A mathematician's stroll through the Alhambra

Rafael Pérez Gómez

Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Granada

INTRODUCTION

In 1984, Granada's Alhambra was declared a World Heritage Site by the UNESCO. The brief reasons given in the official documents say that "It includes unique artistic achievements. It is an exceptional testimony of the fourteenth-century Muslim Spain. It is a valuable example of medieval Arab residential architecture".

Whoever knows the Alhambra is well aware of its being unique, exceptional and paradigmatic. Few places are where one may appreciate colour in the air, the mumbling of the thoughts of a cultivated people, or the continuous finds to the interpretation of the senses. From this point of view, it is easy to understand its universal character as a work of art: it uses all the languages available, so that anyone may communicate with its creators through the site.

It is well known that the "walls" of the Alhambra "speak", that they make up the pages of a great book which deals mostly with History, Religion, Sociology, Science and Technology, an which is written with Poetry and Geometry as tools of an Architecture which, for its part, uses Love as the best building-material of all times. "¿How come a building made with a few shabby sticks still stands?" Dr. García Gómez, one of the best Spanish Arab scholars, asked this question in his book Poemas en los muros y fuentes de la Alhambra [tr.: Poems on the walls an fountains of the Alhambra]; then, Don Emilio answered: "it has been thanks to love", because the Alhambra has always been lived in, loved, and, therefore, preserved.

Recently, the Alhambra has acquired a new and unexpected interest in the world of Mathematics. Its has been known for long that the beauty of its patterns owe to the application of an aesthetics which is based on the use of Pythagorean as well as Golden Number proportions. The best example of the latter is to be found in the façade of the Palacio de Comares, designed in a complex, millimetre-accurate system of Golden Number rectangles.

The optical aberration rectification in that façade is based on the knowledge that human sight has a conic nature and produces some optical aberrations from certain distances onwards. Therefore, in order that we do not see a deformed façade it is necessary to rectify its symmetry axes and the relative lengths of its parts. In fact, the axes of the two doors have been moved approximately 8 cm. Towards the side walls of the court. This may be checked by a simple exercise of flat trigonometry.

However, even if this is of great interest, the study of its one- and two-dimensional symmetry is of greater interest still. Since H. Weyl wrote his book Simetría [Symmetry?], a new and fascinating period opened in my lifetime. I spent some time investigating which Mathematics had been used to create that multi-coloured kaleidoscope called the Alhambra. As will be seen below, I was fortunate enough to find some of the keys used in the mosaics, keys which are very simple but very hidden as well, proving to be true what Ortega said, that art is sublime stage-magic and genial transformism. Further, I demonstrated that in the making of the mosaics all the basic compositional combinations were exhausted empirically. All this causes the Alhambra to be, as I have said, especially interesting for mathematicians, since the Andalusi-Granadan draughtsmen and craftsmen displayed in their output their approach to scientific work, an approach by which Hindi and Arabic-speaking peoples developed science until the Middle Ages: by looking for new ideas through a free and daring exercise of the creative method that is based in making variations on the same theme. Those Granadan draughtsmen could develop, in the Alhambra mosaics, the seventeen possible models which we now know since the discovery of X-rays and the Flat Crystallographic Groups Theory. In fact, the Alhambra is, so far, the only known monument built prior to the discovery of the Groups Theory in which there is at least one example of each of the Flat Crystallographic Groups.

Un matemático pasea por la Alhambra

Rafael Pérez Gómez

Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Granada

INTRODUCCIÓN

La Alhambra de Granada fue declarada Patrimonio de la Humanidad en el año 1984. La justificación, breve, que figura en el correspondiente expediente de catalogación dice: "*El bien incluye logros artísticos únicos. Es un testimonio excepcional de la España musulmana del siglo XIV. Ofrece un ejemplo valioso de las residencias árabes del medioevo*".

Quien conoce la Alhambra sabe bien que es única, excepcional y paradigmática. Hay pocos lugares en los que pueda apreciarse el color en el aire, el murmullo de los pensamientos de un pueblo culto o los continuos quiebros a la interpretación de los sentidos. Desde este punto de vista se entiende fácilmente su carácter universal como obra de arte: utiliza todos los lenguajes posibles para que cualquiera pueda comunicarse con sus creadores a través del monumento.

Es bien conocido que las "paredes" de la Alhambra "hablan", que forman las páginas de un gran libro que trata, fundamentalmente, sobre Historia, Religión, Sociología, Ciencia y Tecnología y que está escrito haciendo uso de la Poesía y la Geometría como herramientas de la Arquitectura que, a su vez, utiliza el Amor como el mejor de los materiales de construcción de todas las épocas. "*¿Cómo un edificio hecho con cuatro palitroques está aún en pie?*" El Dr. García Gómez, uno de los mejores arabistas que hemos tenido, hace esta pregunta en su libro *Poemas en los muros y fuentes de la Alhambra*; a su vez, D. Emilio respondía: "*ha sido gracias al amor*", porque la Alhambra ha sido siempre vivida, querida y, por tanto, conservada.

Desde hace muy poco tiempo, la Alhambra ha cobrado un inusitado interés en el mundo de las Matemáticas. Se sabe desde hace tiempo que la belleza de sus trazados obedecen a la aplicación de una estética basada en el uso de proporciones tanto pitagóricas como áureas. El mejor ejemplo de esta última lo tenemos en la fachada del palacio de Comares que está diseñada milimétricamente haciendo uso de rectángulos áureos y sus correspondientes recíprocos internos.

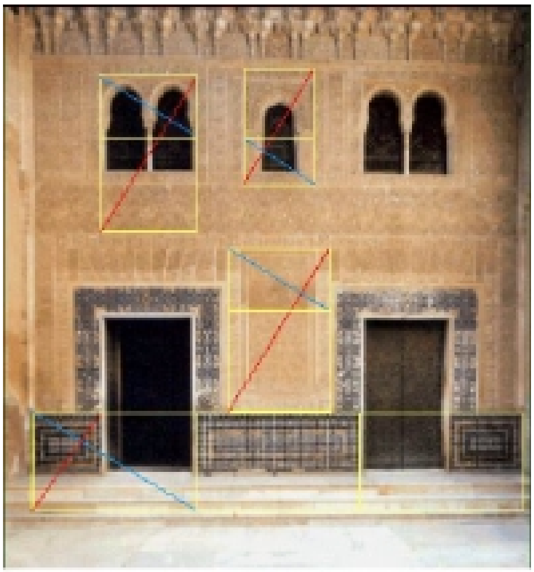


Figura 1

La corrección de la deformación óptica que dicha fachada tiene se basa en el conocimiento de que nuestra visión es cónica y que produce deformaciones a partir de ciertas distancias. Por tanto, para no ver una fachada deformada hay que someterla al desplazamiento de ejes de simetría y correcciones de longitudes entre sus partes. Concretamente, los ejes de las dos puertas están desplazados, aproximadamente, 8 cm hacia los muros laterales del patio. Puede comprobarse haciendo sencillo ejercicio de trigonometría plana[9].

Sin embargo, aún siendo todo esto de gran interés, el estudio de su simetría, uni y bidimensional, es del máximo interés. Desde que H. Weyl escribiera su libro *Simetría*, se abre una historia para mí apasionante. Dediqué una temporada de mi vida a investigar qué Matemáticas servían para crear ese gran caleidoscopio de color llamado Alhambra. Como se verá más adelante, tuve la fortuna de dar con ciertas claves utilizadas en sus mosaicos, claves muy sencillas que se ocultan magistralmente que hacen buena la afirmación de Ortega de que el arte es *prestidigitación sublime y genial transformismo*. Además, demostré que fueron agotadas empíricamente todas las combinaciones básicas posibles para componerlos. Todo esto hace que la Alhambra tenga hoy ese especial interés para los matemáticos al que antes me refería, ya que los tracistas andalusíes-granadinos pusieron de manifiesto con su trabajo una forma de abordar el trabajo científico mediante la cual indios y arábigo-parlantes desarrollaron la ciencia hasta la Edad Media: la búsqueda de nuevas ideas desde el ejercicio libre y audaz del método creativo basado en hacer variaciones sobre un mismo tema. Aquellos tracistas granadinos fueron capaces de desarrollar, en los mosaicos de la Alhambra, las 17 posibilidades que hoy conocemos desde el descubrimiento de los *rayos X* y la Teoría de Grupos Cristalográficos Planos. Es más, la Alhambra es, actualmente, el único monumento construido antes del descubrimiento de la teoría de grupos que cuenta con al menos un ejemplo de cada uno de los grupos cristalográficos planos.

17 GRUPOS CRISTALOGRÁFICOS PLANOS

Es cierto que cada mosaico podría definir una página para un tratado de Geometría con regla y compás (con juegos de cartabones y compases rígidos[9], para ser más precisos). Mas no es esta la intención de estos párrafos. Cuando admiramos un astrolabio, un manuscrito, una herramienta propia de la Medicina o de la Ingeniería, valoramos el nivel de conocimiento de sus creadores y nos admiramos por ello, pero no serían los objetos más adecuados, pongamos por caso, para explicar teorías sobre cirugía con rayos láser. Los mosaicos de la Alhambra de Granada constituyen, hoy en día, la mejor, y más valiosa, colección de ejemplos de la moderna teoría matemática de Grupos[i], de ahí que constituyan un auténtico legado cultural con valor científico actual.

Es normal encontrar en libros de Historia de la Ciencia afirmaciones acerca de que la producción en lengua árabe en el campo de la fundamentación científica fue escasa. En particular, en cuanto a Matemáticas se refiere, se dice que se limitaron casi exclusivamente a traducir obras griegas e indias que fueron introducidas en Europa, algunas a través de al-Andalus. Sin embargo, ante la evidencia de los manuscritos que se han ido descubriendo, hay que aceptar que su aportación al conocimiento matemático no se limitó a la mera labor de “puente”. Es cierto que sus mayores y más conocidas aportaciones de carácter matemático giran alrededor de la Aritmética y del Álgebra y, dentro de esta última, de la

[i] La Teoría de Grupos se inició a finales del siglo XIX y, como más adelante se verá, aún seguimos investigando en ella. Forma parte del Álgebra, campo en el que, curiosamente, los arábigo-parlantes destacaron sobremanera.

Trigonometría. Las razones para que se produjese tal situación estriban en que el hecho investigador no es un fenómeno aislado como algunos pueden creer, sino que está fuertemente condicionado por la sociedad en la cual se desarrolla. Desde este punto de vista, en la cultura árabe, en general, y en la de al-Andalus, en particular, los asuntos relacionados con la organización sociopolítica y religiosa marcan una línea de desarrollo práctico de la investigación matemática. Este pueblo concebía las Matemáticas como herramienta para otras ciencias -Astronomía, Astrología, Óptica y Medicina (a través de la Astrología)- y como de utilidad social inmediata- Matemáticas para "rezar", para navegar, para repartir herencias, medir tierras, etc. En suma, concebían las Matemáticas como hecho cultural. Lo anterior no significa que no hubiera avances en los fundamentos de las Matemáticas. Ciñéndonos al legado científico andalusí, sabemos[3] que al-Mu'taman, el rey sabio de Zaragoza durante el periodo de los Reinos de Taifas (1031-1086), escribió en su *Kitab al-Istikmal* ("*Libro de la Perfección*") una demostración del teorema atribuido casi siete siglos después al italiano Giovanni Ceva (1648-1738); que Qalasadi (s. XV), o Alcalsavi o *el Bastí* según diferentes transcripciones, oriundo de la ciudad granadina de Baza y posible profesor de la Madraza en Granada mandada construir por Yusuf I, introdujo una notación simbólica algebraica similar a la que finalmente fue extendida por la escuela italiana durante el Renacimiento; o el granadino Abulcasim Asbag Abenmohamed (s. X), conocido vulgarmente por el *Muhandis* ("*Geómetra*"), que si bien es más conocido por sus trabajos en Astronomía, escribió una obra de comentarios a los Elementos de Euclides en forma de introducción a las Matemáticas; Benabixácar (s. XIII) fue gran conocedor de la ciencia griega, tal y como lo demuestran sus libros sobre la obra de Euclides y las cónicas de Apolonio, etc. No limitándonos en este comentario a al-Andalus, lo concluiremos mencionando a Ibn Sina, al que normalmente se le asigna erróneamente procedencia andalusí, que[3] además de traducir e interpretar como pocos a Aristóteles, analizó la axiomática de Euclides para la Geometría estableciendo su propio conjunto de axiomas. ¿Cabe mayor fundamentación teórica?

Entonces, ¿por qué se siguen haciendo uso de los tópicos antes aludidos? En pleno desarrollo islámico en la Península Ibérica, se destruyeron miles de volúmenes que estaban depositados en importantes bibliotecas. Como ejemplo baste citar la destrucción iniciada por Almanzor de la famosísima Biblioteca de al-Hakam II, en Córdoba, que contaba con más de 400.000 ejemplares, o la quema de libros escritos en árabe ordenada por el Cardenal Cisneros en la plaza de Bibrambla de Granada. Tras la expulsión de moriscos y judíos, la cultura andalusí fue desapareciendo rápidamente de la sociedad medieval de la Península Ibérica. Las Casas de la Sabiduría se tornaron en Bibliotecas de Monasterios y Universidades incipientes que utilizaban el latín como lenguaje científico. Así, esta civilización dejó un devastado legado científico al cual difícilmente puede accederse si no es de la mano de arabistas expertos.

En resumen, no es que los andalusíes -al igual que el resto de los científicos del Islam Medieval- abandonasen la investigación en el terreno de los fundamentos, sino que sería más prudente afirmar que realmente no sabemos cuál fue su verdadera producción científica.

No obstante, esta civilización que goza de merecida fama por su gran sentido estético y gusto por los caminos indirectos para presentar sus pensamientos, nos dejó libros escritos sobre los muros de sus monumentos que son objeto de elogio y admiración. La decoración epigráfica, investigada por arabistas expertos, hace que, como dije anteriormente, sus paredes "hablen". Pero también hay otra decoración, la geométrica, que nos corresponde analizar a quienes nos ocupamos de las Matemáticas. En su machacona simetría, se intuye el deseo de transmitir un mensaje sin tiempo ni mensajero. ¿Por qué esta obsesión en la repetición, en las formas abstractas, en la ocultación de lo esencial en el diseño? En la búsqueda de respuestas encontré la existencia de un tesoro oculto: la expresión de las creencias de un pueblo en un bello mensaje altamente codificado. Tal y como hoy sabemos, en la decoración geométrica de la Arquitectura Islámica, en general, y de la Alhambra, en particular, se esconde un tratado sobre el método heurístico de investigación cuyos resultados han necesitado del transcurso de varios siglos para que se produjesen los descubrimientos científicos necesarios que permitan clasificar el conocimiento allí desarrollado intuitivamente.

Nunca fueron mejor aplicadas las Matemáticas, en este caso la Geometría, ya que sirvieron para manifestar sus creencias en un bello alarde de ingenio que se traduce en una creatividad sin precedentes en el diseño de los mosaicos de la Alhambra. Las justificaciones lógicas vienen *a posteriori*, una vez que hay algo que fundamentar. En el caso que nos ocupa, estas fundamentaciones tardaron cinco siglos en llegar. Como expresé en la introducción, los diseñadores de sus trazados fueron capaces de desarrollar, de modo empírico, todas las posibilidades que hoy nos demuestra la Teoría de Grupos Cristalográficos Planos, elaborada por cristalógrafos a partir del descubrimiento de los *rayos-X*. En un intento de divulgación, diré que hay *17 Grupos Cristalográficos Planos*[2]; son objetos matemáticos abstractos mediante los cuales pueden ser clasificados los mosaicos periódicos planos según su simetría.

Fueron Fedorov, Schoenflies y Barlow quienes descubrieron por separado que en dimensión 3 hay 230 grupos cristalográficos que dan explicación a la estructura de las materias cristalinas. G. Polya y P. Niggli, ya en nuestro siglo, demostraron la existencia de los 17 grupos de isometrías del plano. Desde entonces se ha comenzado la búsqueda, hecha por matemáticos, de decoraciones periódicas del plano en obras de arte de determinadas culturas que han destacado en estas realizaciones. La publicación de los resultados obtenidos por unos y otros han dado origen a controversias. Por ejemplo, H. Weyl asegura en su obra Simetría[16], considerada como un clásico en el tema, que las 17 posibilidades eran conocidas por los artesanos del "viejo" Egipto; Fejes-Tóth en *Regular Figures*[4], asegura que en la Alhambra de Granada hay una representación geométrica de cada uno de los 17 modelos posibles; ... por contra, B. Grünbaum[6], sostiene que los egipcios sólo utilizaron 12 posibilidades y que los constructores de la Alhambra llegaron a obtener 13 variantes. En 1985 se cerró definitivamente tal discusión publicando los resultados de una labor de búsqueda exhaustiva en el monumento[8] mostrando ejemplos de los grupos "ausentes". De este modo se descubre la existencia de una teoría ingenua de grupos en el diseño de decoraciones islámicas medievales ya que, sin conocerse el concepto matemático de grupo, se utilizaron las 17 estructuras básicas posibles para la creación de ciertos diseños simétricos planos, hoy en día interpretados como mosaicos periódicos. A esta etapa la denomino "*Prehistoria de la Teoría de Grupos*".

En efecto, en un deseo de manifestar con el lenguaje de la Geometría su creencia en la existencia de la Unidad (Allah) dentro de la multiplicidad, agotaron las estructuras geométricas planas posibles. Esta es la razón primera de la decoración geométrica de la Alhambra. Al existir la prohibición coránica de hacer figuraciones de Allah, se recurre a un lenguaje abstracto de formas geométricas para la decoración tanto en la arquitectura religiosa como en "la del poder", clase a la que pertenece la Alhambra. En ella se usa la llamada *tesela básica* (como unidad) que, utilizando nuestro lenguaje actual, es extendida a todo el plano mediante los elementos de simetría del grupo cristalográfico correspondiente. Haciendo uso del alicatado que se encuentra en los baños del Palacio de Comares, figura 2, y tomando su diseño básico (es decir, sin tener en cuenta el color), figura 3, podemos observar que hay una malla de triángulos equiláteros que le dan estructura, figura 4. Tomando un rombo como el que se muestra en la figura 5, se puede observar que si lo trasladamos por todo el plano, vamos generando el diseño del alicatado elegido; es decir, existe un paralelogramo tal que sus lados determinan las direcciones de dos traslaciones independientes con las que se puede generar el mosaico completo; se le llama región generatriz unidad. La región generatriz unidad está formada por un rombo resultado de unir dos triángulos equiláteros por uno de sus lados, ver figura 3. Los lados del rombo determinan las traslaciones más cortas, **a** y **b**, con las que se genera el subgrupo de traslaciones $\{nt_{\mathbf{a}}+mt_{\mathbf{b}};\ n \text{ y } m \text{ enteros}\}$ que caracteriza al grupo cristalográfico plano correspondiente. En su interior, podemos destacar la existencia de un tesela básica (in triángulo isósceles), ver figura 6, en la cual se encuentra el diseño mínimo necesario para

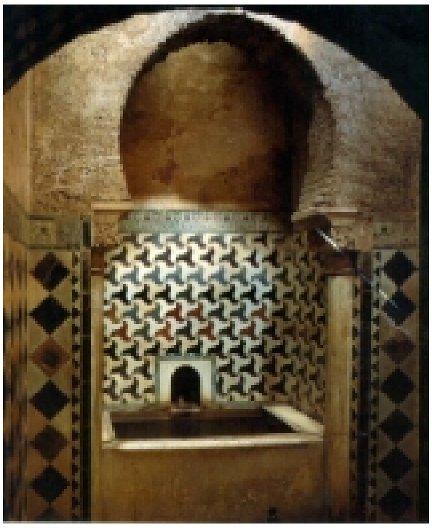


Figura 2

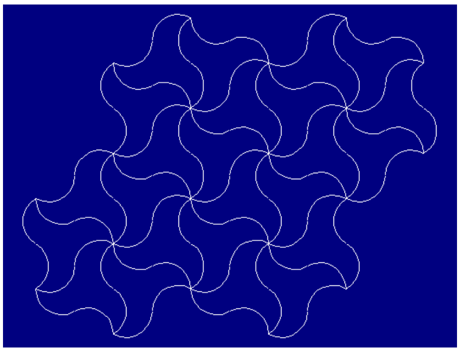


Figura 3

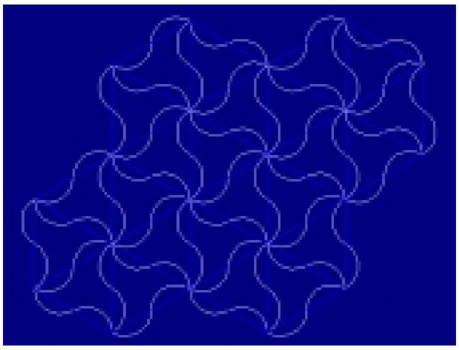


Figura 4

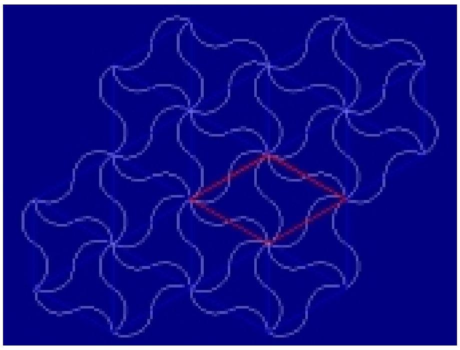


Figura 5

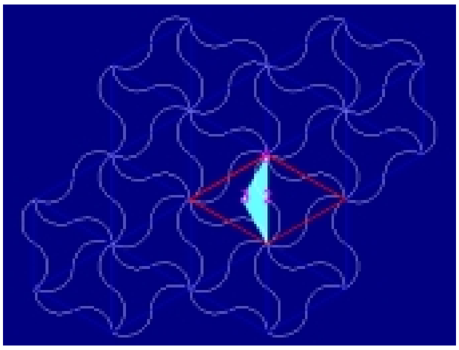
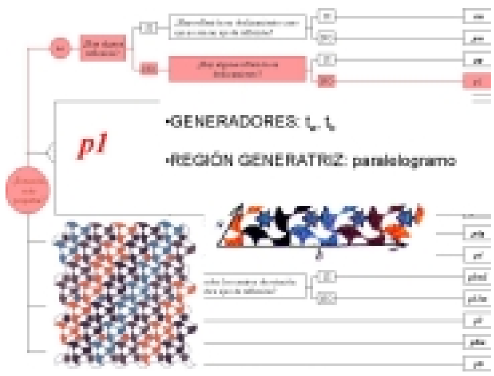


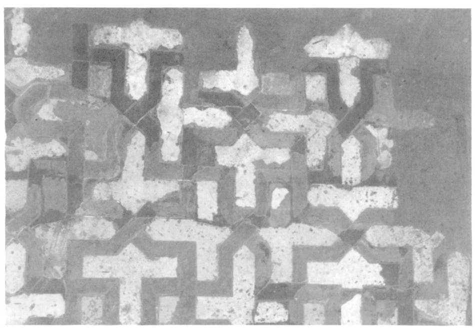
Figura 6

reproducir el mosaico completo (la multiplicidad) sometiéndola a las transformaciones del grupo cristalográfico plano del tipo **p6,** cuyos generadores pueden ser dos rotaciones de órdenes 2 y 3, respectivamente, y con distinto centro.

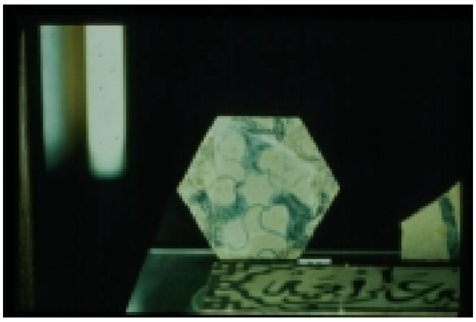
Teniendo en cuenta que los mosaicos estudiados son originales (es decir, que son de época nazarí), que las isometrías que actúan han de dejarlos globalmente invariantes teniendo en cuenta los colores (por ejemplo, si hay alicatados negros han de transformarse en otros también negros), las inscripciones, etc., que debe haber una región en la cual se vean suficientemente claras, al menos, dos traslaciones independientes de una región generatriz (la menor región generatriz es la región unidad), los 17 diseños periódicos planos de la Alhambra de Granada que se corresponden con los mismos grupos cristalográficos son los que se muestran a continuación indicando dónde están ubicados.



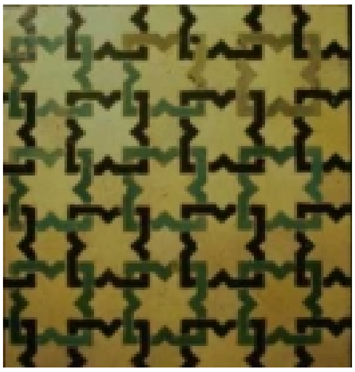
Palacio de Comares



Museo de la Alhambra

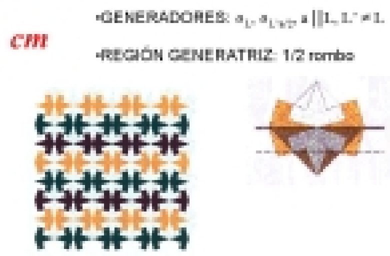


Museo de la Alhambra

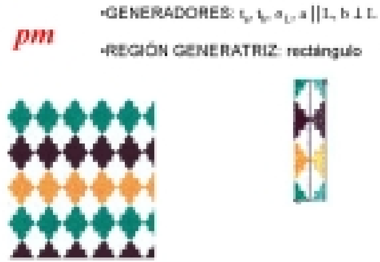


Museo de la Alhambra

Museo de la Alhambra

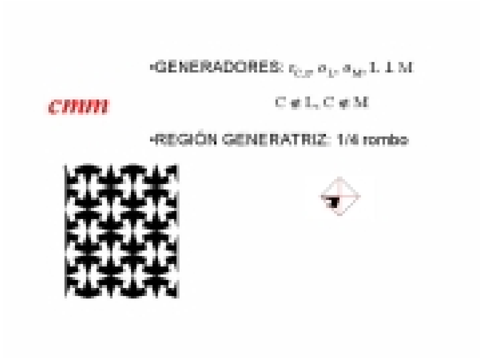


Museo de la Alhambra

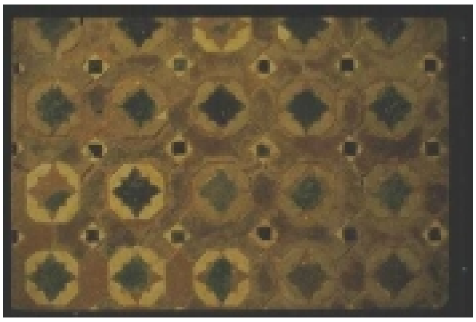


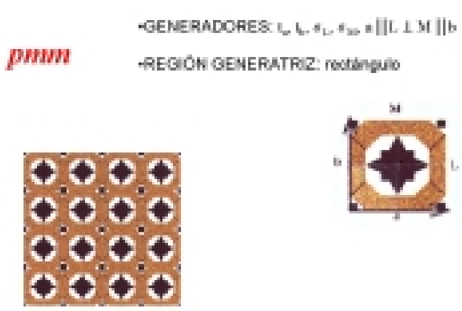
Museo de la Alhambra

Puerta del Vino

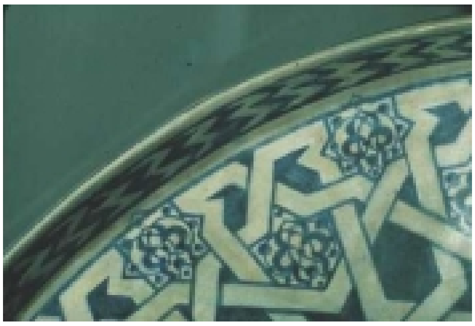


Palacio de Comares



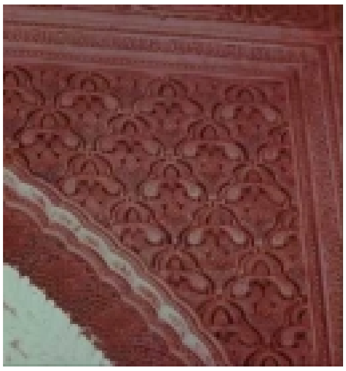


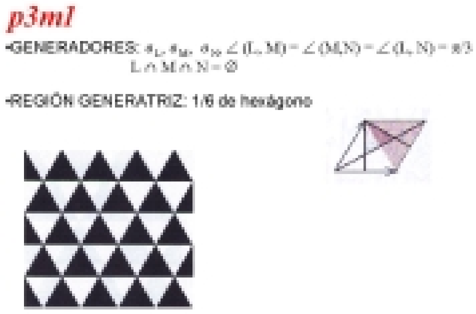
Museo de la Alhambra



Decoración de columnitas tanto del Palacio de Comares como del de Leones. La imagen pertenece a una fuente del Museo de la Alambra

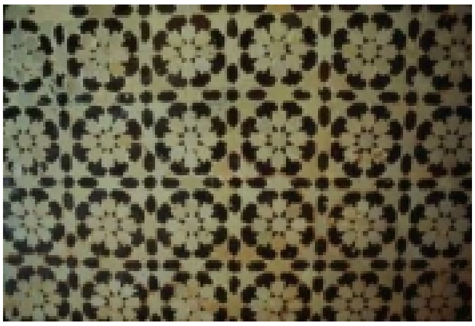
Puerta del Vino

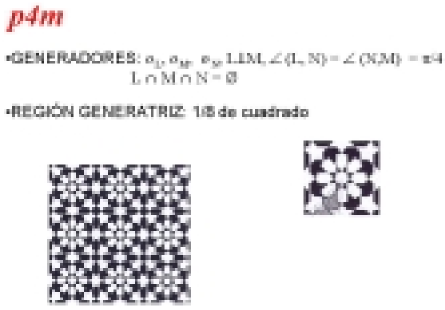




Palacio de los Leones

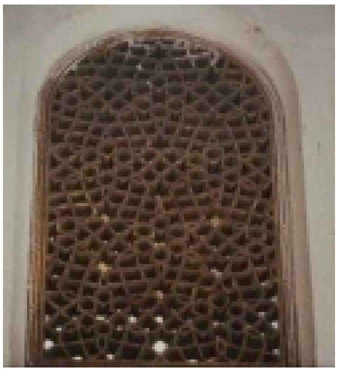
Puerta del Vino

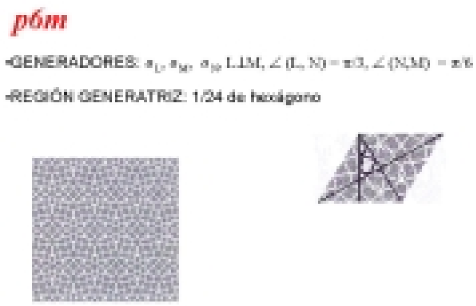




Torre de la Cutiva

Torre de la Cutiva





Palacio de Comares

Figura 7: Los 17 grupos

BLANCO, NEGRO Y SIMETRÍA

Hasta aquí llegaron aquellos granadinos medievales, pero ¿y si cambiamos el criterio de transformación del color mediante las isometrías? Ahora, una reflexión, por ejemplo, llevará una tesela blanca a otra igual pero negra; o, la reflexión mantendrá el color pero la rotación lo irá invirtiendo según vaya actuando; … ¿Obtendremos nuevas respuestas a nuestra pregunta?

Durante el siglo XIV se suceden en el trono del Reino de Granada Isma^{c}il I, su hijo Yusuf I y Muhammad V, hijo del anterior y nieto del primero. Aunque también reinara Muhammad IV entre los dos primeros, se deben los progresos constructivos de mayor esplendor en la Alhambra a los tres primeros. Bajo sus reinados se construyó el Palacio de Comares[9], a cuya decoración geométrica corresponde el mosaico que voy a analizar. Se trata del alicatado que se encuentra en el interior de las tacas enfrentadas del pasillo que comunica la Sala de la Barca con el Salón del Trono. Lo he elegido por razones estéticas, matemáticas y antropológicas. Su belleza salta a la vista, su interés matemático lo pondré de manifiesto en los párrafos que siguen, mientras que la tercera, y última, razón viene de la mano del significado de la simetría en distintas culturas. Simetría es equivalente de equilibrio, orden y, como consecuencia, de belleza. Muchos pueblos han asociado la existencia del concepto de equilibrio al enfrentamiento entre derecha e izquierda, bien y mal, luz y oscuridad, positivo y negativo ... blanco y negro. En la Alhambra coexisten desde su complementariedad, no desde su oposición, como recurso para generar belleza.

¿Qué puedo ver como matemático en él? La figura 8 reproduce su diseño básico -es decir, las líneas por las que se unen las teselas-. Podemos observar que hay una tesela básica (la unidad), ver figura 9, en la cual se encuentra el diseño mínimo necesario para reproducir el mosaico completo (la multiplicidad) sometiéndola a las transformaciones de un grupo cristalográfico plano, de tipo *p4g*, cuyos generadores pueden ser una rotación, de

Figura 8

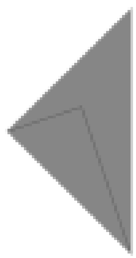


Figura 9

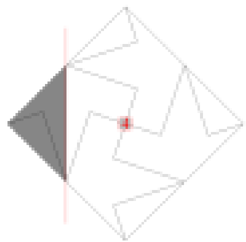


Figura 10

Figura 11

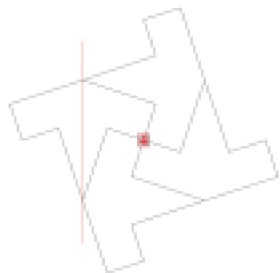


Figura 12

amplitud $\pi/2$ y centro C, y una reflexión a cuyo eje, L, no pertenezca C. La región unidad está formada por 8 teselas básicas y puede verse en la figura 10. Tanto la tesela básica como la región generatriz no son únicas. Las figuras 11 y 12 muestran otra tesela básica y la correspondiente región generatriz, respectivamente. Sin embargo, todas las teselas básicas tienen igual área.

Sin embargo, al considerar el color, dicho mosaico se clasifica como una realización asociada a un grupo de tipo *cmm*, cuyos generadores pueden ser un semigiro y dos reflexiones de ejes perpendiculares, a los que no pertenece el centro de rotación de orden 2. Una tesela básica y la región unidad correspondiente se muestran en las figuras 13 y 14.

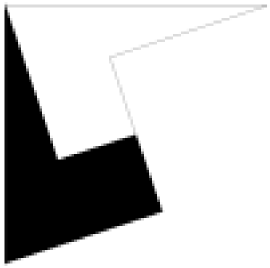


Figura 13

Figura 14

Las figuras 15 y 16 muestran todas las isometrías asociadas a los grupos *p4g* y *cmm*, respectivamente, apoyándonos en el mosaico elegido.

¡Fantástico!, ¿verdad? Sin embargo, ¿qué podría aportar el conocimiento matemático actual para crear de nuevo la decoración de la Alhambra? Es decir, ¿podrían ser diseñados sus mosaicos desde el conocimiento matemático actual? Sigamos con nuestro ejemplo para ver qué podríamos hacer.

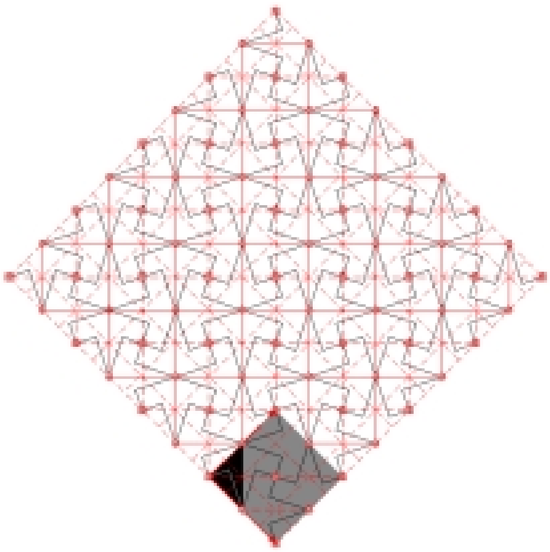


Figura 15

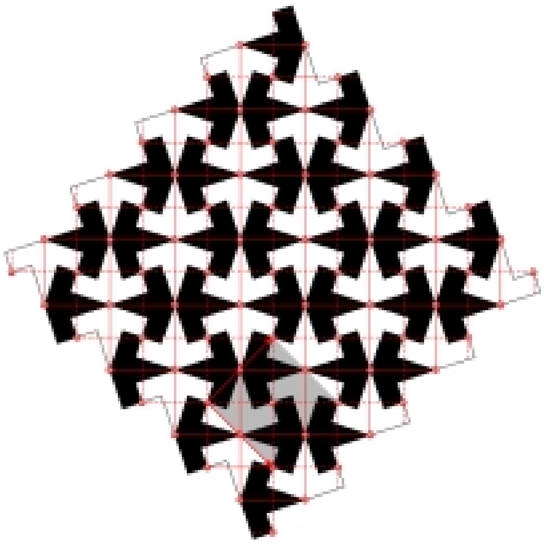


Figura 16

Para empezar, obsérvese que una tesela básica para el grupo *cmm* es el doble que una para el *p4g*, que el número de colores es 2 y que hay igual número de teselas blancas que de negras. Además, las simetrías del diseño básico aplicadas al mosaico bicolor actúan de dos formas diferentes. La reflexión generatriz aplica teselas blancas en blancas y negras en negras, y la rotación de orden 4 permuta los colores. Teniendo esto en cuenta, podemos colorear el diseño básico a partir de una tesela básica para el grupo *p4g*, que supondremos de color blanco, por ejemplo, y extenderemos este color haciendo uso de la reflexión generatriz a la tesela reflejada. Si sobre ambas teselas blancas aplicamos la rotación generatriz de orden 4, de tal modo que la imagen correspondiente sean dos teselas negras, y repetimos la transformación invirtiendo nuevamente los colores, obtenemos una región unidad coloreada, por igual, de blanco y negro. Si aplicamos las traslaciones a la región unidad que acabamos de colorear, manteniendo los colores, obtenemos el mosaico completo. La secuencia de imágenes 17, 18, 19 y 20, muestran el procedimiento seguido.

Parece que esto va bien. Mas… ¿podemos cambiar el papel de las isometrías en cuanto a mantener o permutar los colores? Veamos. Supongamos que la reflexión generatriz transforma la tesela básica blanca en otra tesela negra -es decir, permuta los colores- y la rotación de orden 4 actúa manteniendo el color. Las traslaciones extenderán la región unidad a todo el plano, manteniendo los colores. Obtenemos un mosaico[ii], diferente al anterior, asociado a un grupo de tipo *p4*. La secuencia de imágenes 21, 22, 23 y 24 muestran el procedimiento seguido.

[ii] No es un mosaico demasiado atractivo. Sobre todo por las esvásticas que pone al descubierto y que traen a la memoria imágenes que producen terror. No obstante, aprovecho la ocasión para recordar que los *triquetum*, las *esvásticas* y, en general, las llamadas *ruedas solares* han venido utilizándose en la decoración artística desde la cultura egipcia para representar, de modo abstracto, estrellas y planetas. Desgraciadamente, en la actualidad pueden tener para muchas personas otro significado que debemos repudiar.

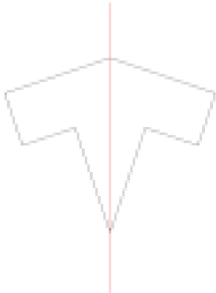


Figura 17

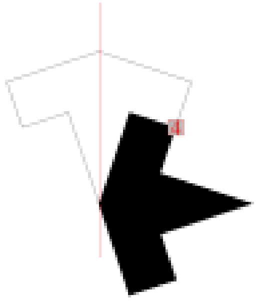


Figura 18

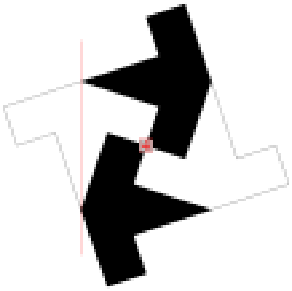


Figura 19

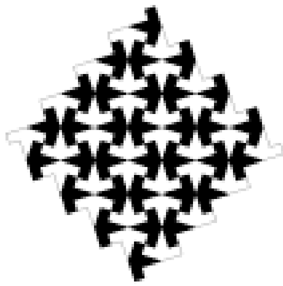


Figura 20

Figura 21

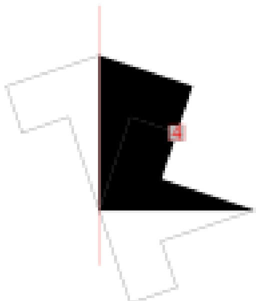


Figura 22

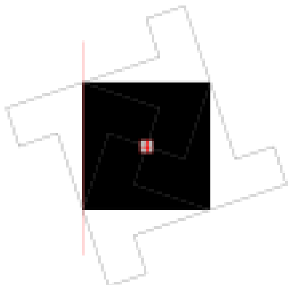


Figura 23

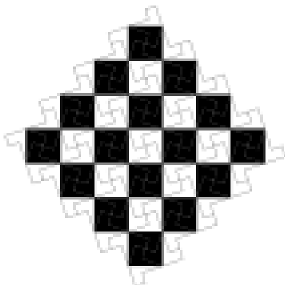


Figura 24

Esto empieza a cuadrar. Los *cmm* y *p4* pueden considerarse como subgrupos de índice 2 de un *p4g*. Hay un subgrupo más de índice 2 para un grupo de tipo *p4g*, el *pgg*. ¿Cómo hay que proceder para obtener un diseño periódico bicolor que posea las isometrías propias de este grupo? Si revisamos los procedimientos seguidos en los casos anteriores, vemos que aún queda un caso por construir. Ahora, las dos isometrías generadoras de un grupo de tipo *p4g*, la reflexión y la rotación de orden 4, van a permutar los colores entre sí. Únicamente las traslaciones los mantendrán extendiendo la región unidad por todo el plano. ¿Se obtendrá un diseño asociado a un grupo de tipo *pgg*? La respuesta es afirmativa, La secuencia de imágenes 25, 26, 27 y 28 muestran el procedimiento seguido.

Figura 25

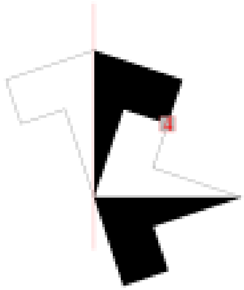


Figura 26

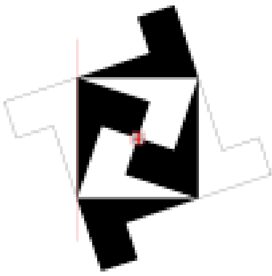


Figura 27

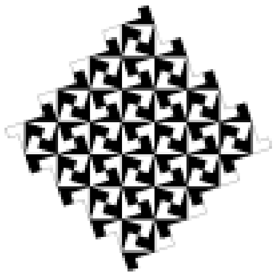


Figura 28

Al poder considerarse los grupos de tipo *cmm*, *p4* y *pgg* como subgrupos de índice 2 en uno de tipo *p4g*, y por ser normales, los grupos cocientes que pueden construirse -*p4g/cmm* , *p4g*/*p4* y *p4g*/*pgg*- son isomorfos al grupo de las permutaciones de orden 2, S_2. En suma, el orden de los tres grupos cociente es igual a 2, que coincide con el orden del grupo S_2 y con el número de colores empleados. Por tanto, si hoy hiciésemos una Alhambra, habría que incluir 46 mosaicos bicolor por ser este el número de grupos cociente posibles[17].

Si se somete un punto del plano a la acción de todas las isometrías de un grupo cristalográfico, se obtiene un conjunto de puntos que nombramos como órbita del punto por la acción del grupo. De este modo, para un mosaico dado, podemos clasificar sus puntos según que pertenezcan a una u otra órbita de las determinadas por el grupo cristalográfico asociado. Si pensamos acerca de los puntos de nuestro mosaico bicolor que pertenecen a una región generatriz, observamos que en su interior hay solamente un punto de cada una de las órbitas de un punto perteneciente a la tesela básica asociada por la acción de un grupo de tipo *cmm* y que, sin embargo, sí hay puntos equivalentes (es decir, de la misma órbita) en la frontera. ¿Qué se obtiene si los identificamos? Fotocopié la región generatriz "deformada" (no es necesario deformar nada, lo hago sólo para facilitar la manipulación posterior), figura 29, para que se recorte por su borde y se haga coincidir, por superposición, los puntos equivalentes que están señalados sobre la frontera. La superficie obtenida es una *Cinta de Moëbius*, también llamada *calidoscopio* de un grupo de tipo *cmm* por extensión de la idea usual de tal instrumento, ya que si se le aplican las simetrías del grupo completo, se reproducirá el mosaico periódico bicolor de la Alhambra de Granada por lo que podríamos incorporarle, también desde nuestro conocimiento actual, esculturas geométricas como las que realizadas en nuestros días por artistas como John Robinson[12].

¿Qué sucedería si se usan más de dos colores?, ¿han de intervenir siempre en idéntica proporción? ¿Y si el plano no es el euclídeo? (Pueden verse resultados generales sobre los aspectos anteriores relacionados con la *Simetría del Color* en [10 y 11] y en [5]).

En todo caso, como sucede con la Alhambra, hay cosas irrepetibles.

Figura 29

EPÍLOGO

Después de cinco siglos, los mosaicos de la Alhambra sirven para que artistas de la talla de Gaudí, Escher, Robinson, Falla, Debussy, ... que se inspiraron en ella para crear parte de su arte. Están sirviendo también para que los estudiantes de Matemáticas del mundo entero tengan los más bellos ejemplos de objetos tan abstractos como son los grupos o superficies, elementos del Álgebra o Geometría Diferencial que cobran vida. ¡Impresionante! Pero, ¿qué Alhambra podrían hacer hoy nuestros actuales "tracistas"? Si pensamos que en la Puerta del Vino hay un *botella de Klein*, alguien puede pensar que Klein la habrá dejado olvidada; igual sucede con las *cintas de Moëbius* de las tacas que hay a la entrada del Salón del Trono; pero oír que en los baños de Comares hay una *esfera topológica,* puede extrañar a muchos. ¿Se imagina estos objetos matemáticos? ¿Tienen interés para la Arquitectura y el Diseño? Con las nuevas geometrías y herramientas de nuestro siglo, mucho puede aportarse al mundo del Arte, en general.

Será esta una puerta abierta por la que seguimos avanzando y ofreciendo "nuevas" visiones de la Alhambra. También desde las Matemáticas se puede acceder a disfrutar de la belleza, ya que, según palabras de A.E. Pérez Sánchez, "*es intuida por todo el mundo, y se goza, pero siempre se desea alcanzar un nivel que la simple visión ingenua no alcanza. El espectador sensible quiere aprender a mirar; quiere recorrer –con alguien primero, solo después- el largo camino que el arte le sugiere*".

Referencias

[1] Alsina Catalá, C.; Pérez Gómez, R. y Ruiz Garrido, C. *Simetría Dinámica*, Ed. Síntesis, Madrid (1989).

[2] Bossard, Y. *Rosaces, frises et pavages* (vol. 1 y 2), Ed. CEDIC, París (1979).

[3] Al-Daffa, A.A. and Stroyls, J.J. *Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam*, Ed. Wiley and Sons (1984).

[4] Fejes-Toth, L. *Regular Figures*, Ed. Pergamon Press, New York (1964).

[5] Gámez, D.; Pasadas, M.; Pérez Gómez, R. y Ruiz, C. Hyperbolic plane tesselations, Actas de las VI Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística (1999).

[6] Grünbaum, B. and Shephard, G.C. *Tilings and patterns*, Freeman, San Francisco (1984).

Symmetry in Morís and other ornaments, Comp. and Maths. with Appls., 12B (1986), pp. 641-653.
[7] Montesinos Amilibia, J.Mª. Caleidoscopios en la Alhambra, Ed. Real Academia de Ciencias, Serie de Ciencias Exactas, Tomo XXIII, Madrid (1987).
[8] Pérez Gómez, R. The four regular mosaics missing in The Alhambra, Comp. and Math. with Appls., 14, 2 (1987), pp. 133-137.
[9] Pérez Gómez, R. *et al*. *Vivo la Alhambra*, Ed. Proyecto Sur de Ediciones, Granada (2004).
[10] Pérez Gómez, R. y Ruiz, C. Chromatics plane compositions, Visual Mathematics, http://wwwmi.sanu.ac.yu/vismath/ (1999).
[11] Pérez Gómez, R. y Ruiz, C. Methods of colouring perfectly, Visual Mathematics, http://wwwmi.sanu.ac.yu/vismath/ (1999).
[12] Robinson, J. *Symbolic Sculpture*, Edition Limitee (1992).
[13] Senechal, M. Color groups, Discete Appl. Math., 1 (1979), pp. 51-73.
[14] Colour Symmetry, Bull. London Math. Soc., 16 (1984), pp. 209-240.
[15] Sánchez Pérez, J. *Biografías de Matemáticos Árabes que florecieron en España*. Ed. Real Academia de las Ciencias, Madrid (1921).
Ed. facsímil con estudio liminar de Pérez Gómez, El Legado Andalusí (1995).
[16] Weyl, H. *La Simetría*. Princeton University Press (1952). *Symmetry*, Princeton University Press (1980).
[17] Wieting, T.W. *The mathematical theory of chromatic plane ornaments*, Marcel Dekker (1982).

From the VLT to ALMA to OWL. Frontline Astronomy and the schools

Richard M. West

European Southern Observatory (ESO)

Astronomy and Astrophysics have undergone a dramatic development during the past years. Now, at the beginning of the 21st century, several new observational facilities with unequalled power are opening up entirely new vistas. Still, the astronomers are already planning for even more advanced telescopes and instruments.

Since its creation in 1962, the European Southern Observatory (ESO) has come to play an increasingly important role in European Astronomy and Astrophysics. As the prime intergovernmental organisation in this wide research area on the continent, ESO is supported by eleven member countries and others, including Spain, have expressed interest in joining.

ESO's Very Large Telescope (VLT) and the associated VLT Interferometer (VLTI) at the Paranal Observatory (Chile) is the undisputed flagship among ground-based astronomical installations. A large number of front-line investigations are being carried out with these telescopes, resulting in many new, exciting discoveries.

ESO is also leading the European partnership in the Atacama Large Millimeter Array (ALMA), a major joint North American/European project that has begun to place sixty-four 12-metre antennae, sensitive to (sub-)millimeter radio radiation, on the high-altitude Chajnantor plateau in the Chilean Andes mountains. When this unique facility gradually enters into operation in 2007-2012, it will allow observations of the remotest and earliest galaxies and provide direct views of the formation of planets in gas and dust disks around young stars.

Planning further into the future, ESO is carrying out concept studies for an extremely large telescope (“OWL”) with a 100-metre main mirror made up of 2-3000 segments. Detailed engineering studies indicate that it could be constructed within a time frame of less than 15 years at a cost of 1 billion €. This visionary facility will signify a true revolution in observational astrophysics, as dramatic as when Galileo first pointed his telescope to the heavens, four hundred years ago.

All of these facilities have a great educational potential. Together with secondary school teachers, and in collaboration with the European Association for Astronomy Education (EAAE), the ESO Educational Office is investing considerable efforts to bring Europe's top astronomical science into Europe's schools, with the aim of stimulating physics education by making “real research and real scientists” directly accessible to young people and their teachers.

Del VLT al ALMA y al OWL. Astronomía puntera en las escuelas

Richard M. West

European Southern Observatory (ESO)

En los últimos años la Astronomía y la Astrofísica han tenido un desarrollo espectacular. Ahora, a principios del siglo XXI, diversos nuevos instrumentos de observación con una potencia sin igual están abriendo nuevas perspectivas. Y aún más, los astrónomos incluso ya están planeando más avanzados telescopios e instrumentos.

Desde su creación en 1962, el European Southern Observatory (ESO) ha venido jugando un papel creciente en importancia en la Astronomía y la Astrofísica europea. Como la primera organización intergubernamental en el continente dentro de esta amplia área de investigación, ESO cuenta con el respaldo de 11 estados miembros y otros, incluyendo a España, han expresado su interés en incorporarse.

El Very Large Telescope (VLT) y el VLT Interferometer (VLTI) asociado del observatorio del Paranal (Chile) es el indiscutido estandarte de entre las instalaciones astronómicas terrestres. Un gran número de investigaciones de primera línea están siendo desarrolladas con estos telescopios, dando lugar a un buen número de nuevos y apasionantes descubrimientos.

ESO también esta liderando la participación europea en el Atacama Large Millimeter Array (ALMA), el mayor proyecto conjunto Norte Americano / Europeo que ha empezado a instalar sesenta y cuatro antenas de 12 metros, sensibles a radiaciones radio submilimétricas, en el altiplano de Chajnantor en los Andes chilenos. Cuando este instrumento único entre gradualmente en funcionamiento en 2007-2012, permitirá observaciones de las galaxias más remotas y las más jóvenes y proporcionará imágenes directas de la formación de los planetas en los discos de gas y polvo alrededor de las estrellas jóvenes.

Además pensando en el futuro, ESO esta desarrollando estudios preliminares para un telescopio extremadamente grande (OWL) con un espejo principal de 100 m constituido por 2-3000 segmentos. Estudios detallados de ingeniería indican que podría ser construido en menos de 15 años con un coste de mil millones de euros. Este fantástico instrumento significará una verdadera revolución en la Astrofísica observacional, tan espectacular como cuando Galileo dirigió por primera vez su telescopio hacia el firmamento, hace cuatrocientos años.

Todos estos instrumentos tienen un gran potencial educativo. Junto con profesores de secundaria, y en colaboración con la European Association for Astronomy Education (EAAE), la Oficina de Educación de ESO esta invirtiendo considerables esfuerzos en llevar la Astronomía de vanguardia a las escuelas de Europea, con el objetivo de estimular la formación en Física mediante “investigaciones reales de científicos reales” directamente accesibles a la juventud y a sus profesores.