^2} (32m_K^2 - 15u) \\ &+ \frac{A_\pi^r}{1576f_\pi^4 \pi^2} (22m_K^2 + 2m_\pi^2 - 15u) \\ &+ \left\{ \frac{B_\pi^r(s)}{1536f_\pi^4 \pi^2} \left[ 8m_K^2(s - 4m_\pi^2) + s(7s - 4u) + 8m_\pi^2(s + 2u) \right] \right. \\ &+ \frac{B_\pi^r(s)}{384f_\pi^4 \pi^2} 5(8m_K^4 + s(s - u) - 4m_K^2 t) \\ &+ \frac{B_\eta^r(s)}{4608f_\pi^4 \pi^2} (8m_K^2 - 9s)^2 \\ &+ \frac{B_{\pi\eta}^r(s)}{768f_\pi^4 \pi^2} (4m_K^2 - 3s)^2 + s \leftrightarrow t \right\} + \frac{B_K^r(u)}{32f_\pi^4 \pi^2} (u - 2m_K^2)^2 (6.50) \\ &T^P_{cc,4} &= L_1 \frac{8}{f_\pi^4} (-8m_K^4 + s^2 + t^2 + 4m_K^2 u) \\ &+ L_2 \frac{4}{f_\pi^4} (s^2 + t^2 + 2u^2 - 4m_K^2 u) \\ &+ L_3 \frac{4}{f_\pi^4} (-8m_K^4 + s^2 + t^2 + 4m_K^2 u) \end{split}$$

116

6.3 Amplitud de scattering  $K\overline{K} \to K\overline{K}$ 

$$-L_4 \frac{16m_K^2 u}{f_\pi^4} - L_5 \frac{8m_K^2 u}{f_\pi^4} + (2L_6 + L_8) \frac{32m_K^4}{f_\pi^4} \,. \tag{6.51}$$

La amplitud para  $K^+K^- \to K^0 \bar{K}^0$  es:

$$T_{cn,2} = \frac{2m_K^2 - u}{2f_\pi^2} \,. \tag{6.52}$$

$$T_{cn,4}^{T} = \frac{A_{\pi}^{r}}{576f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(-4m_{K}^{2}+m_{\pi}^{2}+6t) + \frac{A_{K}^{r}}{288f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(10m_{K}^{2}-3t) + \frac{A_{\eta}^{r}}{576f_{\pi}^{4}\pi^{2}}(20m_{K}^{2}-m_{\pi}^{2}-6u).$$

$$(6.53)$$

$$T_{cn,4}^{U} = \frac{24m_{K}^{4} - 6m_{\pi}^{2}s - 2s^{2} - 2su + u^{2} + 2m_{K}^{2}(4m_{\pi}^{2} - 7t)}{384f_{\pi}^{4}\pi^{2}}$$

$$\begin{split} &+ \frac{A_{\pi}^{r}}{1152 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (38m_{K}^{2} - 2m_{\pi}^{2} - 6s - 15u) \\ &+ \frac{A_{K}^{r}}{1526 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (10m_{K}^{2} + 3s - 6u) + \frac{A_{\eta}^{r}}{1152 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (22m_{K}^{2} + 2m_{\pi}^{2} - 15u) \\ &+ \frac{B_{\pi}^{r}(s)}{1536 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (8m_{K}^{2}(s - 4m_{\pi}^{2}) + s(7s - 4t) + 8m_{\pi}^{2}(s + 2t)) \\ &+ \frac{B_{\pi}^{r}(t)}{384 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (s - u)(t - 4m_{\pi}^{2}) + \frac{B_{K}^{r}(s)}{96 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (-8m_{K}^{2} + s(s - u) + 4m_{K}^{2}(s + u)) \\ &+ \frac{B_{K}^{r}(t)}{384 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (-8m_{K}^{2} + t(t - u) + 4m_{K}^{2}(t + u)) + \frac{B_{K}^{r}(u)}{64 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (u - 2m_{K}^{2})^{2} \\ &+ \frac{B_{\eta}^{r}(s)}{4608 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (8m_{K}^{2} - 9s)^{2} - \frac{B_{\pi\eta}^{r}(s)}{768 f_{\pi}^{4} \pi^{2}} (3s - 4m_{K}^{2})^{2} \end{split}$$

Capítulo 6. Amplitudes de scattering  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$ 

$$+\frac{B_{\pi\eta}^r(t)}{384f_{\pi}^4\pi^2}(3t-4m_K^2)^2.$$
(6.54)

$$T_{cn,4}^{P} = L_{1} \frac{8}{f_{\pi}^{4}} (s - 2m_{K}^{2})^{2}$$

$$+ L_{2} \frac{4}{f_{\pi}^{4}} (-8m_{K}^{4} + t^{2} + u^{2} + 4m_{K}^{2}s)$$

$$+ L_{3} \frac{2}{f_{\pi}^{4}} (-8m_{K}^{4} + s^{2} + t^{2} + 4m_{K}^{2}u)$$

$$+ L_{4} \frac{4}{3f_{\pi}^{4}} (-24m_{K}^{4} + 12m_{K}^{2}s) - L_{5} \frac{4m_{K}^{2}u}{f_{\pi}^{4}}$$

$$+ (2L_{6} + L_{8}) \frac{16m_{K}^{4}}{f_{\pi}^{4}}.$$
(6.55)

En estas formulas hemos empleado las siguientes funciones de los loops:

$$A_{P}^{r} = -m_{P}^{2} \left[ -1 + \ln \left( \frac{m_{P}^{2}}{\mu^{2}} \right) \right] \,. \tag{6.56}$$

$$B_{PQ}^{r}(s) = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_P^2, m_Q^2)}{2s} \ln\left(\frac{m_P^2 + m_Q^2 - s + \lambda^{1/2}(s, m_P^2, m_Q^2)}{m_P^2 + m_Q^2 - s - \lambda^{1/2}(s, m_P^2, m_Q^2)}\right)$$

$$+2 - \ln\left(\frac{m_Q^2}{\mu^2}\right) + \frac{m_P^2 - m_Q^2 + s}{2s} \ln\left(\frac{m_Q^2}{m_P^2}\right).$$
(6.57)

 $\lambda(s, m_P^2, m_Q^2)$  está definido en (5.7). En el límite de masas iguales (6.57) se reduce a

$$B_P^r(s) = 2 - \ln\left(\frac{m_P^2}{\mu^2}\right) - \sigma(m_P^2, s) \ln\left(\frac{\sigma(m_P^2, s) + 1}{\sigma(m_P^2, s) - 1}\right).$$
 (6.58)

#### 6.3 Unitarización

donde

$$\sigma(m_P^2, s) = \sqrt{1 - \frac{4m_P^2}{s}}.$$
(6.59)

Las funciones (6.56) y (6.57) proceden de las integrales de Passarino-Veltman con uno y dos propagadores  $[58]^*$ .

Es interesante resaltar que la constante  $L_7$  no aparece en  $T_4^P$ . Esto mismo ocurre también en las amplitudes de scattering a orden  $p^4 \pi \pi \rightarrow \pi \pi$  and  $K\pi \rightarrow K\pi$ .  $L_6$  y  $L_8$  aparecen en la combinación  $2L_6 + L_8$  como consecuencia de la simetría de Kaplan-Manohar [59].

Como ya se dijo anteriormente, en las amplitudes  $K\overline{K}$  que acabamos de obtener las correcciones de orden  $p^4$  son, al menos, tan grandes como la contribución a nivel árbol (orden  $p^2$ ). Por ejemplo, en el umbral de producción de dos kaones

$$T_{cc,2} = 56.5$$
  
$$T_{cc,4} = 73.6 + i \, 36.74$$

Sin duda, esto significa que un cálculo perturbativo no es de ninguna utilidad en esta región de energías y que hay que utilizar algún método no perturbativo para poder comparar con los datos experimentales.

#### 6.3.4 Unitarización

Hay que recordar que (6.26) se obtuvo a partir de una expansión de la inversa de la matriz de amplitudes 1/T, que tiene un cero en el lugar en que T tiene un polo. De esta manera se espera que la expansión de 1/T en potencias de momentos y masas sea válida incluso por encima de la región de la resonancia, donde la expansión de T carece de sentido.

En los apartados anteriores hemos mostrado las amplitudes que necesitamos en (6.26) para isospín definido.

La proyección en momento angular definido J viene dada por

$$T^{(I,J)} = \frac{1}{32N\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) T^{(I)}(s,t) P_J(\cos\theta), \qquad (6.60)$$

\*Ver Apéndice A

donde N = 1 para  $K\overline{K} \to K\overline{K}$ ,  $N = \sqrt{2}$  para  $\pi\pi \to K\overline{K}$  y N = 2 para  $\pi\pi \to \pi\pi$ , dado que en el formalismo de isospín los piones son partículas idénticas. Necesitamos también la expresión de t en función de  $\cos \theta$ .

$$t = m_1^2 + m_3^2 - \frac{s}{2} + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3|\cos\theta.$$
(6.61)

Las partículas denotadas como 1 y 3 son distintas según cuál sea la amplitud que estemos considerando.

Por otro lado, los polinomios de Legendre que emplearemos son

$$P_0(\cos\theta) = 1, \qquad P_1(\cos\theta) = \cos\theta. \qquad (6.62)$$

Tenemos ya las matrices de amplitudes  $T_2^{(I,J)}$  y  $T_4^{(I,J)}$  que necesitamos. Sustituyéndolas en (6.26) obtenemos la matriz de amplitudes unitarizada. Por supuesto no es posible realizar el cálculo analíticamente. Los resultados que mostraremos se calculan numéricamente.

Con la normalización de (6.60) la condición de unitariedad asegura que se satisfacen las siguientes relaciones.

Para (I, J) = (0, 0)

$$4m_{\pi}^2 < s < 4m_K^2: \qquad \text{Im}\,T_{11} = \sigma(m_{\pi}^2, s) \left|T_{11}\right|^2, \qquad (6.63)$$

$$4m_K^2 < s < 4m_\eta^2: \qquad \text{Im}\,T_{11} = \sigma(m_\pi^2, s) |T_{11}|^2 + \sigma(m_K^2, s) |T_{12}|^2 ,$$

Im 
$$T_{22} = \sigma(m_{\pi}^2, s) |T_{12}|^2 + \sigma(m_K^2, s) |T_{22}|^2$$
,

Im 
$$T_{12} = \sigma(m_{\pi}^2, s) T_{11}T_{12}^* + \sigma(m_K^2, s) T_{12}T_{22}^*$$
.

Para (I, J) = (1, 1)

$$4m_{\pi}^{2} < s < 4m_{K}^{2}: \qquad \text{Im} T_{11} = \sigma(m_{\pi}^{2}, s) |T_{11}|^{2} , \qquad (6.64)$$

$$4m_K^2 < s$$
: Im  $T_{11} = \sigma(m_\pi^2, s) |T_{11}|^2 + \sigma(m_K^2, s) |T_{12}|^2$ ,

6.3 Unitarización

Im 
$$T_{22} = \sigma(m_{\pi}^2, s) |T_{12}|^2 + \sigma(m_K^2, s) |T_{22}|^2$$
,  
Im  $T_{12} = \sigma(m_{\pi}^2, s) T_{11}T_{12}^* + \sigma(m_K^2, s) T_{12}T_{22}^*$ .

Y para (I, J) = (2, 0)

$$4m_{\pi}^2 < s: \qquad \text{Im} \, T_{11} = \sigma(m_{\pi}^2, s) \, |T_{11}|^2 \,, \tag{6.65}$$

donde  $\sigma(m_P^2, s) = \sqrt{1 - 4m_P^2/s}.$ 

En notación matricial (6.63) y (6.64) se convierten en

$$\operatorname{Im} T = T \,\sigma \,T^* \tag{6.66}$$

con la matriz diagonal  $\sigma = (\sigma(m_{\pi}^2, s), \sigma(m_K^2, s)).$ 

Con todas las amplitudes anteriores disponibles podemos emplear ya la ecuación matricial (6.26). En la derivación de dicha ecuación, realizada en [55], se tomaba en cuenta únicamente el corte derecho de la amplitud, responsable de la unitariedad en el canal correspondiente. Dado que las amplitudes utilizadas en [55] eran aproximadas se tomaban como sus partes imaginarias las procedentes de unitariedad, es decir, las dadas por el teorema de Watson. De esta manera se despreciaban posibles partes imaginarias procedentes del corte izquierdo.

Cuando se toman las amplitudes completas a orden  $p^4$  en ChPT como se hace aquí se observa que para los scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$  y  $\pi\pi \to K\overline{K}$  no existe contribución del corte izquierdo a la parte imaginaria, para  $s > 4m_{\pi}^2$ .

Sin embargo en el scattering  $K\overline{K} \to K\overline{K}$  sí que hay una contribución para el rango  $s < 4m_K^2 - 4m_\pi^2$  procedente de los loops en los canales t y u.

En el cálculo de las amplitudes unitarizadas hemos mantenido esa contribución del corte izquierdo que aparece por debajo del umbral  $K\bar{K}$ .

La ecuación (6.26) hemos visto que ha sido construida de modo que genera una amplitud unitaria si sólo se incluye el corte derecho de las amplitudes a orden  $p^4$ . Al mantener nosotros la contribución del corte izquierdo antes mencionada la amplitud que nos da el IAM a través de (6.26) no satisfará unitariedad de manera exacta. Un modo de ver lo grande que es la desviación de unitariedad es observar el valor de la inelasticidad en la región  $4m_{\pi}^2 < s < 4m_K^2$  para (I, J) = (0, 0) y (1, 1) que es donde aparecen dos canales. En ambos casos la desviación respecto de 1 es menor que el 1%.

Otra contribución que aparece en las amplitudes a orden  $p^4$  empleadas es la correspondiente a los loops con el estado intermedio  $\eta\eta$ . En el caso (I, J) = (1, 1) este canal no interviene, sin embargo para (I, J) = (0, 0) y  $\sqrt{s} > 2m_{\eta}$  este estado da una contribución a la parte imaginaria de nuestra amplitud además de la mostrada en (6.63). Esto significa que (6.26) con sólo  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$  como estados intermedios no satisface unitariedad exactamente para  $\sqrt{s} > 2m_{\eta} \simeq 1.1$  GeV. La influencia del estado  $\eta\eta$  es particularmente significativa en el desfasaje en onda S para  $\pi\pi \to K\overline{K}$ . Volveremos sobre esto después.

Conocida la matriz  $T^{(I,J)}$  unitarizada podemos hallar la matriz de scattering  $S^{(I,J)}$ . Omitiendo las etiquetas  $I \ge J$ , la relación entre los elementos de matriz de  $T \ge S$  para un proceso con dos canales está dada por

$$S_{11} = 1 + 2i \sigma(m_{\pi}^2, s) T_{11},$$
  

$$S_{22} = 1 + 2i \sigma(m_K^2, s) T_{22},$$
  

$$S_{12} = 2i \sqrt{\sigma(m_{\pi}^2, s) \sigma(m_K^2, s)} T_{12}.$$
(6.67)

Dado que la matriz S satisface unitariedad puede escribirse como

$$S = \begin{bmatrix} \eta e^{2i\delta_1} & i(1-\eta^2)^{1/2} e^{i(\delta_1+\delta_2)} \\ i(1-\eta^2)^{1/2} e^{i(\delta_1+\delta_2)} & \eta e^{2i\delta_2} \end{bmatrix}.$$
 (6.68)

Por tanto, a partir de las amplitudes unitarizadas calculadas a través de (6.26) y empleando (6.67) y (6.68) obtenemos la inelasticidad  $\eta$  y los desfasajes para  $\pi\pi \to \pi\pi$  ( $\delta_1$ ) y  $\pi\pi \to K\bar{K}$  ( $\delta_1 + \delta_2$ ) para (I, J) = (0,0) y (1,1). Para (I, J) = (2,0) sólo es necesario el canal  $\pi\pi$ , cuando no se tienen en cuenta los estados de varios piones. En este caso es suficiente con considerar la primera igualdad de (6.67) para obtener los desfasajes con  $S_{11} = e^{i2\delta}$ .

122

## 6.4 Ajuste y obtención de desfasajes e inelasticidad

En ChPT los valores experimentales de los coeficientes  $L_i$  proceden de ajustes de orden  $p^4$  a datos experimentales de bajas energías. Por contra, aquí obtenemos las  $L_i$  a partir de un ajuste al experimento en un rango mucho mayor de energías y con una expresión (6.26) válida a todos los órdenes. En consecuencia, es de esperar que haya diferencias entre nuestros valores para las  $L_i$  y los que se citan en la literatura basados en ChPT a orden  $p^4$ .

Además, nuestro método no satisface la simetría de cruce. Esto implica que las contribuciones procedentes del corte izquierdo de orden superior a  $p^4$  están reabsorbidas en nuestros coeficientes  $L_i$ . Esta cuestión ha sido estudiada en [60] llegando a la conclusión de que los valores obtenidos para las  $L_i$  partiendo de un método sin simetría de cruce son influidos por el procedimiento en que se reabsorbe el corte izquierdo. En este sentido, los valores que damos aquí para los coeficientes  $L_i$  tienen que tomarse con cuidado a la hora de comparar con los valores de las  $L_i$  de ChPT.

Para obtener nuestros valores de las constantes  $L_i$  hemos realizado un ajuste simultáneo a los desfasajes de  $\pi\pi \to \pi\pi$  con isospín 0 y 1, mostrados en las figuras 6.4 y 6.5.

El ajuste se ha llevado a cabo empleando el programa MINUIT.

Dado que existen datos para esos desfasajes de distintos experimentos hemos tenido que tratarlos para poder utilizarlos en el ajuste.

En la región de energías  $\sqrt{s} = 500-950$  MeV los datos procedentes de experimentos diferentes para los desfasajes  $\pi\pi$  en onda S son incompatibles. Para poder trabajar con ellos, hemos tomado como valor central para cada energía el valor medio de los distintos resultados experimentales [61]–[66]. Para la región 0.95-1 GeV, el valor medio sólo procede de [63, 65]. En ambos intervalos de energías el error es el máximo entre los errores experimentales y la distancia más grande entre los datos experimentales y el valor medio.

Los errores que mostramos para los valores de los coeficientes  $L_i$  son únicamente los errores estadísticos.

El ajuste obtenido es bastante bueno, como se puede ver en la figuras

$L_{i}^{r}\left(M_{\rho}\right)$	Ajuste	ChPT
$L_1$	$0.72^{+0.03}_{-0.02}$	$0.4 \pm 0.3$
$L_2$	$1.36\substack{+0.02 \\ -0.05}$	$1.4 \pm 0.3$
$L_3$	$-3.24 \pm 0.04$	$-3.5 \pm 1.1$
$L_4$	$0.20 \pm 0.10$	$-0.3 \pm 0.5$
$L_5$	$0.0\substack{+0.8\\-0.4}$	$1.4 \pm 0.5$
$2L_6 + L_8$	$0.00\substack{+0.26\\-0.20}$	$0.5 \pm 0.7$

Tabla 6.1: Valores obtenidos en el ajuste para las constantes  $L_i$  comparados con los valores dados en ChPT. En unidades de  $10^{-3}$ 

6.4 y 6.5, con  $\chi^2=1.3$  por grado de libertad.

Los valores obtenidos para las  $L_i$  a la escala  $\mu = M_{\rho}$  se muestran en la Tabla 6.1.

Los pequeños errores de  $L_1, L_2$  y  $L_3$  se deben a las fuertes restricciones que imponen los pequeños errores de los datos experimentales del desfasaje  $\delta_{11,\pi\pi}$ , fig. 6.4.

A modo de comparación mostramos también los valores de ChPT.

Como podemos ver, nuestros valores, teniendo en cuenta los errores, son compatibles con los de ChPT. De este modo podemos garantizar un buen comportamiento a bajas energías de nuestras predicciones.

Veremos más adelante cómo utilizando estos valores para las  $L_i$ somos capaces de describir correctamente otros desfasajes, así como longitudes de scattering y los factores de forma del pión para los canales I = J = 0 y I = J = 1.

En la figura 6.4 mostramos el resultado de nuestro ajuste a  $\delta_1$  para I = J = 1. Abarcamos en energía desde el umbral de dos piones hasta 1.2 GeV. Vemos un buen acuerdo con los datos experimentales que, en este canal, están dominados por la presencia de la resonancia  $\rho(770)$  que reproducimos correctamente. En este canal observamos que la influencia del canal acoplado  $K\overline{K}$  a  $\pi\pi$  es pequeña.

En la figura 6.5 representamos el ajuste de  $\delta_1$  para I = J = 0,



Figura 6.4: Desfasaje para  $\pi\pi \to \pi\pi$  en I = J = 1. Datos: [66].



Figura 6.5: Desfasaje para  $\pi\pi \to \pi\pi$  en I = J = 0. Datos: pentágono vacío [61], círculo vacío [62], cuadrado completo [65], triángulo completo [63]. Los círculos llenos representan el promedio explicado en el texto.



Figura 6.6: Desfasaje para  $\pi\pi \to K\bar{K}$  en I = J = 0. Datos: cuadrado completo [67], triángulo completo [68]. La línea de trazos corresponde a eliminar la parte imaginaria procedente del loop  $\eta\eta$  en el canal s. La línea continua sí que la incluye.

también desde el umbral de dos piones y hasta 1.2 GeV. El acuerdo con el experimento es bastante bueno viéndose claramente la presencia de la resonancia  $f_0(980)$  como un gran salto en el desfasaje alrededor de 1 GeV. Para obtener esta resonancia sí que es esencial incluir el estado intermedio de kaones y unitarizar con canales acoplados tal y como hemos hecho nosotros. En la figura aparecen también datos experimentales de [61], sin embargo, dado que no presentan errores no han sido incluidos en el ajuste.

Ahora, una vez hemos fijado las  $L_i$  a partir del ajuste podemos predecir otras magnitudes.

En la figura 6.6 se muestra el desfasaje para la amplitud de scattering  $K\overline{K} \to \pi\pi$ ,  $\delta_1 + \delta_2$ , para I = J = 0. En esta figura se aprecia claramente el umbral  $\eta\eta$ . Este proceso es el más sensible al estado intermedio  $\eta\eta$ , al contrario de lo que ocurría en el desfasaje  $\pi\pi$ , figura 6.5, donde su contribución era prácticamente despreciable. Un modo de evaluar la influencia de este estado intermedio en los desfasajes es cancelar la parte imaginaria de  $T_4$  procedente del loop de  $\eta\eta$  en el canal s para  $\sqrt{s} > 2m_{\eta} \simeq 1.1$  GeV. Actuando de esta manera se obtiene la linea de trazos de la figura 6.6, que coincide muy bien con los datos.

La desviación es grande, lo que sugiere que un tratamiento adecuado para estudiar este proceso sería unitarizar con tres estados intermedios en lugar de dos:  $\pi\pi$ ,  $K\overline{K} \ge \eta\eta$ .

De todos modos, como ya se dijo, el umbral de  $\eta\eta$  está muy próximo a 1.2 GeV, donde son importantes también otros estados intermedios, como el de cuatro piones, que deberían incluirse en la unitarización. En consecuencia, creemos que la inclusión de  $\eta\eta$  en (6.26) debe hacerse cuando se pretendan describir energías más altas, es decir, cuando se extienda el modelo por encima de los 1.2 GeV.

En la figura 6.7 mostramos  $(1 - (\eta_{00})^2)/4$ , donde  $\eta_{00}$  es la inelasticidad. Nuestros resultados presentan la misma tendencia que los datos experimentales, si bien en la zona del umbral  $\eta\eta$  hay una mayor discrepancia por las mismas razones que en la figura 6.6.

En la figura 6.8 mostramos el desfasaje  $\pi\pi$  con I = 2 y J = 0. El acuerdo con los datos experimentales es bueno. Al contrario de lo que ocurre en los otros canales que hemos mostrado en este caso no aparece ninguna resonancia y, además, solamente está presente el canal  $\pi\pi$ . Por lo tanto, en este caso nuestro resultado es el mismo que el del IAM [34], excepto por las diferencias en los valores de las  $L_i$ .

Hemos calculado también las longitudes de scattering para los tres canales unitarizados en este trabajo, (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0). Las longitudes las denotamos por  $a_J^I$ . Empleando los desfasajes obtenidos en la expresión siguiente

$$a_J^I = \lim_{q \to 0} \frac{\delta_J^I(q)}{q^{2J+1}}, \qquad (6.69)$$

donde q es el módulo del trimomento del pión, obtenemos nuestra predicción de las longitudes de scattering.

En la Tabla 6.2 damos los valores obtenidos para  $a_J^I$  junto con los valores de ChPT a orden  $p^4$  y los experimentales.



Figura 6.7:  $(1 - (\eta_{00})^2)/4$ , donde  $\eta_{00}$  es la inelasticidad en I = J = 0. Datos: cuadrado completo [67], triángulo completo [68], círculo completo [69].



Figura 6.8: Desfasaje para  $\pi\pi \to \pi\pi$  en I = 2, J = 0. Datos: cruz [70], cuadrado vacío [71].

$a_J^I$	$\mathcal{O}(p^4)$ ChPT	Nuestros valores	Experimento
$a_{0}^{0}$	$0.20 \pm 0.01$	$0.210\pm0.002$	$0.26 \pm 0.05$
$a_1^1$	$0.037\pm0.002$	$0.0356 \pm 0.0008$	$0.038 \pm 0.002$
$a_{0}^{2}$	$-0.041 \pm 0.004$	$-0.040 \pm 0.001$	$-0.028 \pm 0.012$

Tabla 6.2: Comparación de las longitudes de scattering en canales diferentes.

Vemos en esta tabla que existe un buen acuerdo con el experimento. Nuestros valores están cerca también de los de ChPT, como era de esperar, ya que nuestra predicción recupera el resultado de ChPT a bajas energías.

## 6.5 Factores de forma escalar y vectorial del pión

Los factores de forma escalar y vectorial del pión se definen respectivamente como

$$\left\langle \pi^{+}\pi^{-} \left| \left( \bar{u}u + \bar{d}d \right) \right| 0 \right\rangle = \sqrt{2} B_{0} \Gamma(s) , \qquad (6.70)$$

у

$$\left\langle \pi^{0}\pi^{-} \left| \bar{d}\gamma_{\mu}u \right| 0 \right\rangle = \sqrt{2} F_{V}(s) \left( p_{\pi^{-}} - p_{\pi^{0}} \right)_{\mu},$$
 (6.71)

donde  $B_0$  es la constante que acompaña a las masas de los quarks en el lagrangiano de ChPT a orden  $p^2$ .

Asumiendo unitariedad elástica (válida hasta el umbral de  $\overline{KK}$  y despreciando estados intermedios de varios piones) y empleando el teorema de estado final de Watson [36] las fases de  $\Gamma(s)$  y  $F_V(s)$  quedan fijadas y deben ser las mismas que las de las amplitudes de scattering en onda parcial. Esto hace que satisfagan que

$$\operatorname{Im} \Gamma(s + i\epsilon) = \tan \delta_0^0 \operatorname{Re} \Gamma(s),$$
  
$$\operatorname{Im} F_V(s + i\epsilon) = \tan \delta_1^1 \operatorname{Re} F_V(s). \qquad (6.72)$$

La solución de (6.72) corresponde a la función de Omnès <sup>†</sup> [12, 11]:

$$\Gamma(s) = P_0(s) \Omega_0(s) ,$$
  

$$F_V(s) = P_1(s) \Omega_1(s) , \qquad (6.73)$$

donde

$$\Omega_i(s) = \exp\left\{\frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'^n} \frac{\delta_i^i(s')}{s'-s-i\epsilon}\right\}.$$
(6.74)

En (6.73)  $P_0(s)$  y  $P_1(s)$  son polinomios de grado fijado por el número de sustracciones realizadas en  $\ln{\{\Omega_0(s)\}}$  y  $\ln{\{\Omega_1(s)\}}$  menos uno. Para  $n = 1, P_i(s) = 1$ . Esto se debe al requerimiento de que la normalización sea  $\Gamma(0) = F_V(0) = 1$ .

Dado que en la sección anterior hemos obtenido una predicción para los desfasajes podemos calcular la integral de dispersión (6.74) y obtener los factores de forma del pión en ambos casos, vectorial y escalar. Los resultados aparecen en las figuras 6.9 y 6.10 para n = 1.

Como hemos dicho la solución de Omnès supone que la fase del factor de forma coincide con la de la amplitud de scattering, y eso es cierto exactamente sólo por debajo del primer umbral inelástico.

El primer umbral inelástico es el de cuatro piones. Sin embargo, como ya dijimos, su influencia es en primera aproximación despreciable. Por tanto, el primer umbral inelástico importante es el de  $K\bar{K}$ , cerca de 1 GeV. Este umbral es esencial en el canal I = J = 0, pero no demasiado relevante en I = J = 1. Este umbral inelástico ha sido incluido en nuestro método de unitarización y es el responsable de la

<sup>&</sup>lt;sup>†</sup>ver Apéndice B

aparición de la resonancia  $f_0(980)$ , como puede verse claramente en las figuras 6.5 y 6.10.

Debido a la presencia de este importante umbral, el de  $K\overline{K}$ , sobre todo en el sector I = J = 0, las ecuaciones (6.73) son correctas estrictamente hasta  $\sqrt{s} = 2m_K$ , indicado como una línea vertical de puntos en las figuras 6.9 y 6.10.

Antes de llegar a esta energía, podemos ver en las figuras 6.9 y 6.10 la aparición de las resonancias  $\rho(770)$  y  $f_0(980)$  respectivamente. En el caso de  $F_V(s)$  el acuerdo con los datos experimentales es bastante satisfactorio. Además, la curva coincide con la mostrada en la figura 4.6 correspondiente a una sustracción [18].

Por encima del umbral inelástico  $K\overline{K}$  se espera que las curvas se desvíen de los datos debido a la apertura de este canal. Sin embargo, para el factor de forma vectorial vemos que, sobrepasado el umbral, el acuerdo con los datos es todavía bastante bueno. La desviación a energías mayores se debe más a la aparición de la resonancia  $\rho'$  alrededor de 1.4 GeV que a la pequeña contribución de  $K\overline{K}$ .

Para el canal I = J = 0 la consecuencia más importante de la apertura del canal  $K\overline{K}$  es la aparición de la resonancia  $f_0(980)$ , lo que ocurre un poco por debajo del umbral de dos kaones. Por tanto, su presencia en la figura 6.10 es compatible con la suposición de unitariedad elástica que habíamos hecho para evaluar los factores de forma a partir de la ecuación de Omnès. Así pues, no esperamos grandes desviaciones para nuestros resultados ni por encima del umbral  $K\overline{K}$ , al menos hasta las energías en las que aparecen las siguientes resonancias tipo  $f_0$ , típicamente esto ocurre a 1.3 GeV.

En la figura 6.10 la línea de trazos representa el resultado que se obtendría para el factor de forma escalar unitarizando sólo con un canal, el de piones, para obtener el desfasaje  $\delta_{00,\pi\pi}$ . Como vemos, la influencia del canal  $K\overline{K}$  es muy grande. Tanto es así que sus efectos se aprecian ya a energías tan bajas como 500 MeV, y, lo que es más importante, es esencial para reproducir la resonancia  $f_0(980)$  correctamente.



Figura 6.9: Factor de forma vectorial del pión. La línea vertical indica la apertura del canal  $K\overline{K}$ . Datos: [38].



Figura 6.10: Factor de forma escalar del pión. La línea de trazos es el resultado de unitarizar sólo con piones. La línea continua es el resultado completo con piones y kaones en el estado intermedio. La línea vertical indica la apertura del canal  $K\overline{K}$ .

## 6.6 Resumen

Hemos aplicado con éxito el método de la amplitud inversa con canales acoplados a varios observables.

Para ello primero hemos calculado la amplitud de scattering  $K\overline{K} \rightarrow K\overline{K}$  a orden  $p^4$  en ChPT. Este cálculo por sí solo no resulta útil, basta comprobar que las correcciones de orden  $p^4$  son mayores que la contribución a nivel árbol incluso en el umbral de producción de dos kaones.

Sin embargo, hemos visto que es posible obtener buenos resultados a partir de las amplitudes de ChPT si las incorporamos a un método de unitarización apropiado como el utilizado aquí.

De este modo hemos descrito adecuadamente los desfasajes de  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  en (I, J) = (0, 0), (1, 1) y (2, 0); el desfasaje de  $\pi\pi \rightarrow K\overline{K}$  en (I, J) = (0, 0) y la inelasticidad en buen acuerdo con los experimentos hasta una energía del orden de 1.2 GeV.

También hemos obtenido las longitudes de scattering de  $\pi\pi$  con  $I = 0, 1 \ge 2$  y los resultados están de acuerdo con los experimentales y los dados por cálculos en ChPT.

Finalmente hemos calculado los factores de forma escalar y vectorial del pión utilizando los desfasajes obtenidos anteriormente y aplicándolos a una representación de Omnès. Los resultados han sido satisfactorios dentro de las limitaciones esperadas. En el caso del factor de forma escalar hemos comprobado que la inclusión del canal  $K\overline{K}$  es esencial para poder reproducir la resonancia  $f_0$ .

# CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES

La consecuencia principal que extraemos del trabajo mostrado en esta tesis es la gran eficacia que presentan los métodos de resumación aquí empleados cuando se combinan con los resultados de las teorías efectivas para las interacciones fuertes.

Podemos separar nuestros resultados en dos partes: factores de forma y amplitudes de scattering.

La resumación de Omnès nos ha permitido describir los factores de forma del pión, del kaón y de kaón-pión. Por otro lado, el IAM con canales acoplados reproduce con éxito los datos experimentales de las amplitudes de scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$  y  $\pi\pi \to K\overline{K}$ .

Los resultados más importantes han sido ya resumidos al final de los capítulos 4 y 6, sin embargo los volvemos a comentar aquí como compendio final.

En el capítulo 4 hemos trabajado en profundidad en el estudio del factor de forma del pión [16, 17]. Partimos de la expresión dada por ChPT a orden  $p^4$ , capaz de reproducir los datos experimentales apenas hasta los 400 MeV. Combinando a continuación esta expresión con la derivada del lagrangiano efectivo de las resonancias incorporamos los efectos del propagador de la  $\rho$ .

El punto crucial, sin embargo, es la aplicación de la solución de la ecuación de Omnès.

Añadiendo finalmente el cálculo de la autoenergía de la  $\rho$  que nos permite introducir la anchura en el propagador, llegamos a la parametrización del factor de forma que constituye nuestro principal resultado: la ecuación (4.42).

Obtenemos así una expresión analítica para el factor de forma del pión que reproduce correctamente los datos experimentales en módulo y en fase hasta 1 GeV. Satisface además los requisitos teóricos: analiticidad y polos correctamente dispuestos, reproduce los resultados de ChPT a bajas energías, satisface el teorema de la fase.

La estructura de la expresión (4.42) posee en realidad una doble resumación: por un lado los términos dominantes en la expansión en  $1/N_c$  y por otro los subdominantes.

Los términos dominantes quedan resumados en el propagador de la  $\rho$ , donde se suman las contribuciones de los términos locales que sobreviven en el límite  $N_c \to \infty$ .

Por otro lado, los términos subdominantes (las correcciones de uni-

Capítulo 7. Conclusiones

tariedad) son sumados por la exponencial de la solución de Omnès.

Después de ver que esta parametrización describe correctamente el módulo y la fase del factor de forma del pión comprobamos que la predicción que da para el orden  $p^6$  concuerda con los cálculos realizados en ChPT a dos loops [18]. En el límite quiral la predicción y ChPT son prácticamente iguales. Sólo se diferencian en lo que cabía esperar, en las contribuciones no incluidas en nuestra parametrización: loops y resonancias en los canales t y u.

Sin tomar el límite quiral se comprueba que nuestra parametrización contiene numéricamente las contribuciones más relevantes. Asimismo, obtenemos un valor para la constante  $\overline{f}_2$  compatible con los existentes en la literatura.

Hechas estas comprobaciones decidimos extrapolar esta parametrización a energías superiores. Para ello incorporamos dos nuevas resonancias:  $\rho' \neq \rho''$ . Haciendo un ajuste de los datos experimentales obtenemos un resultado bastante bueno y en acuerdo con resultados previos. De esta manera se reproducen los datos hasta los 2 GeV manteniéndose el límite a bajas energías en el valor correcto.

En el capítulo 5 explotamos este método de resumación y lo aplicamos a los factores de forma  $K\pi$  y KK.

El factor de forma  $K\pi$  contiene en realidad dos (debido a la diferencia de masas entre el pión y el kaón): el vectorial y el escalar.

En el factor de forma vectorial la analogía con el factor de forma del pión es completa y conseguimos reproducir los datos experimentales correctamente hasta 1.2 GeV.

En el factor de forma escalar la analogía no es posible. La predicción que el lagrangiano efectivo de las resonancias da para la anchura de la resonancia  $K_0^*(1430)$  no es bien comportada, de manera que la reparametrizamos y hacemos un ajuste de los datos. De este modo obtenemos unos valores para la masa y la anchura de la  $K_0^*$  compatibles con los experimentales.

Finalmente estudiamos la amplitud de desintegración  $\tau^- \to K^- \pi^0 \nu_{\tau}$ . En ella intervienen los dos factores de forma: el vectorial y el escalar.

A partir del valor experimental de la amplitud obtenemos los valores numéricos de los acoplamientos  $c_d$  y  $c_m$  de las resonancias escalares. Por último, comparamos indirectamente los módulos de ambos factores de forma con el experimento al confrontar nuestra predicción para la distribución en energías de la anchura con los datos experimentales. Observamos que el acuerdo es bueno y que la contribución del factor de forma escalar supone un 40% del total.

En la segunda parte del capítulo 5 se estudia el factor de forma del kaón. Una vez comprobamos que a orden  $p^4$  este factor de forma coincide con el del pión, hicimos la hipótesis de que la expresión exponenciada (4.42) del factor de forma del pión será la misma en el caso del kaón.

Con esta hipótesis calculamos la anchura de desintegración  $\tau^- \rightarrow K^- K^0 \nu_{\tau}$  y comparamos con los datos experimentales de la distribución en momentos de la anchura. Ambos cálculos se realizaron primero incluyendo sólo la  $\rho$  y después añadiendo la  $\rho'$  y la  $\rho''$ .

La conclusión extraída es que la hipótesis de identificar ambos factores de forma parece razonable, y, también, que la contribución de las resonancias  $\rho'$  y  $\rho''$  es en este caso bastante importante. Sin embargo, habrá que esperar a tener mejores datos experimentales para poder afirmar algo con seguridad.

En el capítulo 6 empleamos otro método de resumación: el IAM con canales acoplados. Este método va en dirección inversa al de la ecuación de Omnès. Aquí se trata de reconstruir la contribución completa de las resonancias partiendo de la información que de ellas se contiene en las constantes  $L_i$  de ChPT.

Para ello se calcula la matriz de amplitudes y, a partir de la expansión en potencias de momento de la matriz inversa, se unitariza. Es decir, a partir de las amplitudes a orden  $p^4$  en ChPT se obtiene una matriz de amplitudes que satisface la condición de unitariedad [19].

Tomamos como canales  $\pi\pi$  y  $K\overline{K}$ , de manera que necesitamos las amplitudes de scattering  $\pi\pi \to \pi\pi$ ,  $\pi\pi \to K\overline{K}$  y  $K\overline{K} \to K\overline{K}$ . Esta última la calculamos nosotros por vez primera.

Proyectando sobre (I, J) = (0, 0),  $(1, 1) \ge (2, 0)$  obtuvimos las amplitudes en onda parcial a orden  $p^4$  en ChPT y con estas, a través del IAM, las amplitudes en onda parcial unitarizadas a todos los órdenes.

Los valores de las constantes  $L_i$  los fijamos por medio de un ajuste de los datos experimentales de los desfasajes  $\delta_{IJ} = \delta_{00}$  y  $\delta_{11}$  para el scattering  $\pi\pi$ .

El ajuste es bastante bueno y los valores de las  $L_i$  resultaron cercanos a los dados por ChPT a orden  $p^4$ .

Una vez fijadas las  $L_i$  comprobamos nuestras amplitudes unita-

rizadas por medio de varios observables.

Podemos describir correctamente los desfasajes en los canales (0, 0), (1, 1) y (2, 0) para  $\pi\pi$  y en el (0, 0) para  $\pi\pi \to K\overline{K}$ , y la inelasticidad en (0, 0), hasta 1.2 GeV aproximadamente.

Calculamos también las longitudes de scattering  $\pi\pi$  para I = 0, 1 y 2 obteniendo buen acuerdo con los valores experimentales y con ChPT.

Por último empleamos los desfasajes  $\delta_{00}$  y  $\delta_{11}$  de  $\pi\pi$  para obtener una predicción de los factores de forma escalar y vectorial del pión. Introduciendo los resultados del ajuste a los desfasajes en la ecuación de Omnès resultaron unas predicciones satisfactorias dentro de las limitaciones esperadas. La consecuencia más importante fue constatar que la aparición de la resonancia  $f_0$  está ligada a la inclusión del canal  $K\overline{K}$ .

Después de emplear ambos métodos se llega a la conclusión de que el IAM con canales acoplados posee la ventaja sobre el método de la ecuación de Omnès de poder describir un mayor número de observables. Sin embargo, este último es capaz de dar expresiones analíticas simples y con mayor base teórica.

La conclusión final, después de haber comprobado en este trabajo la gran utilidad que presentan estos métodos, es la constatación de que conjuntar todos los resultados de teorías efectivas (ChPT, resonancias, etc.) con los resultados obtenidos en los años 60 sobre las propiedades analíticas de las amplitudes (cortes, polos, umbrales de producción, etc.) y con la condición de unitariedad es imprescindible para tratar de comprender los aspectos fundamentales de las interacciones fuertes en el régimen de bajas energías, la región donde la teoría subyacente, QCD, no es soluble.

Capítulo 7. Conclusiones

# Apéndice A

## Integrales de Feynman

En la elaboración de este trabajo se han necesitado resolver distintas integrales de Feynman. Finalmente todas ellas quedan reducidas a las denotadas como A(m) y  $B_0(p, m_1, m_2)$  en [37] (para  $D = 4 + 2\epsilon$ ) y definidas como

$$A(m) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2},$$
  
$$B_0(p, m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)((p - k)^2 - m_2^2)}.$$
 (A.1)

El resultado analítico de A(m) es

$$A(m) = -\frac{im^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\hat{\epsilon}} - 1 + \ln\frac{m^2}{\mu^2}\right), \qquad (A.2)$$

donde  $1/\hat{\epsilon} = 1/\epsilon + \gamma - \ln 4\pi$ siendo $\gamma$  la constante de Euler.

El resultado de  $B_0(p, m_1, m_2)$  es

$$B_0(p, m_1, m_2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{-1}{\hat{\epsilon}} + 2 - \ln \frac{m_2^2}{\mu^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2 + s}{2s} \ln \left( \frac{m_2^2}{m_1^2} \right) \right]$$

Apéndice A

$$+ \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2s} \ln \left( \frac{m_1^2 + m_2^2 - s + \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{m_1^2 + m_2^2 - s - \lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} \right) \right], \quad (A.3)$$

donde  $s = p^2$  y

$$\lambda(s, m_1^2, m_2^2) = (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2.$$
 (A.4)

A continuación aparecen las integrales escalares con distintas potencias del momento k en el numerador.

$$I(k^{2}) = \int \frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}} \frac{k^{2}}{(k^{2} - m_{1}^{2})((p - k)^{2} - m_{2}^{2})}$$
$$= A(m_{2}) + m_{1}^{2}B_{0}(p, m_{1}, m_{2}), \qquad (A.5)$$

$$I(k^{4}) = \int \frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}} \frac{k^{4}}{(k^{2} - m_{1}^{2})((p - k)^{2} - m_{2}^{2})}$$
$$= (m_{1}^{2} + m_{2}^{2} + s)A(m_{2}) + m_{1}^{4}B_{0}(p, m_{1}, m_{2}).$$
(A.6)

Con estas expresiones para las escalares podemos mostrar los resultados de las integrales con índices Lorentz.

Seguiremos aquí en lo posible la notación de [37].

$$B^{\mu}(p, m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu}}{(k^2 - m_1^2)((p - k)^2 - m_2^2)}$$
$$= -\frac{p^{\mu}}{2s} \left[ A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - s)B_0(p, m_1, m_2) \right] (A.7)$$

$$I(k^{2}k^{\mu}) = \int \frac{d^{D}k}{(2\pi)^{D}} \frac{k^{2}k^{\mu}}{(k^{2} - m_{1}^{2})((p-k)^{2} - m_{2}^{2})}$$

144
Apéndice A

$$= p^{\mu} \left[ \left( 1 + \frac{m_1^2}{2s} \right) A(m_2) - \frac{m_1^2}{2s} A(m_1) - \frac{m_1^2}{2s} A(m_2) - \frac{m_1^2}{2s} (m_2^2 - m_1^2 - s) B_0(p, m_1, m_2) \right],$$
(A.8)

$$B^{\mu\nu}(p,m_1,m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(k^2 - m_1^2)((p-k)^2 - m_2^2)}$$
$$= \alpha(p,m_1,m_2)g^{\mu\nu} + \beta(p,m_1,m_2)p^{\mu}p^{\nu}.$$
(A.9)

Las funciones  $\alpha(p, m_1, m_2)$  y  $\beta(p, m_1, m_2)$  son

$$\alpha(p, m_1, m_2) = \frac{m_1^2 + m_2^2}{6} - \frac{s}{18} + \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{12s} A(m_2) + \frac{s - m_2^2 + m_1^2}{12s} A(m_1) - \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)}{12s} B_0(p, m_1, m_2), \quad (A.10)$$

$$\beta(p, m_1, m_2) = -\frac{m_1^2 + m_2^2}{6s} + \frac{1}{18} + \frac{m_2^2 - m_1^2 - s}{3s^2} A(m_1) + \frac{2s - m_2^2 + m_1^2}{3s^2} A(m_2) + \frac{\lambda(s, m_1^2, m_2^2) + 3sm_1^2}{3s^2} B_0(p, m_1, m_2) A(m_1)$$

Estas mismas integrales tienen expresiones mucho más sencillas en el caso en el que las masas son iguales,  $m_1 = m_2 = m$ . La integral A(m) es obviamente la misma, pero la  $B_0(p, m_1, m_2)$  no lo es.

$$B_0(p,m,m) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{-1}{\hat{\epsilon}} + 2 - \ln \frac{m^2}{\mu^2} - \sigma \ln \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \right], \qquad (A.12)$$

donde  $\sigma = \sqrt{1 - 4m^2/s}$ .

El resto de las integrales ahora son

$$I(k^{2}) = A(m) + m^{2}B_{0}(p, m, m), \qquad (A.13)$$

$$I(k^4) = (2m^2 + s)A(m) + m^4 B_0(p, m, m), \qquad (A.14)$$

$$B^{\mu}(p,m,m) = \frac{p^{\mu}}{2} B_0(p,m,m) , \qquad (A.15)$$

$$I(k^{2}k^{\mu}) = p^{\mu} \left[ A(m) + \frac{1}{2}m^{2}B_{0}(p,m,m) \right], \qquad (A.16)$$

$$B^{\mu\nu}(p,m,m) = \alpha(p,m,m)g^{\mu\nu} + \beta(p,m,m)p^{\mu}p^{\nu}, \qquad (A.17)$$

donde

$$\alpha(p,m,m) = \frac{m^2}{3} - \frac{s}{18} + \frac{1}{6}A(m) - \frac{s\sigma^2}{12}B_0(p,m,m), \qquad (A.18)$$

$$\beta(p,m,m) = -\frac{m^2}{3s} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3s}A(m) + \frac{s-m^2}{3s}B_0(p,m,m). \quad (A.19)$$

Todas estas expresiones son las que se han necesitado en la elaboración de los cálculos que contiene este trabajo.

### Apéndice B

### Teorema de Watson

Vamos a ver de manera simple la derivación de la ecuación (4.15) conocida como teorema de Watson o de interacción entre estados finales.

Partimos de la matriz S. Suponiendo que nos encontramos en un rango de energías para el cual el scattering descrito por la matriz S es elástico, la condición de unitariedad establece que  $S^{\dagger}S = 1$ .

Si reescribimos S en términos de la amplitud de scattering T de la forma

$$S = 1 + iT, \qquad (B.1)$$

entonces la condición de unitariedad se traduce en la siguiente condición para  ${\cal T}$ 

$$\operatorname{Im} T = \frac{1}{2}TT^{\dagger} = \frac{1}{2}T^{\dagger}T.$$
 (B.2)

Aplicamos ahora este resultado al cálculo de elementos de matriz entre un estado final hadrónico H y un estado inicial con un bosón gauge  $W_{\mu}$  (un caso particular de esto es la aplicación al factor de forma del pión) e insertamos el operador identidad expresado en función de un conjunto completo de estados. Obtenemos

Im 
$$\langle H | T | W \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n} \langle H | T^{\dagger} | n \rangle \langle n | T | W \rangle$$
. (B.3)

La pieza débil del operador T se puede descomponer como producto de la corriente vectorial  $J^{\mu}$  y el campo del bosón  $W_{\mu}$ .

$$T = J^{\mu}W_{\mu} + \cdots \tag{B.4}$$

y, por tanto,

$$\langle n | T | W \rangle = \langle n | J^{\mu} | 0 \rangle \langle 0 | W_{\mu} | W \rangle \tag{B.5}$$

para cualquier estado hadrónico n.

Sustituyendo en (B.3) y simplificando el factor común obtenemos la expresión del teorema de Watson.

$$\operatorname{Im} \langle H | J^{\mu} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n} \langle H | T^{\dagger} | n \rangle \langle n | J^{\mu} | 0 \rangle .$$
 (B.6)

Utilizaremos un conjunto completo de estados de la forma

$$\sum_{n} |n\rangle \langle n| = \sum_{n} \int \left( \prod_{i=1}^{n} \frac{d^{3}k_{i}}{(2\pi)^{3} 2E_{i}} \right) |k_{1}, ..., k_{n}\rangle \langle k_{1}, ..., k_{n}| , \quad (B.7)$$

con la normalización covariante usual

$$\langle k'_1, ..., k'_n | k_1, ..., k_n \rangle = (2\pi)^{3n} 2E_1 \cdots 2E_n \delta^3 \left( \vec{k}'_1 - \vec{k}_1 \right) \cdots \delta^3 \left( \vec{k}'_n - \vec{k}_n \right)$$
(B.8)

donde  $k_i$  es el momento de la partícula *i* del estado intermedio.

Si ahora tomamos el estado H como el de los piones  $\pi^-\pi^0$ ,  $J^{\mu}$  como la corriente vectorial y sustituimos (B.7) en (B.6) obtenemos (después de resolver la integral de espacio fásico de dos cuerpos) la expresión dada en la ecuación (4.15)

Im 
$$F(s) = \sigma_{\pi} T_1^1(s) F(s)^*$$
. (B.9)

Para llegar a esta expresión hay que aplicar la definición del factor de forma del pión dada en (4.1) y la de la amplitud en onda parcial con isospín definido dada en (4.16).

## Apéndice C

## Solución de la ecuación de Omnès

Mostramos aquí una derivación sencilla de la solución a la ecuación de Omnès.

Para ello consideremos la ecuación con n sustracciones

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n-1} F^{(k)}(0) \, \frac{s^k}{k!} + \frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\tan \delta_1^1(z) \operatorname{Re} F(z)}{z - s - i\epsilon} \,, \qquad (C.1)$$

donde

$$F^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k F(s)}{ds^k} \right|_{s=0} .$$
 (C.2)

Definimos una función auxiliar H(s) según

$$H(s) = \frac{1}{2i}F(s), \qquad (C.3)$$

que obviamente satisface

$$F(s) = F(0) \frac{H(s)}{H(0)}$$
. (C.4)

De (C.3) se deducen las relaciones

$$H(s+i\epsilon) - H(s-i\epsilon) = \operatorname{Im} F(s) = \tan \delta_1^1(s) \operatorname{Re} F(s) ,$$
$$H(s+i\epsilon) + H(s-i\epsilon) = \frac{1}{i} \operatorname{Re} F(s) .$$
(C.5)

Combinando ambas resulta

$$H(s+i\epsilon) = H(s-i\epsilon) e^{2i\delta_1^1}, \qquad (C.6)$$

y tomando logaritmos queda que

$$\ln H(s + i\epsilon) - \ln H(s - i\epsilon) = 2i\delta_1^1(s) = 2i \operatorname{Im} \{\ln H(s)\} .$$
 (C.7)

Escrito como relación de dispersión con n sustracciones será

$$\ln H(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \ln H(0) \right]^{(k)} \frac{s^k}{k!} + \frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z - s - i\epsilon}, \qquad (C.8)$$

donde

$$\left[\ln H(0)\right]^{(k)} = \left. \frac{d^k}{ds^k} \, \ln H(s) \right|_{s=0} \,. \tag{C.9}$$

Sustituyendo en (C.4) obtenemos que

$$F(s) = F(0) \exp\left\{\sum_{k=1}^{n-1} \left[\ln H(0)\right]^{(k)} \frac{s^k}{k!} + \frac{s^n}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z - s - i\epsilon}\right\},$$
(C.10)

donde F(0) = 1.

Por tanto,

$$F(s) = Q_n(s) \exp\left\{\frac{s^n}{\pi} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} \frac{dz}{z^n} \frac{\delta_1^1(z)}{z - s - i\epsilon}\right\},$$
 (C.11)

siendo  $Q_n(s)$  igual a

Apéndice C

$$Q_n(s) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \ln F(0)\right\}.$$
 (C.12)

Como vemos, al expandir en  $s Q_n(s)$  es un polinomio de coeficientes desconocidos que, en general, tienen que ajustarse con los datos experimentales.

La solución a la ecuación de Omnès no es única. La ecuación (C.1) tiene como únicos requisitos que F(s) sea una función analítica en el plano complejo salvo un corte en el eje real desde  $4m_{\pi}^2$  hasta  $+\infty$ , y, además, que  $\delta_1^1(s)$  sea la fase de F(s) en la parte superior del corte.

Todas estas condiciones son satisfechas por (C.11). Sin embargo, serían igualmente satisfechas si hiciéramos ciertas manipulaciones, como, por ejemplo, utilizar distintos números de sustracciones, multiplicar la solución por un polinomio arbitrario con coeficientes reales, etc.

En un desarrollo en potencias de s de (C.11) esto que acabamos de comentar equivale a una indeterminación orden a orden entre la parte que va en el polinomio y la que va en la exponencial.

Apéndice C

152

#### Anchura de la $\rho$

Como ya se ha dicho, existen dos formalismos con los que construir el lagrangiano quiral de las resonancias. Podemos elegir representar a las resonancias por medio de un campo vectorial o de un campo tensorial antisimétrico. En el caso que nos ocupa, el de las resonancias vectoriales, se denotan respectivamente por  $\hat{V}_{\mu}$  y  $V_{\mu\nu}$ . Los lagrangianos construidos con estos campos son  $\mathcal{L}_V$  para el campo vectorial, dado en (2.37) y  $\mathcal{L}_{res}$  para el antisimétrico, dado en (2.27).

En [9] se muestra la equivalencia entre los lagrangianos  $\mathcal{L}_I$  y  $\mathcal{L}_{II}$  definidos como

$$\mathcal{L}_{I} = \mathcal{L}_{2} + \mathcal{L}_{\text{res}}$$
$$\mathcal{L}_{II} = \mathcal{L}_{2} + \mathcal{L}_{4} + \mathcal{L}_{V}, \qquad (D.1)$$

donde  $\mathcal{L}_2$  es el lagrangiano de orden  $p^2$  de ChPT y  $\mathcal{L}_4^V$  es el de orden  $p^4$  pero con las constantes  $L_i$  dadas por VMD y por las restricciones de QCD a altas energías.

En el capítulo 2 hemos reproducido un ejemplo sencillo (dado en [9]), el del factor de forma del pión, donde se muestra cómo los resultados obtenidos por  $\mathcal{L}_I$  y  $\mathcal{L}_{II}$  son iguales. En la figura D.1 se ve cuál es la equivalencia entre los distintos vértices de ambos lagrangianos.

Utilizaremos esa equivalencia de diagramas para mostrar cómo la



Figura D.1: Equivalencia entre los vértices de  $\mathcal{L}_I$  y  $\mathcal{L}_{II}$ .



Figura D.2: Diagrama para la autoenergía de la  $\rho$  según  $\mathcal{L}_I$ .

anchura de la  $\rho$  calculada en el capítulo 4 con el lagrangiano  $\mathcal{L}_I$  es la misma también para  $\mathcal{L}_{II}$ .

La anchura de la  $\rho$  se obtuvo a partir del diagrama de la figura D.2 y resumando la corrección introducida por el loop por medio de la serie de Dyson.

Dada la equivalencia diagramática mostrada en la figura D.1 es obvio que para obtener la anchura de la  $\rho$  con el formalismo vectorial no basta con calcular con  $\mathcal{L}_V$  el diagrama del tipo del de la figura D.2 , sino que hay que incluir los diagramas con vértices de  $\mathcal{L}_V^4$ . Es decir, los mostrados en la figura D.3 darán el mismo resultado que el de la figura D.2.

Si ambos resultados son iguales, es obvio que las correspondientes



Figura D.3: Diagramas para la autoenergía de la  $\rho$  según  $\mathcal{L}_{II}$ .

resumaciones de Dyson también lo son.

Se concluye por tanto que en ambas formulaciones ( $\mathcal{L}_I \ y \ \mathcal{L}_{II}$ ) la expresión de la anchura de la  $\rho$  es la misma, la dada en la ecuación (4.41):

$$\Gamma_{\rho}(s) = \frac{M_{\rho}s}{96\pi f^2} \left\{ \theta \left( s - 4m_{\pi}^2 \right) \sigma_{\pi}^3 + \frac{1}{2} \theta \left( s - 4m_K^2 \right) \sigma_K^3 \right\}.$$
 (D.2)

156

### Apéndice E

## Factor de forma electromagnético del pión

En el capítulo 4 obtuvimos la expresión del factor de forma del pión para isospín I = 1. Los datos experimentales [38] que aparecen en la figura 4.4 proceden del proceso  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Se han obtenido midiendo la sección eficaz del proceso y extrayendo el factor de forma a partir de la ecuación siguiente:

$$\frac{\sigma \left(e^+e^- \to \pi^+\pi^-\right)}{\sigma \left(e^+e^- \to \mu^+\mu^-\right)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} \left|\overline{F}(s)\right|^2 \,. \tag{E.1}$$

Este proceso contiene dos piezas, una con isospín I = 0 y otra con isospín I = 1. En nuestro resultado para el factor de forma dado en (4.42) sólo se incluye la pieza I = 1. La correspondiente a I = 0veremos ahora cómo incluirla.

La expansión sobre número de colores muestra cómo las contribuciones más importantes son las debidas al intercambio de resonancias antes que las correspondientes a loops. De acuerdo con ello, la pieza I = 0 vendrá dominada por el intercambio de la resonancia  $\omega$ .

Ahora bien, dado que la G paridad de la  $\omega$  es negativa y la del par  $\pi^+\pi^-$  positiva, el proceso  $\omega \to \pi^+\pi^-$  no está permitido dentro del marco de conservación de isospín ( $m_u = m_d$ ). Para poder estudiar este proceso tenemos que añadir al lagrangiano de las resonancias (2.27) los términos siguientes (cuadráticos en campos resonantes), [73]

$$\mathcal{L}_{\rho\omega} = a \left[ \frac{1}{8} \left\langle V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} \chi_+ \right\rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}} \omega_1^{\mu\nu} \left\langle V_{\mu\nu} \chi_+ \right\rangle + \frac{1}{24} \omega_1^{\mu\nu} \omega_{1\mu\nu} \left\langle \chi_+ \right\rangle \right]$$
(E.2)

Los valores relativos de los coeficientes de los distintos términos han sido deducidos en [73] a partir de la aproximación de  $N_c$  grande. También se daban razones para tomar a = 1, sin embargo nosotros la dejaremos como una constante arbitraria ya que no necesitamos fijarla.

La parte del lagrangiano de la ecuación (E.2) que contribuye a la mezcla  $\rho-\omega$  es

$$\mathcal{L}_{\rm mix} = \frac{1}{2} \,\Theta_{\rho\omega} \,\rho_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \,, \tag{E.3}$$

siendo

$$\Theta_{\rho\omega} = -a \left(\Delta m_K^2\right)_{QCD} + \frac{1}{3}e^2 F_V^2.$$
 (E.4)

Se observa que  $\Theta_{\rho\omega}$  tiene dos partes: una procedente de la diferencia de masas de los quarks,  $(\Delta m_K^2)_{QCD}$ , y otra procedente del acoplamiento electromagnético entre la  $\rho$  y la  $\omega$ .  $(\Delta m_K^2)_{QCD}$  es la diferencia de masas debida únicamente a QCD y se define como

$$(\Delta m_K^2)_{QCD} = B_0(m_d - m_u)$$
  
=  $\left(m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2\right) - \left(m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2\right)$  (E.5)

Para obtener (E.3) a partir de (E.2) se ha considerado un ángulo de mezcla ideal entre  $\omega_1$  y  $\omega_8$  para dar los campos físicos  $\omega$  y  $\phi$  y tal que  $\sin \theta_V = 1/\sqrt{3}$ .

Una estimación del parámetro de mezcla  $\Theta_{\rho\omega}$  se obtiene considerando a = 1. En ese caso resulta  $\Theta_{\rho\omega} = -4500 \text{ MeV}^2$  y la parte dominante en este valor procede de la diferencia de masas de los quarks.

En nuestro caso hemos tomado a arbitraria, de modo que la fijaremos a partir de la anchura de desintegración de  $\omega \to \pi^+ \pi^-$ . Apéndice E



Figura E.1: Diagramas involucrados en la desintegración  $\omega \to \pi^+ \pi^-$ .

Los diagramas involucrados en este proceso son los mostrados en la figura E.1. En realidad, el diagrama del loop de kaones sólo contribuye en un 1%, de manera que no lo tendremos en cuenta.

Por tanto, a partir del primer diagrama, y tomando  $G_V = f/\sqrt{2}$  tenemos

$$\Gamma(\omega \to \pi^{+}\pi^{-}) = \frac{3}{64} \frac{4}{18\pi f^{2}} \frac{\left|\Theta_{\rho\omega}\right|^{2} M_{\omega}^{3}}{\left(M_{\rho}^{2} - M_{\omega}^{2}\right)^{2} + M_{\rho}^{2} \Gamma_{\rho}^{2} \left(M_{\omega}\right)} \left(1 - \frac{4m_{\pi}^{2}}{M_{\omega}^{2}}\right)^{3/2}.$$
(E.6)

El valor numérico de (E.6) es

$$\Gamma(\omega \to \pi^+ \pi^-) = (1.13 \cdot 10^{-8} \,\mathrm{MeV}^{-3}) \cdot |\Theta_{\rho\omega}|^2 \,.$$
 (E.7)

Comparando con el valor experimental

$$\Gamma(\omega \to \pi^+ \pi^-) = 0.19 \pm 0.03 \,\text{MeV}\,,$$
 (E.8)

obtenemos para  $|\Theta_{\rho\omega}|$  un valor estimado de

$$|\Theta_{\rho\omega}| = 4100 \pm 300 \,\mathrm{MeV}^2\,,$$
 (E.9)

Perfectamente compatible con la estimación dada para a = 1.

Una vez hecho esto, el lagrangiano (E.3) está completamente determinado. Podemos calcular ahora la predicción que nos da para el factor de forma del pión implicado en el proceso  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Los diagramas considerados son los de la figura E.2.

El resultado obtenido es el siguiente

159



Figura E.2: Diagramas que contribuyen al factor de forma del pión relevante en el proceso  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

$$\overline{F}(s) = \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s} - \frac{s}{96\pi^2 f^2} \left( A \left( m_{\pi}^2/s, m_{\pi}^2/M_{\rho}^2 \right) + \frac{1}{2} A \left( m_K^2/s, m_K^2/M_{\rho}^2 \right) \right) + \alpha(s) \frac{M_{\rho}^2}{M_{\rho}^2 - s} \frac{M_{\omega}^2}{M_{\omega}^2 - s} (E.10)$$

siendo

$$\alpha(s) = \frac{s}{3M_{\rho}^2 M_{\omega}^2} |\Theta_{\rho\omega}| . \qquad (E.11)$$

Se han omitido en (E.10) las anchuras de desintegración en los denominadores, pero obviamente han sido tenidas en cuenta. El resultado obtenido para  $\overline{F}(s)$  es el mismo que el dado en (4.13) más el cuarto diagrama de la figura E.2. Dicho diagrama genera el término proporcional a  $\alpha(s)$  que da cuenta de la mezcla  $\rho - \omega$ .

Para este mismo proceso, en [46], los autores sugieren una parametrización de la forma

$$\overline{F}(s) = BW_{\rho} \frac{1 + \alpha BW_{\omega}}{1 + \alpha}, \qquad (E.12)$$

donde

160

Apéndice E

$$BW_X = \frac{M_X^2}{M_X^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_X(s)}.$$
 (E.13)

En nuestro caso  $\alpha(0) = 0$  y, por lo tanto, no es necesario dividir por  $1 + \alpha$  para obtener la normalización correcta.

En dicho trabajo, el valor de  $\alpha$  (que es una constante) varía entre  $1.85 \cdot 10^{-3}$  y  $1.95 \cdot 10^{-3}$ , dependiendo de los valores que se toman para otros parámetros.

En nuestro caso  $\alpha(s)$  depende del momento. Para dar una idea mostramos algunos valores, tomando el valor  $|\Theta_{\rho\omega}| = 4100 \text{ MeV}^2$  obtenido anteriormente.

$$\alpha(4m_{\pi}^2) = 3 \cdot 10^{-4}$$
  

$$\alpha(M_{\rho}^2) = 2.2 \cdot 10^{-3}$$
  

$$\alpha(m_{\tau}^2) = 1.2 \cdot 10^{-2}.$$
(E.14)

Como se puede comprobar son compatibles con los dados en [46].

Tenemos por tanto una expresión para el factor de forma del pión análoga a la que se obtuvo en (4.13) incluyendo además la pieza I = 0involucrada en el proceso  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

La resumación de las correcciones de estado final según la solución de Omnès nos da la siguiente expresión exponenciada para el factor de forma

$$\overline{F}(s) = \frac{M_{\rho}^{2}}{M_{\rho}^{2} - s} \left[ 1 + \alpha(s) \frac{M_{\omega}^{2}}{M_{\omega}^{2} - s} \right]$$

$$\times \exp \left\{ \frac{-s}{96\pi^{2}f^{2}} \left[ A \left( m_{\pi}^{2}/s, m_{\pi}^{2}/M_{\rho}^{2} \right) + \frac{1}{2} A \left( m_{K}^{2}/s, m_{K}^{2}/M_{\rho}^{2} \right) \right] \right\}$$
(E.15)

La contribución debida a la mezcla  $\rho - \omega$  es de orden superior a las consideradas en (4.42) y por tanto no es relevante en términos generales.

Apéndice E

Figura E.3: Comparación de la expresión del factor de forma que incluye la mezcla  $\rho - \omega$  con los datos experimentales [38].

Sin embargo es fundamental, como se ve en la figura E.3, para describir correctamente la forma del pico producida por la interferencia entre las resonancias  $\rho$  y  $\omega$ . En dicha figura se ha ampliado la zona del pico. La curva superior incluye a la  $\omega$  mientras que la inferior sólo incluye a la  $\rho$ . El resto de la curva es igual tanto si se incluye la mezcla  $\rho - \omega$  como si no.

#### Apéndice F

# Relación entre las constantes $\overline{\ell}_i \ \mathbf{y} \ L_i^r$

En el capítulo 4, para estimar la validez de la parametrización exponenciada del factor de forma del pión (4.42) se compara su predicción para la contribución del orden  $p^6$  con la calculada exactamente en [32]. En dicho trabajo se calcula el factor de forma del pión a orden  $p^6$  en ChPT restringida al grupo  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , es decir, sólo incluye piones. En la notación allí utilizada, las constantes del lagrangiano de orden  $p^4$  son las  $\bar{\ell}_i$ .

Para poder comparar con la predicción dada en (4.42) hemos de traducir estas constantes  $\overline{\ell}_i$  a sus homólogas en  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ : las constantes  $L_i^r$  definidas en (2.19). Posteriormente se aplica VMD para expresar las  $L_i^r$  en términos de  $M_{\rho}$ .

La definición de las constantes  $\overline{\ell}_i$  (independientes de la escala  $\mu$ ) está dada en [32] y es la siguiente:

$$\bar{\ell}_{i} = \frac{32\pi^{2}}{\gamma_{i}} \,\ell_{i}^{r}(\mu) - \ln\frac{m_{\pi}^{2}}{\mu^{2}}\,, \tag{F.1}$$

donde  $\ell_i^r(\mu)$  son las constantes usuales de Gasser-Leutwyler [6, 7] en  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  que buscamos.

Los coeficientes  $\gamma_i$  toman los valores

$$\gamma_1 = 1/3, \qquad \gamma_2 = 2/3, \qquad \gamma_3 = -1/2,$$
  
 $\gamma_4 = 2, \qquad \gamma_6 = -1/3.$  (F.2)

El siguiente paso, de  $\ell_i^r(\mu)$  a  $L_i^r(\mu)$ , lo podemos realizar según las relaciones dadas en [6]

$$\ell_1^r(\mu) = 4L_1^r(\mu) + 2L_3^r(\mu),$$
  

$$\ell_2^r(\mu) = 4L_2^r(\mu),$$
  

$$\ell_3^r(\mu) = -8L_4^r(\mu) - 4L_5^r(\mu) + 16L_6^r(\mu) + 8L_8^r(\mu),$$
  

$$\ell_4^r(\mu) = 8L_4^r(\mu) + 4L_5^r(\mu),$$
  

$$\ell_6^r(\mu) = -2L_9^r(\mu).$$
(F.3)

Hay que señalar que en los términos de la derecha de (F.3) no se ha incluido la contribución de los loops de kaones que sí aparece en [6].

La razón es que aquí estamos pasando de SU(2) a SU(3) y, por tanto, la contribución debida a loops de kaones ya está incluida en el resultado para SU(3) de la parametrización exponencial.

Por tanto, ya tenemos con (F.1), (F.2) y (F.3) las relaciones necesarias para reexpresar las constantes  $\overline{\ell}_i$  en términos de las  $L_i^r$ .

Tomando en particular la escala  $\mu = M_{\rho}$  obtenemos los valores de  $\overline{\ell}_i$  dados en (4.67) a partir de los valores experimentales de las  $L_i^r$  dados en la Tabla 2.1.

## Apéndice G

## Kaon Polarizabilities in Chiral Perturbation Theory

Electric and magnetic polarizabilities are among the fundamental properties of hadrons and provide valuable information on their internal structure. They probe the rigidity of a composite system against the formation of electric (magnetic) dipole moments when an external electric (magnetic) field is switched on. From an experimental point of view, it is possible to determine the polarizabilities of a particle by measuring its Compton scattering. The influence of the polarizabilities on the  $\gamma\gamma \to P\overline{P}$  cross-section is small and one cannot measure them very precisely, in general, from these analyses [74].

In this Letter we are interested in studying the polarizabilities of kaons in the framework of Chiral Perturbation Theory (CHPT) [4, 5, 6, 7]. For recent reviews on CHPT see [21, 75]. For the pion polarizabilities, the related process  $\gamma \gamma \to \pi \overline{\pi}$  has been studied at  $\mathcal{O}(p^4)$  within  $\mathrm{SU}(3)_L \times \mathrm{SU}(3)_R$  CHPT in [76] and in [77] within  $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$ , and to order  $p^6$  within  $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{SU}(2)_R$  CHPT in [78] for the neutral pions and in [79] for the charged ones. The charged kaon polarizabilities have been studied within CHPT in [80] to  $\mathcal{O}(p^4)$ . Though  $\gamma \gamma \to K \overline{K}$ processes are much beyond the applicability of CHPT because of their center of mass energy, one can expect CHPT to give a good description of kaon polarizabilities within the usual 20% because of the SU(3) kaon mass breaking as we shall after see. The experimental situation on kaon polarizabilities is very poor at the moment. One could however expect an improvement in the future either in the projected kaon factories like DA $\Phi$ NE in Frascati (see [81] for a thorough review of its physics capabilities) or in the high energy beam experiments at Fermilab and CERN (see [82, 83] and references therein). We will see that in particular the neutral kaon polarizabilities can offer a nice way to test hadronic models which predict related form factors in the kaon system. This is particularly interesting since the same models can be used to predict form factors for radiative strangeness-changing processes like the rare decay  $K \to \pi \gamma \gamma$ .

Expanding in photon momenta near threshold the Compton amplitude for a pseudoscalar boson P one can write down

$$T(\gamma(q_1)P(p_1) \to \gamma(q_2)P(p_2)) \equiv$$

$$2\left[\vec{\epsilon_1}\vec{\epsilon_2}\left(e^2 - 4\pi \,m\,\overline{\alpha}\,\omega_1\,\omega_2\right) - 4\pi \,m\,\overline{\beta}\,\left(\vec{q_1}\times\vec{\epsilon_1}\right)\left(\vec{q_2}\times\vec{\epsilon_2}\right) + \cdots\right]\,. (G.1)$$

The phase convention we use can be obtained from this amplitude definition. Here m is the pseudo-Goldstone boson mass and  $q \equiv (\omega, \vec{q})$  and  $\epsilon \equiv (0, \vec{\epsilon})$  are photon momentum and polarization vector, respectively. The Compton amplitude above can be decomposed in general as follows

$$T(\gamma(q_1)P(p_1) \rightarrow \gamma(q_2)P(p_2)) \equiv -e^2 A(t,\nu) \left[ (q_1 \cdot q_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) - (q_1 \cdot \epsilon_2^*)(q_2 \cdot \epsilon_1) \right]$$
$$-e^2 B(t,\nu) \left[ (q_1 \cdot q_2)(\Delta \cdot \epsilon_1)(\Delta \cdot \epsilon_2^*) + (\Delta \cdot q_1)(\Delta \cdot q_2)(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*) - (\Delta \cdot q_2)(q_1 \cdot \epsilon_2^*)(\Delta \cdot \epsilon_1) - (\Delta \cdot q_1)(q_2 \cdot \epsilon_1)(\Delta \cdot \epsilon_2^*) \right]$$
(G.2)

for photons on-shell, where

$$s = (q_1 + p_1)^2; t = (q_1 - q_2)^2; u = (q_1 - p_2)^2;$$
  

$$\nu \equiv s - u; \Delta \equiv p_1 + p_2.$$
(G.3)

For  $p_1^2 = p_2^2$  we have  $2\Delta \cdot q_1 = 2\Delta \cdot q_2 = s - u$ . The above amplitude is manifestly gauge invariant.

Apéndice G

The polarizabilities  $\overline{\alpha}$  and  $\overline{\beta}$  in (G.1) can be obtained from the amplitudes defined in (G.2) as follows

$$\overline{\alpha} - \overline{\beta} = \frac{e^2}{4\pi m} \lim_{t \to 0} \left( \overline{A}(t, \nu = t) + 8m^2 \overline{B}(t, \nu = t) \right)$$
$$\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \frac{e^2}{4\pi m} \lim_{t \to 0} \left( m^2 \overline{B}(t, \nu = t) \right).$$
(G.4)

The barred amplitudes in (G.4) are the corresponding amplitudes with the Born contributions using pseudoscalar propagators to the corresponding order in CHPT subtracted. The  $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$  combination is pure S wave while the  $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$  combination is pure D wave. Here one observes that polarizabilities are properties at  $\nu = t \rightarrow 0$ , so the only possible parameters in the chiral expansion are the ones which explicitly break chiral symmetry, i.e. masses of the pseudo-Goldstone bosons. In known examples these corrections are typically of the order of 20 % to 30 % in the strange sector. The point is that these type of corrections find a natural framework within CHPT so that CHPT for kaon polarizabilities is well suited too.

At lowest order in CHPT, the only contribution to the amplitudes  $A(t,\nu)$  and  $B(t,\nu)$  are the Born type diagrams (see Figure G.1) with the vertices from the  $\mathcal{O}(p^2)$  Lagrangian

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{F_0^2}{4} \left\{ \operatorname{tr} \left( D_{\mu} U D^{\mu} U^{\dagger} \right) + \operatorname{tr} \left( \chi U^{\dagger} + U \chi^{\dagger} \right) \right\}$$
(G.5)

where  $U \equiv \exp\left(\frac{i\sqrt{2}\Phi}{F_0}\right)$  is an SU(3) matrix incorporating the octet of pseudoscalar mesons

$$\Phi(x) = \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{2}}\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$
 (G.6)

In the absence of the U(1)<sub>A</sub> anomaly, the SU(3) singlet  $\eta_1$  becomes the ninth Goldstone boson which is incorporated in the  $\Phi(x)$  field as

$$\Phi(x) = \frac{\vec{\lambda}}{\sqrt{2}}\vec{\phi} + \frac{\eta_1}{\sqrt{3}} \tag{G.7}$$



Figura G.1: U-channel diagrams contributing to  $\gamma P \rightarrow \gamma P$  at order  $p^2$ . S-channel diagrams have to be included too. Straight lines are for bosons and wavy for photons.

Light-quark masses are collected in the matrix  $\mathcal{M} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ and  $\chi \equiv 2B_0 \mathcal{M}$ . The constant  $B_0$  is related to the light-quark vacuum expectation value

$$\langle 0|\overline{q}q|0\rangle = -F_0^2 B_0 \left(1 + \mathcal{O}(m_q)\right) . \tag{G.8}$$

In this normalization,  $F_0$  is the chiral limit value corresponding to the pion decay coupling  $F_{\pi} \simeq 92.4$  MeV. In the presence of electromagnetism the covariant derivative  $D_{\mu}$  is

$$D_{\mu}U = \partial_{\mu}U - i|e|A_{\mu}[Q,U] \tag{G.9}$$

Here,  $A_{\mu}(x)$  is the photon field and the light-quark electric charges in units of the electron charge |e| are collected in the 3 × 3 flavor matrix Q = diag(2, -1, -1)/3.

At next-to-leading order there are contributions from the Born-type diagrams in Figure G.1 but with vertices from the order  $p^4$  Lagrangian (see [6, 7] to find the explicit form) and one-loop diagrams in Figure G.2 and Figure G.3 with vertices from the  $\mathcal{O}(p^2)$  Lagrangian in (G.5).

Apéndice G



Figura G.2: Pseudoscalar electromagnetic form factor diagrams contributing to  $\gamma P \rightarrow \gamma P$  at order  $p^4$ . S-channel and symmetric diagrams have to be included too. Lines like in Figure G.1

The terms of the  $\mathcal{O}(p^4)$  Lagrangian in [6, 7] are the needed counterterms (the so-called  $L_i$ s couplings) to make the one-loop diagrams with  $\mathcal{O}(p^2)$  vertices UV finite. For neutral pseudo-Goldstone bosons, the first not vanishing contribution to the Compton scattering amplitude come only from diagrams in Figure G.3 [76, 77]. In fact, using the gauge invariance structure of the Compton amplitude in (G.2), one can reduce the calculation of the  $\mathcal{O}(p^4)$  contributions for neutral pseudo-Goldstone bosons to just diagram (d) in Figure G.3. This is because the coefficients of the non  $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*)$  terms plus gauge invariance determine uniquely the amplitudes  $A(t, \nu)$  and  $B(t, \nu)$  and at this order only diagram (d) can generate non  $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2^*)$  terms. Of course the result is finite. In addition there are no counterterms to this order so that the result we get for the  $K^0$  Compton scattering amplitudes up to order  $p^4$ in CHPT is

$$A(t,\nu) = -\frac{1}{16\pi^2 F_0^2} \left[ 2 - \frac{4m_\pi^2}{t} \arctan^2 \left( \sqrt{\frac{t}{4m_\pi^2 - t}} \right) \right]$$



Figura G.3: Diagrams contributing to  $\gamma P \rightarrow \gamma P$  at order  $p^4$ . Crossed diagrams have to be included too. Lines like in Figure G.1

Apéndice G

$$-\frac{4m_K^2}{t} \arctan^2\left(\sqrt{\frac{t}{4m_K^2 - t}}\right)\right];$$

$$B(t, \nu) = 0 \qquad . \qquad (G.10)$$

The complete neutral kaon polarizabilities to order  $p^4$  is

$$\overline{\alpha}_{K^0} = \overline{\beta}_{K^0} = 0. \tag{G.11}$$

Remember that the polarizabilities for the  $\pi^0$  at this same order obtained from the results in [76, 77] are

$$\overline{\alpha}_{\pi^0} = -\overline{\beta}_{\pi^0} = -\frac{e^2}{4\pi m_\pi} \frac{1}{96\pi^2 F_\pi^2} = -0.54 \times 10^{-4} \,\mathrm{fm}^3 \qquad (G.12)$$

where we have resummed the higher order corrections that change  $F_0$  into  $F_{\pi}$ .

For charged pseudo-Goldstone bosons, there are order  $p^4$  contributions from the diagrams in Figures G.1, G.2, and G.3. In addition there are the diagrams which give wave function and mass renormalization. The complete result up to  $\mathcal{O}(p^4)$  for the charged kaon is the following

$$A(t,\nu) = \frac{2}{t-\nu} + \frac{2}{t+\nu} + \frac{8}{F_0^2}(L_9 + L_{10})$$
  
$$- \frac{1}{16\pi^2 F_0^2} \left[ \frac{3}{2} - \frac{2m_\pi^2}{t} \arctan^2 \left( \sqrt{\frac{t}{4m_\pi^2 - t}} \right) - \frac{4m_K^2}{t} \arctan^2 \left( \sqrt{\frac{t}{4m_K^2 - t}} \right) \right];$$
  
$$B(t,\nu) = \frac{1}{t} \left[ \frac{1}{t-\nu} + \frac{1}{t+\nu} \right].$$
(G.13)

This result agrees with the one found in [80]. The corresponding complete charged kaon polarizabilities to order  $p^4$  are

$$\overline{\alpha}_{K^+} = -\overline{\beta}_{K^+} = \frac{e^2}{4\pi m_K} \frac{4}{F_K^2} (L_9 + L_{10}) = (0.64 \pm 0.10) \times 10^{-4} \,\mathrm{fm}^3$$
(G.14)

171

where we have included the higher corrections that change  $F_0$  into  $F_K$  and used the recent result in [84].

$$L_9 + L_{10} = (1.6 \pm 0.2) \times 10^{-3}.$$
 (G.15)

Let us now study the results we have obtained in (G.11) and (G.14). Could we have gotten them from some symmetry relation? In the  $\gamma P \rightarrow \gamma P$  process, the pseudoscalar boson P has to be in one of the three SU(2) subgroups of SU(3). Then, unless the center of mass energy in some channel is enough to produce any of the rest of the octet multiplet particles in (G.6), they can be integrated out of the effective theory and make the calculation within the corresponding SU(2) CHPT. Of course in each one of these SU(2) the coupling constants depend on the ratio of the masses of the particles not integrated over the ones of the integrated particles and of  $F_0^2$  over the masses of the integrated particles. It has then little sense for numerical purposes to integrate out the pion in the case of calculations involving kaons just because in nature we have obviously not access to the effective couplings of the U-spin SU(2) and the V-spin SU(2) CHPT. It can nevertheless be useful for understanding some results and/or getting new results. The effective couplings corresponding to the SU(2) isospin are known to  $\mathcal{O}(p^4)$ , they are the so-called  $l_i$ s couplings defined in [5]. For  $m_P \neq 0$  polarizabilities are in the situation described above.

Therefore, formally the calculation of pion polarizabilities can be done in the isospin SU(2) CHPT, of charged kaon within the V-spin SU(2) CHPT and of neutral kaons within the U-spin SU(2) CHPT. Of course, the couplings in each case will be different. Let us see what are the things we can obtain from this observation. Since the quarks in the u-d isospin system and in the u-s V-spin system only differ for QCD in the presence of electromagnetism by the mass of the quarks the calculations of charged kaon polarizabilities can be obtained from the ones of charged pions by exchanging pion masses by kaon masses. If we know the relation between the order  $p^4$  isospin SU(2) couplings  $l_i$ s and the SU(3) couplings  $L_i$ s, we can have the result for the charged kaons too just by translating the  $l_i$ s couplings in the complete isospin SU(2) result to SU(3) couplings and changing pion by kaon masses. The relation between  $l_i$ s and  $L_i$ s can be found in [6, 7, 8]. We find

#### Apéndice G

the result in (G.14) without any SU(3) calculation. Of course, some SU(3) calculation was needed in order to make the relation between the SU(2) and the SU(3) couplings, but these could be easier (for instance two-point or three-point functions calculations) and they are universal.

We cannot apply the same trick for the neutral kaon polarizabilities because this SU(2) subgroup differs from the other SU(2) subgroups also in the electric charge of the components (s-d in this case). So the result in (G.11) cannot be obtained from the neutral, charged pion or charged kaon polarizabilities. This system has the peculiarity in turn that we can only form electrically neutral bosons. From this, we can easily obtain the result in (G.11) as follows. Making the calculation of the neutral kaon polarizabilities to  $\mathcal{O}(p^4)$  in the U-spin means that there are no loop contributions since there are no photon-pseudo-Goldstone boson order  $p^2$  vertices. Noticing that there are no counterterms in the U-spin CHPT calculation either leads to the result in (G.11). This is because we get zero at  $\mathcal{O}(p^4)$  in the complete (counterterm plus loops) SU(2) calculation which can only give zero when making the trick above explained to go to SU(3). Therefore the vanishing result for the neutral kaon polarizabilities at order  $p^4$  is a result of chiral symmetry plus the fact that the  $K^0$  belongs to an SU(2) subgroup where there are only neutral pseudo-Goldstone bosons.

One can see from the results in [76, 77] that, at order  $p^4$ , the kaon loops do not contribute to the pion polarizabilities. This is just an accidental symmetry and it has not to happen at higher orders. In general, there can be terms in the pion polarizabilities that go to a constant when  $m_K \to \infty$  in the kaon loops of  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  CHPT. These terms are included in the values of the  $l_i SU(2)$  couplings.

The order  $\mathcal{O}(p^6)$  calculation of the charged pion polarizabilities has been done in [79]. We could use the trick above again to calculate the  $\mathcal{O}(p^6)$  chiral log contributions to the charged kaon from the charged pion calculation. Here we also need the relation between the corresponding order  $p^6$  couplings for which one needs SU(3) calculations. Notice that these relations mix the SU(3) chiral loop contributions with the SU(3) counterterms. The needed SU(3) calculations could be easier however than  $\gamma K^+ \to \gamma K^+$  itself and as said before universal. For instance from two-point and three-point function calculations to order  $p^6$ . For the neutral kaon polarizabilities, the order  $p^6$  relative size cannot be guessed because its a complete new contribution so both logs and counterterms to order  $p^6$  have to be computed. If calculated in the U-spin CHPT, the  $\mathcal{O}(p^6)$  chiral logs for the neutral kaons polarizabilities are again zero because there are neither photon–pseudo-Goldstone boson order  $p^4$  vertices, there are however non-zero counterterm contributions of order  $p^6$  this time. To get the corresponding SU(3) result we need again the relation between the corresponding order  $p^6$  which however could be obtained from easier SU(3) calculations as said before.

Let us finally analyze the possibilities that offer kaon polarizabilities for studying the low-energy hadronic interactions between pseudo-Goldstone bosons.

For pions and the charged kaon, the combination of polarizabilities  $\overline{\alpha} - \overline{\beta}$  is not zero already at order  $p^4$  while the combination  $\overline{\alpha} + \overline{\beta}$  starts at order  $p^6$ . Remember that many experimental fits to pion polarizabilities are made with the order  $p^4$  constraint  $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 0$ ; this has no sense for the neutral kaon. For the neutral kaon we have obtained that both combinations are first non-zero at order  $p^6$ , so they are naturally expected to be of the same order of magnitude. This does not happen in any of the other systems.

The study of both the charged and the neutral kaon polarizabilities is very interesting in relation with the information they can give on the explicit breaking of chiral symmetry through kaon masses. As said before CHPT is the natural framework to study such effects. In particular the neutral kaon polarizabilities are proportional to  $m_K$ , so the proportionality factor between the neutral kaon polarizabilities and  $m_K$ is a direct measure of such explicit chiral symmetry breaking effects.

The fact that the neutral kaon polarizabilities start at order  $p^6$  make them also very interesting for checking different hadronic models for counterterms. In particular in checking the way they incorporate the explicit chiral symmetry breaking effects. In the case of the neutral kaon, notice that SU(3) chiral symmetry together with electromagnetism forces the amplitudes  $A(t, \nu)$  and  $B(t, \nu)$  in (G.2) to go to zero when both  $m_K$  and t go to zero. Any hadronic model has to satisfy this constraint. For the neutral pions this is only true in the large  $N_c$ limit and  $m_{\pi}$  and t going to zero.

Calculations of the counterterms appearing in charged and neutral kaon polarizabilities can be found for instance in [85] using a Nambu–

#### Apéndice G

Jona-Lasinio model with no vector-like interactions, in [86] using an extended Nambu–Jona-Lasinio model with also spin-one interactions, in [87] using the so-called quark confinement model. The measurement of kaon polarizabilities and in particular the neutral kaon ones can then test the predictability for the order  $p^6$  counterterms of these models and others as vector meson dominance ones. Here we want to emphasize that these checks are only meaningful if a full CHPT calculation (i.e. chiral logs and counterterms) at order  $p^6$  is made since we have no way of estimating their relative weight. The analysis of neutral kaon polarizabilities can also provide very useful information that could be used in predicting some rare kaon decays form factors for instance. We find then the neutral kaon polarizability very interesting theoretically and deserving further experimental effort at the planned kaon facilities and experiments.

#### Bibliografía

- [1] C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191.
- [2] G. 't Hooft, ver Nucl. Phys. B254 (1985) 11.
- [3] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, eds. J.D. Jackson and A. Roberts, Fermilab, 1972, Vol. 2, 135.
  H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. B47 (1973) 365.
- [4] S. Weinberg, Physica 96A (1979), 327-40.
- [5] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. (NY) 158 (1984) 142.
- [6] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250 (1985) 465-516.
- [7] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B250 (1985) 517-38.
- [8] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, E. de Rafael Nucl. Phys. B321 (1989) 311.
- [9] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, E. de Rafael, Phys. Lett. B223 (1989) 425.
- [10] E. Witten, Nucl. Phys. B160 (1979) 57.
- [11] N.I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations (Noordhoof, Groningen, 1953).
- [12] R. Omnès, Nuovo Cimento 8 (1958) 316.

- [13] T.N. Truong, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2526.
- [14] A. Dobado, M.J. Herrero and T.N. Truong, Phys. Lett. B235 (1990) 129.
   A. Dobado and J.R. Peláez Phys. Rev. D47 (1992) 4883.
- [15] A. Dobado and J.R. Peláez Phys. Rev. D56 (1997) 3057.
- [16] F. Guerrero and A. Pich, Phys. Lett. B412 (1997) 382.
- [17] F. Guerrero, Estudio del Factor de Forma del Pión, Master Thesis, Univ. Valencia (1996).
- [18] F. Guerrero, Phys. Rev. D57 (1998) 4136.
- [19] F. Guerrero and J.A. Oller, aceptado en Nucl. Phys. B. hepph/9805334.
- [20] F. Guerrero and J. Prades, Phys. Lett. B405 (1997) 341.
- [21] A. Pich. ChPT. Rep. Progr. Phys. 58 (1995) 563-610.
- [22] J. Bijnens, Int. Journal of Modern Physics A, Vol. 8, No. 18 (1993) 3045.
- [23] J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B37 (1971) 95.
- [24] E. Witten, Nucl. Phys. B223 (1983) 422.
- [25] S. Weinberg. Phys. Rev. Lett. 18 (1967) 507.
- [26] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B72 (1974) 461; B75 (1974) 461.
- [27] E. Witten, Nucl. Phys. B149 (1979) 285.
- [28] E. Witten, Ann. Phys. 128 (1980) 363.
- [29] A.V. Manohar, Lectures from Les Hoches Summer School 1997, hep-ph/9802419.

#### Bibliografía

- [30] M. Knecht, et al. Nucl. Phys. B457 (1995) 513.
   J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser, M. E. Sainio, Phys. Lett. B374 (1996) 210-216.
- [31] J. Gasser and U. Mei $\beta$ ner, Nucl. Phys. B357 (1991) 90.
- [32] G. Colangelo, M. Finkemeier, R. Urech, Phys. Rev. D54 (1996) 4403.
- [33] J. Bijnens, G. Colangelo, P. Talavera. hep-ph/9805389.
- [34] A. Dobado and J.R. Peláez, Phys. Rev. D56 (1997) 3057-3073
- [35] S.R: Amendolia et al., Nucl. Phys. B277 (1986) 168.
- [36] K.M. Watson, Phys. Rev. 95 (1955) 228.
- [37] G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. B160 (1979) 151.
- [38] L.M. Barkov, Nucl. Phys. B256 (1985) 365.
- [39] Protopopescu et al., Phys. Rev. D7 (1973) 1279.
- [40] P. Estabrooks and A.D. Martin, Nucl. Phys. B79 (1974) 301.
- [41] T. Hannah, Phys. Rev. D54 (1996) 4648.
- [42] T. Hannah, Phys. Rev. D55 (1997) 5613.
- [43] G.J. Gounaris and J.J. Sakurai, Phys. Rev. Lett. 21 (1968) 244.
- [44] Bisello et al., Phys. Lett. B220 (1989) 321.
- [45] R. Barate et al., Z. Phys. C76 (1997) 15.
- [46] J.H. Kühn and A. Santamaría, Z. Phys. C48 (1990) 445.
- [47] Particle Data Group, Phys. Rev. D54 (1996) 1.
- [48] L.V. Dung and T.N. Truong, hep-ph/9607378.
- [49] M Jamin and M. Münz, Z. Phys. C66 (1995) 633.

- [50] D. Aston et al. Nucl. Phys. B296 (1988)493.
- [51] F.R. Cavallo et al. Nucl. Phys B (Proc. Suppl.) 55C (1997) 153.
- [52] Aleph Collaboration, Nucl. Phys B (Proc. Suppl.) 55C (1997) 161.
- [53] T.E. Coan, Phys. Rev. D53 (1996) 6037.
- [54] J.A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. A260 (1997) 438.
- [55] J.A. Oller, E. Oset and J.R. Peláez, Phys. Rev. Lett. 80 (1998) 3452.
- [56] J.A. Oller, E. Oset and J.R. Peláez, enviado a Phys. Rev. D. hepph/9804209.
- [57] V. Bernard, N. Kaiser and U.G. Mei $\beta$ ner, Nucl. Phys. B357 (1991) 129.
- [58] G. Passarino and M. Veltman, Nucl. Phys. B160 (1979) 151.
- [59] D.B. Kaplan and A.V. Manohar, Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2004.
- [60] M. Boglione and M.R. Pennington, Z. Phys. C75 (1997) 113.
- [61] C.D. Frogatt and J.L. Petersen, Nucl. Phys. B129 (1977) 89.
- [62] R. Kaminski, L. Lesniak and K. Rybicki, Z. Phys. C74 (1997) 79.
- [63] B. Hyams et al., Nucl. Phys. B64 (1973) 134.
- [64] P. Estabrooks et al., AIP Conf. Proc. 13 (1973) 37.
- [65] G. Grayer et al., Proc. 3rd Philadelphia Conf. on Experimental Meson Spectroscopy, Philadelphia, 1972 (American Institute of Physics, New York, 1972) 5.
- [66] Protopopescu and M. Alson-Granjost, Phys. Rev. D7 (1973) 1279.
- [67] D. Cohen, Phys. Rev. D22 (1980) 2595.
- [68] A.D. Martin and E.N. Ozmuth, Nucl. Phys. B158 (1979) 520.
## Bibliografía

- [69] W. Ochs, University of Munich thesis, 1974.
- [70] L. Rosselet et al., Phys. Rev. D15 (1977) 574.
- [71] A. Schenk, Nucl. Phys. B363 (1991) 97.
- [72] R. Mercer et al. Nucl. Phys. B32 (1971) 381.
- [73] R. Urech, Phys. Lett. B355 (1995) 308.
- [74] J.F. Donoghue and B.R. Holstein, Phys. Rev. D 48 (1993) 137.
- [75] G. Ecker, Chiral Perturbation Theory, Prog. Part. Nucl. Phys. 35 (1995) 1;
  H. Leutwyler, Chiral Effective Lagrangians, Lecture Notes in Physics, Vol. 396, H. Mitter adn H. Gausterer (eds), Springer-Verlag (Berlin 1991).
- [76] J. Bijnens and F. Cornet, Nucl. Phys. B296 (1988) 557.
- [77] J. Donoghue, B. Holstein, and Y. Lin, Phys. Rev. D37 (1988) 2423.
- [78] S. Bellucci, J. Gasser, and M. Sainio, Nucl. Phys. B423 (1994) 80;
   Erratum: ibid. B431 (1994) 413.
- [79] U. Bürgi, Phys. Lett. B 377 (1996) 147; Nucl. Phys. B 479 (1996) 392.
- [80] J.F. Donoghue and B.R. Holstein, Phys. Rev. D 40 (1989) 3700.
- [81] The Second DAΦNE Physics Handbook, L. Maiani, G. Pancheri, and N. Paver (eds.), INFN, Frascati (1995).
- [82] S. Bellucci, Working group report on *Pion (Kaon) and Sigma Polarizabilities*, Procc. of the Workshop on Chiral Dynamics, A. Bernstein and B.R. Holstein (eds), MIT, (Cambridge, MA 1994), Frascati preprint LNF-94-065-P, hep-ph/9508282.
- [83] M.A. Moinester, Pion and Sigma Polarizabilities and Radiative Transitions, Proc. of the Workshop on Chiral Dynamics, A. Bernstein and B.R. Holstein (eds), MIT, (Cambridge, MA 1994),

Tel-Aviv preprint TAUP 2204/94, hep-ph/9409463 ; Procc. of the Conference on the Intersection between Particle and Nuclear Physics, W. Van Oers (ed), Tucson (1991), p. 553.

- [84] J. Bijnens and P. Talavera, Nucl. Phys. B489 (1997) 387-404.
- [85] V. Bernard and D. Vautherin, Phys. Rev. D40 (1989) 1615.
- [86] J. Bijnens and J. Prades, Nucl. Phys. B490 (1997) 239-271
- [87] M.A. Ivanov and T. Mizutami, Phys. Rev. D45 (1992) 1580.